PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN	: A20 – Probabilitas dan Statistika
TANGGAL	: 22 November 2016
JAM	: 09.00 – 12.00 WIB
LAMA UJIAN	: 180 Menit
SIFAT UJIAN	: Tutup Buku

2016

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan. Lembar jawaban pilihan ganda tidak boleh diberi komentar selain pilihan jawaban yang benar.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang. Setiap peserta yang keluar tanpa izin dari pengawas maka lembar jawaban akan diambil oleh pengawas dan dianggap telah selesai mengerjakan ujian.
10. Alat komunikasi harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi.
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 10 (sepuluh) hari setelah akhir periode ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) atau 5 (lima) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Saudara diminta untuk membaca dan mengikuti petunjuk pengisian yang ada di lembar jawaban.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor peserta, kode dan tanggal ujian pada** tempat yang disediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara**.

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. **Peserta dapat memberikan sanggahan soal, jawaban atau keluhan kepada Komisi Ujian dan Kurikulum selambat-lambatnya 10 hari setelah akhir periode ujian.**
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke **sanggahan.soal@aktuaris.or.id.**
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.

1. Peluang dari hasil suatu kunjungan ke kantor *Primary Care Physician* (PCP) untuk tidak melakukan tes laboratorium atau rujukan ke spesialis adalah 35%. Dari seluruh yang datang ke kantor PCP, 30% dirujuk ke spesialis dan 40% membutuhkan tes laboratorium. Tentukan peluang dari hasil suatu kunjungan ke kantor PCP adalah tes laboratorium dan rujukan ke spesialis ?

   a. 0,05
   b. 0,12
   c. 0,18
   d. 0,25
   e. 0,35

2. Perusahaan asuransi menawarkan program kesehatan kepada pegawai-pegawai dari suatu perusahaan besar. Sebagai bagian dari program, masing-masing pegawai dapat memilih dua perlindungan tambahan (*supplementary coverage*) A, B, dan C; atau tidak memilih perlindungan tambahan sama sekali. Proporsi pegawai perusahaan yang memilih perlindungan A, B, dan C adalah $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, dan $\frac{5}{12}$. Tentukan peluang secara acak dipilih seorang pegawai yang tidak memilih perlindungan tambahan ?

   a. 0
   b. $\frac{47}{144}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{97}{144}$
   e. $\frac{7}{9}$

3. Seorang aktuaris mengamati data statistik tentang kecenderungan tren pembelian asuransi oleh pemilik mobil mendapati beberapa kesimpulan seperti berikut :

   - Pemilik kendaraan ternyata memiliki kecenderungan untuk membeli perlindungan tabrakan dua kali lebih tinggi daripada perlindungan pendapatan
   - Kejadian pembelian perlindungan tabrakan ini ternyata saling bebas dengan kejadian pembelian asuransi perlindungan pendapatan
   - Peluang bahwa seorang pemilik mobil membeli kedua perlindungan tersebut pada waktu yang bersamaan ialah 0,15

   Hitung peluang bahwa pemilik mobil tidak membeli kedua jenis perlindungan asuransi – tabrakan dan perlindungan pendapatan?

a. 0,18
b. 0,33
c. 0,48
d. 0,67
e. 0,82

4. Misalkan A, B, dan C ialah tiga kejadian yang saling bebas secara mutual (*mutually independent)* yang mana $P(A) = 0,5; P(B) = 0,6\ ; P(C) = 0,1$. Hitung $P(A' \cup B' \cup C\ )$

a. 0,690
b. 0,710
c. 0,730
d. 0,980
e. 0,960

5. Misalkan N suatu peubah acak menyatakan banyaknya klaim yang diterima dalam satu minggu mengikuti $P(N = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, dimana $n \geq 0$. Banyaknya klaim yang diterima dalam satu minggu tersebut saling bebas dengan minggu-minggu yang lain. Tentukan peluang bahwa tujuh klaim akan diterima dalam satu periode 2-minggu.

a. $\frac{1}{256}$
b. $\frac{1}{128}$
c. $\frac{7}{512}$
d. $\frac{1}{64}$
e. $\frac{1}{32}$

6. Sebuah polis asuransi grup memberikan perlindungan asuransi kesehatan kepada pegawai dari suatu perusahaan. V, yaitu nilai klaim-klaim yang dibuat dalam satu tahun dinyatakan dalam suatu formula $V = 100.000\, Y$, dimana Y adalah peubah acak dengan fungsi peluang sebagai berikut:

$$f(y) = \begin{cases} k(1-y)^4, & 0 < y < 1 \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

Dimana *k* ialah suatu konstanta. Berapa peluang bersyarat V melebihi 40.000, diberikan V melebihi 10.000?

a. 0,08
b. 0,13
c. 0,17
d. 0,20
e. 0,51

7. Misalkan suatu fungsi distribusi X untuk $x > 0$ adalah $F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k e^{-x}}{k!}$

Tentukan fungsi peluang kepadatan X untuk $x > 0$?

a. $\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$
b. $\frac{\mathrm{x}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{2}$
c. $\frac{\mathrm{x}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{6}$
d. $\frac{\mathrm{x}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{6} - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$
e. $\frac{\mathrm{x}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{6} + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$

8. Suatu penelitian menunjukkan bahwa biaya tahunan untuk memelihara dan memperbaiki suatu mobil mewah di Jakarta sebesar 200 juta rupiah dengan variansi 260 juta rupiah. Jika dikenakan pajak sebesar 20% untuk seluruh barang yang berhubungan dengan pemeliharaan dan perbaikan mobil, berapa variansi dari biaya tahunan atas pemeliharaan dan perbaikan mobil?

a. 208 juta rupiah
b. 260 juta rupiah
c. 270 juta rupiah
d. 312 juta rupiah
e. 374 juta rupiah

9. Misalkan X_1, X_2, X_3 adalah sampel acak dari suatu ditribusi diskrit dengan fungsi massa peluang sebagai berikut:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, x = 0 \\ \frac{2}{3}, x = 1 \\ 0, lainnya \end{cases}$$

Tentukan fungsi pembangkit momen, $M(t)$, dari $Y = X_1X_2X_3$?

a. $\frac{19}{27}+\frac{8}{27}\mathrm{e}^{\mathrm{t}}$
b. $1+2\mathrm{e}^{\mathrm{t}}$
c. $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\right)^{3}$
d. $\frac{1}{27}+\frac{8}{27}\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}$
e. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}$

10. Perusahaan asuransi jiwa membuat sebuah polis asuransi berjangka 1 tahun untuk satu pasangan wiraswasta yang bepergian ke lokasi berisiko tinggi. Polis asuransi tidak membayar apapun jika tidak ada yang meninggal dalam tahun tersebut; 100.000 juta rupiah, jika tepat satu dari pasangan tersebut meninggal, dan K juta >0, jika keduanya meninggal. Perusahaan asuransi menentukan bahwa terdapat peluang minimal satu akan meninggal dalam tahun tersebut sebesar 0,1 dan peluang tepat satu dari pasangan akan meninggal dalam tahun tersebut sebesar 0,08. Diketahui simpangan baku dari pembayaran sebesar 74.000 juta. Tentukan ekspektasi pembayaran polis untuk tahun tersebut (dalam juta rupiah)

a. 18.000
b. 21.000
c. 24.000
d. 27.000
e. 30.000

11. Sebuah studi dilakukan terhadap kesehatan dari dua kelompok saling bebas berisi 10 pemegang polis yang mana dimonitor selama satu tahun. Peluang partisipan (individu) dalam studi mengundurkan diri sebelum akhir studi ialah 0,2 (saling bebas dengan partisipan yang lain). Berapa peluang paling sedikit 9 partisipan menyelesaikan studi dalam salah satu kelompok, bukan dalam kedua kelompok?

a. 0,096
b. 0,192
c. 0,235
d. 0,376
e. 0,469

12. Seorang aktuaris menemukan bahwa pemegang polis memiliki kecenderungan mengajukan 2 kali klaim tiga kali lebih besar dibandingkan mengajukan 4 kali klaim. Jika banyaknya klaim yang diajukan memiliki distribusi Poisson, berapa variansi dari banyaknya klaim yang diajukan?

    a. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
    b. 1
    c. $\sqrt{2}$
    d. 2
    e. 4

13. Lamanya waktu penggunaan suatu printer dengan biaya 200 ribu rupiah memiliki distribusi eksponensial dengan rata-rata sebesar 2 tahun. Pemilik pabrik setuju untuk membayar ganti rugi penuh jika sebuah printer rusak dalam satu tahun pertama sejak masa pembelian, dan membayar ganti rugi setengahnya jika printer rusak di tahun kedua. Jika pengusaha berhasil menjual 100 printer, berapa ekspektasi pengusaha membayar ganti rugi?

    a. 6.321
    b. 7.358
    c. 7.869
    d. 10.256
    e. 12.642

14. Jika X memiliki distribusi kontinu seragam pada interval dari 0 hingga 10, maka berapa nilai dari $P(X + \frac{10}{X} > 7)$?

    a. $\frac{3}{10}$
    b. $\frac{31}{70}$
    c. $\frac{1}{2}$
    d. $\frac{39}{70}$
    e. $\frac{7}{10}$

15. Suatu distribusi Pareto dengan parameter α dan θ memiliki fungsi kepadatan peluang :

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}}, x > 0.$$

Diketahui $\alpha = 3$ dan $\theta = 200$. Selanjutnya didefinisikan peubah acak baru, yaitu Y yang merupakan distribusi bersyarat dari $X - 100$, diberikan $X > 100$. Tentukan distribusi Y?

a. Pareto dengan $\alpha = 3$ dan $\theta = 200$
b. Pareto dengan $\alpha = 4$ dan $\theta = 200$
c. Pareto dengan $\alpha = 3$ dan $\theta = 100$
d. Pareto dengan $\alpha = 3$ dan $\theta = 300$
e. Pareto dengan $\alpha = 4$ dan $\theta = 300$

16. Misalkan X dan Y adalah peubah acak diskrit yang menyatakan kerugian, memiliki fungsi kepadatan peluang gabungan sebagai berikut:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{24x}, & x = 1,2,4; y = 2,4,8;\ x \leq y \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

Sebuah polis asuransi membayar penuh kerugian X dan setengah kerugian Y. Tentukan peluang ganti rugi klaim yang dibayarkan perusahaan asuransi tidak lebih dari 5?

a. $\frac{1}{8}$
b. $\frac{7}{24}$
c. $\frac{3}{8}$
d. $\frac{5}{8}$
e. $\frac{17}{24}$

17. Sebuah polis asuransi membayar total manfaat perawatan kesehatan yang terdiri dari 2 bagian untuk setiap klaim. Misalkan X menyatakan bagian dari manfaat yang dibayarkan kepada dokter bedah, dan Y menyatakan bagian yang dibayarkan kepada rumah sakit. Variansi dari X adalah 5000, variansi dari Y adalah 10.000, dan variansi dari total manfaat, $X + Y$ adalah 17.000. Karena peningkatan biaya medis, perusahaan yang menerbitkan polis memutuskan untuk meningkatkan X dengan jumlah yang tetap sebesar 100 per klaim, dan meningkatkan Y dengan 10% per klaim. Hitung variansi dari total manfaat setelah perbaikan tersebut dibuat!

a. 18.200
b. 18.800
c. 19.300
d. 19.520
e. 20.670

18. Misalkan T_1 dan T_2 menyatakan lamanya waktu penggunaan (dalam unit jam) dari 2 komponen yang berhubungan pada suatu alat elektronik. Fungsi peluang gabungan dari T_1 dan T_2 adalah seragam pada daerah yang didefinisikan oleh $0 \leq t1 \leq t2 \leq L$, dengan L ialah suatu konstanta positif. Tentukan $E(T_1 + T_2)^2$!

    a. $\frac{L^2}{3}$
    b. $\frac{L^2}{2}$
    c. $\frac{2L^2}{3}$
    d. $\frac{3L^2}{4}$
    e. L^2

19. Nilai keuntungan suatu produk baru diberikan oleh suatu formula : $Z = 3X - Y - 5$. X dan Y adalah peubah acak saling bebas dengan $Var(X) = 1$ dan $Var(Y) = 2$. Berapa variansi untuk peubah Z?

    a. 1
    b. 5
    c. 7
    d. 11
    e. 16

20. Misalkan X dan Y menyatakan lamanya waktu (dalam jam) seseorang yang dipilih secara acak menonton film dan pertandingan olahraga, selama periode tiga bulan. Diketahui informasi tentang X dan Y sebagai berikut:

    $$E(X) = 50$$
    $$E(Y) = 20$$
    $$Var(X) = 50$$
    $$Var(Y) = 30$$
    $$Cov(X,Y) = 10$$

    Dari 100 orang dipilih secara acak dan diamati selama tiga bulan. Misalkan T menyatakan total lamanya waktu (dalam jam) seratus orang tersebut menonton film atau pertandingan olahraga selama tiga bulan. Berapa nilai $P(T < 7100)$?

    a. 0,62
    b. 0,84
    c. 0,87
    d. 0,92
    e. 0,97

21. Sebuah perusahaan asuransi menerbitkan 1250 polis asuransi perlindungan kesehatan mata. Banyaknya klaim yang diajukan oleh pemegang polis asuransi tersebut selama satu tahun ternyata mengikuti peubah acak Poisson dengan rata-rata 2. Asumsikan banyaknya klaim yang diajukan oleh pemegang polis yang berbeda ialah saling bebas. Berapa peluang total banyaknya klaim yang terjadi berada pada selang 2450 dan 2600 dalam satu tahun? (pendekatan ke nilai terdekat)

    a. 0,68
    b. 0,82
    c. 0,87
    d. 0,95
    e. 1,00

22. Sebuah polis asuransi mengganti biaya perawatan gigi, X, dengan manfaat maksimal sampai dengan sebesar 250 juta rupiah, fungsi kepadatan peluang dari X sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-0,004x}, & x \geq 0 \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

    Dengan c adalah konstanta. Hitung nilai median dari manfaat pada polis tersebut?

    a. 161
    b. 165
    c. 173
    d. 182
    e. 250

23. Dalam polis asuransi grup, perusahaan asuransi setuju untuk membayar 100% tagihan medis yang terjadi selama tahun tersebut dari pegawai perusahaan hingga total maksimum sebesar satu miliar rupiah. Besar total tagihan yang terjadi, X, memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(4-x)}{9}, & 0 < x < 3, \text{x dalam milyar rupiah} \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

    Hitung besar total pembayaran untuk polis tersebut (dalam miliar rupiah) yang diharapkan perusahaan asuransi.

a. 0,120
b. 0,301
c. 0,935
d. 2,338
e. 3,495

24. Sebuah perusahaan asuransi jiwa membuat klasifikasi calon pemegang polis asuransi berdasarkan kriteria berikut:
    - L = Pendaftar adalah laki-laki
    - R = Pendaftar adalah pemilik rumah

    Dari populasi calon pemegang polis asuransi jiwa tersebut, perusahaan asuransi telah mengidentifikasikan beberapa informasi berikut:
    - 40% pendaftar adalah laki-laki
    - 40% pendaftar adalah pemilik rumah
    - 20% pendaftar adalah pemilik rumah yang berjenis kelamin perempuan.

    Tentukan persentase calon pemegang polis yang merupakan laki-laki dan tidak memiliki rumah

a. 10%
b. 20%
c. 30%
d. 40%
e. 50%

25. Pada suatu perguruan tinggi, berat badan mahasiswa pria dan wanita diperkirakan mengikuti distribusi normal dengan rata-rata sebesar 180,20 dan simpangan baku sebesar 130,15. Jika seorang mahasiswa pria dan wanita dipilih secara acak, berapa peluang jumlah berat badan keduanya kurang dari 280?

a. 0,1587
b. 0,1151
c. 0,0548
d. 0,0359
e. 0,0228

26. Sebuah portofolio asuransi kesehatan dipecah menjadi 2 kelas, yaitu grup dengan risiko rendah, sebanyak 75% dari total polis, dan grup dengan risiko tinggi, sebanyak 25% dari total polis. Banyaknya klaim per tahun yang terjadi dari polis dengan risiko rendah berdistribusi Poisson dengan rata-rata 0,2, dan banyaknya klaim per tahun yang terjadi pada polis dengan risiko tinggi berdistribusi Poisson dengan rata-rata 1,5. Sebuah polis dipilih secara acak dari portofolio. Berapa peluang terjadinya tepat satu klaim pada portofolio ini pada suatu tahun?

    a. 0,21
    b. 0,25
    c. 0,29
    d. 0,33
    e. 0,37

27. Perusahaan asuransi mikro menerbitkan polis asuransi kepada 32 tertanggung dengan risiko yang saling bebas. Untuk setiap polis, peluang terjadinya klaim adalah 1/6. Total besar manfaat yang diberikan saat terjadi klaim memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

    Hitung nilai ekspektasi dari total manfaat yang dibayarkan!

    a. $\frac{16}{9}$
    b. $\frac{8}{3}$
    c. $\frac{32}{9}$
    d. $\frac{16}{3}$
    e. $\frac{32}{3}$

28. Banyaknya kombinasi dari *k* objek yang dipilih dari kumpulan *n* objek yang berbeda diberikan oleh $\binom{n}{k}$. Tentukan persamaan yang tepat dari $\binom{n}{k}$

    a. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
    b. $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
    c. $\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-1}{k}$
    d. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2}$
    e. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{k-2}$

29. Suatu kotak mengandung 4 bola merah dan 6 bola putih. Kemudian 3 buah bola diambil secara acak tanpa dikembalikan ke dalam kotak. Berapakah probabilitas bahwa bola yang diambil adalah 1 bola merah dan 2 bola putih, dimana diberikan syarat bahwa sedikitnya 2 bola yang diambil berwarna putih?

    a. $\frac{1}{2}$
    b. $\frac{1}{2}$
    c. $\frac{3}{4}$
    d. $\frac{9}{11}$
    e. 0

30. Perusahaan A membuat suatu model laba bulanan dengan variabel acak yang kontinu (*continuous random variable*) f. Perusahaan B mempunya laba bulanan dua kali lipat perusahaan A. Bila g adalah fungsi kepadatan peluang dari laba bulanan perusahaan B. Tentukanlah $g(x)$ dimana nilainya tidak 0?

    a. $2f(2x)$
    b. $f(2x)$
    c. $2f(\frac{x}{2})$
    d. $\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$
    e. $2f(x)$

DISCRETE DISTRIBUTION

B.2.1.1 Poisson—λ

$$\begin{aligned}
p_0 &= e^{-\lambda}, \quad a = 0, \quad b = \lambda, \\
p_k &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \\
\mathrm{E}[N] &= \lambda, \quad \mathrm{Var}[N] = \lambda, \\
\hat{\lambda} &= \hat{\mu}, \\
P(z) &= e^{\lambda(z-1)}.
\end{aligned}$$

B.2.1.3 Binomial—q, m $(0 < q < 1, m$ an integer)

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1-q)^m, \quad a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(m+1)q}{1-q}, \\
p_k &= \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \\
\mathrm{E}[N] &= mq, \quad \mathrm{Var}[N] = mq(1-q), \\
\hat{q} &= \hat{\mu}/m, \\
P(z) &= [1 + q(z-1)]^m.
\end{aligned}$$

B.2.1.4 Negative binomial—β, r

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1+\beta)^{-r}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = \frac{(r-1)\beta}{1+\beta}, \\
p_k &= \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)\beta^k}{k!(1+\beta)^{r+k}}, \\
\mathrm{E}[N] &= r\beta, \quad \mathrm{Var}[N] = r\beta(1+\beta), \\
\hat{\beta} &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\mu}} - 1, \quad \hat{r} = \frac{\hat{\mu}^2}{\hat{\sigma}^2 - \hat{\mu}}, \\
P(z) &= [1 - \beta(z-1)]^{-r}, \quad -(1 + 1/\beta) < z < 1 + 1/\beta.
\end{aligned}$$

CONTINUOUS DISTRIBUTION

A.2.3.1 Pareto—α, θ (Pareto Type II, Lomax)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}, \\
F(x) &= 1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[(1-p)^{-1/\alpha}-1], \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1<k<\alpha, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)} \quad \text{if } k \text{ is a positive integer}, \\
\mathrm{E}[X\wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha-1}\left[1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right], \quad \alpha\neq 1, \\
\mathrm{E}[X\wedge x] &= -\theta\ln\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right), \quad \alpha=1, \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= \mathrm{VaR}_p(X)+\frac{\theta(1-p)^{-1/\alpha}}{\alpha-1}, \quad \alpha>1, \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\beta[k+1,\alpha-k;x/(x+\theta)] \\
&\quad +x^k\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \quad k>-1,
\end{aligned}
$$

A.3.2.1 Gamma—α, θ (When $\alpha = n/2$ and $\theta = 2$, it is a chi-square distribution with n degrees of freedom.)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)}, \\
F(x) &= \Gamma(\alpha;x/\theta), \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k>-\alpha, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k(\alpha+k-1)\cdots\alpha \quad \text{if } k \text{ is a positive integer}, \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+k;x/\theta)+x^k[1-\Gamma(\alpha;x/\theta)], \quad k>-\alpha, \\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\theta^k\Gamma(\alpha+k;x/\theta) \\
&\quad +x^k[1-\Gamma(\alpha;x/\theta)] \quad \text{if } k \text{ is a positive integer},
\end{aligned}
$$

A.3.2.3 Weibull—θ, τ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau(x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x}, \\
F(x) &= 1 - e^{-(x/\theta)^\tau}, \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[-\ln(1-p)]^{1/\tau}, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1 + k/\tau), \quad k > -\tau, \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(1 + k/\tau)\Gamma[1 + k/\tau; (x/\theta)^\tau] + x^k e^{-(x/\theta)^\tau}, \quad k > -\tau,
\end{aligned}
$$

A.3.3.1 Exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}, \\
F(x) &= 1 - e^{-x/\theta}, \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p), \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(k+1), \quad k > -1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k k! \quad \text{if } k \text{ is a positive integer}, \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}), \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) + \theta, \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(k+1)\Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1, \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k k! \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta} \quad \text{if } k > -1 \text{ is an integer},
\end{aligned}
$$

A.5.1.1 Lognormal—μ,σ (μ can be negative)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), \quad z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}, \\
F(x) &= \Phi(z), \\
\mathrm{E}[X^k] &= \exp\left(k\mu + \tfrac{1}{2}k^2\sigma^2\right), \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \exp\left(k\mu + \tfrac{1}{2}k^2\sigma^2\right) \Phi\left(\frac{\ln x - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k[1 - F(x)],
\end{aligned}
$$

NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from -∞ to z, Pr(Z<z)
The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000