# Determinante de una matriz cuadrada

$A \in \mathcal{M}_n (\mathbb{K})$

Determinante de $A \rightarrow \det(A)$ ó $|A|$

Se define

▷ Si $n=1$, $A=(a_{11})$ entonces el determinante es

esc $a_{11}$

▷ Si $n>1$: $\det(A) = \overbrace{a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + \dots + (-1)^{n-1} a_{1n}\alpha_{1n}}^{\text{La suma y resta se va alternando}}$

donde $\alpha_{1i}$ es el determinante de la matriz de orden $n-1$ que se obtiene al suprimir la primera fila y la columna $i$ de $A$

Como alcular el determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \det(a_{22}) = a_{22}$$

$$\alpha_{12} = \det(a_{21}) = a_{21}$$

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$$

$$\alpha_{11} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\alpha_{12} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & 23 \\ 31 & 33 \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

$$\alpha_{13} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Determinantes

$\forall n \geq 1$

$\det(A^t) = \det(A)$

## Propiedades de los determinantes

- Los escalares pueden salir del determinante

$\det(v_1 \dots, v_i \dots, v_n) = \det(A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$

$\det(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1 \dots v_i \dots v_n)$

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 \\ 4 & \boxed{4} & 2 \\ 10 & \boxed{4} & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Det $d_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0+3 & -1 \\ 2 & 2+2 & 3 \\ 0 & 3+1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

- Si una matriz tiene 2 filas o columnas son iguales el determinante es 0

Así mismo si tiene 2 filas o columnas proporcionales, también es 0.

# PROPIEDADES

- Si una fila o columna es combinacion lineal de otras el determinante es nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Si una fila o columna es una combinación lineal de las otras det = 0

- El det no cambia si a una fila o columna le sumamos la combinacion lineal del resto

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$c_1 + c_2 + c_3$

# Adjunto y menor complementario

1. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $n \geq 2$

2. Nos cargamos la fila $i$ y la columna $j$

Así obtenemos matriz de orden $n-1$

Menor complementario de $a_{ij}$ es el determinante de la matriz de orden $n-1$ que designamos como $\alpha_{ij}$

Adjunto: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ es el adjunto de $a_{ij}$

Si $i+j$ par adjunto $\Rightarrow \alpha_{ij}$

Si $i+j$ impar adjunto $\Rightarrow -\alpha_{ij}$

Matriz Adjunta de $A$: Matriz del mismo orden a la original que tiene como coeficientes los adjuntos $A_{ij}$ de cada $a_{ij}$ de la original $Adj(A)$

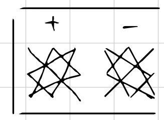
# Matriz Adjunta Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}(A) \quad \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ -15 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

# CALCULOS DETERMINANTES

SARRUS




$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad n \geq 1$$

$$\det(A) = a_{i1}\overbrace{A_{i1}}^{\text{Menor determinante}} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

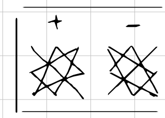
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \overset{\text{par } 11}{+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{inpar } 12}{-(-1)}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{par } 13}{+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -(-1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-10) + 0 + 1\cdot(-10) = -20$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 40|10| = 400$$

SARRUS




# Matriz Inversa con determinantes

Siendo A, B matrices cuadradas n, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- A es invertible si $\det(A) \neq 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ → Si cualquiera de las dos = 0 no será invertible
- $\det(A) \neq 0$ entonces:

▷ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

▷ $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^t}{\det(A)}$

Ej

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 4 \neq 0$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{transpone}} \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 10 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

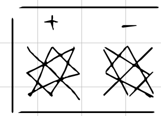
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (Adj(A))^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 10 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 2/4 & -3/4 \\ 5/2 & 2/4 & -5/4 \\ 3/2 & 2/4 & -3/4 \end{pmatrix}$$

CON UN ORDENADOR NO RENTA

PUESTO QUE CRECE DE MANERA EXPONENCIAL

# Aplicaciones Rango Determinantes

SARRUS




$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $k < m, n$

## Menor de orden k de A

Determinante obtenido suprimiendo $m-k$ filas y $n-k$ columnas

## Orlar un menor de orden k

completarlo hasta un menor de orden $k+1$

## Calculo rango

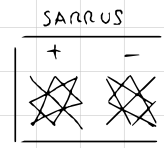
Si se puede

- Menor de orden $k$ no nulo
- Todo $k+1 = 0$

Entonces $rg(A) = k$

Si el determinante [illegible] grado [illegible] de la matriz A es de orden $K$ entonces $rg(A) = k$

Ejemplo rango




$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

El mayor menor de $A$ es de orden 3 tiene $5 \cdot 3 = 10$ menores de orden 3

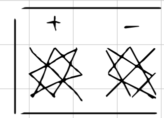
Check de si alguno no es nulo

$$(c_1, c_2, c_3) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Dado que no es nulo concluimos que la matriz es rango 3.

# Ejemplo rango 4

SARRUS




$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow rg = \boxed{2}$$

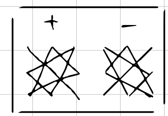
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 + 2 - 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 12 - 4 + 8 = 0$$

# Regla de Cramer

SARRUS




$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

$A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$A_i$ = matriz resultante de sustituir columna $i$ por los determinantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

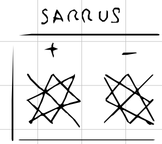
$\det(A) = 1$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 0$$

# Ejercicio Regla Cramer




$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$0 - 1 + 1 - 0 - 0 - (-1) = 1$$

$$|A| = 1$$

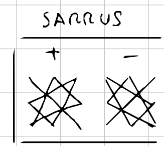
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \beta & 0 & 1 \\ \gamma & -1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 1\gamma - 1\beta - (+1\alpha) = x_2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ -1 & \beta & 1 \\ -1 & \gamma & 0 \end{vmatrix}}{1} = - - 1\alpha - 1\gamma - (-1\beta) - 1\gamma$$

$$-2\gamma - 1\alpha + 1\beta = x_2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ -1 & 0 & \beta \\ -1 & -1 & \gamma \end{vmatrix}}{1} = \alpha + \gamma$$

# Crammer para compatibles indeterminados




- Incognitas principales: involucrados en la submatriz
- Incognitas secundarias: no principales

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1° col es doble de la segunda por lo que

$$\det(A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \qquad \boxed{rg(A) = 2}$$

Incognitas principales $y$ & $z$ ya que la 1ª la eliminamos para adul.- el rango 2

$$\begin{cases} 6y + 8z = 1 - 12x \\ 2y + 4z = 2 - 4x \end{cases}$$

$$y = -2x - \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{5}{4}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ -2x - \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

# Sistemas dependientes de parametros