SUMA - Tienen que tener misma dimensión y se suma su pos.

- Producto
  - Escalar ⇒ multiplicar todo lo de la matriz.

  - Producto de matrices: para ser posible

$$n\,\text{columnas}\,A = n\,\text{filas}\,B$$

Ej:

$$A \in M_{m\times n} \qquad B \in M_{n\times m}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 0 & -1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 2 - 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ag + bi + ck & ah + bj + cl \\ dg + ei + fk & dh + ej + fl \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Traza: Suma elementos diagonal principal

PROPIEDADES SUMA

- Conmutativa : $A+B = B+A$
- Asociativa : $(A+B)+C = A+(B+C)$
- Elemento Nulo en la Suma [O = Matriz Nula]

$$A + O = O + A = A$$

- Matriz Opuesta ⇒ $A + (-A) = (-A) + A = O$

Propiedades Producto

- ▷ Asociativa $=$ $(AB)C = A(BC)$
- ▷ Distributiva respecto de la suma $A(B+C) = AB + AC$

Elemento neutro o unidad

$$AI_n = A \qquad I_n B = B$$

Ej $$AI_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

* Para matrices cuadrados I_n es un elemento neutro del producto

$$AI_2 = I_2 A$$

▶ {Propiedad distributiva del producto por escalar respecto a la suma}

$$\underbrace{\lambda(A+B)}_{\text{MAS SIMPLE}} = \lambda A + \lambda B, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$1A = A$$

▷ Suma de escalares

$$\underbrace{(\lambda+\mu)A}_{\text{MAS SIMPLE}} = \lambda A + \mu A$$

SIEMPRE QUEREMOS SIMPLIFICAR LAS OPERACIONES

▷ Asociativa

$$\underbrace{(\lambda\mu)A} = \lambda(\mu A)$$

Mas simple dado que λ y μ son escalares (1 numero) y A es una matriz, por lo que solo hay que multiplicar 1 vez por la matriz es más rapido

▷ Asociativa dos matrices

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B$$ ▷ Aqui ambos van igual de optimización

$$\lambda \in \mathbb{K}$$

EXCEPCIONES

Producto de matrices no es conmutativo

$AB \neq BA$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$

No se cumple la ley de simplificación

es decir:

$AB = AC$ pero $B \neq C$ no podemos tachar la A

EXISTEN DIVISORES DE 0

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}$

$AB = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ag + bi + ck & ah + bj + cl \\ dg + ei + fk & dh + ej + fl \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left(\frac{-1}{6} \right) \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot 8 + (-7) \cdot (-3) & 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 \\ 1 \cdot 8 + 1 \cdot (-7) & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

26 - Escalonadas y escalonada reducida por filas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{11} \neq 0$?
- Sí → a_{1j}/a_{11} donde $j = 1 \dots n$ → restamos a cada fila $a_{1j} \times a_{i1}$. → $\boxed{4}$
- No → $a_{11} = 0$ buscamos primera $a_{i1} \neq 0$. Intercambiamos esta fila con la 1ª. $\boxed{\text{repetir } 1}$
  - $a_{i1} = 0$ donde $i = 1 \dots m$ ignoramos la 1 columna y repetimos desde $\boxed{1}$

etir eliminando primera fila columna.

$2 \,|\, 1$
$0 \,|\, 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2-(1\cdot 2) & 4-(1\cdot 2) & 3-(3\cdot 2) & -2-(5\cdot 2) \\ 0 & 2 & -3 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Restamos a la primera fila $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ 2 veces la segunda

Una vez obtenido buscamos lo mismo para la 3ª $\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}$ → restar resta → suma, sumamos 2 veces la 1ª

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$ ⇒ necesitamos el pivote de la segunda fila así que dividimos entre 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3/2 & -6 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$ ⇒ Una vez obtenido el pivote repetimos ignorando fila y col 1

$\begin{matrix} 1 & -3/2 & -6 \\ 4 & 5 & 13 \end{matrix} \Rightarrow 0 \quad 5-\left(-\frac{3}{2}\cdot 4\right) \quad 13-(-6\cdot 4)$, $5-(-6)$ $\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3/2 & -6 \\ 0 & 0 & 11 & 37 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3/2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 37/11 \end{pmatrix}}$

Para obtener la reducida de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3/2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 37/11 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ $-\left(-\frac{3}{2} f_3\right)$

$f_2 + \frac{3}{2} f_3$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -21/22 \\ 0 & 0 & 1 & 37/11 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$f_1 - 3f_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{56}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -21/22 \\ 0 & 0 & 1 & 37/11 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$f_1 - 1f_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{91}{22} \\ 0 & 1 & 0 & -21/22 \\ 0 & 0 & 1 & 37/11 \end{pmatrix}$$

27 Escalonadas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_3 - 2l_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$