Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики.

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ.
Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 8 / 1 / 3

Выполнил:
студент 104 группы
Талменев В.А.

Преподаватель:
Смирнов Л. М.

Москва
2023

Содержание

Постановка задачи

Требовалось реализовать численный метод, позволяющий вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ с заданной точностью $\varepsilon = 0.001$.

Для вычисления абсцисс точек пересечения кривых, нужных для нахождения вершин фигуры, использовался методом деления отрезка пополам для решения уравнения $F(x) = 0$.

Площадь плоской фигуры вычислялась с использованием формулы Симпсона (парабол). Отрезок, на котором применялся метод нахождения корней необходимо было вычислить аналитически.

Математическое обоснование

Приведём требования на сходимость методов и оценки точности [1] и обоснуем выбор значений ε_1, ε_2, а также отрезков для поиска точек пересечения кривых.

Анализируя графики всех трёх кривых, легко заметить, в каком диапазоне значений лежит каждый из корней. Для простоты вычислений были выбраны следующие диапазоны: $[-3.0,-2.0]$, $[-2.0,-0.25]$, $[1.0,2.0]$.

Площадь плоской фигуры вычисляется как интеграл, равный сумме определённого интеграла Римана функции $F_1(x) = -5/x - 2 - e^x$ на отрезке от самой крайней точки пересечения кривых слева до средней и определённого интеграла Римана функции $F_2(x) = -2x + 6 - e^x$ на отрезке от средней точки пересечения до самой крайней точки пересечения справа.

Обозначим интеграл на первом отрезке как I_1, а интеграл на втором отрезке как I_2.Тогда площадь плоской фигуры - это $I := I_1+I_2$. Пусть I_1 вычислен без погрешности ,с погрешностью вычисления точек пересечения ς, а I'_1 с погрешностью вычисления точек пересечения ς и погрешностью метода Симпсона вычисления определённого интеграла ε_2. Тогда, используя неравенство треугольника, получим:

$$|I_1 - I_1''| \le |I_1 - I_1' - I_1'' + I_1'| \le |I_1 - I_1'| + |I_1' - I_1''| \le \varsigma + \varepsilon_2$$

$$\int_a^b \left(-\frac{5}{x} - e^x - 2 \right) dx = (-ln(|x|) - e^x - 2x)\Big|_a^b = 5ln\left|\frac{a}{b}\right| + e^a - e^b - 2(b-a)$$

Теперь учтём, что мы ищем корни с погрешностью ε_1, запишем каждый полученный корень как $a + \varepsilon_1$ и $b + \varepsilon_1$ и путём несложных преобразований получим:

$$\int_a^b \left(-\frac{5}{x} - e^x - 2 \right) dx - \int_{a+\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} \left(-\frac{5}{x} - e^x - 2 \right) dx = 5ln\left|\frac{ab + a\varepsilon_1}{ab + b\varepsilon_1}\right| + (e^{\varepsilon_1} - 1)(e^b - e^a)$$

Аналогично получаем формулу для разности интеграла функции $F_2(x)$ без погрешности корней и интеграла функции $F_2(x)$ с погрешностью корней:

$$\int_a^b \left(-2x + 8 + \frac{5}{x} \right) dx - \int_{a+\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} \left(-2x + 8 + \frac{5}{x} \right) dx = 5ln\left|\frac{ab + b\varepsilon_1}{ab + a\varepsilon_1}\right| + 2\varepsilon_1(b-a)$$

Теперь обозначим $2\varepsilon_1(b - a)$. Тогда $\varsigma = min\{\varsigma_1,\varsigma_2\}$. Таким образом, для $\varsigma_1, a = -3, b = -0.25, \varepsilon_1 = 0.000001$ и для $\varsigma_2, a = -0.25, b = 2, \varepsilon_1 = 0.000001$ получим, соответственно, $\varsigma_1 \approx 0.00002$ и $\varsigma_2 \approx 0.00002 \Rightarrow \varsigma \approx 0.00004$

Итак, получили, что $\varepsilon = 0.001 \ge 0.00008+0.0002 = 0.00028 \Rightarrow$ значения ε_1 и ε_2 выбраны верно.

Требования на сходимость методов:

1. Метод деления отрезка пополам. Функция F(x) должна удовлетворять $F(a)$ $F(b)$<0 .

2. Метод Симпсона. Требование: $F(x) \in C^4[a,b]$

Очевидно, что функции $g_1(x) := f_3(x) - f_1(x) = -\frac{5}{x} - e^x - 2, g_3(x) := f_2(x) - f_1(x) = -2x + 6 - e^x$ удовлетворяют требованиям методу деления отрезка пополам и что $\in C^4[a,b]$.

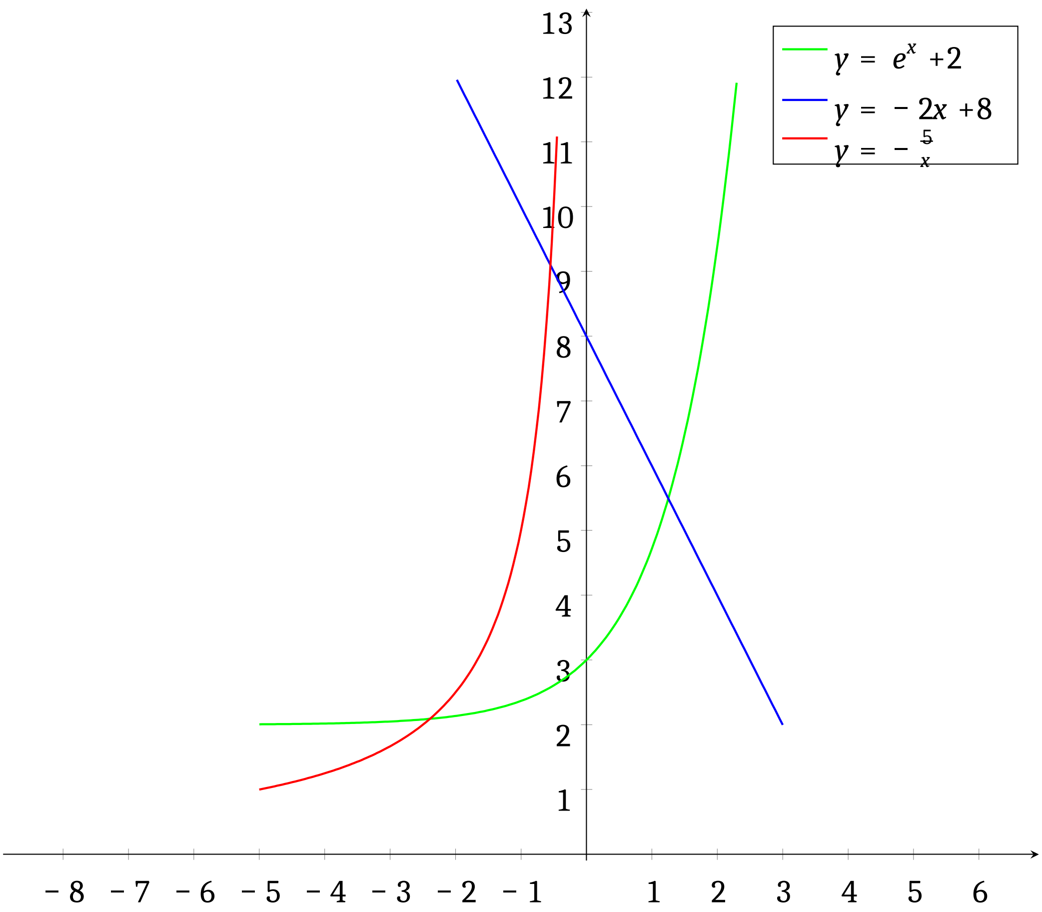

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Результаты экспериментов

Приведём результаты вычислений - координаты точек пересечения (таблица 1) и площадь полученной фигуры (рис. 2).

Кривые	x	y
1 и 3	-2.3905	2.0916
2 и 3	-0.5495	9.0990
1 и 2	1.2518	5.4965

Таблица 1: Координаты точек пересечения

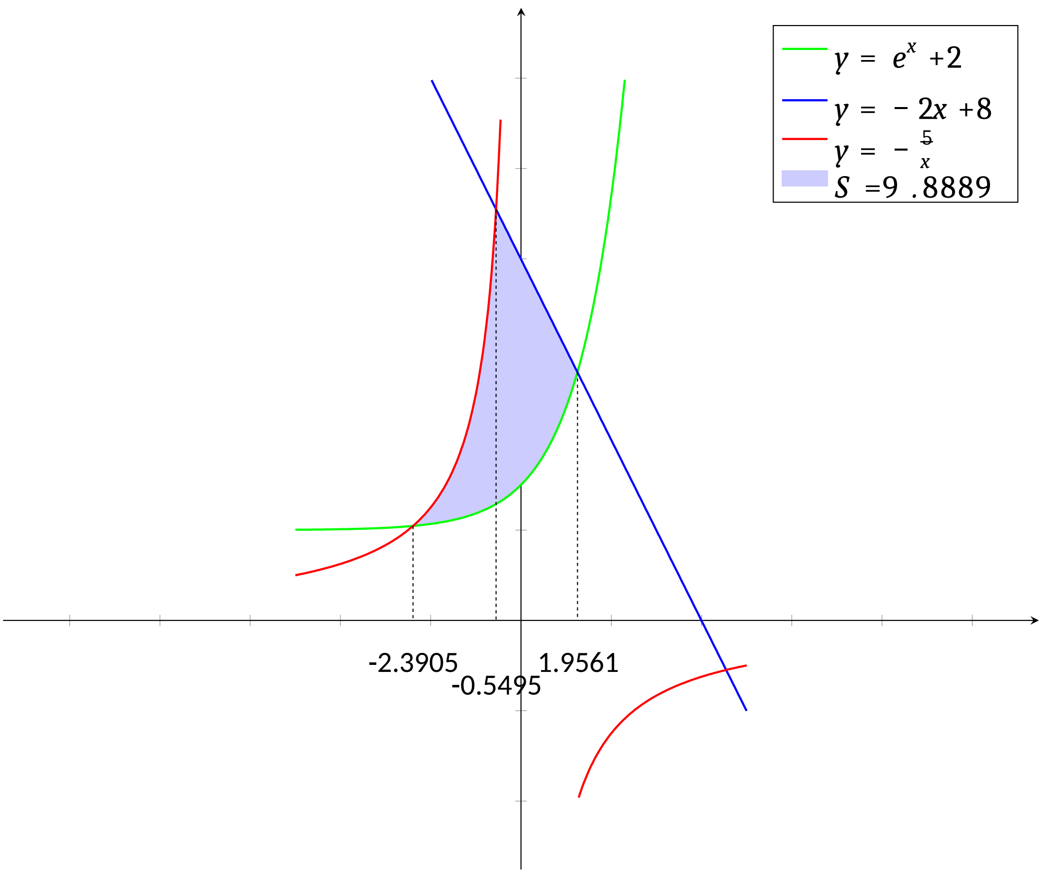

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

В программе для вычисления определенного интеграла методом Симпсона были написаны следующие функции.

1. root - функция поиска точки пересечения двух функций на отрезке методом деления отрезка пополам.
2. integral - функция находит значение определенного интеграла с помощью формулы Симпсона(парабол)от функции на определенном отрезке.
3. print_h - функция , которая выводит все ключи при вводе -h.
4. print_f - функция выводит функции для которых считается площадь при -f.
5. i_a_to_b - Функция, описывающая действия программы, при ключе -i (Нахождение интеграла от определенных функций на заданном пользователем интервале).
6. m_task - Функция выполняет основную задачу - поиск площади фигуры, ограниченной кривыми.
7. f1, f2, f3 - функции из условия задачи.

Сборка программы (Make-файл)

Make-файл, использующийся для сборки программы, содержится в архиве, приложенном к отчёту. Основная программа содержится в файле main.c, описание функций f1, f2, f3 - в func.asm. При сборке оба файла компилируются до объектного кода, а затем линкуются друг с другом и с библиотекой , необходимой для вычислений.

Отладка программы, тестирование функций

Рассмотрим результаты отладки программы и тестирования функций. Было проведено по 3 теста для функции root и integral для разных кривых. В программе реализовывалась соответствующая функция, а затем проводилось тестирование.

1. Функция root.
   (a) Уравнения кривых: $f_1(x) = ln(\frac{1+x^2}{5}), f_2(x) \equiv 0$.
   (b) Уравнения кривых: $f_1(x) = sin(x), f_2(x) = cos(x^2)$.
   (c) Уравнения кривых: $f_1(x) = e^x, f_2(x) = \frac{9}{x^3}$.
2. Функция integral.
   (a) Уравнение кривой: $f(x) = ln(\frac{1+x^2}{5}) - 0$.
   (b) Уравнение кривой: $f(x) = sin(x) - cos(x^2)$.
   (c) Уравнение кривой: $f(x) = e^x - \frac{9}{x^3}$

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы имеются в архиве, который приложен к этому отчету.

Анализ допущенных ошибок

Поначалу функции f1, f2, f3 возвращали -nan из-за того, что в основной программе использовался тип float , а в вычислении функций – double.

Список литературы

[1] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Т.1 — Москва: Наука, 1985

[1] Методические указания о численных методах и их реализации в программе приведены в методическом пособии «Задания практикума на ЭВМ» Трифонов Н.П., Пильщиков В.Н., задание 6.