PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN : A70 – Pemodelan & Teori Risiko
TANGGAL : 22 November 2016
JAM : 13.30 – 16.30

LAMA UJIAN : 180 Menit
SIFAT UJIAN : Tutup Buku

2016

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan. Lembar jawaban pilihan ganda tidak boleh diberi komentar selain pilihan jawaban yang benar.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang.Setiap peserta yang keluar tanpa izin dari pengawas maka lembar jawaban akan diambil oleh pengawas dan dianggap telah selesai mengerjakan ujian.
10. Alat komunikasi harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi.
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 10 (sepuluh) hari setelah akhir periode ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) atau 5 (lima) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Saudara diminta untuk membaca dan mengikuti petunjuk pengisian yang ada di lembar jawaban.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor peserta, kode dan tanggal ujian pada** tempat yang disediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara**.

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. **Peserta dapat memberikan sanggahan soal, jawaban atau keluhan kepada Komisi Ujian dan Kurikulum selambat-lambatnya 10 hari setelah akhir periode ujian.**
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke **sanggahan.soal@aktuaris.or.id**
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.

1. Dalam sebuah asuransi kendaraan bermotor diketahui bahwa banyaknya klaim tahunan berdistribusi binomial negatif dengan rata-rata (*mean*) 0,2 dan variansi 0,3. Besarnya klaim berdistribusi Pareto dengan dua parameter $\alpha = 3$ dan $\theta = 10$.
   Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*).

   Hitunglah variansi dari total biaya klaim tahunan (*annual aggregate claim cost*).
   A. 22,5
   B. 25,0
   C. 27,5
   D. 32,5
   E. 35,0

2. Diberikan pengalaman dari dua grup pemegang polis sebagai berikut:

Grup		Tahun pertama	Tahun ke-2	Tahun ke-3	Total
A	Jumlah anggota	15	20	25	60
	Total kerugian	150	100	170	420
B	Jumlah anggota		5	15	20
	Total kerugian		50	200	250

   Dengan menggunakan *non-parametric empirical Bayes credibility method*, hitunglah kredibilitas untuk pengalaman dari grup A.
   A. 0,86
   B. 0,88
   C. 0,90
   D. 0,92
   E. 0,94

3. Kerugian dari sebuah pertanggungan asuransi berdistribusi dengan fungsi kepadatan (*density function*) sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{3}{100^3}(100 - x)^2 \qquad ; \qquad 0 \leq x \leq 100$$

   Kerugian memiliki *ordinary deductible* sebesar 15.

   Hitunglah *Loss Elimination Ratio* (gunakan pembulatan terdekat!)
   A. 0,46
   B. 0,48
   C. 0,50
   D. 0,52
   E. 0,54

4. Sebuah asuransi memberikan pertanggungan terhadap dua jenis pertanggungan yaitu A dan B. Jumlah tertanggung pada setiap jenis pertanggungan adalah sama. Besarnya klaim pada setiap jenis pertanggungan memiliki distribusi Pareto. Banyaknya klaim dan besarnya klaim untuk tertanggung pada setiap jenis pertanggungan mempunyai distribusi sebagai berikut:

Jumlah Klaim

	A	B
0	0,9	0,8
1	0,1	0,2

Besarnya Klaim (Parameter Pareto)

	A	B
α	3	3
θ	50	60

Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*) pada setiap jenis pertanggungan. Hitunglah kredibiltas Buhlmann untuk pengalaman selama 2 tahun. (Gunakan pembulatan terdekat!).

A. 0,01
B. 0,02
C. 0,03
D. 0,04
E. 0,05

5. Diberikan 5(lima) sampel klaim sebagai berikut:

$$2, 3, 4, x_{1,}\, x_2 \qquad\qquad ;dengan\ \ x_2 > x_1$$

Sampel ini disesuaikan (*fitted*) dengan distribusi Pareto dengan menggunakan metode moment. Hasil estimasi parameternya adalah $\hat{\alpha} = 47.71$dan $\hat{\theta} = 373.71$.

Hitunglah x_1.

A. 6,0
B. 6,6
C. 7,0
D. 7,6
E. 8,0

6. Total kerugian pada tahun k, $k = 1{,}2{,}3, \ldots, n$ memiliki distribusi dengan fungsi kepadatan (*density function*) sebagai berikut:

$$f(x; k) = \frac{k^k x^{k-1} e^{-\,kx/\theta}}{\Gamma(\mathrm{k})\theta^k} \qquad ; \qquad x > 0$$

Misalkan X_k adalah total kerugian yang diamati pada tahun k. Ada mengamati $X_1 = 7.000$, $X_2 = 7.500$, $X_3 = 8.000$, $X_4 = 8.500$, $X_5 = 9.000$

Tentukan estimasi *maximum likelihood* untuk θ.

A. 7.667
B. 7.833
C. 8.000
D. 8.167
E. 8.333

7. Banyaknya kejadian klaim diassumsikan berdistribusi Poisson dengan rata-rata (*mean*) adalah λ. Dengan menggunakan metode *limited fluctuation credibility*, banyaknya eksposur yang dibutuhkan untuk *full credibility* dari banyaknya klaim adalah n.
Assumsi distribusi dari banyaknya klaim diubah menjadi distribusi binomial negatif dengan parameter r dan β. Standard untuk *full credibility* tidak diubah.

   Berapakah banyak eksposur yang dibutuhkan untuk *full credibility* dari banyaknya klaim dengan adanya perubahan assumsi tersebut?

   A. $n\lambda(1+\beta)$ B. $\frac{n(1+\beta)}{\beta}$ C. $\frac{n(1+\beta)}{r\beta}$ D. $\frac{n\lambda(1+\beta)}{\beta}$ E. $\frac{n\lambda(1+\beta)}{r\beta}$

8. Diberikan data sebagai berikut
   - Banyaknya klaim berdistribusi binomial dengan $m = 3$, $q = 0{,}2$
   - Besarnya klaim memiliki distribusi sebagai berikut:

Jumlah klaim	**Probabilitas terjadinya klaim**
0	0,2
1	0,5
2	0,2
3	0,1

   - S adalah peubah acak total kerugian

   Hitunglah $E[S \wedge 2{,}4]$.
   A. 0,625
   B. 0,637
   C. 0,650
   D. 0,664
   E. 0,683

9. Diberikan data sebagai berikut untuk sebuah pertangungan asuransi:
   i. Banyaknya klaim berdistribusi geometric dengan rata-rata (*mean*) 2.
   ii. Besarnya klaim berdistribusi eksponensial dengan rata-rata (*mean*) 1.500.
   iii. Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*)

   Tentukan median dari total kerugian (*median aggregate loss*).
   A. 432
   B. 1.040
   C. 1.295
   D. 1.825
   E. 3.119

10. Untuk sebuah pertanggungan asuransi, banyaknya klaim berdistribusi Poisson untuk setiap pemegang polis. Diberikan pengalaman dari dua perusahaan sebagai berikut:

Perusahaan A	Jumlah Karyawan	5	6	7
	Banyaknya Klaim	1	2	0
Perusahaan B	Jumlah Karyawan	-	4	6
	Banyaknya Klaim	-	7	4

   Hitunglah *empirical Bayes semiparametric estimate* dari kredibilitas untuk perusahaan A.
   A. kurang dari 0,90
   B. paling sedikit 0,90, akan tetapi kurang dari 0,92
   C. paling sedikit 0,92, akan tetapi kurang dari 0,94
   D. paling sedikit 0,94, akan tetapi kurang dari 0,96
   E. lebih dari 0,96

11. Diberikan kumpulan data observasi sebagai berikut:

    5 7 10 11 11 12 14 19 25 40

    Metode kepadatan kernel (*kernel density method*) digunakan untuk *smooth the empirical distribution*. Sebuah kernel seragam (*uniform kernel*) dengan *bandwidth* 4 digunakan.

    Tentukan median dari distribusi yang dihasilkan.
    A. 11,6
    B. 11,8
    C. 12,0
    D. 12,2
    E. 12,4

12. Kerugian diassumsikan memiliki sebuah distribusi dengan fungsi distribusi kumulatif :
$$F(x) = 1 - 0{,}5e^{-x/\theta} - 0{,}5e^{-x/2\theta}$$
Sebuah sampel observasi memiliki *median* sebesar 12.

Hitunglah θ dengan menggunakan metode pencocokan median (*matching median*).
A. 6,7
B. 8,0
C. 9,2
D. 10,8
E. 12,5

13. Sebuah pertanggungan asuransi memiliki *deductible* sebesar 5. Besarnya kerugian (termasuk *deductible*) yang diamati adalah sebagai berikut:

10 12 15 15 18 32

Data disesuaikan (*fitted*) dengan sebuah *inverse exponential* dengan parameter $\theta = 10$.

Hitunglah nilai dari statistik Kolmogorov-Smirnov untuk pencocokan ini (*for the fit*).
A. 0,268
B. 0,269
C. 0,310
D. 0,326
E. 0,368

14. Banyaknya klaim memiliki distribusisebagai berikut:
$$p_k = p_{k-1}\left(0{,}6 + \frac{0{,}3}{k}\right) \qquad k \geq 1$$
- Besarnya klaim berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = 1.000$ dan $\alpha = 3$
- Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*)

Hitunglah variansi dari total kerugian (*aggregate losses*).
A. kurang dari 3.500.000
B. paling sedikit 3.500.000, akan tetapi kurang dari 4.000.000
C. paling sedikit 4.000.000, akan tetapi kurang dari 4.500.000
D. paling sedikit 4.500.000, akan tetapi kurang dari 5.000.000
E. lebih dari 5.000.000

15. Diberikan informasi sebagai berikut:
    i. Kerugian berdistribusi eksponensial dengan rata-rata yang konstan (bernilai sama) pada setiap tahunnya.
    ii. *The Loss Elimination Ratio* (LER) untuk tahun ini adalah 70%.
    iii. *The ordinary deductible* untuk tahun depan sebesar 4/3 dari *deductible* tahun ini.

Hitunglah *Loss Elimination Ratio* (LER) untuk tahun depan.
   A. 70%
   B. 75%
   C. 80%
   D. 85%
   E. 90%

16. Sebuah penelitian terhadap sekelompok pasien yang terdiagnosa mengidap penyakit kritis dilakukan dari waktu $t = 0$ sampai semuanya meninggal pada $t = 5$.
    Diberikan informasi sebagai berikut:
    i.

Waktu t	**Meninggal pada saat t**
1	6
2	9
3	5
4	d_4
5	d_5

    ii. $\widehat{Var}(S_n(1)) = \widehat{Var}(S_n(3))$, berdasarkan data aktual.
    iii. Rata-rata sisa masa hidup untuk pasien yang masih bertahan hidup pada $t = 3$ adalah $\frac{7}{6}$.

Hitunglah banyaknya pasien yang meninggal pada saat $t = 4$
   A. 1
   B. 3
   C. 5
   D. 10
   E. 15

17. Untuk sebuah studi mortalitas dengan data tersensor kanan (*right-censored data*) , diberikan data sebagai berikut:

Waktu y_i	**Jumlah Kematian** s_i	**Jumlah yang beresiko** r_i
5	2	15
7	1	12
10	1	10
12	2	6

Hitunglah $\hat{S}(12)$ dengan menggunakan taksiran Nelson Aalen untuk $\hat{H}(12)$.

A. 0,48
B. 0,52
C. 0,60
D. 0,65
E. 0,67

18. Diberikan taksiran *product limit* dari sebuah studi mortalitas sebagai berikut:

Waktu (y_t)	10	12	15
Jumlah Kematian	1	2	1
$S_n(y_t)$	0,72	0,60	0,50

Tidak ada kematian lainnya yang terjadi dan tidak ada penambahan peserta (*new entrants*) pada interval waktu antara 10 dan15.

Hitunglah jumlah peserta yang keluar (*withdrawal*) yang terjadi pada interval [12,15)

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

19. Dalam sebuah studi mortalitas selama 3 tahun diberikan data sebagai berikut:

y_i	r_i	s_i
1	1.000	20
2	1.400	14
3	2.000	10

$S(3)$ diestimasi dengan taksiran Kaplan-Meier.

Dengan menggunakan formula *Greenwood*, hitunglah variansi dari estimasi tersebut (*variance of the estimate*).

A. 0,000028
B. 0,000029
C. 0,000030
D. 0,000031
E. 0,000032

20. Pemegang polis sebanyak 12 orang diamati dimulai dari awal pertanggungan sampai waktu pertama kali melakukan klaim. Data yang diamati sebagai berikut:

Time of first claim	1	2	3	4	5	6	7
Jumlah Klaim	2	1	2	2	1	2	2

Dengan menggunakan taksiran *Nelson Aalen*, hitunglah batas atas dari selang kepercayaan linear 95% dari fungsi kumulatif *hazard* $H(4{,}5)$.

A. 1,361
B. 1,545
C. 1,402
D. 1,266
E. 1,437

21. Diberikan data tentang besarnya klaim sebagai berikut:

100 200 500 800 1,000 1,300 2,000 2,000

Misalkan $p = \Pr(X < 1{,}000 | X > 500)$. p diestimasi secara empiris.

Hitunglah variansi dari taksiran empiris dari p.

A. 0,01367
B. 0,03125
C. 0,032
D. 0,04
E. 0,048

22. Diberikan data sebagai berikut:
    - Hasil observasi terhadap banyaknya klaim dari sebuah kelompok yang terdiri dari 50 risiko adalah sebagai berikut:

Banyaknya Klaim	Jumlah Risiko
0	7
1	10
2	12
3	17
4	4

    - H_0, hipotesis awal, adalah banyaknya klaim per risiko berdistribusi seragam pada 0,1,2,3 dan 4.
    - Sebuah uji *chi square* dilakukan dengan menggunakan statistic *Pearson goodness-of-fit* dengan 5 kelas.

    Dengan menggunakan tabel *chi square* dibawah ini, manakah pernyataan berikut yang **benar**?

Degree of freedom	Tingkat Signifikansi			
	0,10	0,05	0,02	0,01
2	4,61	5,99	7,82	9,21
3	6,25	7,81	9,84	11,34
4	7,78	9,49	11,67	13,28
5	9,24	11,07	13,39	15,09

    A. H_0 akan ditolak pada tingkat signifikansi 0,01
    B. H_0akan ditolak pada tingkat signifikansi 0,02 ; tetapi tidak ditolak pada tingkat signifikansi 0,01.
    C. H_0akan ditolak pada tingkat signifikansi 0,05 ; tetapi tidak ditolak pada tingkat signifikansi 0,02.
    D. H_0akan ditolak pada tingkat signifikansi 0,10 ; tetapi tidak ditolak pada tingkat signifikansi 0,05.
    E. H_0akan diterima pada tingkat signifikansi 0,01

23. Besarnya klaim yang diamati adalah 2, 5, 6, 9 dan 25. Data ini disesuaikan (*fitted*) dengan sebuah distribusi *lognormal* dengan menggunakan *maximum likelihood*.

    Hitunglah rata-rata (*mean*) dari *fitted distribution*.
    A. 7,2
    B. 7,8
    C. 8,2
    D. 8,4
    E. 9,4

24. Diberikan informasi sebagai berikut tentang sebuah model kredibilitas:

Observasi Pertama	*Unconditional Probability*	Estimasi Bayesian dari observasi kedua
1	$1/3$	1,50
2	$1/3$	1,50
3	$1/3$	3,00

Hitunglah estimasi *Buhlmann credibility* dari observasi kedua, jika diketahui observasi pertama adalah 1.

A. 0,75
B. 1,00
C. 1,25
D. 1,50
E. 1,75

25. Diberikan data sebagai berikut:
    i. Banyaknya klaim yang diamati selama periode 1 tahun berdistribusi Poisson dengan mean θ.
    ii. *The prior density* adalah:
    $$\pi(\theta) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-k}} \quad , 0 < \theta < k$$
    iii. *The unconditional probability* dari observasi tidak terjadinya klaim (*zero claims*) selama 1 tahun adalah 0,575.

Hitunglah k.

A. 1,5
B. 1,7
C. 1,9
D. 2,1
E. 2,3

26. Diberikan data sebagai berikut:
    i. Banyaknya klaim tahunan berdistribusi Poisson dengan mean λ.
    ii. Parameter λ memiliki *prior distribution* dengan fungsi kepadatan peluang :

$$f(\lambda) = \frac{1}{3} e^{-\lambda/3} \qquad , \lambda > 0$$

Sebanyak 2 klaim diamati selama tahun pertama.
Hitunglah variansi dari *posterior distribution* untuk λ.
A. 9/16
B. 27/16
C. 9/4
D. 16/3
E. 27/4

27. Diberikan data sebagai berikut:
    i. Parameter Λ memiliki distibusi *inverse gamma* dengan fungsi kepadatan peluang
    $g(\lambda) = 500\lambda^{-4} e^{-10/\lambda} \qquad , \lambda > 0$
    ii. Besarnya klaim memiliki distribusi eksponensial dengan fungsi kepadatan peluang

$$f(x|\Lambda = \lambda) = \lambda^{-1} e^{-x/\lambda} \qquad , \lambda > 0, x > 0$$

Untuk seorang tertanggung, 2 klaim diamati dengan total klaim sebesar 50.
Tentukan nilai ekspektasi untuk klaim berikutnya untuk tertanggung yang sama.
A. 5
B. 12
C. 15
D. 20
E. 25

28. X berdistribusi *inverse exponential* dengan $\theta = 50$.
Simulasikan X dengan menggunakan metode inversi dan menggunakan angka acak seragam pada [0,1) berikut ini:

0,4 0,6 0,9

Hitunglah nilai simulasi dari $E[X \wedge 100]$
A. 57
B. 62
C. 67
D. 76
E. 84

29. Sebuah kelompok terdiri dari 100 orang. Untuk setiap individu pada kelompok ini, tingkat mortalita $q_x = 0{,}01$. Mortalita untuk setiap individu adalah saling bebas (*independent*). Anda akan melakukan simulasi pengalaman mortalita selama 3 tahun untuk kelompok ini dengan menggunakan metode inversi . Gunakan 3 angka berikut dari sebuah distribusi seragam [0,1) :

    0,12 0,35 0,68

    Hitunglah banyaknya kematian yang terjadi dari hasil simulasi selama 3 tahun.
    A. 0
    B. 1
    C. 2
    D. 3
    E. 4

30. Banyaknya klaim dari seorang tertanggung berdistribusi Poisson dengan rata-rata λ.
    - λ bervariasi antar sesama tertanggung berdasarkan distribusi gamma dengan parameter $\alpha = 3, \theta = 0{,}1$.
    - Tidak ada klaim terjadi selama *n* tahun.

    Tentukanlah nilai *n* sedemikian sehingga ekspektasi banyaknya klaim yang terjadi pada tahun depan adalah 0,2.
    A. 4
    B. 5
    C. 6
    D. 7
    E. 8

NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from -∞ to z, Pr(Z<z)
The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Values of z for selected values of Pr(Z<z)							
z	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
Pr(Z<z)	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995

A.2.3.1 Pareto (Pareto Type II, Lomax)—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1 < k < \alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta[(1-p)^{-1/\alpha} - 1] \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= \mathrm{VaR}_p(X) + \frac{\theta(1-p)^{-1/\alpha}}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1 \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha-1}\left[1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right], \quad \alpha \neq 1 \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= -\theta \ln\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right), \quad \alpha = 1 \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)} \beta[k+1, \alpha-k; x/(x+\theta)] + x^k \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}
$$

A.3.2.1 Gamma—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)} \qquad F(x) = \Gamma(\alpha; x/\theta) \\
M(t) &= (1-\theta t)^{-\alpha}, \quad t < 1/\theta \qquad \mathrm{E}[X^k] = \frac{\theta^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k > -\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k (\alpha+k-1)\cdots\alpha, \quad \text{if } k \text{ is an integer}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k[1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k > -\alpha \\
&= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\theta^k \Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k[1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= \theta(\alpha-1), \quad \alpha > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.5.1.1 Lognormal—μ, σ (μ can be negative)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), \quad z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \qquad F(x) = \Phi(z) \\
\mathrm{E}[X^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2) \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2)\Phi\left(\frac{\ln x - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k[1 - F(x)] \\
\text{mode} &= \exp(\mu - \sigma^2)
\end{aligned}
$$

A.3.3.1 Exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta} \qquad F(x) = 1 - e^{-x/\theta} \\
M(t) &= (1-\theta t)^{-1} \qquad \mathrm{E}[X^k] = \theta^k \Gamma(k+1), \quad k > -1 \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k k!, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) \\
\mathrm{TVaR}_p(X) &= -\theta \ln(1-p) + \theta \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}) \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(k+1)\Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1 \\
&= \theta^k k! \Gamma(k+1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}
$$

A.3.3.2 Inverse exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\theta e^{-\theta/x}}{x^2} \qquad F(x) = e^{-\theta/x} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1-k), \quad k < 1 \\
\mathrm{VaR}_p(X) &= \theta(-\ln p)^{-1} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k G(1-k; \theta/x) + x^k(1 - e^{-\theta/x}), \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= \theta/2
\end{aligned}
$$

B.2.1.1 Poisson—λ

$$
\begin{aligned}
p_0 &= e^{-\lambda}, \quad a = 0, \quad b = \lambda \qquad p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
\mathrm{E}[N] &= \lambda, \quad \mathrm{Var}[N] = \lambda \qquad P(z) = e^{\lambda(z-1)}
\end{aligned}
$$

B.2.1.2 Geometric—β

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1+\beta}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = 0 \qquad\qquad p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} \\ \mathrm{E}[N] &= \beta, \quad \mathrm{Var}[N] = \beta(1+\beta) \qquad\qquad P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-1}. \end{aligned}$$

This is a special case of the negative binomial with $r = 1$.

B.2.1.3 Binomial—q, m, $(0 < q < 1$, m an integer$)$

$$\begin{aligned} p_0 &= (1-q)^m, \quad a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(m+1)q}{1-q} \\ p_k &= \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m \\ \mathrm{E}[N] &= mq, \quad \mathrm{Var}[N] = mq(1-q) \qquad\qquad P(z) = [1+q(z-1)]^m. \end{aligned}$$

B.2.1.4 Negative binomial—β, r

$$\begin{aligned} p_0 &= (1+\beta)^{-r}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = \frac{(r-1)\beta}{1+\beta} \\ p_k &= \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)\beta^k}{k!(1+\beta)^{r+k}} \\ \mathrm{E}[N] &= r\beta, \quad \mathrm{Var}[N] = r\beta(1+\beta) \qquad\qquad P(z) = [1-\beta(z-1)]^{-r}. \end{aligned}$$

*****