Теория

Вычисление средней скорости молекул

Формула внутренней энергии газа:

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = N_{atoms}\frac{m\left<v^2\right>}{2}$$

Универсальная газовая постоянная представима в виде:

$$R = kN_A$$

Также справедливо:

$$\nu * N_A = N_{atoms}$$

Откуда:

$$m\left<v^2\right> = 3kT \Rightarrow \left<v\right> = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Далее рассчитаем скорость молекул после взаимодействия со стенкой:

$$v_1^{'} = v_1 + u$$

$$v_2^{'} = -v_1^{'}$$

$$v_2 = v_2^{'} + u,$$

где $'$ означает относительную скорость для движущегося элемента поршня, u – скорость поршня, 1 и 2 – соответственно принадлежность к моментам времени до столкновения и после.

Также пригодится теория бильярдов. Бильярд — динамическая система, отвечающая свободному движению материальной точки (бильярдного шара) внутри области площадью Ω с кусочно-гладкой границей. При достижении границы частица упруго отражается от нее.

Если скорость постоянная v, то распределение в фазовом пространстве

$$w(x, y, \phi) = \frac{1}{2\pi\Omega}$$

Вероятность столкновения с участком границы L в единицу времени

$$p(L) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int\limits_{L} dl w(x, y, \phi) v \cos\phi = \frac{Lv}{\pi\Omega}$$

Время пробега между этими соудорениями p^{-1}. Длина свободного пробега

$$\lambda = vp^{-1}(P) = \frac{\pi\Omega}{P}$$

Распределение вероятностей для углов падения не зависит от формы границы

$$w(\phi) = \frac{1}{2}\cos(\phi)$$

Выход из бильярда через малое отверстие l_0, в ячейке успевает установиться равномерное распределение, тогда вероятность выхода в единицу времени

$$p(l_0) = \frac{l_0 v}{\pi\Omega} = \frac{1}{\tau} = \frac{l_0 v}{P\lambda}$$

Распределение вероятностей для времени жизни частицы в ячейке тогда

$$w(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

И для длины траектории l до выхода тоже

$$w(l) = \frac{1}{L}\exp\left(-\frac{l}{L}\right),$$

где

$$L = \langle l \rangle = v\tau = \frac{\pi\Omega}{l_0} = \lambda\frac{P}{l_0}$$

Бильярды с границами осциллирующими со скоростью $u = u_0\cos\varphi$. Законы сохранения энергии и импульса:

$$m(v_{n+1,x} - v_{n,x}) = M(u_n - u_{n+1})$$

$$v_{n+1,y} - v_{n,y} = 0$$

$$m(v_{n+1}^2 - v_n^2) = m(v_{n+1,x}^2 - v_{n,x}^2) = M(u_n^2 - u_{n+1}^2),$$

$$v_{n+1,x} + v_{n,x} = -u_n - u_{n+1}$$

Учитывая что $m/M \to 0$

$$v_{n+1,x} = -2u_n - v_{n,x}$$

$$v_{n+1,x}^2 = 4u_n^2 + 4u_n v_{n,x} + v_{n,x}^2$$

Добавляем $v_{n+1,y}^2$ и $v_{n,y}^2$

$$v_{n+1}^2 = 4u_n^2 + 4u_n v_n \cos(\phi_n) + v_n^2$$

Изменение квадрата скорости частицы при n-ом столкновении

$$\Delta(v_n^2) = 4u_n v_n \cos\phi_n + 4u_n^2$$

Изменение скорости частицы при n-ом столкновении

$$\Delta v_n = 2u_n \cos\phi_n + \frac{2u_n^2 \sin^2\phi_n}{v_n}$$

Если стохастические колебания границ (φ равномерно распределенная фаза), средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{u_0^2}{3\lambda}\, t$$

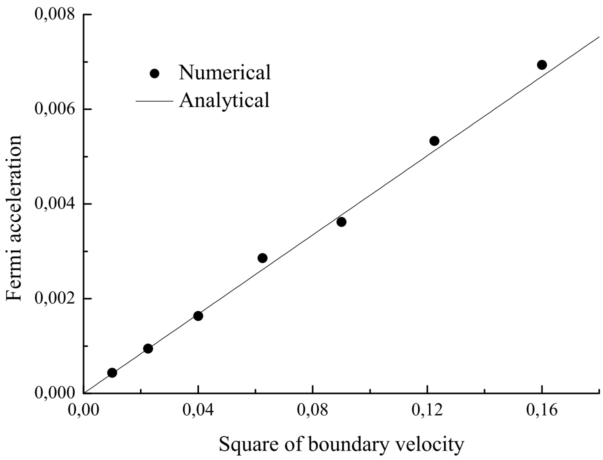

Рис. 1: Зависимость ускорения Ферми от амплитуды колебаний рассеивателя.

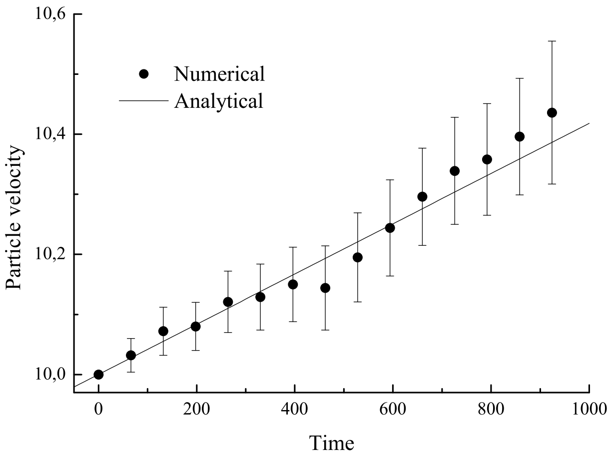

Рис. 2: Скорость от времени $b = 20$, радиус рассеивателя $R = 6$, амплитуда скорости рассеивателя $u_0 = 0.1$, период $T = 23$). Аналитический результат — линия, численный счет — (●).