VECTORES

2D

$$x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to x\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{i} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} \hat{j} \\ \hat{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j} \\ x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j} \end{bmatrix}$$

Formula Transformacion multiple

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + gb & af + bh \\ ec + gd & cf + dh \end{bmatrix}$$

3D

- BASICO

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa + yb + zc \\ xd + ye + zf \\ xg + yh + zi \end{bmatrix}$$

Determinante $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \underline{ad - bc}$

$$\overrightarrow{PQ} = (q_x - p_x,\ q_y - p_y)$$

Ej: $\overrightarrow{AB}$ $\quad A = (1, 2) \quad B = (5, 4)$

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2)$$

Vector Fijo

- Origen
- Modulo (largo)
- Direccion
- Sentido

Dos vectores son equivalentes si tienen las mismas componentes

$\overrightarrow{AB} = (1-5, 4-3) = (-4, 1)$

$\overrightarrow{CD} = (0-4, 3-2) = (-4, 1)$

Son equivalentes

Vector Libre

- Representante de los vectores fijos equivalentes entre sí

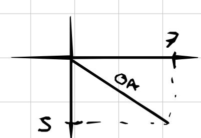
- Es algo así como un concepto

Ej: $\overrightarrow{AB}$ (fijo) $= (1-3, 4-1) = (-2, 3)$

$\underbrace{\vec{V}}_{\text{Libre}} = (-2,3)$

Para representarlo suele usarse el vector libre desde el origen de coordenadas

Características $|OA| = (7,-5)$



- Modulo: $|OA|^2 = 7^2 + 5^2 = \sqrt{74}$
- Direccion $\Rightarrow \arctan\left(-\frac{5}{7}\right) = -0.62 \text{ rad} = -35^\circ = 325^\circ$
- Sentido

OPERACIONES CON VECTORES

$\hat{i} = x$

$\hat{j} = y$

2D

$$x\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax + by\\cx + dy\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \to x\begin{bmatrix}\hat{i}\\\hat{i}\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}\hat{j}\\\hat{j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j}\\x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j}\end{bmatrix}$$

Formula Transformacion multiple

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ea + gb & af + bh\\ec + gd & cf + dh\end{bmatrix}$$

3D — BASICO

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}xa + yb + zc\\xd + ye + zf\\xg + yh + zi\end{bmatrix}$$

Determinante $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \to \underline{ad - bc}$

$\vec{w} + \vec{v} = v_x + w_x, v_y + w_y$

Producto Escalar

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 \cdots + u_n v_n$

Vectores paralelos

si $\vec{v} = \lambda\vec{w}$ son paralelo

Propiedades Suma

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$\vec{u} + 0 = 0 + \vec{u}$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$

Prop prod escalar

$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

$(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u})$

$1\vec{u} = \vec{u}$

Prop prod escalar

$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

$\langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

$\langle (\lambda\vec{u}), \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

$\vec{u} = 0 \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

$\vec{u} \neq 0 \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle > 0$

Norma - Longitud de un Vector

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 \cdots u_n^2}$$

Propiedades Norma

$$\|\vec{v}\| > 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0$$

$$\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \, \|\vec{u}\|$$

- Desigualdad triangular $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- Pitagoras $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$
- Desigualdad de Cauchy - Shwarz $\|\vec{u}\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

Vector Unitario

$$\|\vec{e}\| = 1$$

Vector con norma 1

Distancia entre 2 puntos

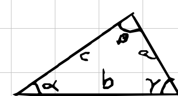
$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$$

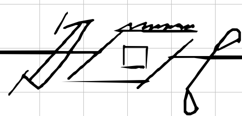
Teorema.

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$





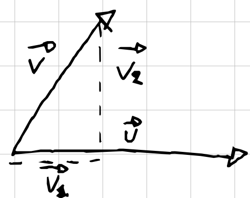
Angulo de dos vectores

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Desigualdad Cauchy - Schwarz

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

PROYECCION ORTOGONAL



La proyeccion ortogonal seria el aplastar el vector $\vec{v}$ para hacerlo paralelo a $\vec{u}$ siendo este $(\vec{v_1})$ igual a $\vec{v}$ si le sumamos la parte perpendicular a $\vec{u}$

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v}$$

Ej

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

$\vec{v} = (1,2)$

$u = (3,1)$

$$\langle (1,2), (3,1) \rangle = 5$$

$$\|\vec{u}\|^2 = 10$$

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{5}{10} \vec{u} = \frac{1}{2}(3,1)$$

Producto Vectorial

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

producto vectorial

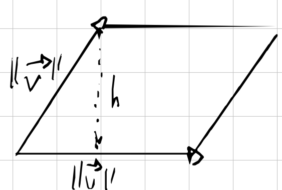
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2 ,\ u_3 v_1 - u_1 v_3 ,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

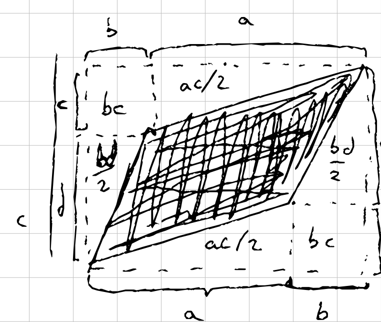
Propiedades

$$\langle \vec{u} \langle \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle\rangle = 0$$

$$\langle \vec{v} \langle \vec{v} \wedge \vec{u} \rangle\rangle = 0$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot h = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\alpha)$$





$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2 ,\ u_3 v_1 - u_1 v_3 ,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$
- $\alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \alpha \vec{v}$
- $\bar{u} \wedge \vec{u} = 0 = \vec{u} \wedge \vec{0}$

Producto Mixto

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- Vectores coplanarios: vectores sobre un mismo plano.

Propiedades del producto mixto

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$$