Espacio Vectorial(es)

Conjunto E <u>no vacío</u> sobre un cuerpo <u>conmutativo</u> $\mathbb{K}$ con las siguientes operaciones

Composición interna

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \Rightarrow \vec{x}, \vec{y} \in E$$

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ - conmutativa
- $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ - asociativa
- $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ - neutro suma
- $-\vec{x} + \vec{x} = 0$ - opuesto

Composición externa

$$\forall \vec{x} = E, \alpha \in \mathbb{K} \to \alpha \vec{x} \in E$$

- $\alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha \beta) \vec{x}$ → asociativa
- $\vec{1} \vec{x} = \vec{x}$ - neutro producto
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}$
- $(\alpha + \beta) \vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}$

} distributiva

Espacios Vectoriales - E

Vectores. Nombre de los elementos de E

Escalares. Elementos de $\mathbb{K}$

Hay 2 sumas y 2 productos
para escalares y vectores

$(\alpha + \beta)$ $(\vec{x} + \vec{y})$

$(\alpha \circ \beta)$ $(\vec{x} \circ \vec{y})$

Ejemplos Espacios Vectoriales

$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad x = \vec{0}$ o $\lambda = 0$

$(-\lambda) \vec{x} = -(\lambda \cdot \vec{x})$

4.1 Subespacios Vectoriales

F subespacio dentro de E

$F \subseteq E$

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$

$\forall \alpha, \vec{x} \in F \Rightarrow \alpha \vec{x} \in F$

Sigue todas las propiedades de los espacios vectoriales

$\vec{0} \in F$

$\vec{x} \in F$ entonces $-\vec{x} \in F$

F es un $\mathbb{K}$ espacio vecto

$a\vec{x} + b\vec{y} \in F \quad \forall a, b \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in F$

$\sum a_i x_i \in F$

$\bigcap_{i \in I} F_i \Rightarrow$ Intersección F_i es el subespacio vecto mas grande dentro de i

$\sum_{i=1}^{n} F_i \Rightarrow$ Es el mas pequeño

SUBESPACIOS — SUMA DIRECTA

$F, G \in E \in \mathbb{K}$

$F + G$ no tiene porque ser unica

Suma Directa. $F \oplus G$

Si cada elemento del subespacio suma se escribe de manera unica forma

Complementarios en E si $F \oplus G = E$

Proposicion. La suma es directa solo si:

$$F \cap G = \{0\}$$

Interseccion

Ej.

$F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$F + G = \mathbb{R}^2 \rightarrow F \cap G = \{0\}$

$F \oplus G = \mathbb{R}^2$

Subespacio Vectorial generado por S

- Subespacio más pequeño que contiene a S, se denota como $\langle S \rangle$

$$\langle S \rangle = \underbrace{\bigcap_{S \subseteq F} F}$$

Intersección de todos los F donde F es un subespacio vectorial de S.

Otra definición es

$$\forall \vec{v} \in F, \exists \alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \vec{v} = \sum_{i=n}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$$

$$\langle S \rangle = \{ \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n \mid n \in \mathbb{Z}^+; x_i \in S; \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1 \dots n \}$$

Dependencia Lineal

Combinación Lineal.

Cuando al añadir un vector no incrementa el Span se le llama "Linearly dependent).
En caso de añadir al span se les llama linearly independent

Dados p vectores

$\vec{u}_1 \dots \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ y escalares

$\alpha_1 \dots \alpha_p \in \mathbb{K}$

una combinación Lineal es:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$$

Ej: $(2,-4)$ como combinacion lineal de $(1,1)$ $(-2,0)$

$\alpha(1,1) + \beta(-2,0)$

$$\begin{cases} 1\alpha + (-2)\beta = 2 \\ 1\alpha + \beta \cdot 0 = -4 \end{cases}$$

$\alpha = -4 \quad \beta = -3$

$2 = -4 + (-2)\beta \to 2\beta = -6 \ldots$

Definicion.

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$ otra def $$\exists 1 \leq i \leq p : \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

Independencia Lineal

Unica solucion es la solución trivial (0)

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$

si

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$ unica solución $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1 \dots p$

$S \neq \emptyset$, $S \subseteq E$ finito o no, diremos que S es linealmente independiente si cualquier conjunto finito de S lo es

Dependencia e Independencia Lineal

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

Ej 11.

$E \in \mathbb{K}$ $\quad x_1 \cdots x_n \in E$

demostrar combinación lineal

Ej .12

$S \subseteq E$ linealmente independiente

Si $u \notin \langle S \rangle \to S \cup \{u\}$ es linealmente independiente

Ejemplos

$x \in E$ L.I. $\iff x \neq 0$

ya que el 0 siempre es dependiente.

$\{\alpha(1,0,1)\beta(0,1,1),\gamma(-1,1,2)\}$

$$\begin{cases} \alpha 1 + \beta 0 + \gamma -1 = 0 \\ \alpha 0 + \beta 1 + \gamma 1 = 0 \\ \alpha -1 + \beta -1 + \gamma 2 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \to \text{Linealmente independiente}$$

Bases de Espacios Vectoriales

Base de E. conjunto de vectores $u_1 \dots u_n \in E$

son base de E si:

- es un sistema generador
- son linealmente independientes

Teorema. $E \in \mathbb{K}$ e.v y $\beta \subseteq E$

todo vector de E $(\vec{u} \in E)$ se puede

expresar de manera unica como una combinación

lineal $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n \in \beta$

uno y solo uno

$$\forall \vec{u} \in E, \exists! \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K} : \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$$

$u_1, \dots u_n \in \beta$

Si una base de E tiene n elementos y es finita todo el resto de bases de E serán finitas y tendrán n elementos.

Tip: Buscar la base canonica (la mas sencilla) para facilitar la vida. Ej en $\mathbb{R}$ las bases canonicas son $(0,1)$ y $(1,0)$

Dimension de un espacio vectorial

E de dimension finita.

$E \neq \{0\} \in \mathbb{K}$ e.v.

si $n \in \mathbb{Z}^+$ y una base de E formada

por n vectores.

Dimensión de E.

numero de n vectores $\rightarrow \dim(E)$

* Si $E = \{0\}$ decimos que $\dim(E) = 0$

Ej:

$\dim(\mathbb{K}^n) = n$

$\dim(\mathbb{K}_n[x] = n+1$

$\dim(\mathbb{K}[x]) = +\infty$

$\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = m \times n$

En ocasiones tendremos que hablar de dimensiones sobre un espacio vectorial

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = +\infty \\ \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1 \end{cases}$$

Bases de un espacio vectorial

Proposición.

$E \in \mathbb{K}$ e.v dimension finita y $B = \{u_1 \dots u_n\}$

1. $v_1, \dots v_n$ son L.I son base E

2. Si $v_1 \dots v_n$ generan ... E son base E

3. Dimension E coincide con el maximo numero de vectores LI y con el minimo numero de generadores

4. Todo conjunto de $\vec{v}$ L.I. de E se puede completar hasta una base de E

5. $F \in$ sub ev. $E \Rightarrow F$ tiene tambien dimension finita.

$$\dim(F) < \dim(E)$$

$$\dim(F) = \dim(E) \text{ solo si } F = E$$

Corolario.

$E \in \mathbb{K}$-e.v $\Rightarrow$ es dimension infinita solo si podemos encontrar conjunto $\vec{v}$ LI de cardinal finito tan grande como queramos

Ejemblo Dimensiones

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

$$(x, x+z, z) = x\cdot(1,1,0) + z\cdot(0,1,1)$$

Formula de Grassmann

$E \in \mathbb{K}$-ev $\qquad F, G \in E$-s.e.v

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$$

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

F, G son complementarios $(E = F \oplus G$

$F \cap G = \{0\}$

$E \in \mathbb{K}$ e.v finito, todo $F \in E$ sube.v tiene

al menos un complemento.

Demostración: Ej 19 y 20

Espacio Vectorial Producto

$E, F \in \mathbb{K}$ e.v $\Rightarrow E \times F$

$u \in E$
$v \in F$

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$$

$$\alpha \cdot (u, v) = (\alpha \cdot u, \alpha \cdot v)$$

Donde $u, u' \in E$, $v, v' \in F$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

$(E \times F, +, \cdot)$ Espacio vectorial producto

o

Espacio vectorial suma directa

o

$E \oplus F \rightarrow E, F \in \mathbb{K}$ e.v

Diferencia entre suma directa de E.V y Sub E.V

Suma directa sub E.V.

$$F \oplus G = \{ z \in E \mid z = x + y \text{ para ciertos } x \in F,\ y \in G \}$$

Suma directa como $\mathbb{K}$-espacios vectoriales

$$F \oplus G = \{ (x, y) \mid x \in F, y \in G \}$$

Definicion Espacio Vectorial Producto

Sean $E_1 \dots E_n$ $\mathbb{K}$-e.v

$$E_1 \oplus \dots \oplus E_n = \{(\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n) \mid \vec{u}_i \in E_i \text{ para } i, \dots n\}$$

donde $\vec{u}_i, \vec{v}_i \in E_i, \forall i = 1, \dots, n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}$$

Si E, F son de dimension finita $E \oplus F$ tambien lo es,

$$\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F)$$

Si todos E_i son finitos en $\dim(E_i) = n_i \ \forall i = 1 \dots n$ entonces $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ tambien es finito y se cumple

$$\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

Espacio Vectorial Cociente

Relación modulo F

en $\Rightarrow F \in E$ sub E.V $\in \mathbb{K}$ E.V

$$x \sim_F y \Leftrightarrow x - y \in F$$

Propiedades.

- Reflexiva: $\forall x \in E$ $\quad x \sim_F x \quad x - x = 0 \in F$
- Simetrica $\forall x, y \in E$ $\quad x \sim_F y \quad x - y \in F$ por lo que su opuesto $y \sim_F x \quad y - x \in F$

Transitiva: Si tenemos $x, y, z \in E$ $\quad x \sim_F y$ y $y \sim_F z$ entonces $x - y, y - z \in F$ por lo que su suma también

$$x - y,\ y - z \in F$$

$$(x - y) + (y - z) = x - z \in F \Leftrightarrow x \sim_F z$$

ESPACIO VECTORIAL COCIENTE

Clase de equivalencia modulo F.

$[x]_F$ - Todos los elementos del espacio vectorial E que se relacionan con el

$$[x]_F = \{ y \in E \mid y \sim_F x \} = \{ y \in E \mid y - x = z \in F \}$$

$$\{ y \in E \mid y = x z,\ z \in F \} = \{ x + z \mid z \in F \}$$

$= x + F$ ← Esto es solo una anotación.

Clase del 0

$$[0]_F = 0 + F$$

Variedad Lineal

Suma de un Vector + un espacio vectorial

$$E / F = \{ [x]_F \mid x \in E \}$$

$$[u]_F + [v]_F = [u + v]_F$$

$$\alpha \cdot [u]_F = [\alpha \cdot u]_F$$

* $\dim(E/F) = \dim(F)$ (E)

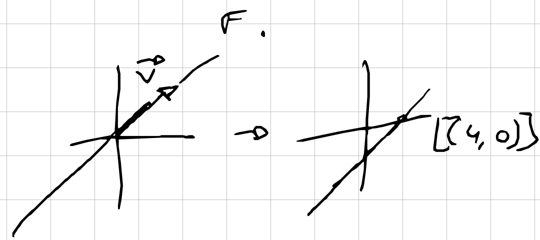
Ejemplo de espacio vectorial cociente

F sub ev de E

$$E/F = \{ [x]_\sim \quad x \in E \} \quad x \sim y \iff x - y \in F$$

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$ ev

$F = \langle v \rangle \quad v \in \mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^2/F$

$$[(a,b)] = (a,b) + F = \{ (a,b) + \lambda \vec{v}, \ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$[(0,0)] = (0,0) + F = F$$

$$[(4,0)] = (4,0) + F = ? \rightarrow$$

$F = E \qquad E/E = \{E\}$

Cociente por multiplos de un polinomio

$$a(x) \sim_F b(x) \Leftrightarrow a(x) - b(x) \in F = (p(x))$$

$p(x) \in \mathbb{K}[x]$

Ej 23. $K[x]$; $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ $F = (p(x)) = \{p(x)\, q(x) \in \mathbb{K}[x]\}$

$\mathbb{K}[x] \,/\, p(x)$ $\quad a(x) \sim_F b(x) \Leftrightarrow a(x) - b(x) \in F = (p(x))$

$\underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\text{grado}(p(x))} \geq 1 \to [a(x)] \in \mathbb{K}[x] \,/\, (p(x)) \to$

$a(x) \,\underline{|\, p(x)}$
$r(x) \quad c(x)$

$a(x) = p(x) \cdot c(x) + r(x) \to \begin{cases} r(x) = 0 \\ \text{grado}(r(x)) < n \end{cases}$

$\Downarrow$

$\left. -r(x) + a(x) = p(x) \cdot c(x) \right]$ Def de relacion $[a(x)] = [r(x)]$

$p(x) \in \mathbb{K}[x]$

$\deg(p(x)) = n \geq 1$

$[1], [x], [x^2] \dots [x^{n-1}]$
forman
$\mathbb{K}[x] / (p(x))$

$$\dim(\mathbb{K}[x] / (p(x))) = n = \deg(p(x))$$

Ej 24. $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ $\quad p(x) = 0$ $\quad$ base $\mathbb{K}(x) / F$

$[1], [0] \to \dim(\mathbb{K}[x] / F) = n$

LI : $\sum_{i=0}^{n-1} a_i [x^i] = [0] \to \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right] = [0]$

Rango de Un Conjunto de Vectores

Llamamos rango a:

$$rg\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n\} = dim(\langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \rangle)$$

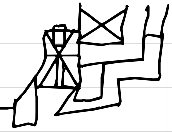
Basicamente a la dimension del subespacio que generan esos vectores

LI extraibles de $\{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n\}$

Otra manera

Escribimos ese conjunto de vectores como filas o columnas de una matriz y calculos el rango de esa matriz

1 | Coordenadas en una base



$\mathbb{K}^n$ $\quad B = \{e_1 \cdots e_n\}$ base cualquiera de E

$\vec{x} \in E$ se escribe de

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i = \alpha_1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n$$

▷ Coordenadas de un vector en base B: escalares $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ de la combinación lineal (única)

$E \in \mathbb{K}$ ev $\quad B = \{e_1 \cdots e_n\} \quad \vec{u} \in E$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i$$

$$u = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)_B$$

Proposición

$$u_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i = a_{1j} \cdot e_1 + \cdots + a_{nj} \cdot e_n$$

$u_1 \cdots u_m$ son LI solo si $rg(A) = m \leq n$

Cambio de Base

$B_u = \{\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_n\}$ $\quad B_v = \{v_1 \cdots v_n\}$

Ejemplo. $\vec{u} = (-2, 3, 5)$

$$B = \{ \underbrace{(2,4,0)}_{\circ u_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{\circ u_2}, \underbrace{(-1,2,0)}_{\circ u_3} \}$$

1. Calcular en base canonica

$$(2,4,0) = 2(1,0,0) + 4(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$(1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$(-1,2,0) = -1\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + 2\underbrace{(0,1,0)}_{e_2} + 0\underbrace{(0,0,1)}_{e_3}$$

$$\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)_c = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$$

$$\left.\begin{array}{l} -2u_1 \Rightarrow -2(2e_1 + 4e_2) = -4e_1 - 8e_2 \\[2em] 3u_2 \Rightarrow 3(1e_1 + 1e_3) = 3e_1 + 3e_3 \\[2em] 5u_3 \Rightarrow 5(-1e_1 + 2e_2) = -5e_1 + 10e_2 \end{array}\right\} -6e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

CAMBIOS DE BASE ALGORITMO

$E \in \mathbb{K}$ e.v finito $\qquad n =$ dimension E

$\vec{x} \in E$

Bases E $\begin{cases} B_u = \{u_1, \dots u_n\} \\ B_v = \{v_1, \dots v_n\} \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} (\alpha_1, \dots \alpha_n)_{B_u} \\ (\beta_1 \dots \beta_n)_{B_v} \end{matrix}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i \qquad x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot v_j$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot v_j = x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot u_i \right) =$$

$$\underbrace{= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{ij} \right) \cdot u_i = x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i}$$

por lo que α_i en la derecha

es equivalente a $\Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{ij}}$

Para todo $i = 1 \dots n$

cada columna son las coordenadas

v_j en base u

$$P_{B_v} = B_u \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

EJEMPLO CAMBIO DE BASE

$$B_u = \{\overrightarrow{u_1, u_2, u_3}\} \qquad B_v = \{\overrightarrow{v_1, v_2, v_3}\}$$

Sabe $\rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 = \quad - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3 \end{cases}$$

$\vec{u}\,(1,0,-1)_{B_u} \rightarrow$ calcular en B_v

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Inversion Base

$P=$ matriz cambio de base

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "P"] & B' \arrow[l, bend left, "P^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Ejemplos:

$\mathbb{R}^3 \quad B=\{e_1, e_2, e_3\} \quad B'\{u_1, u_2, u_3\}$

$u_1=(1,1,0)_{B'}, \quad u_2=(1,0,1)_{B'}, \quad u_3=(0,1,1)_{B'}$

$u_1=e_1+e_2 \quad u_2=e_1+e_3 \quad , u_3=e_2+e_3$

$x=(1,1,1)_B \to (\alpha, \beta, \gamma)_{B'} \quad \text{rang}(u_1, u_2, u_3)=3$

$$B \to B' : P \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{B'}$$

Bases ortogonales y ortonormales

Base ortogonal. $B = \{ u_1, u_2 \dots u_n \}$

$$\langle \vec{u}_i, u_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

Base ortonormal!

Si ortogonal + sus elementos son unitarios

$$\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$\| \vec{u}_i \| = 1 \quad \forall i$$

Metodo de ortonolizacion de Gram-Schmidt

Construir una base ortogonal a partir de una base cualquiera