Ecuacion Matriciales

Ecuación donde la incognita es una matriz

$$XP = Q - R$$

$$X \underbrace{P\cancel{R}^{-1}}_{I_n} = (Q-R)P^{-1}$$

$$XI_n = (Q-R)P^{-1}$$

$$X = (Q-R)P^{-1}$$

$$P + Q\underline{X} = RS - T\underline{X}$$

$$\underbrace{QX + TX} = RS - P$$

$$(Q+T)X = RS - P$$

$$\cancel{(Q+T)^{-1}(Q+T)}X = (RS-P)(Q+T)^{-1}$$

$$XI_n = (RS-P)(Q+T)^{-1}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistemas de m ecuaciones con n incognita

siendo el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Incognitas : $x_1, x_2 \dots x_n$
- Coeficientes del sistema $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2 \dots m$, $j = 1, 2 \dots n$
- Terminos Independientes : $b_1, b_2 \dots b_m$

Sistema homogeneo $b_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots m$ → Siempre son compatibles con almenos la solucion trivial $(0, 0, 0 \dots 0)$

FORMA MATRICIAL

$$AX = B \to A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{nm} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

MATRIZ AMPLIADA

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Solucion de un Siste-a

Conjunto de n valores $s_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2 \ldots n$ tales que al sustituir $x_i = s_i$ cada una de las m ecuaciones se convierten en identidades

→ Numero Soluciones:

Sistema compatible:

Determinado $= 1$

Indeterminado $= \infty$

Siste-a inco-patible $= 0$

TEOREMA ROUCHÉ - FROBENIUS

$AX=B$ es compatible si y solo si:

$$rg(A) = rg(A|B) = r$$

Si:

$r=n$ sistema determinado

$r<n$ sistema indeterminado

$rg(A) < rg(A|B)$ entonces el sistema es INCOMPATIBLE

SISTEMAS EQUIVALENTES

Sistemas equivalentes $AX = B$ y $A'X = B$ si tienen el mismo conjunto de soluciones

Rangos con python

```
A = np.array ([[1, 1, 2], [2, 4, -3], [3, 6, -5]])
B = np.array ([9], [1], [0])
AB = np.concatenate ((A, B), axis = 1)
np.linalg.matrix_rank (A)
np.linalg.matrix_rank (A, B)
```

$$\left.\begin{array}{l}\text{np.linalg.matrix\_rank (A)}\\ \text{np.linalg.matrix\_rank (A, B)}\end{array}\right\} 3$$

$$(A|B) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$\Downarrow$ GAUS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ +2x_2 - 7x_3 = -17 \\ -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

$x_3 = 3$

$2x_2 - 21 = -17$

$x_2 = 2$

$x_1 + 2 + 6 = 9$

$x_2 = 1$

Sistema de solución única

$S = (1, 2, 3)$

SISTEMA COMP $\underline{\underline{\text{INDETERMINADO}}}$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ y + z + t = 1 \\ 2t = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{2}}$$

$$y + z + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} - z}$$

$$x + 2\left(\frac{1}{2} - z\right) + z + \frac{1}{2} = 0 \qquad \boxed{x = z - \frac{3}{2}}$$