PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN : A70 – Pemodelan & Teori Risiko
TANGGAL : 16 Mei 2017
JAM : 13.30 – 16.30

LAMA UJIAN : 180 Menit
SIFAT UJIAN : Tutup Buku

2017

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan. Lembar jawaban pilihan ganda tidak boleh diberi komentar selain pilihan jawaban yang benar.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang. Setiap peserta yang keluar tanpa izin dari pengawas maka lembar jawaban akan diambil oleh pengawas dan dianggap telah selesai mengerjakan ujian.
10. Alat komunikasi harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi.
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 10 (sepuluh) hari setelah akhir periode ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) atau 5 (lima) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Saudara diminta untuk membaca dan mengikuti petunjuk pengisian yang ada di lembar jawaban.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor peserta, kode dan tanggal ujian pada** tempat yang disediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara**.

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. **Peserta dapat memberikan sanggahan soal, jawaban atau keluhan kepada Komisi Ujian dan Kurikulum selambat-lambatnya 10 hari setelah akhir periode ujian.**
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke **sanggahan.soal@aktuaris.or.id.**
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.

1. Anda adalah seorang produser sebuah acara kuis di televisi yang menyediakan hadiah berupa uang tunai. Banyaknya hadiah,N, dan nilai hadiah,X, berdistribusi sebagai berikut:

n	$\Pr(N = n)$
1	0,8
2	0,2

x	$\Pr(X = x)$
0	0,2
100	0,7
1.000	0,1

Besarnya anggaran yang disediakan sebagai hadiah adalah sebesar ekspektasi hadiah yang diperoleh ditambah simpangan bakunya. Hitunglah besarnya anggaran tersebut.

A. 306 B. 318 C. 416 D. 506 E.518

2. Kerugian yang dialami sebuah perusahaan diketahui berdistribusi frekuensi Poisson dengan rata-rata (*mean*) sebesar 2 per tahun dan besaran dari sebuah kerugian adalah 1,2 atau 3 dengan probabilitas masing-masing adalah 1/3.
Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*).
Sebuah polis asuransi akan memberikan pertanggungan terhadap semua kerugian yang dialami selama satu tahun dengan *annual aggregate deductible* sebesar 2.

Hitunglah ekspektasi pembayaran klaim dari polis asuransi tersebut.
A. 2,00
B. 2,36
C. 2,45
D. 2,81
E. 2,96

3. Sebuah kerugian berdistribusi Pareto dengan parameter α dan $\theta = 1.000$. *The Loss Elimination Ratio* (LER) pada 600 adalah 0,4.

Tentukan nilai α.
A. kurang dari 1,9
B. paling sedikit 1,9 akan tetapi kurang dari 2,0
C. paling sedikit 2,0 akan tetapi kurang dari 2,1
D. paling sedikit 2,1 akan tetapi kurang dari 2,2
E. paling sedikit 2,2

4. Diberikan data tentang besaran kerugian dalam sebuah pertanggungan asuransi.

Range	Banyaknya Kerugian
0 – 1.000	25
1.000 – 2.000	15
2.000+	10

Data dicocokkan (*fitted*) terhadap distribusi Weibull menggunakan metode *maximum likelihood*.

Tentukan nilai estimasi dari τ.

A. 0,8
B. 1,0
C. 1,2
D. 1,4
E. 1,6

5. Diberikan data sebagai berikut:
   i. Sebuah portfolio terdiri dari 100 risiko berdistribusi identik dan saling bebas (iid).
   ii. Banyaknya klaim pada setiap risiko berdistribusi Poisson dengan rata-rata (*mean*) adalah λ.
   iii. *The prior distribution* dari λ adalah:

$$\pi(\lambda) = \frac{(50\lambda)^4 e^{-50\lambda}}{6\lambda} \quad ; \quad \lambda > 0$$

Selama tahun pertama, pengalaman kerugian yang diamati adalah sebagai berikut:

Banyaknya Klaim	Banyaknya Risiko
0	90
1	7
2	2
3	1
Total	100

Tentukan ekspektasi Bayesian dari banyaknya klaim pada tahun kedua untuk portfolio ini.

A. 8　　B. 10　　C. 11　　D. 12　　E.14

6. Sebuah lini bisnis memiliki 3(tiga) jenis klaim. Probabilitas historis dan banyaknya klaim untuk setiap jenis klaim pada tahun berjalan (*current year*) adalah :

Jenis Klaim	Probabilitas historis	Banyaknya klaim pada tahun berjalan
A	0,2744	112
B	0,3512	180
C	0,3744	138

Anda melakukan pengujian dengan hipotesis nol (*null hypothesis*) bahwa probabilitas setiap jenis klaim pada tahun berjalan sama dengan probabilitas historis.

Hitunglah nilai statistik uji *Chi-square goodness of fit*.
A. kurang dari 9
B. paling sedikit 9 akan tetapi kurang dari 10
C. paling sedikit 10 akan tetapi kurang dari 11
D. paling sedikit 11 akan tetapi kurang dari 12
E. paling sedikit 12

7. Diberikan data sebagai berikut:
   i. Banyaknya klaim tahunan untuk seorang tertanggung memiliki fungsi probabilitas:
   $$p(x) = \binom{3}{x} q^x (1-q)^{3-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3$$
   ii. *The prior density* adalah $\pi(q) = 2q \quad , \quad 0 < q < 1$

   Seorang tertanggung yang dipilih secara acak diketahui tidak melakukan klaim (*zero claim*) pada tahun pertama.
   Untuk tertanggung yang terpilih tersebut, hitunglah estimasi banyaknya klaim pada tahun kedua dengan menggunakan metode kredibilitas Buhlmann.
   A. 0,33
   B. 0,50
   C. 1,00
   D. 1,33
   E. 1,50

8. Sebuah kerugian memiliki fungsi distribusi:
   $$F(x) = \begin{cases} (x/100)^2 \ , & 0 \le x \le 100 \\ 1 \ , & 100 < x \end{cases}$$
   Sebuah perusahaan asuransi akan membayarkan 80% dari nilai kerugian setelah dikurangi *ordinary deductible* sebesar 20, dengan maksimum pembayaran sebesar 60 untuk setiap kerugian.

   Hitunglah ekspektasi bersyarat pembayaran klaim *(the conditional expected claim payment*), jika diketahui bahwa sebuah pembayaran telah dilakukan.
   A. 37 B. 39 C. 43 D. 47 E.49

9. Diberikan data sebagai berikut:
   i. Sampel kerugian berukuran 15 adalah sbb:

11	22	22	22	36
51	69	69	69	92
92	120	161	161	230

   ii. $\hat{H}_1(x)$ adalah taksiran empiris Nelson Aalen dari fungsi kumulatif *hazard rate*.
   iii. $\hat{H}_2(x)$ adalah taksiran maksimum likelihood dari fungsi kumulatif *hazard rate* dengan asumsi sampel diambil dari sebuah distribusi exponensial.

Hitunglah $\left|\widehat{H}_2(75) - \widehat{H}_1(75)\right|$.
A. 0,11
B. 0,22
C. 0,33
D. 0,44
E. 0,55

10. Diberikan 4(empat) grup tertanggung, masing-masing tertanggung mempunyai kemungkinan memiliki jumlah klaim sama dengan nol atau satu, dengan probabilitas sebagai berikut

Grup	**Jumlah klaim**	
	0	**1**
I	0,9	0,1
II	0,8	0,2
III	0,5	0,5
IV	0,1	0,9

Sebuah grup dipilih secara acak(dengan probabilitas = ¼) dan sebanyak 4(empat) orang tertanggung dipilih secara acak dari grup tersebut, diperoleh bahwa total jumlah klaim adalah 2(dua).

Jika 5(lima) tertanggung dipilih secara acak dari grup yang sama, tentukan estimasi jumlah klaim dengan menggunakan metode *Buhlmann-Straub Credibility*.
A. 1,8
B. 2,0
C. 2,2
D. 2,4
E. 2,6

11. Sebuah perusahaan asuransi mempunyai 2(dua) jenis klaim asuransi. Untuk setiap jenis klaim tersebut, banyaknya klaim mengikuti distribusi Poisson dan besarnya klaim berdistribusi secara seragam (uniform) sebagai berikut:

Jenis Klaim	Parameter Poisson λ untuk jumlah klaim	*Range* dari masing-masing besaran klaim
I	12	$(0, 1)$
II	4	$(0, 5)$

Banyaknya klaim dari dua jenis pertanggungan saling bebas (*independent*) serta besarnya klaim dan banyaknya klaim saling bebas.
Hitunglah probabilitas nilai total klaim melebihi 18 dengan menggunakan aproksimasi normal.
A. 0,37
B. 0,39
C. 0,41
D. 0,43
E. 0,45

12. Kerugian pada tahun 2015 berdistribusi Pareto dengan dua parameter $\theta = 5$ dan $\alpha = 2$. Kerugian pada tahun 2016 diketahui 20% lebih tinggi secara seragam (*uniformly*) dari kerugian pada tahun 2015. Sebuah asuransi memberikan pertanggungan dengan *ordinary deductible* sebesar 10.

    Hitunglah *Loss Elimination Ratio (LER)* pada tahun 2016.

    A. 5/9
    B. 5/8
    C. 2/3
    D. 3/4
    E. 4/5

13. Sebanyak 15 orang penderita kanker diamati sejak tanggal diagnosa sampai mana yang terjadi lebih dahulu antara tanggal kematian atau 36 bulan setelah tanggal diagnosa. Kematian yang terjadi selama masa pengamatan adalah sebagai berikut.

Waktu sejak tanggal diagnosa (dinyatakan dalam bulan)	Banyaknya kematian yang terjadi
15	2
20	3
24	2
30	*d*
34	2
36	1

Taksiran *Nelson-Aalen* $\widehat{H}(35)$ adalah 1,5641.

Hitunglah taksiran *Nelson-Aalen* untuk variansi dari $\widehat{H}(35)$.

A. kurang dari 0,10
B. paling sedikit 0,10 akan tetapi kurang dari 0,15
C. paling sedikit 0,15 akan tetapi kurang dari 0,20
D. paling sedikit 0,20 akan tetapi kurang dari 0,25
E. paling sedikit 0,25

14. Interval (0,357 ; 0,700) adalah selang kepercayaan *log-transformed* 95% untuk fungsi kumulatif *hazard rate* pada waktu *t*, dimana fungsi kumulatif *hazard rate* diestimasi dengan menggunakan taksiran *Nelson-Aalen*.

    Hitunglah nilai taksiran *Nelson-Aalen* dari $S(t)$.

    A. 0,50
    B. 0,53
    C. 0,56
    D. 0,59
    E. 0,61

15. Diberikan sebuah himpunan dari 5 (lima) hasil observasi yaitu $\{1,2,5,6,10\}$. Fungsi distribusi diestimasi dengan teknik kepadatan *kernel-smoothed* pada distribusi empiris menggunakan *triangular kernel* dengan *bandwidth* 4.

    Hitunglah $E[X \wedge 10]$ untuk distribusi *kernel-smoothed*.

    A. 4 B. $4\frac{1}{3}$ C. $4\frac{1}{2}$ D. $4\frac{2}{3}$ E.5

16. Dalam suatu studi mortalitas, pada awal pengamatan diketahui terdapat 200 individu. Tidak ada penambahan individu selama masa pengamatan. Waktu kematian yang diamati adalah sebagai berikut:

Waktu (t)	Banyaknya kematian yang terjadi saat t
2	1
5	2
10	1
15	2
20	3

    Satu-satunya waktu dimana individu meninggalkan studi ini selain karna disebabkan oleh kematian adalah pada saat t = 7. Taksiran produk limit Kaplan-Meier dari $S(20)$ adalah 0,953564.

    Tentukan banyaknya individu yang meninggalkan studi ini pada saat t = 7.

    A. 9 B. 10 C. 11 D. 12 E. 13

17. Sebuah studi dilakukan terhadap pasien penyakit kritis dimulai saat t = 0 sampai semuanya meninggal saat t = 5. Diberikan data sebagai berikut:

    i.

Waktu (t)	Banyaknya kematian yang terjadi saat t
1	6
2	9
3	5
4	d_4
5	d_5

    ii. $\widehat{Var}\left(S_n(1)\right) = \widehat{Var}\left(S_n(3)\right)$ berdasarkan data aktual.

    iii. Rata-rata sisa masa hidup untuk pasien yang bertahan hidup sampai t = 3 adalah 7/6.

    Hitunglah banyaknya pasien yang meninggal pada saat t = 4.

    A. 1 B. 3 C. 5 D. 10 E. 15

18. Diberikan hasil observasi sebagai berikut

10 25 50 100

Data tersebut akan disesuaikan dengan sebuah distribusi lognormal dengan metode pecocokan (*matching*) rata-rata dan median.

Hitunglah *fitted probability* dari sebuah observasi yang bernilai lebih besar dari 40.

A. 34%
B. 38%
C. 42%
D. 46%
E. 50%

19. Diberikan informasi sebagai berikut:
   i. Asuransi kecelakaan mobil tersedia dalam 2(dua) jenis pertanggungan yaitu *deductible* 1 dan *deductible* 3.
   ii. Besarnya kerugian (*Loss Sizes*) sebelum *deductible* pada pertanggungan dengan deductible 1 berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = k$ dan $\alpha = 2$
   iii. Besarnya kerugian (*Loss Sizes*) sebelum *deductible* pada pertanggungan dengan deductible 3 berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = 2k$ dan $\alpha = 2$
   iv. Hasil observasi beberapa klaim (setelah *deductible*) pada pertanggungan ini adalah:
   Deductible 1 : 3, 6, 8, 9, 10, 14
   Deductible 3 : 10, 30

Estimasi k dengan menggunakan metode moment.

A. 7,80
B. 8,75
C. 8,80
D. 9,00
E. 9,75

20. Diberikan pengalaman kerugian dari 2(dua) tertanggung selama suatu periode 3 tahun sebagai berikut.

Tetanggung	Tahun ke-1	Tahun ke-2	Tahun ke-3
A	10	12	14
B	$10 - x$	$12 - x$	$14 - x$

Metode empiris bayes nonparametrik digunakan untuk menentukan kredibilitas pengalaman ini. Hitunglah rentang (range) nilai dari x dimana faktor kredibilitas dengan menggunakan metode empiris bayes nonparametrik bernilai lebih besar dari 0(nol).

A. $x > 1{,}33$
B. $x > 1{,}63$
C. $x > 2{,}00$
D. $x > 2{,}67$
E. $x > 4{,}00$

21. Kumpulan suatu klaim berdistribusi eksponensial dengan rata-rata θ, diberikan $\Theta = \theta$. Diketahui fungsi kepadatan peluang dari Θ adalah sebagai berikut:

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(1500/\theta)^4 \, e^{-1500/\theta}}{6\theta} \quad ; \quad \theta > 0$$

Seorang tertanggung dipilih secara acak, dan perusahaan asuransi mendapatkan catatan klaim sebagai berikut:

600 800 200 500 1200 600

Hitunglah ekspektasi besaran klaim posterior (*the posterior expected claim* size) untuk tertanggung tersebut.

A. 375
B. 390
C. 500
D. 540
E. 600

22. Dengan menggunakan metode inversi anda melakukan simulasi terhadap sebuah peubah acak dengan fungsi kepadatan peluang:

$$f(x) = \begin{cases} -2x \ , & -1 \le x \le 0 \\ 0 \ , & lainnya \end{cases}$$

Gunakan angka acak berikut ini yang berasal dari distribusi seragam [0,1]

0,2 0,4 0,3 0,7

Hitunglah rata-rata dari hasil simulasi tersebut.

A. $-0{,}7634$
B. $-0{,}6160$
C. $-0{,}2000$
D. $0{,}6160$
E. $0{,}7634$

23. Anda melakukan simulasi terhadap sebuah peubah acak Poisson dengan $\lambda = 4$ menggunalan proses stokastik. Gunakan angka acak seragam berikut ini sesuai urutan.

0,72 0,23 0,50 0,18 0,89 0,33

Tentukan banyaknya angka yang dihasilkan (*the number generated*).

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

24. Fungsi *hazard rate* dari *survival time* adalah

$$h(x) = 0{,}001(1{,}05^{x})$$

Survival time disimulasikan dengan menggunakan metode inversi.

Gunakan bilangan acak uniform berikut untuk simulasi ini.

0,128 0,482 0,800

Hitunglah rata-rata *survival time* berdasalkan simulasi ini.

A. 62
B. 64
C. 66
D. 68
E. 70

25. Diberikan data sebagai berikut untuk sebuah asuransi kesehatan kumpulan.
   i. X_i adalah banyaknya klaim yang disubmit oleh sebuah grup pada tahun *i*.
   ii. $Var(X_i) = 28$
   iii. $Cov(X_i, X_j) = 12$

Hitunglah kredibilitas Buhlmann yang diberikan pada pengalaman 2 tahunan untuk grup ini.

A. 0,43
B. 0,50
C. 0,60
D. 0,70
E. 0,86

26. Banyaknya klaim dari seorang pengemudi selama setahun diassumsikan berdistribusi Poisson dengan rata-rata yang tidak diketahui dan bervariasi antar pengemudi.

Data dari 100 pengemudi adalah sebagai berikut:

Banyaknya klaim selama setahun	Banyaknya pengemudi
0	54
1	33
2	10
3	2
4	1

Hitunglah kedibilitas dari satu tahun pengamatan untuk seorang pengemudi dengan menggunakan metode estimasi empiris bayes semiparametrik.

A. 0,046
B. 0,055
C. 0,061
D. 0,068
E. 0,073

27. Diberikan informasi sebagai berikut:
    i. $X_{partial}$ = premi murni yang dihitung dari *partially credible data*.
    ii. $\mu = \boldsymbol{E}[X_{partial}]$
    iii. Fluktuasi dibatasi sampai $\pm k\mu$ dari rata-rata dengan probabilitas P.
    iv. $Z =$ Faktor kredibilitas

    Manakah dari berikut ini yang sama dengan P?
    A. $Pr(\mu - k\mu \leq X_{partial} \leq \mu + k\mu)$
    B. $Pr(Z\mu - k\mu \leq ZX_{partial} \leq Z\mu + k)$
    C. $Pr(Z\mu - \mu \leq ZX_{partial} \leq Z\mu + \mu)$ `
    D. $Pr(1 - k \leq ZX_{partial} + (1 - Z)\mu \leq 1 + k)$
    E. $Pr(\mu - k\mu \leq ZX_{partial} + (1 - Z)\mu \leq \mu + k\mu)$

28. Distribusi dari sebuah kecelakaan untuk 84 polis yang dipilih secara acak adalah sebagai berikut:

Jumlah Kecelakaan	Jumlah polis
0	32
1	26
2	12
3	7
4	4
5	2
6	1
Total	84

Model manakah yang paling baik merepresentasikan data ini?
A. Binomial negatif
B. *Discrete Uniform*
C. Poisson
D. Binomial
E. Binomial atau Poisson

29. Dari sebuah studi laboratorium yang terdiri dari 9(sembilan) individu diberikan data sebagai berikut:
    i. Waktu kematian : 1, 2, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 9
    ii. Dihipotesiskan bahwa distribusi yang mendasarinya (*underlying distribution*) adalah *uniform* dengan $\omega = 11$.

    Hitunglah statistik Kolmogorov-Smirnov untuk hipotesis ini.
    A. 12/99
    B. 14/99
    C. 18/99
    D. 24/99
    E. 25/99

30. Untuk sebuah sampel berukuran 2(dua) disesuaikan dengan distribusi berikut:

$$F(\mathrm{x}) = 1 - \left(\frac{1}{1 + \mathrm{x}}\right)^{\alpha}$$

    Diberikan data berikut:
    i. Taksiran α dengan menggunakan metode moment adalah 16/15
    ii. Taksiran α dengan menggunakan maksimum likelihood adalah 0,3675

    Angka manakah dari berikut ini yang merupakan salah satu dari sampel tersebut?
    A. 9
    B. 10
    C. 12
    D. 14
    E. 15

NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from -∞ to z, Pr(Z<z)
The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Values of z for selected values of Pr(Z<z)							
z	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
Pr(Z<z)	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995

A.2.3.1 Pareto (Pareto Type II, Lomax)—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1 < k < \alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[(1-p)^{-1/\alpha} - 1] \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= \mathrm{VaR}_p(X) + \frac{\theta(1-p)^{-1/\alpha}}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1 \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha-1}\left[1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right], \quad \alpha \neq 1 \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= -\theta \ln\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right), \quad \alpha = 1 \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)} \beta[k+1, \alpha-k; x/(x+\theta)] + x^k \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}
$$

A.3.2.1 Gamma—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)} \qquad F(x) = \Gamma(\alpha; x/\theta) \\
M(t) &= (1-\theta t)^{-\alpha}, \quad t < 1/\theta \qquad \mathrm{E}[X^k] = \frac{\theta^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k > -\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k(\alpha+k-1)\cdots\alpha, \quad \text{if } k \text{ is an integer}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k[1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k > -\alpha \\
&= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\theta^k \Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k[1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= \theta(\alpha-1), \quad \alpha > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.5.1.1 Lognormal—μ, σ (μ can be negative)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), \quad z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \qquad F(x) = \Phi(z) \\
\mathrm{E}[X^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2) \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2)\Phi\left(\frac{\ln x - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k[1 - F(x)] \\
\text{mode} &= \exp(\mu - \sigma^2)
\end{aligned}
$$

A.3.3.1 Exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta} \qquad F(x) = 1 - e^{-x/\theta} \\
M(t) &= (1-\theta t)^{-1} \qquad \mathrm{E}[X^k] = \theta^k \Gamma(k+1), \quad k > -1 \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k k!, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) + \theta \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}) \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(k+1)\Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1 \\
&= \theta^k k! \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}
$$

A.3.3.2 Inverse exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\theta e^{-\theta/x}}{x^2} \qquad F(x) = e^{-\theta/x} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1-k), \quad k < 1 \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta(-\ln p)^{-1} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k G(1-k; \theta/x) + x^k(1 - e^{-\theta/x}), \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= \theta/2
\end{aligned}
$$

A.3.2.3 Weibull—θ, τ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau (x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x} \qquad F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^\tau} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1 + k/\tau), \quad k > -\tau \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[-\ln(1-p)]^{1/\tau} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(1 + k/\tau)\Gamma[1 + k/\tau; (x/\theta)^\tau] + x^k e^{-(x/\theta)^\tau}, \quad k > -\tau \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\tau - 1}{\tau}\right)^{1/\tau}, \quad \tau > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

B.2.1.1 Poisson—λ

$$
\begin{aligned}
p_0 &= e^{-\lambda}, \quad a = 0, \quad b = \lambda \qquad p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
\mathrm{E}[N] &= \lambda, \quad \mathrm{Var}[N] = \lambda \qquad P(z) = e^{\lambda(z-1)}
\end{aligned}
$$

B.2.1.2 Geometric—β

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{1+\beta}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = 0 \qquad p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} \\
\mathrm{E}[N] &= \beta, \quad \mathrm{Var}[N] = \beta(1+\beta) \qquad P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-1}.
\end{aligned}$$

This is a special case of the negative binomial with $r = 1$.

B.2.1.3 Binomial—$q, m, (0 < q < 1,\ m$ an integer)

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1-q)^m, \quad a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(m+1)q}{1-q} \\
p_k &= \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m \\
\mathrm{E}[N] &= mq, \quad \mathrm{Var}[N] = mq(1-q) \qquad P(z) = [1+q(z-1)]^m.
\end{aligned}$$

B.2.1.4 Negative binomial—β, r

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1+\beta)^{-r}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = \frac{(r-1)\beta}{1+\beta} \\
p_k &= \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)\beta^k}{k!(1+\beta)^{r+k}} \\
\mathrm{E}[N] &= r\beta, \quad \mathrm{Var}[N] = r\beta(1+\beta) \qquad P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-r}.
\end{aligned}$$

*****