

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова**
Механико-математический факультет



Кафедра прикладной механики и управления
Лаборатория управления и навигации

Определение траектории по показаниям инерциальных датчиков

Компьютерный практикум по прикладной механике

А.В. Козлов,
под ред. А.А. Голована

Москва – 2019

1 Инерциальная навигация

*«Когда человек не знает, к какой пристани он
держит путь, для него ни один ветер не будет
попутным»*

Сенека

Термин «навигация» (от латинского *navigō* — плыву на корабле) может быть переведен как искусство кораблевождения¹. Важность дальних плаваний для человечества когда-то выразил римский полководец Помпей, отправляясь в морской поход в сильную бурю, словами «*Navigare necesse est, vivere non est necesse!*», что в переводе значит «Плыть необходимо, а жить — нет!» Навигационные приборы, то есть устройства, которые используются для определения положения движущегося объекта, создавались и совершенствовались вместе с развитием средств передвижения. Долгое время отсутствие точной информации о местоположении было серьёзным препятствием на пути развития авиации. Многие поколения моряков и летчиков мечтали о навигационной системе, которая бы не зависела от видимости звезд и земных ориентиров, от капризов погоды и искусства штурмана, и действительно могла бы быть путеводной звездой, «светящей в тумане».

Становилось все более очевидным, что решение навигационных задач не менее важно для современных подвижных объектов, чем вопросы создания новых конструкций, двигателей и тому подобных. Создание автономной навигационной аппаратуры стало одним из важнейших направлений в развитии авиационной и космической техники, при создании подводного флота.

В настоящее время, когда стали широко доступны средства спутниковой навигации, тем не менее, инерциальные навигационные системы (ИНС) остаются актуальными там, где требуется определять не только координаты объекта, но и его ориентацию в пространстве, а также в случаях, когда невозможен приём спутниковых навигационных сигналов или когда навигационное решение не должно зависеть от работоспособности навигационных спутников: под водой, в нефте- и газопроводах, подземных туннелях, при управлении ро-

¹Здесь и далее текст введения частично приведён по статье д.ф.-м.н., профессора Ю.Г. Мартыненко «Инерциальная навигация», Соросовский образовательный журнал, №8, 1998 г.

1 Инерциальная навигация

ботами в помещении, в авиации, космических полётах, и в некоторых других областях.

Автономное счисление траектории возможно благодаря наличию в составе ИНС двух типов инерциальных датчиков:

- 1) ньютонаометров (акселерометров), измеряющих проекции удельной (на единицу массы) силы реакции, действующей на объект со стороны других тел, на оси чувствительности датчиков;
- 2) датчиков угловой скорости (ДУС), часто называемых гироскопами, измеряющих проекции вектора абсолютной угловой скорости объекта на оси чувствительности датчиков.

Имея указанные измерения, начальные условия и уравнения движения, кажется, остаётся только численно интегрировать их, вычисляя ориентацию, вектор скорости и положение объекта в каждый момент времени. Однако, дело обстоит не совсем так просто.

Во-первых, существенной особенностью ньютонаометров (акселерометров) является тот факт, что ими измеряются только силы реакции со стороны других тел. Между тем на движение объекта относительно Земли влияют, например, гравитация и собственное движение Земли. Поэтому в инерциальной навигации приходится дополнительно вводить в уравнения модель движения Земли и модель её гравитационного поля.

Во-вторых, из-за необходимости приведения модельной силы тяжести, вектора угловой скорости Земли и измеряемых сил реакции к одной системе координат, требования к точности определения ориентации оказываются значительно выше, чем может показаться на первый взгляд. Даже погрешность измерения угловой скорости порядка $1/1000$ от скорости вращения Земли, т.е. всего лишь сотые доли градуса за час, оказывается существенной для автономной инерциальной навигации.

В-третьих, особенностью инерциальной навигации является отсутствие полного набора начальных условий для уравнений движения. Если координаты точки начала движения, как правило, известны, то его ориентацию требуется определять автономно по показаниям всё тех же инерциальных датчиков.

Здесь и далее под решением навигационной задачи мы будем понимать определение координат, вектора скорости и ориентации объекта, движущегося вблизи поверхности Земли, по показаниям ньютонаометров и датчиков угловой скорости при известных координатах точки начала движения. Задача компьютерного практикума состоит в получении модельных измерений инерциальных датчиков в процессе имитации полёта воздушного судна и решении навигационной задачи по ним.

2 Навигационная модель Земли и системы координат

Для околоземной навигации в качестве навигационной модели формы Земли используется эллипсоид вращения, малая ось которого совпадает с осью вращения Земли. Наиболее широко распространённый в мире (в том числе в системе спутниковой навигации GPS) модельный эллипсоид WGS-84 имеет следующие параметры:

$a = 6\,378\,137$ м — большая полуось,

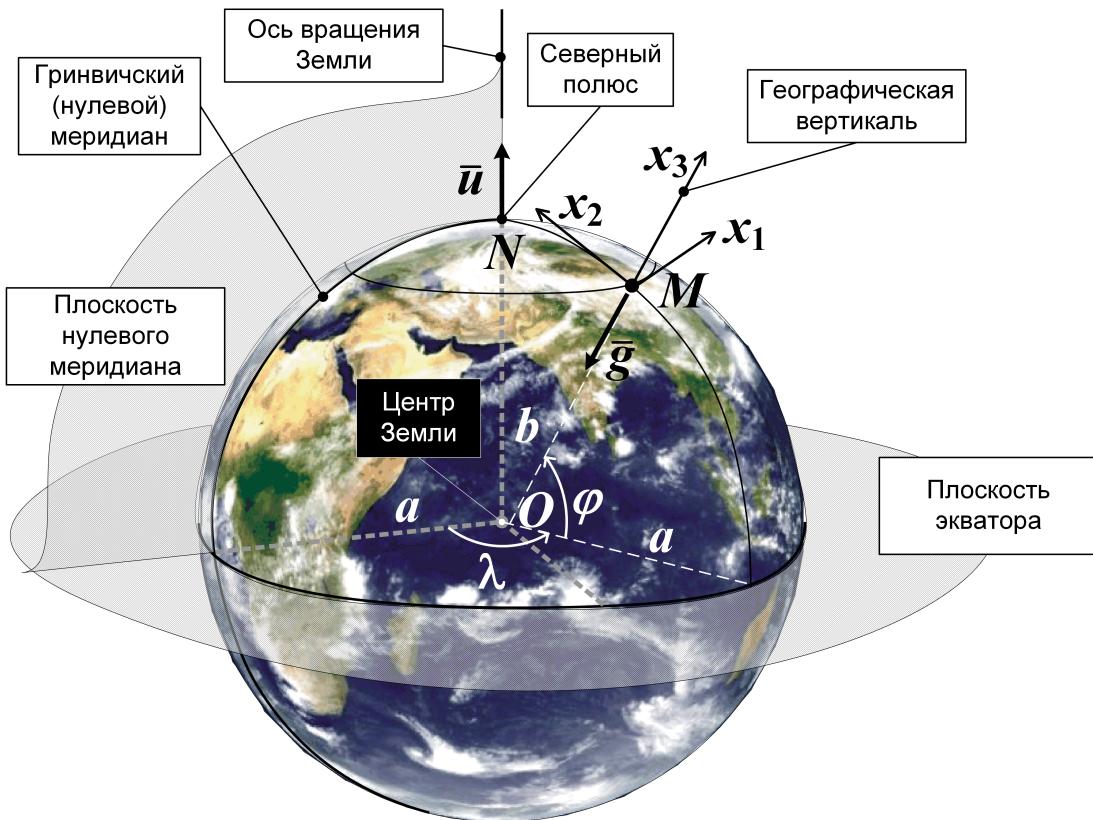
$e^2 [= (a^2 - b^2)/a^2] = 6.6943799901413 \cdot 10^{-3}$ — квадрат эксцентриситета,

b — малая полуось.

Следует отметить, что эксцентриситет эллипса Земли невелик (её форма действительно близка к шару), однако разница в длине полуосей составляет примерно 22 км — величину, которую нельзя не учитывать при решении современных навигационных задач.

Пусть объект, для которого решается навигационная задача, расположен в точке M , а O — центр модельного эллипса Земли (см. рисунок). Кратчайшая нормаль к поверхности эллипса, проходящая через точку M , называется *географической вертикалью*. Ортогональная ей касательная к эллипсу плоскость называется *горизонтальной*. С модельным эллипсом и с объектом, для которого решается навигационная задача, связем географические координаты φ, λ, h , географический трёхгранник Ox и приборную систему координат Mz .

Географические координаты. Исторически для точек вблизи поверхности Земли используются следующие криволинейные координаты: северная широта φ — угол между географической вертикалью и плоскостью экватора, отсчитываемый от плоскости экватора к северу; восточная долгота λ — угол между проекцией географической вертикали на плоскость экватора и плоскостью нулевого меридиана (сечения эллипса, проходящего через ось вращения



и Гринвичскую обсерваторию в Великобритании), отсчитываемый от нулевого меридиана к востоку; географическая высота h — координата вдоль географической вертикали, измеряемая от поверхности эллипсоида. На полюсах Земли географическая долгота не определена.

Географический трёхгранник. Введём трёхгранник $Mx_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Mx_3 совпадала с географической вертикалью (в направлении от центра Земли), ось Mx_2 была касательной к поверхности эллипсоида в направлении на север, а Mx_1 — на восток. На полюсах Земли эта система координат не определена.

Одновременно с трёхгранником Mx рассмотрим систему координат Ox с началом в точке O , осями которой параллельны соответствующим осям трёхгранника Mx . Систему Ox назовем системой, связанной с географической вертикалью. Она изменяет свою ориентацию (вращается) относительно Земли при движении точки M .

Декартовы координаты. Положение точки M относительно трёхгранника Ox будем задавать тройкой координат — столбцом $x = [x_1, x_2, x_3]^T$.

Модель силы тяжести Земли. По построению модельный эллипсоид Земли является эквипотенциальной поверхностью модельного поля силы тя-

жести. Таким образом, последняя направлена перпендикулярно поверхности эллипсоида, т.е. вдоль географической вертикали. В географическом трёхграннике так называемое *нормальное* (без учёта аномалий) поле удельной силы тяжести (т.е. ускорения силы тяжести) имеет координаты $g_x = [0, 0, -g']^T$. Модельное значение g' ускорения силы тяжести определяется с учётом его зависимости от широты и высоты, например, по формуле, названной в честь немецкого геодезиста Фридриха Роберта Гельмерта с поправкой, введённой Институтом физики Земли РАН:

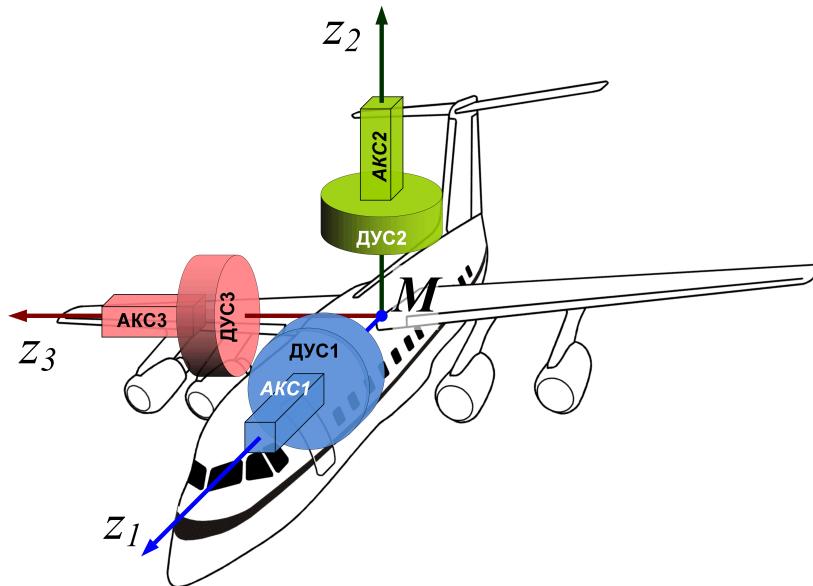
$$g' = g_e \left(1 + \beta_1 \sin^2 \varphi - \beta_2 \sin^2 2\varphi - 2 \frac{h}{a} \right) - \Delta g,$$

где $g_e = 9.78030 \text{ м/с}^2$, $\beta_1 = 5.302 \cdot 10^{-3}$, $\beta_2 = 7 \cdot 10^{-6}$, $\Delta g = 14 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$.

Вращение Земли. За сутки Земля делает полный оборот вокруг своей оси вращения, и ещё около $1/365.25$ части полного круга (дугу орбиты, пройдённую за сутки), поскольку сутки по определению равны интервалу времени между моментами, когда произвольная точка на земной поверхности одинаково расположена по отношению к направлению на Солнце. Таким образом определяется модельная величина угловой скорости Земли.

Приборный трёхгранник. Удельная сила реакции, измеряемая ньютонометрами, и вектор абсолютной угловой скорости, измеряемый датчиками угловой скорости, определяются в проекциях на оси правого ортогонального трёхгранника $Mz_1z_2z_3$, жестко связанного с рассматриваемым объектом и называемого *приборным* (см. рисунок). Традиционно в авиации используются следующие приборные оси. Ось Mz_1 является пересечением плоскости симметрии самолёта и плоскости крыльев и направлена от хвоста к носу. Ось Mz_2 перпендикулярна плоскости крыльев и направлена от шасси. Ось Mz_3 дополняет тройку до правой ортогональной.

Углы ориентации. Ориентацию приборного трёхгранника Mz относительно трёхгранника Mx в авиации исторически принято определять тремя углами — углом истинного курса ψ , тангажа θ и крена γ . Углом истинного курса ψ называется угол между осью Mx_2 (направлением на Север) и проекцией продольной оси Mz_1 летательного аппарата на горизонтальную плоскость Mx_1x_2 , отсчитываемый к Западу. Истинный курс не определён, когда продольная ось совпадает с географической вертикалью и на географических полюсах Земли. Тангаж θ — угол между продольной осью Mz_1 и горизонтальной плоскостью Mx_1x_2 , отсчитываемый от этой плоскости вверх. Крен γ



— угол поворота оси Mz_2 вокруг оси Mz_1 в положительном направлении от вертикальной плоскости Mx_3z_1 . Угол крена также не определён, когда продольная ось самолёта совпадает с географической вертикалью. Таким образом введённые углы определяют следующую последовательность поворотов:

$$Mx \xrightarrow[3]{\pi/2-\psi} \xrightarrow[2]{-\theta} \xrightarrow[1]{\pi/2+\gamma} Mz,$$

где для каждого поворота над стрелкой указан угол, а под стрелкой — ось, вокруг которой происходит поворот. Для определённости примем

$$-\pi < \psi \leq +\pi, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2, \quad -\pi < \gamma \leq +\pi.$$

Матрица ориентации. Поскольку при параметризации ориентации тремя углами неизбежно вырождение, в реальных навигационных алгоритмах используются кватернионы ориентации или матрицы ориентации². Введем ортогональную матрицу L , определяющую ориентацию трехгранника Mz относительно трехгранника Mx . По определению матрицы ориентации для любого вектора \bar{l} , заданного в географических осях тройкой координат l_x , тройка координат в приборном трёхграннике l_z имеет вид

$$l_z = L l_x.$$

В силу ортогональности L при обратном преобразовании координат используется транспонированная матрица:

$$l_x = L^T l_z.$$

²В бортовых алгоритмах БИНС чаще всего используются кватернионы, однако их рассмотрение выходит за рамки данного пособия.

Матрица перехода может быть выражена через введённые выше углы курса, тангажа и крена:

$$L = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \\ -\sin \theta \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma & -\sin \theta \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma & \cos \theta \cos \gamma \\ \sin \theta \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma & \sin \theta \cos \psi \sin \gamma - \sin \psi \cos \gamma & -\cos \theta \sin \gamma \end{bmatrix}.$$

Обратный переход от матрицы к углам возможен при $|\theta| \neq \pi/2$ на основе следующих соотношений:

$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{L_{11}}{L_{12}}, \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{L_{13}}{\sqrt{L_{11}^2 + L_{12}^2}} = \frac{L_{13}}{\sqrt{L_{23}^2 + L_{33}^2}}, \quad \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{-L_{33}}{L_{23}}.$$

Значения углов определяются соответствующими арктангенсами с учётом знаков числителя и знаменателя, а также возможного равенства нулю знаменателя. Для этого в большинстве программных пакетов имеется функция `atan2(sin, cos)` с двумя аргументами — числителем и знаменателем дробей в приведённых выше формулах.

3 Решение навигационной задачи

3.1 Приборная основа инерциальной навигации

Как уже было сказано, инерциальная навигационная система состоит из:

- трёх ньютонаометров с взаимно перпендикулярными осями чувствительности; каждый из ньютонаометров измеряет соответствующую проекцию удельной силы реакции, действующей на чувствительную массу ньютонаометра со стороны других тел; например, для неподвижного относительно Земли объекта удельная сила реакции противоположна и равна по норме ускорению силы тяжести; для тела, находящегося в свободном падении, она равна нулю;
- трёх датчиков угловой скорости (ДУС) с взаимно перпендикулярными осями чувствительности; ДУС измеряют проекции абсолютной угловой скорости объекта на свои оси чувствительности; например, ДУС неподвижно стоящего на земле самолёта измеряют угловую скорость вращения Земли;
- бортового вычислителя, решающего навигационную задачу.

В составе ИНС, конечно, имеется и другая вспомогательная аппаратура. Исторически первые инерциальные навигационные системы строились на базе гиростабилизированной горизонтируемой платформы в кардановом подвесе. Современные системы такой платформы не содержат и называются *бескарданными* инерциальными навигационными системами (БИНС). Примем, что оси чувствительности датчиков совпадают с приборными осями Mz_1 , Mz_2 , Mz_3 .

Как упоминалось во введении, с помощью показаний инерциальных датчиков в бортовом вычислителе необходимо решить следующие задачи:

- определение начальных условий для уравнений движения, а именно начальной ориентации объекта относительно Земли — *задача начальной выставки*;
- определение ориентации объекта относительно Земли в процессе движения — *числение ориентации*;
- определение координат и вектора скорости объекта в процессе движения — *интегрирование динамических уравнений движения*.

Рассмотрим перечисленные задачи по очереди. Начальные значения φ_0 , λ_0 , h_0 для широты, долготы и высоты точки M будем считать известными.

3.2 Начальная выставка

Перед началом движения самолёт некоторое время неподвижен. Это значит, в частности, что приборный трехгранник Mz неподвижен относительно вращающейся Земли. При этом ньютонометры измеряют удельную силу реакции опоры, компенсирующую силу тяжести, а ДУС — угловую скорость вращения Земли. Реакция опоры и гравитационное ускорение в сумме обеспечивают круговое движение объекта вместе с Землёй вокруг её оси вращения, что и означает неподвижность относительно Земли. Удельная сила реакции опоры и угловая скорость Земли измеряются в проекциях на приборные оси Mz . Обозначим тройку измерений ньютонометров f'_z , а тройку показаний датчиков угловой скорости ω'_z .

Заметим, что столбцы матрицы ориентации L — это координаты ортов опорной географической системы координат в приборных осях. Первый орт направлен на восток, а значит ортогонален векторам угловой скорости Земли и реакции опоры. Третий орт направлен вверх по географической вертикали, то есть сонаправлен с реакцией опоры. Второй есть их векторное произведение. Все они имеют единичную длину. Таким образом, для неподвижного объекта с идеальными инерциальными датчиками:

$$L = \begin{bmatrix} \omega_z \times f_z & f_z \times [\omega_z \times f_z] & f_z \\ \|\omega_z \times f_z\| & \|f_z \times [\omega_z \times f_z]\| & \|f_z\| \end{bmatrix},$$

где ω_z и f_z — измеряемые инерциальными датчиками величины, не содержащие погрешностей.

Однако для реальной БИНС необходимо учитывать, что сигналы инерциальных датчиков помимо полезных сигналов ω_z , f_z содержат ещё и случайные

3 Решение навигационной задачи

погрешности. Для хорошо откалиброванных датчиков среднее значение погрешности близко к нулю, и тем ближе, чем больше измерений используется при осреднении. Обычная длительность начальной выставки составляет 3–5 минут.

Пусть $\tilde{\omega}_z$ и \tilde{f}_z — результат осреднения измерений ω'_z и f'_z за время начальной выставки. Тогда для модельного значения $L'(0)$ матрицы ориентации $L(0)$ в начальный момент времени имеем:

$$L'(0) = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_z \times \tilde{f}_z & \tilde{f}_z \times [\tilde{\omega}_z \times \tilde{f}_z] & \tilde{f}_z \\ \|\tilde{\omega}_z \times \tilde{f}_z\| & \|\tilde{f}_z \times [\tilde{\omega}_z \times \tilde{f}_z]\| & \|\tilde{f}_z\| \end{bmatrix}.$$

Итак, начальная матрица ориентации получена.

3.3 Счисление ориентации

Изменение матрицы A ориентации любого трёхгранника относительно некоторой системы отсчёта подчиняется так называемому кинематическому уравнению Пуассона:

$$\dot{A} = \hat{\omega} A, \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & +\omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & +\omega_1 \\ +\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты вектора относительной угловой скорости трёхгранника в собственных осях. Это уравнение представляет из себя формулу для поля относительных скоростей точек вращающегося твёрдого тела, записанную для трёх координатных ортов. Умножение матрицы $\hat{\omega}$ на координатный орт есть векторное произведение угловой скорости на него с обратным знаком.

Таким образом, для матрицы ориентации A_z приборного трёхгранника и для матрицы ориентации A_x географического трёхгранника относительно некоторого инерциального, учитывая сложение угловых скоростей для географического трёхгранника, выполнено:

$$\dot{A}_z = \hat{\omega}_z A_z, \quad \dot{A}_x = (\hat{\Omega}_x + \hat{u}_x) A_x,$$

где u_x — вектор угловой скорости Земли, а Ω_x — вектор угловой скорости географического трёхгранника относительно Земли, имеющие в географическом трёхграннике компоненты:

$$u_x = [0 \quad u \cos \varphi \quad u \sin \varphi]^T, \quad \Omega_x = \left[\frac{-V_2}{R_N + h} \quad \frac{V_1}{R_E + h} \quad \frac{V_1 \operatorname{tg} \varphi}{R_E + h} \right]^T.$$

Здесь V_1, V_2 — горизонтальные компоненты вектора скорости самолёта относительно Земли в географических осях, а радиусы кривизны R_N и R_E соответствующих сечений модельного эллипсоида Земли равны

$$R_E = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad R_N = \frac{a(1 - e^2)}{\left(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\right)^3}.$$

Очевидно, что при любом выборе инерциального трёхгранника выполнено $L = A_z A_x^T$. В качестве инерциальной системы отсчёта при решении навигационной задачи можно принять начальное положение географического трёхгранника. В этом случае $A_x(0) = E$, $A_z(0) = L(0)$. Далее, имея показания ДУС, необходимо численно интегрировать дифференциальные уравнения для матриц ориентации, приведённые выше, с этими начальными условиями, подставляя вместо истинных величин имеющуюся информацию о них. При этом имеется особенность, делающая невозможным применение стандартных численных методов интегрирования.

Дело в том, что матрицы ориентации в процессе вычислений должны оставаться ортогональными. Однако стандартные методы численного интегрирования не гарантируют этого. Поэтому в инерциальных навигационных системах при счислении ориентации следует пользоваться тем, что дифференциальные уравнения имеют специальный вид, а именно:

$$\dot{A} = \hat{\omega} A, \quad A(0) = A_0.$$

При численном интегрировании в произвольный момент времени t_i матрица ориентации $A_i = A(t_i)$ уже известна и требуется найти матрицу $A_{i+1} = A(t_{i+1})$. Пусть при этом координаты вектора угловой скорости ω в подвижной системе координат на интервале времени $[t_i, t_{i+1}]$ не изменяются и известны. Обычно в инерциальных навигационных системах показания датчиков считываются с частотой 100–500 Гц, т.е. достаточно часто, и предположение о постоянстве вектора угловой скорости на столь коротком интервале времени достаточно близко к истине. В этом случае приведённое выше уравнение является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, и его решение может быть записано через матричную экспоненту, которую мы сразу представим в виде бесконечного ряда Тейлора:

$$A_{i+1} = e^{\hat{\omega} \Delta t} A_i = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{\omega}^k \Delta t^k \right) A_i.$$

Данная формула бесполезна для практического вычисления, так как содержит бесконечную сумму. Однако можно заметить, что для степеней матрицы

3 Решение навигационной задачи

$\hat{\omega}$ выполнено следующее:

$$\forall k \geq 3 \quad \hat{\omega}^k = -\|\omega\|^2 \hat{\omega}^{k-2}.$$

Сгруппировав слагаемые с чётными и нечётными степенями $\hat{\omega}$, получим:

$$A_{i+1} = \left(E + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\|\omega\| \Delta t)^{2m+1}}{(2m+1)!} - \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\|\omega\| \Delta t)^{2m}}{(2m)!} \right) A_i.$$

Бесконечные суммы в скобках есть ряды Тейлора для функций $\sin(\|\omega\| \Delta t)$ и $\cos(\|\omega\| \Delta t) - 1$. После замены рядов на тригонометрические функции, получается окончательная формула:

$$A_{i+1} = \left(E + \frac{\sin(\|\omega\| \Delta t)}{\|\omega\|} \hat{\omega} + \frac{1 - \cos(\|\omega\| \Delta t)}{\|\omega\|^2} \hat{\omega}^2 \right) A_i.$$

Нетрудно проверить, что множитель в скобках является ортогональной матрицей, что обеспечивает сохранение ортогональности матрицы ориентации на каждом шаге численного интегрирования. Таким образом, необходимо при помощи полученной формулы численно интегрировать соответствующие дифференциальные уравнения для A_z , A_x с указанными выше начальными условиями, а затем вычислять искомую матрицу $L = A_z A_x^T$. Такой способ гарантирует её ортогональность, и кроме того будет аналитически точным при постоянной угловой скорости³.

Примечание. При $\|\omega \Delta t\| \approx 0$ следует умножать матрицу ориентации на три матрицы поворота на малые углы $\omega_1 \Delta t$, $\omega_2 \Delta t$, $\omega_3 \Delta t$ вокруг соответствующих осей. Ошибка, возникающая из-за некоммутативности таких поворотов, будет иметь порядок $\|\omega \Delta t\|^2 \ll 1$, а ортогональность матрицы гарантируется ортогональностью сомножителей. Второй вариант состоит в использовании предельных переходов для слагаемых, содержащих тригонометрические функции:

$$A_{i+1} \approx \left(E + \hat{\omega} \Delta t + \frac{1}{2} \hat{\omega}^2 \Delta t^2 \right) A_i,$$

и последующей ортогонализацией матрицы ориентации. В этом случае погрешность предельных переходов будет иметь порядок $\|\omega \Delta t\|^3$, а погрешность ортогонализации — $\|\omega \Delta t\|^4$.

³На самом деле, аналитически точным это решение будет и в более общем случае — когда вектор абсолютной угловой скорости не меняет своего направления в приборных осях. Доказательство этого факта требует более развёрнутых выкладок, которые здесь не приводятся.

3.4 Динамические уравнения движения

В произвольной инерциальной системе отсчёта уравнения движения точки M , имеющей декартовы координаты ξ и абсолютную скорость v_ξ , определяются вторым законом Ньютона:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= v_\xi, & \xi(0) &= \xi_0, \\ \dot{v}_\xi &= g_\xi^0 + f_\xi, & v_\xi(0) &= v_0,\end{aligned}$$

где в правой части второго уравнения специально выделены два слагаемых — вектор g_ξ^0 гравитационного ускорения (не следует путать его с ускорением силы тяжести⁴), *не измеряемого* ньютонометрами, и вектор f_ξ удельной силы реакции, действующей на объект со стороны других тел и *измеряемой* ньютонометрами.

Так как при решении навигационной задачи требуется описать движение объекта *относительно Земли*, то уравнения необходимо записать в подвижных географических осях с учётом формулы сложения скоростей и теоремы Кориолиса. Для координат x и вектора скорости V_x самолёта относительно Земли⁵, записанного в проекциях на оси географического трёхгранника, а также учитывая, что удельная сила реакции измеряется ньютонометрами в приборных осях и в начале движения самолёт неподвижен для проведения начальной выставки, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_x + \hat{\Omega}_x x, & x(0) &= x_0, \\ \dot{V}_x &= (\hat{\Omega}_x + 2\hat{u}_x)V_x + g_x + L^T f_z, & V(0) &= 0.\end{aligned}$$

Теперь, чтобы не приходилось вычислять достаточно абстрактные декартовы координаты точки M в системе координат Ox , будет удобнее заменить первое уравнение в системе на уравнения для географических координат:

$$\dot{\varphi} = \frac{V_2}{R_N + h}, \quad \dot{\lambda} = \frac{V_1}{(R_E + h) \cos \varphi}, \quad \dot{h} = V_3, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \lambda(0) = \lambda_0, \quad h(0) = h_0.$$

Поскольку правая часть уравнений движения может быть вычислена только в дискретные моменты времени t_0, t_1, \dots , в которые поступает информация от инерциальных датчиков, а вычисления необходимо производить в реальном времени, не дожидаясь поступления следующих показаний датчиков, то здесь достаточно самого простого одношагового метода Эйлера.

⁴Ускорение силы тяжести отличается от гравитационного ускорения центробежным слагаемым.

⁵Не следует путать скорость относительно Земли со скоростью относительно географической системы координат, которая сама по себе является подвижной относительно Земли.

4 Выполнение практикума

Выполнение практикума состоит из нескольких этапов: имитация полёта самолёта с записью показаний инерциальных датчиков, построение траектории самолёта по записям показаний инерциальных датчиков, сравнение их с исходной траекторией и зачёт, включающий устные вопросы, моделирование реальных погрешностей в исходных данных навигационного алгоритма (начальных условиях и показаниях инерциальных датчиков) и, при необходимости, модификацию алгоритма обработки навигационных измерений.

4.1 Имитация полёта самолёта

После запуска имитатора на экране появляются панель управления самолётом и окно трёхмерной анимации FlightGear. После завершения полёта



в папке с программой компьютерного практикума появляются файлы траектории и показаний инерциальных датчиков, а на экране — изображение траектории.

Управление обзором

1. Переключение камер в окне FlightGear — клавиша «V».
2. Изменение направления обзора в окне FlightGear:
 - нажимать клавишу «TAB» до появления надписи «Now mouse is controlling view direction»
 - мышью отрегулировать направление,
 - нажать снова «TAB»

Взлёт

Последовательность действий при взлёте следующая:

- 1) начальная выставка — 3–5 минут неподвижности;
- 2) увеличить тягу до 95%;
- 3) установить руль высоты на +3 градуса;
- 4) выключить тормоз на шасси;
- 5) после отрыва и увеличения тангажа до 5–10° установить руль высоты в 0;
- 6) после взлёта уменьшить тягу до 40–60%, контролируя скорость и углы.

Назначение элементов управления и рекомендации

1. **Элероны** управляют моментом вокруг продольной оси самолёта.
2. **Руль высоты** управляет моментом вокруг оси крыльев.
3. **Руль направления** изменяет момент главным образом вокруг оси, перпендикулярной плоскости крыльев, но в силу своего расположения также создаёт момент и по другим осям.
4. **Тяга** всегда направлена по продольной оси самолёта вперёд:
 - тяги недостаточно, чтобы компенсировать вес самолёта, а значит когда нос самолёта направлен вертикально вверх, он будет ускоряться вниз; вес самолёта компенсируется главным образом подъёмной силой;
 - подъёмная сила направлена перпендикулярно плоскости крыльев;
 - подъёмная сила может быть недостаточна на малой скорости.

4.2 Показания инерциальных датчиков

Файл `imu.txt` содержит записи инерциальных датчиков БИНС. Формат файла текстовый, в первой строке — заголовок, содержащий описание содержимого столбцов, вторая и последующие строки содержат время и показания инерциальных датчиков в каждый момент времени.

4.3 Траектория

Файл `trj.txt` содержит запись истинной траектории самолёта для сравнения с ней полученного решения. Формат файла текстовый, в первой строке — заголовок, содержащий описание содержимого столбцов, вторая и последующие строки содержат время, координаты, компоненты скорости и углы ориентации самолёта. Кроме того, создаётся файл `trj.kml` в формате *Keyhole Markup Language*, позволяющий визуализировать траекторию в геоинформационных системах типа *Google Earth* или онлайн, например [nakarte.me](#).

4.4 Дополнительные задания для подготовки к зачёту

1. Предложить и реализовать алгоритм автономного определения широты во время начальной выставки.
2. Вывести в линейном приближении дифференциальное уравнение для ошибки счисления ориентации (кинематической ошибки) — тройки углов малого поворота β такой, что $L' \approx (E + \hat{\beta})L$, где L' — модельная (вычисленная) матрица ориентации.
3. Объяснить неустойчивость вертикального канала БИНС, выведя уравнения ошибок высоты и вертикальной скорости. Предложить и реализовать способы устранения этой неустойчивости.
4. Внести систематические или случайные шумовые погрешности в показания каждого из инерциальных датчиков во время или после начальной выставки. Установить характер зависимостей от их величины ошибок навигационного решения. Объяснить эти зависимости аналитически в линейном приближении.

Удачных полётов!