MATRICES

→ Coeficientes de la Matriz

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

a_{ij}

$$\begin{cases} i \to \text{fila} - m \\ j \to \text{columna} - n \end{cases}$$

→ Conjunto de Todas las matrices

$M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to$ Conjunto de todos las matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$

Una matriz cualquiera de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se denotara undistintamente por A, (a_{ij}) o $[a_{ij}]$

Cuando $m = n$ de todo $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ se denota como simplemente $M_n(\mathbb{K})$ y se dice que son de orden "n" en lugar de "$n \times n$"

IGUALDAD DE MATRICES

Para ser iguales deben ser exactamente iguales

y cada $a_{ij} = b_{ij}$ así como de mismo

$m \times n$

TIPOS MATRICES

▷ Matriz Fila:

Conocida como vector es una matriz de una sola fila

$(1, 2, 3 \ldots)$

▷ Matriz Columna:

$$\begin{pmatrix} 1, \\ 2, \\ 3 \end{pmatrix}$$

▷ Matriz Nula o "0": matriz de todo ceros

▷ Matriz cuadrada: M_n donde $n = m$

Diagonal principal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: matriz cuadrada con todo 0 fuera de la diagonal principal

Matriz escalar: matriz diagonal que tiene el mismo numero en toda la diagonal

TIPOS MATRICES II

- **Matriz Identidad:** Matriz escalar con valor 1 en la diagonal.

- Matriz triangular superior: por debajo de la diagonal es 0

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$$

- Matriz triangular inferior

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$$

- Las matrices triangulares no tiene' porque ser cuadrados. Siempre y cuando cumplan con la de arriba

.

Matrices diagonales y triangulares

- Si $AB = BA$ es diagonal
- Si A, B son triangulares superiores AB también

Buscar matrices diagonales porque son <u>conmutativas</u> ya que los otros no lo son.

Algebra Lineal: "Busqueda de las matrices diagonales o en su defecto la matriz triangular

- Matriz Transpuesta
  - Cambiamos fila por columna (i por j)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Ej:

a_{13} $\qquad$ a^t_{31}

$$(A^t)^t = A$$

Transpuesta de una suma

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)^t = \sum_{i=1}^{r} A_i^t$$] Sumatorio de A_1^t hasta A_r^t

Transpuesta del Producto

$$(AB)^t = \underbrace{B^t \circ A^t}_{\text{El orden se ha cambiado}}$$

7 MATRICES {CUADRADAS}

*Todos los siguientes puntos se refieren únicamente a matrices cuadrados

▷ Transposición como operación interna

La transposición de una matriz cuadrada es otra matriz cuadrada.

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$A^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

▷ Matrices Simetricas

$$A = A^t \Rightarrow \forall i,j \quad a_{ij} = a_{ji}$$

▷ Matriz antisimetrica

$$(-A) = A^t \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

▷ Matriz Invertible o Regular

$$\underbrace{A^{-1}}_{\text{Matriz Inversa de A}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tal que } AA^{-1} = A^{-1}A = \underbrace{I_n}_{\text{Identidad de Matriz}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \underbrace{I_3}_{\text{Identidad de orden 3}}$$

MATRICES CUADRADAS

- **Matriz Singular**

  No tiene inversa

- **Matriz Ortogonal**

  Es regular y su inversa coincide con la transpuesta

$$AA^t = A^t A = I_n$$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad AA^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

OPERACIONES ELEMENTALES
Y
MATRICES ESCALONADAS

▷ Matriz escalonada por filas

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es escalonada por filas si se cumple:

- El pivote (primer elemento no nulo) esta a la derecha del pivote de la fila superior
- Las filas nulas estan en la parte inferior de la matriz

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA

▷ Los pivotes son todos 1

▷ El resto de numeros en la <u>columna</u> del pivote son ceros

OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS

- ▷ Multiplicar una fila por un $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$
- ▷ Intercambiar 2 filas
- ▷ Sumar un multiplo de una fila a otra

→ Matrices equivalentes por filas

- ▷ Toda matriz es equivalente a una matriz escalonada (filas o columnas respectivamente)
- ▷ lo mismo pero escalonada reducida

Metodo de Gauss

1. Si $a_{11} \neq 0$, se divide la primera fila por a_{11} y se obtiene una matriz equivalente en la que $a_{11} = 1$.

   Por lo que este a_{11} sera el primer pivote

   1.2 Se resta a cada fila la primera fila multiplicada por a_{i1}. Asi la primera resta de elementos sera 0 y se pasa al punto 4

2. Si $a_{11} = 0$, se busca el primer i tal que $a_{i1} \neq 0$ se intercambia la primera fila y la i obteniendo una matriz $a_{11} \neq 0$. Vamos al punto 1 y repetir

3. $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1 \dots m$, dejamos la primera columna de 0 y aplicamos el algoritmo a la matriz sin la 1ª columna

$i \to$ fila m
$j \to$ col n

4. Repetir el proceso a la matriz obtenida de eliminar la primera fila y columna

restamos a cada fila $a_{1j} \times a_{i1}$.

1. $a_{11} \neq 0$? Si $\to$ a_{1j}/a_{11} donde $j = 1 \dots n$ $\to$ $\boxed{4}$

   No $\to$ $a_{11} = 0$ buscamos primera $a_{i1} \neq 0$
   Intercambiamos esta fila con la 1ª
   $\boxed{\text{repetir } 1}$

   $a_{i1} = 0$ donde $i = 1 \dots m$ ignoramos la 1 columna y repetimos desde $\boxed{1}$

4. Repetir eliminando primera fila y columna.

Metodo Gaus

- Co el metodo de gaus se obtiene la unica escalonada equivalente.

- Para obtener la reducida si hay elementos distintos de 0 por encima de la fila del pivote se resta a la fila de ese elemento la fila del pivote multiplicado por a_{ij}.

Rango de una Matriz

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

Rango: numero de filas no nulas de su matriz escalonada.

Calculo Matriz Inversa

Las matrices cuadradas

- A es invertible
- Rango $(\cos(A)) = n$
- la matriz escalonada reducida es la identidad (I_n)