Вероятность разорения в классической модели коллективного риска

Кодзоев М., Куркин М., Шаповалов Р.

Московский Государственный Университет им. Ломоносова

21 апреля 2019 г.

1. Описание модели
2. Коэффициент Лундберга и теорема о вероятности разорения
3. Вычисления
   - Коэффициент Лундберга
   - Вероятность разорения
4. Приложение
   - Дополнительные выкладки
   - Доказательство теоремы

Модель с непрерывным временем

Математическая модель изменения величины рискового резерва на длительном интервале времени:

$$U(t) = u + c(t) - S(t), \quad t \geq 0$$

- $U(t)$ - рисковый резерв в момент времени t,
- u - величина рискового резерва в момент времени 0,
- $c(t)$ - величина премий, собранных к моменту t,
- $S(t)$ - величина суммарных страховых выплат до момента t.

Модель с непрерывным временем

Рассмотрим величину суммарных страховых выплат до момента t:

$$S(t) = X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)}$$

- $\{S(t), t \geq 0\}$ - процесс суммарных выплат,
- $\{N(t), t \geq 0\}$ - процесс числа страховых случаев,
- X_i - величина i-ой страховой выплаты.

Пусть $t \geq 0$ и $h > 0$. Тогда разность $N(t+h) - N(t)$ является числом страховых случаев, а разность $S(t+h) - S(t)$ - суммарными страховыми выплатами, которые происходят в интервале между t и $t+h$.

Модель с непрерывным временем

Для моделирования процесса числа страховых случаев $\{N(t), t \geq 0\}$ воспользуемся пуассоновским процессом, для которого длины интервала времени между последовательными страховыми случаями являются взаимно независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с показательным распределением.

$$\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) = k] = \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!} \;\; \forall t \geq 0, h > 0, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из этого определения вытекают следующие свойства:

1) Приращения стационарны, то есть распределение $N(t+h) - N(t)$ не зависит от t;
2) Для любого множества непересекающихся временных интервалов приращения независимы, то есть для $t_1 < t_1 + h_1 < t_2 < t_2 + h_2 < \ldots < t_n + h_n$ приращения: $N(t_1 + h_1) - N(t_1), N(t_2 + h_2) - N(t_2), \ldots, N(t_n + h_n) - N(t_n)$ взаимно независимы;
3) Вероятность того, что несколько страховых случаев произойдет одновременно, равна нулю, то есть:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) > 1]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h}}{h} = 0$$

Если в $S(t)$ случайные величины $X_1, X_2, X_3, \dots$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения $P(x)$, и если они также независимы от процесса $\{N(t), t \geq 0\}$, то процесс $\{S(t), t \geq 0\}$ называется **сложным пуассоновским процессом**.

Свойства:

1) Если $t \geq 0$ и $h > 0$, то распределение с.в. $S(t+h) - S(t)$ является сложным пуассоновским с параметром λh и функцией распределения $P(x)$, то есть:

$$\mathbb{P}[S(t+h) - S(t) \leq x] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda h} (\lambda h)^k \frac{P^{*k}(x)}{k!}$$

2) В любой момент t вероятность того, что следующий страховой случай произойдет между моментами $t+h$ и $t+h+dh$ и что величина выплат не превосходит x, равна $e^{-\lambda h}(\lambda dh)P(x)$;

2) Приращения процесса $S(t)$ независимы и стационарны;

3) $\mathbb{E}[S(t)] = \lambda t p_1, \ \mathbb{D}[S(t)] = \lambda t p_2$ (см. 4.1, 4.2).

Определение 1

Рассмотрим период длины $t > 0$, где размер собранной премии равен ct, а $S(t)$ - величина суммарных страховых выплат, распределение которой - сложное пуассоновское, причём $\mathbb{E}N(t) = \lambda t$. **Коэффициент Лундберга** R - наименьшее положительное решение уравнения

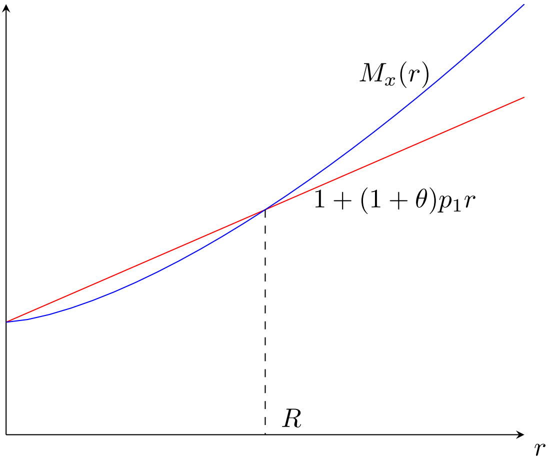
$$M_{S(t)-ct}(r) = \mathbb{E}[e^{r(S(t)-ct)}] = e^{-rct}M_{S(t)}(r) = \\ = e^{-rct}e^{\lambda t[M_X(r)-1]} = 1 \Leftrightarrow \lambda[M_X(r) - 1] = cr \tag{2.1}$$

или, при $c = (1+\theta)\lambda p_1$, уравнения

$$1 + (1+\theta)p_1 r = M_X(r) \tag{2.2}$$

Определение 2

Вероятность разорения $\psi(u)$ равна $\mathbb{P}(T < \infty)$, где $T = min\{t : U(t) < 0\}$. Она выражается с помощью коэффициента Лундберга.



Определение коэффициента Лундберга R

Теорема о вероятности разорения

Если $U(t)$ является процессом рискового резерва, его процесс суммарных страховых выплат $S(t)$ является сложным пуассоновским и если $c > \lambda p_1$, т. е. рисковая надбавка положительна, то для $u \geq 0$ справедливо

$$\psi(u) = \frac{\exp(-Ru)}{\mathbb{E}[\exp(-RU(T))|T < \infty]} \tag{2.3}$$

где R - наименьший положительный корень уравнения 2.2.

Рассмотрим случай с показательным распределением величины страховых выплат с параметром $\beta > 0$.

1) Определим коэффициент Лундберга:

Уравнение 2.2 принимает вид

$$1 + \frac{(1+\theta)r}{\beta} = \frac{\beta}{\beta - r} \tag{3.1}$$

или в форме квадратного уравнения по r,

$$(1+\theta)r^2 - \theta\beta r = 0 \tag{3.2}$$

Положительное решение уравнения является коэф. Лундберга:

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} \tag{3.3}$$

2) Вычислим вероятность разорения:

Пусть разорение, если оно происходит, случается в момент T. Пусть $\hat{u}$ является величиной рискового резерва непосредственно перед моментом T.

$$\mathbb{P}(-U(T) > y \mid T < \infty) = \mathbb{P}(X > \hat{u}+y \mid X > \hat{u}) = \frac{\beta \int_{\hat{u}+y}^{\infty} e^{-\beta x} dx}{\beta \int_{\hat{u}}^{\infty} e^{-\beta x} dx} = e^{-\beta y} \tag{3.4}$$

$$p_{-U(T)|T<\infty}(y) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-\beta y}) = \beta e^{-\beta y} \mathbb{1}(y > 0) \tag{3.5}$$

$$\mathbb{E}[e^{-RU(T)} \mid T < \infty] = \beta \int_0^{\infty} e^{-\beta y} e^{Ry} dy = \frac{\beta}{\beta - R} \tag{3.6}$$

Воспользуемся вычисленным ранее коэффициентом Лундберга и теоремой:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty]} = \frac{(\beta - R)e^{-Ru}}{\beta} \tag{3.7}$$

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta} \Rightarrow \psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\exp\left(\frac{-\theta\beta u}{1+\theta}\right) \tag{3.8}$$

- Математическое ожидание и дисперсия сложного пуассоновского процесса:

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[S|N]\big] = \mathbb{E}[p_1 N] = p_1\mathbb{E}[N] = \lambda t p_1 \tag{4.1}$$

$$\mathbb{D}[S] = \mathbb{E}\big[\mathbb{D}[S|N]\big] + \mathbb{D}\big[\mathbb{E}[S|N]\big] = \mathbb{E}\big[N\mathbb{D}[X]\big] + \mathbb{D}[p_1 N] =$$
$$= \mathbb{E}[N]\mathbb{D}[X] + p_1^2\mathbb{D}[N] = \lambda t(p_2 - p_1^2) + p_1^2\lambda t = \lambda t p_2 \tag{4.2}$$

- Производящая функция моментов сложного пуассоновского процесса:

$$M_S(r) = \mathbb{E}[e^{rS}] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[e^{rS}|N]\big] = \mathbb{E}[M_X(r)^N] =$$
$$= \mathbb{E}[e^{N \ln M_X(r)}] = M_N(\ln M_X(r)) \tag{4.3}$$

$$M_N(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)} \Rightarrow M_S(r) = e^{\lambda t[M_X(r) - 1]} \tag{4.4}$$

Докажем теорему о вероятности разорения:

$$\mathbb{E}[e^{-rU(t)}] = \mathbb{E}[e^{-rU(t)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-rU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t) \tag{4.5}$$

Левая часть равна: $\exp\{-ru - rct + \lambda t[M_X(r) - 1]\}$. В первом слагаемом в правой части:

$$U(t) = U(T) + [U(t) - U(T)] = U(T) + c(t - T) - [S(t) - S(T)] \tag{4.6}$$

$S(t) - S(T)$ имеет сложное распределение Пуассона с $\lambda(t - T)$.

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-rU(T)\right)\exp\left(-rc(t-T)+\lambda(t-T)[M_x(r)-1]\right)|T \leq t\right]\mathbb{P}(T \leq t) \tag{4.7}$$

Упростим выражения, выбрав r так, что: $-rc + \lambda[M_X(r) - 1] = 0$. Подставим полученные выражения с $r = R > 0$ в исходное:

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t) \tag{4.8}$$

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t) \quad (4.9)$$

Пусть $t \to \infty$. Первое слагаемое в правой части сходится к

$$\mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty]\psi(u) \quad (4.10)$$

Для доказательства теоремы остается доказать сходимость второго слагаемого к 0, используя неравенство Чебышева, после чего получается требуемое равенство:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty]} \quad (4.11)$$

Использованная литература

Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джонс, С. Несбитт, Дж. Хикман (1997)
Актуарная математика, 355 – 368.