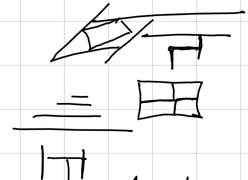
Diagonalización de los endomorfismos.

Vaps
- Valores propios. Escalares especiales

Veps
- Vectores propios. Vectores especiales



Estados

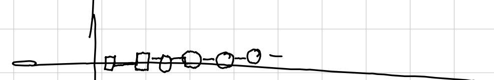
$$X_1 = A X_0$$

$$X_2 = A X_1 = A(A X_0) = A^2 X_0$$

$$\vdots$$

$$X_n = A^n X_0$$

Esto lo usamos para problemas dinámicos e ir interactuando con los estados anteriores de la matriz de datos



Durante todo el tema se va a trabajar con

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

y

$$f \in End(E)$$

es decir f es un endomorfismo de E en sí mismo.

Diagonalización - Matrices Semejantes

A y A' son semejantes si existe una matriz P invertible tal que $A' = P^{-1} A P$

$$\begin{tikzcd}
B_F \arrow[r, "A"] & B_E \\
¿B? \arrow[u, "P"] \arrow[r, "P^{-1}AP"] & ¿B? \arrow[u, "P"]
\end{tikzcd}$$

Se trata de buscar en una base E en el cual f se representa por una matriz diagonal, es decir, dada una matriz A en una base cualquiera, se busca una matriz diagonal semejante a ella

A este proceso le llamamos Diagonalizar una matriz o El Endomorfismo

* La busqueda de la P

(1) <u>Matriz diagonalizable</u>: A es diagonalizable si es semejante a una matriz D; es decir hay una P regular

$$D = P^{-1} A P$$

Por desgracia esto no siempre sera posible

Diagonalización

Endomorfismo diagonalizable:

$f \in End(E)$

→ Sería diagonalizable si existe una base de E formada por vectores propios de f

Diagonalizar f es encontrar esa base

$B = \{v_1 \cdots v_n\}$ buscamos la base de veps asociados a los vaps $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ la matriz asociada es la diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$f(v_i) = \lambda_i v_i$ para todo $i = 1 \cdots n$

VAPS & VEPS

* Todas las matrices son asociadas a un endomorfismo f de un E $\mathbb{K}$ e.v en cierta base.

Vector propio (VEP).

$A \in M_n$ de orden n, los vectores columna de la cual proceden a un espacio vectorial E de dimensión n un elemento $\vec{x} \in E$ es un vector propio o autovector Si:

$\vec{x} \neq 0$

Existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

Es decir: un vector propio es aquel que tiene la misma dirección que el vector $A\vec{x}$ transformado por la matriz de A
$\downarrow$
proporcional

Valor propio (VAP)

El escalar λ de la definición anterior se denomina valor propio asociado al vector propio $\vec{v}$

Conjunto de vectores propios asociados al valor propio (Λ)

Conjunto de vectores que satisfacen $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

Calculo VAPS & VEPS

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = 0$

$(A - \lambda \underbrace{I}_{\text{Identidad}})\vec{x} = 0$

- Si fuese compatible determinado y solo tuviese la solucion trivial no nos serviria porque $\vec{x}$ no puede ser $\vec{0}$

Polinomio caracteristico de la matriz A

Polinomio de grado n que surge de calcular $\det \underbrace{(A - \lambda I)}_{\text{basicamente es resta } \lambda \text{ a toda la diagonal}}$

Ecuacion caracteristica de A

$\det(A - \lambda I) = 0$

Las $\underbrace{n}_{\text{Soluciones reales o complejas}}$ soluciones son los vaps de la matriz

Multiplicidad Algebraica de los valores propios

Es el numero de veces que aparece λ_i (vap) como solución de la ecuación caracteristica.

Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ λ es el valor propio del endomorfismo f si y solo si $\det(f - \lambda \cdot Id) = 0$ donde Id es la AL Identidad

$(A - \lambda_i I)\vec{x} = 0$ → Compatible indeterminado

Subespacio propio asociado a cada valor propio

- Si $\vec{x}, \vec{y}$ son 2 vectores propios cualesquiera de la matriz A asociados al mismo vap λ

  $\vec{x}+\vec{y}$ tambien es un vector propio asociado a λ

- Si $\vec{v}$ es un vep de la matriz A asociada al vap λ, tambien lo es cualquier otro vector de la forma $\mu\vec{x}$ donde μ es un escalar no nulo.

Subespacio propio asociado a un vap.

{veps} asociados al vap λ junto con $\vec{0}$ constituyen un espacio vectorial E (subespacio propio asociado al valor propio λ) $\rightarrow H_{\lambda_i}$

Multiplicidad Geometrica de un VAP

dimension del subespacio propio asociado a un vap

$\dim(H_{\lambda_i})$

Para cada vap debemos tener en cuenta

- Multiplicidad Geometrica
- Multiplicidad Algebraica

} Para diagonalizar

Propiedades VAPS y VEPS III

- Suma de los n valores propios de una matriz es igual a su traza
- Los valores propios de una matriz y su transpuesta coinciden
- El producto de los n valores propios de una matriz es igual a su determinante
- Dos matrices semejantes tienen la misma ecuación característica y por tanto mismos vaps
- Triangular tiene de vaps los elementos de la diagonal principal
- Vaps diferentes tienen veps LI
- Un mismo vep no puede estar asociado a dos vaps

Teorema

$$1 \leq \overbrace{\dim(H_i)}^{\text{Multiplicidad geometrica}} \leq \underbrace{n_i}_{\text{Multiplicidad Algebraica}}$$

Si n_i es 1 entonces $\dim(H_i)$ siempre sera 1 es decir solo tiene 1 vap

dados $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ vaps diferentes de la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $u_1 \cdots u_r$ veps asociados con ella entonces $u_1 \cdots u_r$ son LI

Ejercicio 2 - Demostración

Teorema Cayley-Hamilton

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\quad \underbrace{p_A(x)}$ $= |A - xI_n| = p_f(x)$ f-A

Teorema

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$p_A(A) = 0$ $\quad p(A - AI) = 0$

Nos permite expresar la inversa sin hacer el procedimiento normal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{K}$$

polinomio característico

$$p_A(x) \quad \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & -1 \\ -1 & 1 & a-x \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$

$-x^3 + ax^2 - 2x + 1$

$p_A(A) = 0 \rightarrow -A^3 + a \cdot A^2 - 2A + I_3 = 0$

Es una suma de matrices, por lo que debemos sustituir el 1 por la identidad (2 por $2I_3$ ...)

$|A| = p_A(0) = 1 \neq 0 \leftarrow$ Es invertible

* **EL TERMINO INDEPENDIENTE DEL POLINOMIO CARACTERISTICO ES EL DETERMINANTE**

$I_3 = A^3 - aA^2 + 2A \Rightarrow A^{-1} = (A^3 - aA^2 + 2A) \cdot A^{-1} = A^2 - a \cdot A + 2I_3$

$$\boxed{A^{-1} = A^2 - aA + 2I_3}$$

Teorema Diagonalización

λ = vaps

$$\boxed{P(x) = \det(A - xI) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_r)^{n_r}}$$

$n_1 \dots n_r$: multiplicidad algebraica

con $\boxed{n_1 + \cdots + n_r = n}$ y cada $i = 1 \cdots r$

$$n_i = \dim(H_{\lambda_i})$$

Esto quiere decir:

- El polinomio característico descompone totalmente en factores lineales
- La multiplicidad de cada uno de estos factores lineales coincide con la dimensión del respectivo subespacio asociado

Del punto de vista M

A sea diagonalizable es que para cada vap λ_i su multiplicidad algebraica n_i coincida con su multiplicidad geométrica $\dim(H_{\lambda_i})$

* Si una matriz tiene vaps diferentes uniendo las bases de todos sus subespacios propios se obtiene una base de E

$$\{B_{H\lambda_1} \cdots B_{H\lambda_r}\} = B_E$$

! Si A tiene n vaps diferentes habrá n veps LI y por tanto A será diagonalizable.

Reserva ampliación

Algoritmo Diagonalización

Resumen.

A sera diagonalizable si todos sus vaps son numeros reales o complejos y se cumple una de los siguientes dos condiciones

- ▷ Todos los vaps son diferentes

o

- ▷ Los vaps son multiples y las multiplicidades algebraicas y geometricas son iguales para todos ellos.

Ademas la matriz D contendra en su diagonal principal los vaps de A cumplira la siguiente igualdad.

$$\underline{\overline{D = (VP)^{-1} A (VP)}}$$

Siendo:

$\underline{D} \to$ matriz con vaps de A por diagonal

$\underline{VP} \to$ matriz que tiene por columnas los n "vectores propios LI" de A

* Los vaps de D deben ir en el mismo orden que sus veps en la matriz de cambio de base VP

Procedimiento Diagonalización

1. Encontrar el polinomio característico

Polinomio de grado n que surge de calcular $\det\underbrace{(A - \lambda I)}_{\substack{\text{basicamente} \\ \text{es restar } \lambda \text{ a toda} \\ \text{la diagonal}}}$

2. Obtener las raíces de la ecuación característica es decir, sus "λ" (vaps) y sus multiplicidades Algebraicas n_i

⊢ Calcular cuantas veces sale el vap como solucion del polinomio característico

3. Resolver para cada λ_i el sistema $(A-\lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ para encontrar los veps

despejamos el vector $\vec{x}$ que sera el vector propio (vep)

4. Si $\underbrace{n_i}_{\substack{\text{dim} \\ \text{algebraica}}} = \underbrace{\dim(H_{\lambda_i})}_{\substack{\text{dim} \\ \text{geometrica}}}$ $\forall \lambda_i$ es diagonalizable

5. La matriz D tiene como elementos de la diagonal principal los vaps de la matriz A y $D = (VP)^{-1} A (VP)$ donde la matriz VP es la matriz que tiene por columnas los n veps LI de A en el mismo orden que los vaps en D

$$\underline{D = (VP)^{-1} A (VP)}$$

Siendo:

$\underline{D}$ → matriz con vaps de A por diagonal

$\underline{VP}$ → matriz que tiene por columnas los n "vectores propios LI" de A

Diagonalización Ortogonal

Diagonalización Ortogonal

Las matrices reales simetricas son siempre diagonalizables.

Es decir, tienen una base de vectores propios

y ademas tiene una base ortonormales.

Matriz ortogonal

Su inversa y transpuesta coinciden

$$Q^{-1} = Q^{t}$$

Matriz ortogonalmente diagonalizable

Si tiene una base de vectores propios ortonormales

$Q^{t} A Q$ = matriz diagonal que en su diagonal tiene los valores propios de A

Teorema

Si A es una matriz cuadrada real simetrica de orden n, se verifica:

1.- Vaps son reales
2. Veps asociados a vaps diferentes son ortogonales
3. Tiene n veps. Es decir es diagonalizable
4. Tiene n veps ortonormales. Es decir, A es ortogonalmente diagonalizable.

//

Ejercicio Diagonalización Completo

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ + simetrica

Diagonaliza octogonalmente

$a \in \mathbb{R}$