

# Вероятность разорения в классической модели коллективного риска

Кодзоев М., Куркин М., Шаповалов Р.

Московский Государственный Университет им. Ломоносова

24 апреля 2019 г.

## 1 Описание модели

## 2 Коэффициент Лундберга и теорема о вероятности разорения

## 3 Вычисления

Коэффициент Лундберга

Вероятность разорения

## 4 Приложение

Дополнительные выкладки

Доказательство теоремы

Математическая модель изменения величины рискового резерва на длительном интервале времени:

$$U(t) = u + c(t) - S(t), \quad t \geq 0$$

- $U(t)$  - рисковый резерв в момент времени  $t$ ,
- $u$  - величина рискового резерва в момент времени 0,
- $c(t)$  - величина премий, собранных к моменту  $t$ ,
- $S(t)$  - величина суммарных страховых выплат до момента  $t$ .

Рассмотрим величину суммарных страховых выплат до момента  $t$ :

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$$

- $\{S(t), t \geq 0\}$  - процесс суммарных выплат,
- $\{N(t), t \geq 0\}$  - процесс числа страховых случаев,
- $X_i$  - величина  $i$ -ой страховой выплаты.

Пусть  $t \geq 0$  и  $h > 0$ . Тогда разность  $N(t+h) - N(t)$  является числом страховых случаев, а разность  $S(t+h) - S(t)$  - суммарными страховыми выплатами, которые происходят в интервале между  $t$  и  $t+h$ .

Для моделирования процесса числа страховых случаев  $\{N(t), t \geq 0\}$  воспользуемся пуассоновским процессом, для которого длины интервала времени между последовательными страховыми случаями являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с показательным распределением.

$$\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) = k] = \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^k}{k!} \quad \forall t \geq 0, h > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Из этого определения вытекают следующие свойства:

- 1) Приращения стационарны, то есть распределение  $N(t+h) - N(t)$  не зависит от  $t$ ;
- 2) Для любого множества непересекающихся временных интервалов приращения независимы, то есть для  $t_1 < t_1 + h_1 < t_2 < t_2 + h_2 < \dots < t_n + h_n$  приращения:  
 $N(t_1 + h_1) - N(t_1), N(t_2 + h_2) - N(t_2), \dots, N(t_n + h_n) - N(t_n)$   
взаимно независимы;
- 3) Вероятность того, что несколько страховых случаев произойдет одновременно, равна нулю, то есть:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) > 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h}}{h} = 0$$

Если в  $S(t)$  случайные величины  $X_1, X_2, X_3, \dots$  независимы и одинаково распределены с функцией распределения  $P(x)$ , и если они также независимы от процесса  $\{N(t), t \geq 0\}$ , то процесс  $\{S(t), t \geq 0\}$  называется **сложным пуассоновским процессом**.

## Свойства:

- 1) Если  $t \geq 0$  и  $h > 0$ , то распределение с.в.  $S(t+h) - S(t)$  является сложным пуассоновским с параметром  $\lambda h$  и функцией распределения  $P(x)$ , то есть:

$$\mathbb{P}[S(t+h) - S(t) \leq x] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda h} (\lambda h)^k \frac{P^{*k}(x)}{k!}$$

- 2) В любой момент  $t$  вероятность того, что следующий страховой случай произойдет между моментами  $t+h$  и  $t+h+dh$  и что величина выплат не превосходит  $x$ , равна  $e^{-\lambda h}(\lambda dh)P(x)$ ;
- 3) Приращения процесса  $S(t)$  независимы и стационарны;
- 4)  $\mathbb{E}[S(t)] = \lambda t p_1$ ,  $\mathbb{D}[S(t)] = \lambda t p_2$  (см. 4.1, 4.2).

## Определение 1

Рассмотрим период длины  $t > 0$ , где размер собранной премии равен  $ct$ , а  $S(t)$  - величина суммарных страховых выплат, распределение которой - сложное пуассоновское, причём  $\mathbb{E}N(t) = \lambda t$ . **Коэффициент Лундберга**  $R$  - наименьшее положительное решение уравнения

$$\begin{aligned} M_{S(t)-ct}(r) &= \mathbb{E}[e^{r(S(t)-ct)}] = e^{-rct} M_{S(t)}(r) = \\ &= e^{-rct} e^{\lambda t [M_X(r) - 1]} = 1 \Leftrightarrow \lambda [M_X(r) - 1] = cr \end{aligned} \quad (2.1)$$

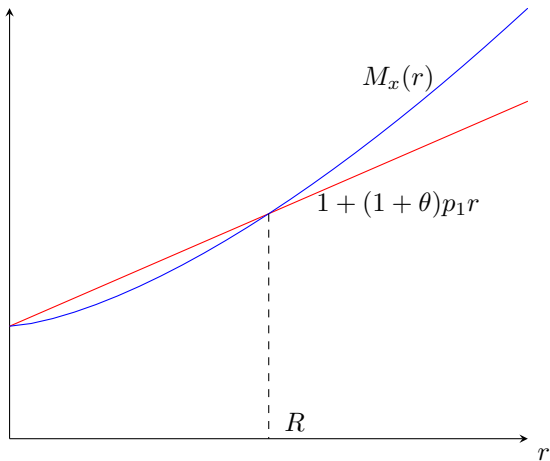
или, при  $c = (1 + \theta)\lambda p_1$ , уравнения

$$1 + (1 + \theta)p_1 r = M_X(r) \quad (2.2)$$

## Определение 2

**Вероятность разорения**  $\psi(u)$  равна  $\mathbb{P}(T < \infty)$ , где  $T = \min\{t : U(t) < 0\}$ . Она выражается с помощью коэффициента Лундберга.





Определение коэффициента Лундберга  $R$

## Теорема о вероятности разорения

Если  $U(t)$  является процессом рискового резерва, его процесс суммарных страховых выплат  $S(t)$  является сложным пуассоновским и если  $c > \lambda p_1$ , т. е. рисковая надбавка положительна, то для  $u \geq 0$  справедливо

$$\psi(u) = \frac{\exp(-Ru)}{\mathbb{E}[\exp(-RU(T)) | T < \infty]} \quad (2.3)$$

где  $R$  - наименьший положительный корень уравнения 2.2.

Рассмотрим случай с показательным распределением величины страховых выплат с параметром  $\beta > 0$ .

## 1) Определим коэффициент Лундберга:

Уравнение 2.2 принимает вид

$$1 + \frac{(1 + \theta)r}{\beta} = \frac{\beta}{\beta - r} \quad (3.1)$$

или в форме квадратного уравнения по  $r$ ,

$$(1 + \theta)r^2 - \theta\beta r = 0 \quad (3.2)$$

Положительное решение уравнения является коэф. Лундберга:

$$R = \frac{\theta\beta}{1 + \theta} \quad (3.3)$$

## 2) Вычислим вероятность разорения:

Пусть разорение, если оно происходит, случается в момент  $T$ . Пусть  $\hat{u}$  является величиной рискового резерва непосредственно перед моментом  $T$ .

$$\mathbb{P}(-U(T) > y \mid T < \infty) = \mathbb{P}(X > \hat{u} + y \mid X > \hat{u}) = \frac{\beta \int_{\hat{u}+y}^{\infty} e^{-\beta x} dx}{\beta \int_{\hat{u}}^{\infty} e^{-\beta x} dx} = e^{-\beta y} \quad (3.4)$$

$$p_{-U(T) \mid T < \infty}(y) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-\beta y}) = \beta e^{-\beta y} \mathbb{1}(y > 0) \quad (3.5)$$

$$\mathbb{E}[e^{-RU(T)} \mid T < \infty] = \beta \int_0^{\infty} e^{-\beta y} e^{Ry} dy = \frac{\beta}{\beta - R} \quad (3.6)$$

Воспользуемся вычисленным ранее коэффициентом Лундберга и теоремой:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty]} = \frac{(\beta - R)e^{-Ru}}{\beta} \quad (3.7)$$

$$R = \frac{\theta\beta}{1 + \theta} \Rightarrow \psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left(\frac{-\theta\beta u}{1 + \theta}\right) \quad (3.8)$$

- Математическое ожидание и дисперсия сложного пуассоновского процесса:

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[p_1 N] = p_1 \mathbb{E}[N] = \lambda t p_1 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}[S] &= \mathbb{E}[\mathbb{D}[S|N]] + \mathbb{D}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[N \mathbb{D}[X]] + \mathbb{D}[p_1 N] = \\ &= \mathbb{E}[N] \mathbb{D}[X] + p_1^2 \mathbb{D}[N] = \lambda t (p_2 - p_1^2) + p_1^2 \lambda t = \lambda t p_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

- Производящая функция моментов сложного пуассоновского процесса:

$$\begin{aligned} M_S(r) &= \mathbb{E}[e^{rS}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{rS}|N]] = \mathbb{E}[M_X(r)^N] = \\ &= \mathbb{E}[e^{N \ln M_X(r)}] = M_N(\ln M_X(r)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$M_N(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)} \Rightarrow M_S(r) = e^{\lambda t[M_X(r) - 1]} \quad (4.4)$$

Докажем теорему о вероятности разорения:

$$\mathbb{E}[e^{-rU(t)}] = \mathbb{E}[e^{-rU(t)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-rU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t) \quad (4.5)$$

Левая часть равна:  $\exp\{-ru - rct + \lambda t[M_X(r) - 1]\}$ . В первом слагаемом в правой части:

$$U(t) = U(T) + [U(t) - U(T)] = U(T) + c(t - T) - [S(t) - S(T)] \quad (4.6)$$

$S(t) - S(T)$  имеет сложное распределение Пуассона с  $\lambda(t - T)$ .

$$\mathbb{E}[\exp(-rU(T))\exp(-rc(t-T) + \lambda(t-T)[M_x(r) - 1])|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) \quad (4.7)$$

Упростим выражения, выбрав  $r$  так, что:  $-rc + \lambda[M_X(r) - 1] = 0$ .

Подставим полученные выражения с  $r = R > 0$  в исходное:

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t) \quad (4.8)$$

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-RU(T)} | T \leq t] \mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-RU(t)} | T > t] \mathbb{P}(T > t) \quad (4.9)$$

Пусть  $t \rightarrow \infty$ . Первое слагаемое в правой части сходится к

$$\mathbb{E}[e^{-RU(T)} | T < \infty] \psi(u) \quad (4.10)$$

Для доказательства теоремы остается доказать сходимость второго слагаемого к 0, используя неравенство Чебышева, после чего получается требуемое равенство:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)} | T < \infty]} \quad (4.11)$$





Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джонс, С. Несбитт, Дж. Хикман (1997)

*Актuarная математика*, 355 – 368.