Aplicaciones Lineales

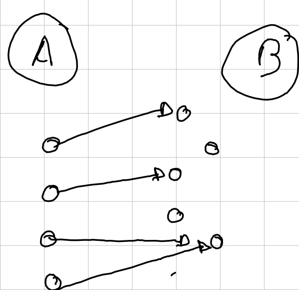
Aplicaciones de 2 conjuntos.

Cada elemento del conjunto A esta vinculado a 1 solo elemento de B y todos los elementos de A deben estar vinculados

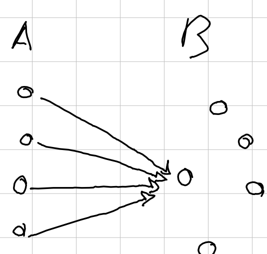
Los elementos de B no tienen que estar vinculados. Varios elementos de A pueden estar vinculados a uno de B

Ej 1

Aplicación de A en B



Ej 2

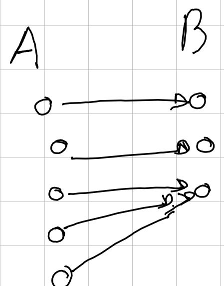


Aplicación Exhaustiva

$$\overbrace{f: A \to B}^{\text{Aplicación}}$$

f es exaustiva solo $f(A)=B$. Es decir que todos los elementos de B tienen una anti-imagen o antecedente

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$$

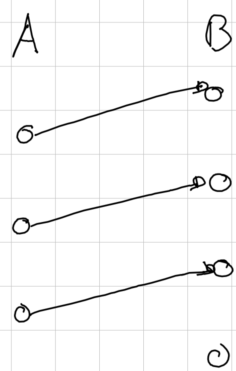


* Basicamente que ningun elemento de B quede suelto, sin conectarse

APLICACION INYECTIVA

$f: A \longrightarrow B$

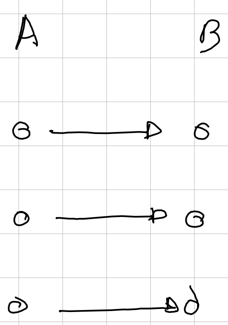
$$x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$



*Dos elementos de A no pueden tener el mismo elemento B

APLICACION BIYECTIVA

$$\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$$



Es basicamente Inyectiva y exaustiva a la vez

todos los elementos de B tienen una antitesis y los elementos de B sólo tienen 1 elemento en A

Aplicaciones Lineales | Morfismos

El termino aplicacion lineal es el morfismo dado a los funciones y aplicaciones que conservar la estructura de un espacio vectorial

APLICACION IDENTIDAD

$$I: E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto x$$

Basicamente es el 1.

$$I(x+y) = x+y \qquad x+y = I(x) + I(y) = I(x+y)$$

$$I(x) + I(y) = x+y$$

$$\lambda I(x) = I(\lambda x)$$

APLICACIÓN CONSTANTE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \mapsto k$

$f(0) = 2$

$f \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\qquad x \to 2$

$f(-5) = 2$ $\qquad f(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(\pi) = 2$

APLICACIONES LINEALES

Siendo $E, F \in \mathbb{K}$ e.v

Toda aplicación que cumpla estos dos características es lineal

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \mathbb{K}, \quad f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

Las anteriores dos condiciones pueden resumirse en:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$$

Ejemplos AL - PRIMERA PROYECCIÓN

$f: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K} \qquad (x,y) \longmapsto x$

$$f\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, y_1) = x_1 \\ f(x_2, y_2) = x_2 \end{array}\right\} \; f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = \cancel{x}_1 + x_2$$

$$f\big(\lambda(x_1, y_1)\big) + f\big(\mu(x_2, y_2)\big) = \lambda f(x_1, \cancel{y_2}) + f\mu(x_2, y_2)$$

$$f\big(\lambda(x_1, y_1)\big) = f\big((\lambda x_1, \lambda y_1)\big) = \lambda f(x_1, y_1)$$

Proposición:

$E, F \in \mathbb{K}$ e.v & $f: E \longrightarrow F$

- f es lineal
- $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x, y \in E$
- $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(x_i)$ para todo $\alpha_i \in \mathbb{K}$ y $x_i \in E$

Ejemplos Aplicaciones Lineales

$I : E \to E$ $\qquad$ $f : E \to F$ $\qquad$ $\alpha \in \mathbb{K}, f_\alpha : E \to E$

$x \mapsto x$ $\qquad$ $x \mapsto 0$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y) \mapsto (x+y, \ 2x-y, \ y-x)$

$f\left(a(x_1, y_1) + b(x_2 \ y_2)\right) = af(x, y) + bf(x_2 \ y_2)$

$(ax_1 + bx_2, \ ay_2 + by_2) \Rightarrow$

$(ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2), \ \left(2(ax_1 + bx_2) - (ay_1 + by_2), (ay_1 + by_2) - (ax_1 + bx_2\right.$

$a(x_1 + y_1, \ 2x_1 - y_1, \ y_1 - x_1) + b(x_2 + y_2, \ 2x_2 - y_2, \ y_2 - x_2)$

$\Downarrow$

$af(x_1, y_1) + bf(x_2, y_2)$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(x_1, x_2 \ \dots \ x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i, \dots \sum_{i=1}^{m} a_{mi} x_i\right) \ a_{ij} \in \mathbb{K}$

$F \leq E \quad \mathbb{K}$ ev

$i_F : F \to E$ $\qquad$ $\Pi_F : E \to E/F$

$x \mapsto x$ $\qquad$ $x \mapsto [x]_F$

$\{x_1, x_2 \cdots x_n\}$ base de E $\qquad$ $f: E \to \mathbb{K}^n$

$x \mapsto (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$

$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$

$E = F \oplus G$

$x \in E \xrightarrow[\text{la suma complementarios}]{\text{forma unica en}} x = y_x + z_x$ $\qquad$ $y_x \in F$, $z_x \in G$

- Proyección sobre F

$\rho_F : E \to F$

$x \mapsto y_x \qquad y \in F$

- Proyección sobre G

$\rho_G : E \to G$

$x \mapsto z_x \qquad z_x \in G$

$x = y_x + z_x \qquad u = y_u + z_u$

$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\alpha x + \beta u = \alpha(y_x + z_x) + \beta(y_u + z_u)$

EXPRESIÓN UNICA

$= (\alpha y_x + \beta y_u) + (\alpha z_x + \beta z_u)$

$\rho_F = (\alpha x + \beta u) \Rightarrow (\alpha y_x + \beta y_u) = \alpha \rho_F(x) + \beta \rho_F(u)$

$\rho_G = (\alpha z_x + \beta z_u) = \alpha \rho_G(x) + \beta \rho_G(u)$

CONDICION IMPORTANTE

La imagen del $\vec{0}$ <u>debe</u> ser $\vec{0}$

$$f(\vec{0}) = \vec{0}$$

$(x,y) \longmapsto (x+y, x+y+1, y)$

No sería lineal por culpa de ese 1, ya que en caso (0,0) daría $(0, -1, 0)$

IMAGEN DEL VECTOR NULO ¿?

$$f: E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x)$$

$$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

IMAGEN DEL VECTOR OPUESTO

$$f: E \longrightarrow F$$
$$x \to f(x)$$

$$f(\underset{-_E}{\ominus}\vec{x}) = \underset{-_F}{\ominus} f(\vec{x})$$

Demostración

$$\forall \vec{x} \in E \Rightarrow \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}_E$$

$$f(\vec{x}) + f(-\vec{x}) = \vec{0}_F$$

$$f(-x) = -f(\vec{x})$$

Proposición

$E, F \in \mathbb{K}$ e.v y $\overbrace{f: E \to F}^{AL}$

1▷ $\begin{cases} H \in E \text{ sev} \\ f(H) \in F \text{ s e.v} \end{cases}$

2▷ $K \in F$ s ev

$f^{-1}(K) \in E$ sev

3▷ $G \in \mathbb{K}$ ev y $f: E \to F$ $g: F \to G$

$\underbrace{g \circ f}: E \to G$ es lineal | Se pueden empalmar aplicaciones lineales |

Se lee al revés "f compuesta con g"

1- Tomar elemento de e

2- Aplicarle f

3- Al obtenido aplicarle g

Denotación: $\mathcal{L}(E, F) = \{ f: E \to F \mid f \text{ es lineal} \}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$

$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ $f \in \mathcal{L}(E, F), \alpha \in \mathbb{K}$

Nucleo de Una Aplicación Lineal

Def.

$$f: E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Kernel

Se denomina nucleo de f [denotado como $Ker(f)$ o $Nuc(f)$] el conjunto de elementos de E que coinciden con el 0 de F

$$Ker(f) = Nuc(f) = \{ \vec{x} \in E : f(\vec{x}) = \vec{0}_F \}$$

El nucleo de una aplicación lineal es un subespacio el espacio original $Ker(f) \in E$ s.e.v.

Imagen de la A. L.

$$f: E \longrightarrow F$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

Denotado por $Im(f)$, conjunto de elementos de F que tienen una antimagen

$$Im(f) = \{\vec{y} \in F : \exists \vec{x} \in E : f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

La Imagen de F es un subespacio de F es decir la Imagen del elemento de llegada es un subspacio del mismo.

$\dim(Im(f)) \leq n$ donde n es la dimensión del espacio de origen (E)

CLASIFICACIÓN APP LINEAL

$$f: E \longrightarrow F$$

- <u>Monomorfismo</u>. f es inyectiva
- <u>Epimorfismo</u>. f es exhaustiva
- <u>Isomorfismo</u> f es bijectiva
- <u>Endomorfismo</u> f va de un espacio al mismo

$$f: E \to E$$

- <u>Automorfismo</u>. Endomorfismo bijectivo

- <u>Espacios vectoriales isomorfos</u>

$f: E \to F$ bijectiva

Denotación: $E \cong F$

- Proposiciones
  - f es un monomorfismo solo y solo si $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$
  - f es epimorfismo si y solo si $F = Im(f)$

CDUAL 2

$$f : E \longrightarrow F$$

- f es un isomorfismo si
  - $\dim(E) = \dim(F)$
  - $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$ y $\operatorname{Im}(f) = F$

TEOREMA DEL RANGO

$f: E \longrightarrow F$

$E, F \in \mathbb{K}$ e.v de dimensión finita n y $f: \xrightarrow{\text{Lineal}} F$

Entonces

- Ker (f) y Im (f) tienen dimensión finita

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))}$$

Rango de una AL.

Llamamos rango de una AL a la dimensión de Im (f)

$$rg(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Numero de vectores L. I. de Im (f)

Reescritura Teorema.

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + rg(f)$$

CONSECUENCIAS TEOREMA DEL RANGO

Sin AL

E, F $\mathbb{K}$ e.v son isomorfos solo si:

$$\dim(E) = \dim(F)$$

Con AL

E, F $\mathbb{K}$ ev

$f : E \xrightarrow{AL} F$ es un isomorfismo si y solo si

$\dim(E) = \dim(F)$ & $\ker(f) = \{0\}$

E, F $\mathbb{K}$ ev $f : E \xrightarrow{AL} F$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_n$ conjunto LI de vectores $\in E$

y f es un monomorfismo

$f(u_1) \dots f(u_n)$ son tambien LI $\in F$

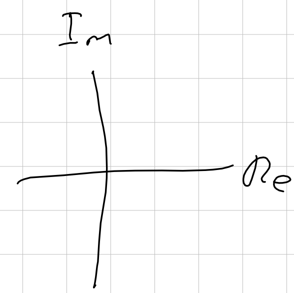
Si f es un epimorfismo y $u_1 \dots u_n$ son conjunto generador de E, entonces $f(u_1) \dots f(u_n)$ generan F

Esto significa que generan $\mathrm{Im}(f)$ y en el caso de ser exaustiva todo F

Si ademas para $f : E \to F$ G es subespacio de E

$$\dim(G) = \dim(G \cap \ker(f)) + \dim(f(G))$$

Aplicaciones Lineales



$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ $\qquad \mathbb{R}$ ev

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$(x,y) \mapsto x + iy \}$ Lineal Biyectiva

La relación entre los reales^2 y los complejos es lineal y biyectiva

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \to (x+y-2z,\ x-y+z)$

$f(x,y,z) = (0,0) \to \begin{cases} x+y-2z = 0 \\ x-y+z = 0 \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} y = 3x \\ \to x-y+z=0 \end{array}$

$2x - z = 0 = z = 2x = 0$

$\ker(f) = \{(x, 3x, 2x),\ x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,3,2) \rangle$

$\dim \ker f = 1 \qquad \dim \mathrm{Im} = 2 \qquad \boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$(x,y,z) \mapsto (x+y+z, x+z, x+y, x)$

$\ker(g) \Rightarrow g(x,y,z) = (0,0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \\ x=0 \end{cases}$

$\ker g\{(0,0,0)\} \Rightarrow g$ monomorfismo

$3 = \dim E = 0 + \dim \ker f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$

$3 \neq 4$ inyectiva pero no exhaustiva

Ejercicio calculo nucleo

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) = (x+y-2z, x-y+z)$

$x+y-2z = 0$

$x-y+z = 0$

$2x - z = 0$

$x+3x-4x=0$

$2x-2x=0$

$x-y+2x \Rightarrow y=3x$

$x-3x+2x=0$

$-3x+3x=0$

$\ker(f) = \{(x, 3x, 2x) \ x \in \mathbb{R}\}$

$\dim \ker(f) = 1$

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

$3 = 1 + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{2}$

la $\operatorname{Im}(f)$ = dim del espacio de llegada

Calculo de la base de $Im(f)$ ejercicio anterior

$$f(x,y,z) = (x+y-2z,\ x-y+z) = (x,x) + (y,-y) + (-2z,z)$$

$$= (x(1,1) + y(1,-1) + z(-2,1))$$

$$Im\, f = \langle \underbrace{(1,1),\ (1,-1)}_{\Downarrow},\ (-2,1) \rangle \to$$ Sistema generador de la IMAGEN

$Im\, f = \mathbb{R}^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to L.I$$

Por lo que $(1,1),(1,-1)$ son una base de $\mathbb{R}^2$

$$Im\, f = \langle (1,1),\ (1,-2) \rangle = \underbrace{\langle (1,0),\ (0,1) \rangle}_{\text{base canonica de } \mathbb{R}^2 \text{ (Ej simple)}}$$

Primer Teorema de Isomorfia

$f: E \to F$

$$\boxed{E/_{\ker(f)} \cong \operatorname{Im}(f)}$$

La aplicación de cada clase módulo $\ker(f)$ le hace corresponder la imagen por f de cualquiera de sus representantes

$[x] \longmapsto f(x)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales

Demostración

$f: E \to F \to$

$\varphi: E/_{\ker(f)} \to \operatorname{Im}(f) \qquad [x] \to f(x)$

$[x] = [y] \to \varphi([x]) = \varphi([y])$

$x \sim_{\ker f} y \iff x - y \in \ker f \to f(x) - f(y) = 0$

$f(x) = f(y) \to \varphi([x]) = f(x) = f(y) = \varphi([y])$

Ejemplo Primer Teorema de Isomorfia

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x-y$$

$\mathbb{R}^2 / \ker(f)$ $\qquad v = (1,1)$

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im}(f)$$

$$2 = 1 + (2-1) = \underline{\underline{1}}$$

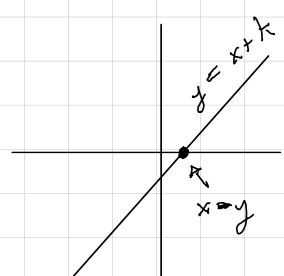
$\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R} \to$ <u>f es exhaustiva</u>

* No es inyectiva porque el núcleo no tiene dimensión 0

$\varphi: \mathbb{R}^2 / \ker f \to \operatorname{Im} f$

$$[(x,y)] \longmapsto f(x,y) = x-y = f([x-y, 0])$$

$[(x,y)]$ $\qquad y = x+k$



Descomposición Canónica de una AL

$f: E \to F$

f se puede poner como composición de:

- Una AL exhaustiva
- Una AL biyectiva
- Una AL injectiva

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & F \\
E/\ker f \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "\iota"]
\end{tikzcd}$$

composición

$\pi \to$ denota proyección

$\iota \to$ inclusión

$\varphi \to$ isomorfismo

$$\left.\begin{array}{l} \pi \\ \iota \\ \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow f = \iota \circ \varphi \circ \pi$$

Segundo Teorema de Isomorfia

E $\mathbb{K}$ e.v F, G sub e.v E

cociente Intersección

$$\boxed{(F+G)/F \cong G\,(F \cap G)}$$

Isomorfo

Demostración

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & F \\
E/\ker f \arrow[r, "\varphi"] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd}$$

iso

$$f = \underset{\text{inyect}}{i} \cdot \varphi \cdot \underset{\text{exha}}{\pi}$$

$$x \in E \to i \cdot \varphi \cdot \pi(x) = i \cdot \varphi\underbrace{([x])}_{\pi} = i\underbrace{(f(x))}_{\varphi} = \underbrace{f(x)}_{i}$$

$[x] \in E/\ker f \to \pi(x) = [x]$ $\operatorname{Im} f(e)$

Matriz Asociada a una aplicación Lineal

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = (x+y,\ y-2x,\ x+y)$$

1. Obtener Im vectores en base B_C de $\mathbb{R}^2$
2. Obtener Im de vectores en $B_E = \{(1,-1),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$
3. Obtener Im vectores base canonica $\mathbb{R}^2$ expresarlos en base de $\mathbb{R}^3$ $B_F = \{(1,-1,0),(1,0,-1)\ (1,1,1)\}$.
4. Obtener Im de los vectores de la base B_E de $\mathbb{R}^2$ expresados en la base B_F de $\mathbb{R}^3$

1.

$$x(1,0)+y(0,1) \rightarrow \big((1,0)+(0,1),\ (0,1)-2(1,0),\ (1,0)+(0,1)\big)$$

$$(1,1)\ ,\ (-2,1)\ ,\ (1,1)$$

$(1,0) \rightarrow (1,-2,1) \rightarrow$

$(0,1) \rightarrow (1,1,1) \rightarrow$

$$\big(f(1,0),\ f(0,1)\big) =$$

$$\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $B_E = \{(1,-1),(2,1)\}$ $f(x,y) = (x+y, y-2x, x+y)$

$(1,-1) \to (0,-3,0)$

$(2,1) \to (3,-3,3)$

$$\left(f(1,-1), f(2,1)\right) = \left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Obtener los vectores base canonica $\mathbb{R}^2$ expresarlos en base de $\mathbb{R}^3$ $B_F = \{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$

$f(1,0) = (1,-2,1)$

$f(0,1) = (1,1,1)$

$(1,-2,1)_E \xrightarrow{P} (\alpha,\beta,\gamma)_{B_F}$

$(1,1,1) \xrightarrow{P} (a,b,c)_{B_F}$

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.\hat{3} & -0.\hat{6} & 0.\hat{3} \\ 0.\hat{3} & 0.\hat{3} & -0.\hat{6} \\ 0.\hat{3} & 0.\hat{3} & 0.\hat{3} \end{pmatrix}$$

Desglosamos cambio de base

$$\begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Asociada a una Aplicación Lineal

Proposición. E, F $\mathbb{K}$ e.v. y E dimensión finita

$\{u_1 \cdots u_n\}$ base de E y $\{v_1 \cdots v_n\}$ base de F

$$f : E \xrightarrow{\mathcal{L}} F.$$

$$f(u_i) = v_i \quad \forall i = 1 \ldots n$$

f verifica que:

- es un monomorfismo si:
  $v_1 \cdots v_n$ son LI
- es un epimorfismo si
  $v_1 \cdots v_n$ generan F
- es un isomorfismo
  $v_1 \cdots v_n$ son base de F

Esto tambien es valido si:
$\dim(E) = \infty$
si $\{u_i : i \in I\}$ es base de E
&
$\{v_i : i \in I\}$ es vector cualquiera perteneciente a F
entonces existe $f : E \to F$
tal que $f(u_i) = v_i$, $i \in I$

Matriz Asociada a una AL 2

Definición