Producto por bloques y facto triangular

PRODUCTO POR BLOQUES

Simplificacion de producto de matrices

▷ Multiplicacion de bloques de filas y cols por otros bloques

Ej:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline E & F \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline J & K \end{array}\right)$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array}\right)$$

Importante mantener el respeto hacia que tengan mismo numero de filas y columnas en bloques

Es decir nº filas A = nº cols

Ej: dos siguientes los podriamos multiplicar

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ \hline -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & 13 & 13 \\ -17 & 7 & 9 \\ -3 & 4 & -1 \\ -4 & 17 & 10 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto por Bloques

Donde el producto por bloques cobra importancia es cuando en alguna de las submatrices encontramos matrices identidad (I_n) ó matrices nulas.

Ej

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} I_n & D \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} I_n \cdot I_n + C \cdot 0 & I_n \cdot D + C \cdot I_n \\ \hline 0 \cdot I_n + I_n \cdot 0 & 0 \cdot D + I_n \cdot I_n \end{array}\right)$$

$$AB \left(\begin{array}{c|c} I_n & D + C \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) \rightarrow$$ Simplificamos una barbaridad y necesitamos hacer muchas menos operaciones

Propiedades producto por Bloques

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -B^{-1} C D^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{array}\right)$$

→ Si los bloques (de una matriz cuadrada dividida como en el ejemplo) B y D son invertibles entonces A es invertible

Importante que este sea de 0

Si $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$

FACTORIZACIONES TRIANGULARES

Matriz elemental por filas. Se obtiene a traves de la I_m

Son las 3 transformaciones elementales aplicadas a la I

- F_{ij} : I_m con i y j intercambiadas
- $F_i(\alpha)$: I_m con fila multiplicada por $\alpha \in \mathbb{K}$
- $F_{ij}(\alpha)$: I_m se le suma fila i a fila j mult por $\alpha \in \mathbb{K}$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Intercambiar filas 1 y 3 corresponderia a

$$F_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Multiplicar la 2º fila por -2 seria

$$F_2(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sumar a la 3º fila la 2º $\cdot 5$

$$F_{32}(5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones elementales por columnas tambyen funcionan

Factorizaciones Triangulares

$F_{ij}^{-1} = F_{ij}$

$F_i(\alpha)^{-1} = F_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$F_{ij}(\alpha)^{-1} = F_{ij}(-\alpha)$

$F_i(\alpha) \to$ son diagonales

$F_{ij}(\alpha)$ si $\begin{cases} i>j \to \text{triangular inferior} \\ i<j \to \text{triangular superior} \end{cases}$

FACTORIZACIONES TRIANGULARES O LU

ower pper

Teorema. $A \in M_{m \times n} \in \mathbb{K}$

$U \to$ Escalonada equivalente de A con todos los pivotes 1 (triangular superior)

- Si U se puede obtener de A sin permutar filas entonces existe L (una matriz triangular inferior) de forma $A = LU$, y si A es invertible esta factorización es unica

- Si para tener U hay que permutar y A es invertible existe P tal que $PA = LU$ donde P es un producto de matrices elementales de forma F_{ij}. Para cada P (puede ser más de una) la factorización es unica

Pasos:

1. Encontrar U con transformaciones elementales de forma $F_i(\alpha)$ y $F_{ij}(\alpha)$ con $i < j$. Así: $U = L_n \dots L_1 \cdot A$

2. $A = (L_n \cdots L_1)^{-1} U = L_1^{-1} \cdots L_n^{-1} \cdot U = LU$

CON PERMUTACION

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Para obtener U hemos hecho las siguientes transformaciones:

$f_2 - 2f_1 \quad f_4 - f_1 \quad -\frac{1}{5} f_2$

$f_3 + 2f_2 \quad f_4 + 2f_2 \quad \frac{5}{17} f_3$

$f_4 - \frac{17}{5} f_3 \quad \frac{1}{3} f_4$

Que se traduce:

$$U = F_4\left(\frac{1}{3}\right) \cdot F_{43}\left(-\frac{17}{5}\right) \cdot F_3\left(\frac{5}{17}\right) \cdot F_{42}(2) \cdot F_{32}(2) \cdot F_2\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot F_{41}(-1)$$

$$\cdot F_{21}(-2) \cdot A = L_8 \cdots L_1 \cdot A$$

$A = L_1^{-1} \cdots L_8^{-1} \cdot U$ = lo de arriba pero con escalares cambiados de signo $\cdot U$

*

$f_3 + 2f_2 = F_{32}(2)$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 17/5 & 0 \\ 1 & -2 & 17/5 & 3 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -19/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L \cdot U = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 17/5 & 0 \\ 1 & -2 & 17/5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -19/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

CON PERMUTACION

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} f_2 \to f_1 \\ f_3 + 3f_1 \\ f_3 - 7f_2 \\ -\frac{1}{28} f_3 \end{matrix} \to F_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{} = P$$

No se puede aplicar el teorema directamente

Convertimos ese conjunto de operaciones a P

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$U = \underbrace{F_3\left(-\tfrac{1}{28}\right) \cdot F_{32}(-7) \cdot F_{31}(3)}_{L} \cdot PA$$

$$LU \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} = PA = A \; f_2 \leftrightarrow f_1$$

SIMPLIFICACION LU

$A = L \cdot U$

$AX = Pb \Rightarrow LUX = Pb \Rightarrow Y = UX \Rightarrow LY = Pb$

al ser L triangular inferior hace solucion inmediata

$UX = Y$ también hace solucion inmediata porque

U es triangular superior

Ejemplo

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ag+bi+ck & ah+bj+cl \\ dg+ei+fk & dh+ej+fl \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$LU \; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

$LY = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1y_1 \\ 1y_2 \\ -3y_1 + -7y_2 - 28y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1y_1 \\ 1y_2 \\ -3y_1 + 7y_2 - 28y_3 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 3$

$y_2 = 1$

$y_3 = 0$

$-3 \cdot 3 + 7 \cdot 1 - 28y_3 = -2$

$-9 + 7 + 2 = 28y_3$

$0 = 28y^3 = 0$

$$UX = Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{matrix} 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 1x_2 + 3x_3 = 1 \\ 1x_3 = 0 \end{matrix} \right.$$

$x_3 = 0$

$x_2 = 1$

$x_1 = -3 + 3 = 0$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\left[\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}\right.$$