

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA



UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN : A20 – Probabilitas dan
Statistika
TANGGAL : 16 Mei 2017
JAM : 09.00 – 12.00 WIB

LAMA UJIAN : 180 Menit
SIFAT UJIAN : Tutup Buku

2017

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan. Lembar jawaban pilihan ganda tidak boleh diberi komentar selain pilihan jawaban yang benar.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang. Setiap peserta yang keluar tanpa izin dari pengawas maka lembar jawaban akan diambil oleh pengawas dan dianggap telah selesai mengerjakan ujian.
10. Alat komunikasi harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi.
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 10 (sepuluh) hari setelah akhir periode ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

PETUNJUK MENERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) atau 5 (lima) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Saudara diminta untuk membaca dan mengikuti petunjuk pengisian yang ada di lembar jawaban.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor peserta, kode dan tanggal ujian pada** tempat yang disediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara.**

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. **Peserta dapat memberikan sanggahan soal, jawaban atau keluhan kepada Komisi Ujian dan Kurikulum selambat-lambatnya 10 hari setelah akhir periode ujian.**
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke **sanggahan.soal@aktuaris.or.id.**
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.

1. Survei dilakukan terhadap 1000 orang dan diketahui bahwa 80% orang menyukai olahraga lari dan 60% menyukai bersepeda, dan seluruhnya menyukai paling sedikit satu aktivitas tersebut. Berapa peluang seseorang dalam survei ini yang diambil secara acak menyukai bersepeda namun tidak menyukai olahraga lari?
 - A) 0
 - B) 0,1
 - C) 0,2
 - D) 0,3
 - E) 0,4

2. Suatu perusahaan asuransi kendaraan bermotor memiliki 10.000 pemegang polis. Setiap pemegang polis diklasifikasikan sebagai berikut:
 - (i) Muda atau Tua;
 - (ii) Pria atau Wanita;
 - (iii) Menikah atau LajangDiketahui 3000 orang tergolong muda; 4600 orang adalah pria; dan 7000 orang telah menikah. Pemegang polis tersebut juga dapat diklasifikasikan sebagai 1320 pria muda, 3010 pria telah menikah, dan 1400 anak muda dan telah menikah. Serta 600 orang adalah pria muda yang telah menikah. Berapa banyak pemegang polis pada perusahaan tersebut yang tergolong muda, wanita, dan masih lajang?
 - A) 280
 - B) 423
 - C) 486
 - D) 880
 - E) 896

3. Suatu tes darah menunjukkan hasil positif terhadap penyakit tertentu sebesar 95% saat penyakit tersebut benar-benar ada, sedangkan 0,5% saat tidak ada penyakit tersebut. Satu persen dari populasi ini benar-benar memiliki penyakit. Hitung peluang seseorang memiliki penyakit *saat* tes darah menunjukkan hasil positif?
- A) 0,324
 - B) 0,657
 - C) 0,945
 - D) 0,950
 - E) 0,995

4. Studi terhadap kecelakaan mobil menghasilkan data sebagai berikut:

Tahun Model	Proporsi	Peluang terlibat kecelakaan
2010	0,16	0,05
2011	0,18	0,02
2012	0,20	0,03
Others	0,46	0,04

Terjadi kecelakaan pada mobil dengan tahun model antara 2010, 2011, dan 2012. Tentukan peluang tahun model dari mobil yang kecelakaan adalah 2010

- A) 0,22
- B) 0,30
- C) 0,33
- D) 0,45
- E) 0,67

5. Suatu bilangan X dipilih secara acak dari deret 2, 5, 8, ... dan bilangan Y dipilih secara acak dari deret 3, 7, 11, ... Setiap deret terdiri dari 100 suku. Cari $P(X = Y)$

- A) 0,0021
- B) 0,0023
- C) 0,0025
- D) 0,0030
- E) 0,0033

6. Pada bilangan acak, jarak antara dua distribusi didefinisikan sebagai maksimum,

$$\max_{-\infty < x < \infty} |F(x_1) - F(x_2)|$$

Dengan $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatifnya. Cari jarak antara dua distribusi berikut:

- (i) Seragam pada interval $[0, 1]$

- (ii) Pdf: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, 0 < x < \infty$

- A) 0
- B) $\frac{1}{4}$
- C) $\frac{1}{2}$
- D) $\frac{3}{4}$
- E) 1

7. Dua polis asuransi jiwa, masing-masing memiliki manfaat kematian sebesar 10.000 dan premi sekaligus sebesar 500, terjual pada sepasang suami istri. Polis berakhir pada akhir tahun kesepuluh. Peluang hanya istri yang bertahan hidup paling tidak 10 tahun adalah 0,025; peluang hanya suami yang bertahan hidup paling tidak 10 tahun adalah 0,01; peluang keduanya bertahan hidup paling tidak 10 tahun adalah 0,96. Berapa ekspektasi dari kelebihan premi yang dibayarkan atas klaim, diberikan suami bertahan hidup paling tidak 10 tahun?

- A) 370
- B) 385
- C) 397
- D) 870
- E) 897

8. Misalkan X menyatakan bilangan acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{10}, & -2 \leq x \leq 4 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Hitung nilai ekspektasi dari X^2

- A) 6,8
- B) 6,4
- C) 4,0
- D) 1,6
- E) 0,4

9. Misalkan X_1, X_2, X_3 adalah sampel acak dari distribusi diskrit dengan fungsi peluang sebagai berikut:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & x = 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Tentukan fungsi pembangkit momen $Y = X_1X_2X_3$, $M(t)$

- A) $\frac{19}{27} + \frac{8}{27}e^t$
- B) $\frac{26}{27} + \frac{1}{27}e^t$
- C) $\frac{8}{27} + \frac{19}{27}e^t$
- D) $\frac{1}{27} + \frac{26}{27}e^{3t}$
- E) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t}$

10. Besar kerugian, Z , untuk polis asuransi kesehatan memiliki fungsi distribusi kumulatif sebagai berikut:

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{9} \left(2z^2 - \frac{z^3}{3} \right), & 0 \leq z \leq 3 \\ 1, & z > 3 \end{cases}$$

Hitung modus dari distribusi tersebut!

- A) $\frac{2}{3}$
- B) 1
- C) $\frac{3}{2}$
- D) 2
- E) 3

11. Misalkan X menyatakan peubah acak berdistribusi Poisson dengan $E[X] = \ln 2$. Hitung

$$E[\cos(\pi X)]!$$

- A) 0
- B) 0,25
- C) 0,50
- D) 1
- E) $2 \ln 2$

12. Satu grup mahasiswa mendapatkan surat izin mengemudi pertama. Diketahui 50% dari grup mahasiswa tersebut adalah pengemudi berisiko rendah, 30% pengemudi berisiko sedang, dan sisanya adalah pengemudi berisiko tinggi. Karena tidak ada catatan mengemudi sebelumnya, maka perusahaan asuransi memandang setiap pengemudi dapat dipilih secara acak dari grup tersebut. Bulan ini, perusahaan asuransi tersebut menerbitkan empat polis baru untuk grup mahasiswa tersebut. Berapa peluang dari empat mahasiswa tersebut terdapat sedikitnya 2 pengemudi berisiko tinggi lebih banyak dibandingkan pengemudi berisiko rendah?

- A) 0,006
- B) 0,012
- C) 0,018
- D) 0,049
- E) 0,073

Soal No. 13 dan 14 berlaku informasi sebagai berikut:

Tiga atlet lari sedang mengikuti kompetisi lari sepanjang 1 km. Waktu tempuh masing-masing atlet dinyatakan sebagai peubah acak X_i dengan i menyatakan atlet ke- i .

$$X_1 \sim U[2,9, 3,1]$$

$$X_2 \sim U[2,7, 3,1]$$

$$X_3 \sim U[2,9, 3,3]$$

Waktu tempuh masing-masing atlet saling bebas satu dan yang lainnya.

13. Hitung peluang pelari tercepat menyelesaikannya kurang dari 3 menit!

- A) 0,89
- B) 0,91
- C) 0,94
- D) 0,96
- E) 0,98

14. Hitung peluang pelari terlama menyelesaikannya kurang dari 3 menit!

- A) 0,03
- B) 0,06
- C) 0,09
- D) 0,12
- E) 0,15

15. Distribusi gamma dengan parameter α dan β memiliki fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, x > 0$$

Distribusi Weibull dengan parameter τ dan θ memiliki fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \frac{\tau \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\tau} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\tau}}}{x}, x > 0$$

Distribusi dibawah ini yang sama dengan distribusi eksponensial dengan mean 2 adalah

- I. Chi Square dengan derajat kebebasan 2
- II. Distribusi gamma dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = 2$
- III. Weibull dengan $\tau = 1, \theta = 2$
- IV. Lognormal dengan $\mu = 0, \sigma^2 = 1$

- A) I, II, III benar
- B) I, III benar
- C) II, IV benar
- D) Hanya IV yang benar
- E) Semuanya benar

16. Sebuah polis asuransi kendaraan bermotor akan membayar kerusakan mobil pemegang polis dan mobil pengendara lain dalam kejadian pemegang polis yang bertanggung jawab pada kecelakaan tersebut. Besar pembayaran kerusakan mobil pemegang polis, X , memiliki fungsi kepadatan marjinal 1 untuk $0 < x < 1$; Diberikan $X = x$, besar pembayaran kerusakan mobil pengendara lain, Y , memiliki fungsi kepadatan bersyarat 1 untuk $x < y < x + 1$. Jika pemegang polis bertanggung jawab dalam kecelakaan tersebut, berapa peluang pembayaran kerusakan mobil pengendara lain lebih dari 0,5?

- A) $3/8$
- B) $1/2$
- C) $3/4$
- D) $7/8$
- E) $15/16$

17. Distribusi masa hidup Jaka, X , sebuah peubah acak eksponensial dengan mean α ; dan distribusi masa hidup Dedi, Y , sebuah peubah acak eksponensial dengan mean β ; Masa hidup Jaka dan Dedi saling bebas. Cari peluang Jaka hidup lebih lama dibanding Dedi!

- A) $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- B) $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$
- C) $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$
- D) $\frac{\beta-\alpha}{\beta}$
- E) $\frac{\alpha}{\beta}$

18. Misalkan X menyatakan besar klaim operasi dan Y menyatakan besar klaim rumah sakit. Seorang aktuaris menggunakan sebuah model dimana $E(X) = 5$; $E(X^2) = 27,4$; $E(Y) = 7$; $E(Y^2) = 51,4$; dan $Var(X + Y) = 8$. Misalkan $C1 = X + Y$ menyatakan besar kombinasi klaim sebelum dikenakan biaya tambahan sebesar 20% pada porsi klaim rumah sakit, dan misalkan $C2$ menyatakan kombinasi klaim setelah dikenakan biaya tambahan tersebut. Hitung $Cov(C1, C2)$

- A) 8,80
- B) 9,60
- C) 9,76
- D) 11,52
- E) 12,32

19. Misalkan X_1 dan X_2 adalah dua peubah acak saling bebas berdistribusi normal dengan rata-rata dan variansi 1. Jika $E[c|X_1 - X_2|] = 1$, maka nilai c adalah

- A) $\sqrt{\pi}$
- B) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
- C) $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$
- D) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$
- E) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

20. Besar klaim atas kerusakan rumah akibat angin adalah peubah acak saling bebas dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4}, & x > 1 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dimana x adalah besar klaim dalam ribuan. Perusahaan asuransi menduga akan terjadi klaim sebanyak 3 kali. Berapa nilai ekspektasi terbesar atas klaim tersebut?

- A) 2025
 - B) 2700
 - C) 3232
 - D) 3375
 - E) 4500
21. Suatu perusahaan asuransi memiliki nasabah dengan risiko tinggi sebesar 10%, dan sisanya berisiko rendah. Banyaknya klaim yang terjadi dalam satu tahun berdistribusi Poisson dengan rata-rata θ , dan saling bebas dengan banyaknya klaim yang terjadi di tahun sebelumnya. Untuk nasabah berisiko tinggi $\theta=0,6$; sedangkan 0,1 untuk yang berisiko rendah. Hitung peluang seorang nasabah dengan profil risiko belum diketahui yang mengajukan tepat satu klaim di tahun 2016 akan mengajukan tepat satu klaim lagi di tahun 2017!
- A) 0,08
 - B) 0,12
 - C) 0,16
 - D) 0,20
 - E) 0,24

22. Suatu perusahaan asuransi memodelkan peubah acak klaim, X , untuk polis asuransi tertentu sebagai berikut:

x	$P(X = x)$
0	0,3
50	0,1
200	0,1
500	0,2
1000	0,2
10000	0,1

Distribusi besar klaim diatas memiliki parameter sebagai berikut:

q = peluang terjadi klaim tidak nol

B = Distribusi bersyarat atas besar klaim, diberikan terjadi klaim

Cari simpangan baku dari B !

- A) 3227
 - B) 3327
 - C) 3437
 - D) 3537
 - E) 3600
23. Setiap orang yang melewati persimpangan kota ditanya bulan lahir mereka. Diasumsikan populasi dibagi seragam berdasarkan bulan kelahirannya, sehingga setiap orang yang lewat secara acak memilki peluang yang sama untuk lahir di bulan tertentu. Berapa minimum banyaknya orang yang dibutuhkan, sehingga peluang tidak ada dua orang yang lahir di bulan yang sama kurang dari 0,5?
- A) 2
 - B) 3
 - C) 4
 - D) 5
 - E) 6

24. Agus dan Iwan adalah atlet lari sprint 100m. Waktu tempuh Agus berdistribusi normal dengan rata-rata 10 detik, sedangkan Iwan juga berdistribusi normal dengan rata-rata 9,9 detik. Keduanya memiliki standar deviasi yang sama, σ . Diasumsikan waktu tempuh keduanya saling bebas, dan diketahui Iwan memiliki peluang 95% mengalahkan Agus. Cari σ .

A) 0,040
B) 0,041
C) 0,042
D) 0,043
E) 0,044

25. Kejadian X, Y , dan Z memenuhi persamaan berikut:

$$X \cap Y' = \phi; Y \cap Z' = \phi; P(X' \cap Y) = a; P(Y' \cap Z) = b; P(Z) = c$$

Cari $P(X)$ dalam a, b , dan c !

A) $a+b+c$
B) $a+b-c$
C) $c+b-a$
D) $c+a-b$
E) $c-b-a$

26. A menulis surat kepada B dan tidak mendapatkan balasan. Asumsikan satu surat, n , hilang dalam pengiriman, berapa peluang B menerima suratnya? Dengan mengasumsikan B selalu membalas surat apabila ia menerima surat tersebut

A) $\frac{n}{n-1}$
B) $\frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{n}$
C) $\frac{n-1}{2n-1}$
D) $\frac{n}{2n-1}$
E) $\frac{n-1}{n^2}$

27. Suatu perusahaan asuransi mendapatkan informasi bahwa pada suatu kelas polis tertentu, saat besar klaim melebihi 1000, rata-rata besar klaim yang melebihi 1000 adalah 500. Oleh karena itu diasumsikan besar klaim berdistribusi uniform pada interval $[0, c]$, dimana $c > 1000$. Cari nilai c yang konsisten dengan pengamatan tersebut. [Hint : Perhatikan nilai pada peluang kondisional pada distribusi uniform]

- A) 1500
- B) 2000
- C) 2500
- D) 3000
- E) 3500

28. Distribusi gabungan suatu peubah acak X dan Y memiliki fungsi peluang

$$f(x, y) = x + y, 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

Distribusi gabungan suatu peubah acak Y dan Z memiliki fungsi peluang

$$g(y, z) = 3\left(y + \frac{1}{2}\right)z^2, 0 < y < 1, 0 < z < 1$$

Pilihan di bawah ini yang bisa menjadi fungsi kepadatan peluang dari distribusi gabungan X dan Z adalah

- A) $x + \frac{3}{2}z^2, 0 < x < 1, 0 < z < 1$
- B) $x + \frac{1}{2} + 3z^2, 0 < x < 1, 0 < z < 1$
- C) $3\left(x + \frac{1}{2}\right)z^2, 0 < x < 1, 0 < z < 1$
- D) $x + z, 0 < x < 1, 0 < z < 1$
- E) $4xz, 0 < x < 1, 0 < z < 1$

29. Suatu perusahaan asuransi memiliki dua lini bisnis: Kendaraan bermotor dan Kebakaran. Seseorang dengan polis asuransi kebakaran dapat menambah perluasan manfaat asuransi banjir, tapi hanya jika polis tersebut sudah mengandung manfaat kebakaran. Diberikan informasi nasabah perusahaan asuransi tersebut sebagai berikut:

- I. 80% dari seluruh nasabah memiliki polis asuransi kendaraan bermotor
- II. 40% dari seluruh nasabah memiliki polis asuransi kebakaran
- III. 25% nasabah dengan polis asuransi kendaraan bermotor, dan juga memiliki polis asuransi kebakaran
- IV. 50% nasabah dengan polis asuransi kebakaran juga memiliki asuransi banjir
- V. 50% dari nasabah dengan manfaat asuransi banjir juga memiliki polis asuransi kendaraan bermotor

Dari nasabah dengan polis asuransi kebakaran, berapa pecahan yang tidak memiliki manfaat asuransi banjir **dan** kendaraan bermotor.

- A) 0,05
- B) 0,10
- C) 0,15
- D) 0,20
- E) 0,25

30. Perusahaan asuransi jiwa membuat sebuah polis asuransi berjangka 1 tahun untuk pasangan bisnis yang berpergian ke lokasi dengan resiko tinggi. Polis asuransi tidak membayar apapun jika tidak ada yang meninggal; 100.000, jika tepat satu dari pasangan tersebut meninggal, dan $K > 0$, jika keduanya meninggal. Perusahaan asuransi menentukan bahwa terdapat peluang minimal satu akan meninggal dalam tahun tersebut sebesar 0,1 dan peluang tepat satu dari pasangan akan meninggal dalam tahun tersebut sebesar 0,08. Diketahui simpangan baku dari pembayaran sebesar 74.000. Tentukan ekspektasi pembayaran polis untuk tahun tersebut.

- A) 18.000
- B) 21.000
- C) 24.000
- D) 27.000
- E) 30.000

DISCRETE DISTRIBUTION**B.2.1.1 Poisson— λ**

$$\begin{aligned}
 p_0 &= e^{-\lambda}, \quad a = 0, \quad b = \lambda, \\
 p_k &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \\
 E[N] &= \lambda, \quad \text{Var}[N] = \lambda, \\
 \hat{\lambda} &= \hat{\mu}, \\
 P(z) &= e^{\lambda(z-1)}.
 \end{aligned}$$

B.2.1.3 Binomial— q, m ($0 < q < 1, m$ an integer)

$$\begin{aligned}
 p_0 &= (1 - q)^m, \quad a = -\frac{q}{1 - q}, \quad b = \frac{(m + 1)q}{1 - q}, \\
 p_k &= \binom{m}{k} q^k (1 - q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \\
 E[N] &= mq, \quad \text{Var}[N] = mq(1 - q), \\
 \hat{q} &= \hat{\mu}/m, \\
 P(z) &= [1 + q(z - 1)]^m.
 \end{aligned}$$

B.2.1.4 Negative binomial— β, r

$$\begin{aligned}
 p_0 &= (1 + \beta)^{-r}, \quad a = \frac{\beta}{1 + \beta}, \quad b = \frac{(r - 1)\beta}{1 + \beta}, \\
 p_k &= \frac{r(r + 1) \cdots (r + k - 1) \beta^k}{k! (1 + \beta)^{r+k}}, \\
 E[N] &= r\beta, \quad \text{Var}[N] = r\beta(1 + \beta), \\
 \hat{\beta} &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}} - 1, \quad \hat{r} = \frac{\hat{\mu}^2}{\hat{\sigma}^2 - \hat{\mu}}, \\
 P(z) &= [1 - \beta(z - 1)]^{-r}, \quad -(1 + 1/\beta) < z < 1 + 1/\beta.
 \end{aligned}$$

CONTINUOUS DISTRIBUTION**A.2.3.1 Pareto— α, θ** (Pareto Type II, Lomax)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}}, \\
F(x) &= 1 - \left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^\alpha, \\
\text{VaR}_p(X) &= \theta[(1 - p)^{-1/\alpha} - 1], \\
E[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(k+1) \Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1 < k < \alpha, \\
E[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k)} \quad \text{if } k \text{ is a positive integer,} \\
E[X \wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha - 1} \left[1 - \left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^{\alpha-1} \right], \quad \alpha \neq 1, \\
E[X \wedge x] &= -\theta \ln \left(\frac{\theta}{x + \theta} \right), \quad \alpha = 1, \\
\text{TVaR}_p(X) &= \text{VaR}_p(X) + \frac{\theta(1 - p)^{-1/\alpha}}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1, \\
E[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(k+1) \Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)} \beta[k+1, \alpha - k; x/(x + \theta)] \\
&\quad + x^k \left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^\alpha, \quad k > -1,
\end{aligned}$$

A.3.2.1 Gamma— α, θ (When $\alpha = n/2$ and $\theta = 2$, it is a chi-square distribution with n degrees of freedom.)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x \Gamma(\alpha)}, \\
F(x) &= \Gamma(\alpha; x/\theta), \\
E[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k > -\alpha, \\
E[X^k] &= \theta^k (\alpha + k - 1) \cdots \alpha \quad \text{if } k \text{ is a positive integer,} \\
E[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + k; x/\theta) + x^k [1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k > -\alpha, \\
E[(X \wedge x)^k] &= \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1) \theta^k \Gamma(\alpha + k; x/\theta) \\
&\quad + x^k [1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)] \quad \text{if } k \text{ is a positive integer,}
\end{aligned}$$

A.3.2.3 Weibull— θ, τ

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\tau(x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x}, \\
 F(x) &= 1 - e^{-(x/\theta)^\tau}, \\
 \text{VaR}_p(X) &= \theta[-\ln(1-p)]^{1/\tau}, \\
 E[X^k] &= \theta^k \Gamma(1 + k/\tau), \quad k > -\tau, \\
 E[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(1 + k/\tau) \Gamma[1 + k/\tau; (x/\theta)^\tau] + x^k e^{-(x/\theta)^\tau}, \quad k > -\tau,
 \end{aligned}$$

A.3.3.1 Exponential— θ

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}, \\
 F(x) &= 1 - e^{-x/\theta}, \\
 \text{VaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p), \\
 E[X^k] &= \theta^k \Gamma(k+1), \quad k > -1, \\
 E[X^k] &= \theta^k k! \quad \text{if } k \text{ is a positive integer,} \\
 E[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}), \\
 \text{TVaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) + \theta, \\
 E[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(k+1) \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1, \\
 E[(X \wedge x)^k] &= \theta^k k! \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta} \quad \text{if } k > -1 \text{ is an integer,}
 \end{aligned}$$

A.5.1.1 Lognormal— μ, σ (μ can be negative)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), \quad z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}, \\
 F(x) &= \Phi(z), \\
 E[X^k] &= \exp(k\mu + \frac{1}{2}k^2\sigma^2), \\
 E[(X \wedge x)^k] &= \exp(k\mu + \frac{1}{2}k^2\sigma^2) \Phi\left(\frac{\ln x - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k[1 - F(x)],
 \end{aligned}$$

NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from $-\infty$ to z , $\Pr(Z < z)$

The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000