

CATATAN KULIAH

**MA4181 Pengantar Proses Stokastik**  
“STOCHASTICS: PRECISE AND PROSPECTIVE”



**Dosen: Khreshna I.A. Syuhada, MSc. PhD.**

Kelompok Keilmuan Statistika - FMIPA

Institut Teknologi Bandung

2017

## Tentang MA4181 Pengantar Proses Stokastik

Jadwal kuliah: Selasa, 11- (R. BSC A); Kamis, 9- (R. 9401)

Penilaian:

- Ujian: 5/09/17; 31/10/17; 30/11/17 (@ 20%)
- Kuis KS (20%), Kuis SV (20%)

Minggu	Tanggal	Pertemuan	Kuliah
M1	21.08.17	1,2	Kuliah
M2	28.08.17	1,2	Kuliah
M3	04.09.17	<b>1</b>	<b>Ujian 1, 05.09.17</b>
M3	04.09.17	2	Kuliah, 07.09.17
M4	11.09.17	1	Kuliah
	<b>14.09.17</b>	<b>2</b>	<b>Kuis 1</b>
M5	18.09.17	1	Kuliah
M6	25.09.17	1,2	Kuliah
M8	09.10.17	1,2	Kuliah
M9	16.10.17	1,2	Kuliah
M10	23.10.17	1,2	Kuliah
M11	30.10.17	<b>1</b>	<b>Ujian 2, 31.10.17</b>
M11	30.10.17	2	Kuliah, 02.11.17
M12	06.11.17	1	Kuliah
	<b>08.11.17</b>	<b>2</b>	<b>Kuis 2</b>
M13	13.11.17	1,2	Kuliah
M14	20.11.17	1,2	Kuliah
M15	27.11.17	1	Kuliah
	<b>30.11.17</b>	<b>2</b>	<b>Ujian 3</b>

Buku teks:

- Sheldon Ross, 2010, Introduction to Probability Models
- Howard Taylor dan Samuel Karlin, 1998, An Introduction to Stochastic Modelling
- -

## PENGANTAR: PROSES STOKASTIK, PEUBAH ACAK DAN KEJADIAN

Menurut KBBI, proses adalah runtunan perubahan (peristiwa), perkembangan sesuatu, rangkaian tindakan, pembuatan, atau pengolahan yang menghasilkan produk. Sementara itu, stokastik berarti mempunyai unsur peluang atau kebolehjadian.

Secara teoritis matematis, proses stokastik  $\{Y_t\}$  adalah koleksi peubah acak dengan  $t$  menyatakan indeks waktu.

Beberapa proses stokastik yang telah dikenal antara lain, pertama, model **Autoregressive** (AR) orde satu:  $Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$ , dengan  $\varepsilon_t$  diasumsikan saling bebas dan berdistribusi identik. Model AR(1) dapat digunakan untuk memodelkan jumlah produksi, harga aset dan sebagainya. Perhatikan bahwa memprediksi  $Y_{n+1}$  merupakan salah satu bagian penting dari pemodelan stokastik/deret waktu. Prediksi terbaik untuk  $Y_{n+1}$  adalah  $E(Y_{n+1}|Y_n, \hat{\alpha})$ .

Model atau proses stokastik lain adalah **Autoregressive Conditional Heteroscedastic** (ARCH) dan **Stochastic Volatility** (SV):  $Y_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$ , dengan  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2$  atau  $\ln \sigma_t^2 = \gamma + \delta \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t$ . Model ARCH dan/atau SV sangat tepat untuk memodelkan imbal hasil (return) saham. Model **Integer-Valued Autoregressive** (INAR) orde satu:  $Y_t = \alpha \circ Y_{t-1} + \varepsilon_t$ ;  $\alpha \circ Y_{t-1} = W_1 + \dots + W_{Y_{t-1}}$ , dengan  $W_i \sim \text{Bin}(1, \alpha)$ , dan  $\varepsilon_t \sim \text{POI}(\lambda)$ . Model INAR(1) menggambarkan bahwa “banyaknya pasien yang berada di IGD pada waktu  $t$  merupakan jumlah dari banyaknya pasien yang bertahan hidup dengan peluang  $\alpha$  ditambah banyaknya pasien yang datang pada waktu  $(t-1, t]$ ”

### Proses Stokastik dan Peubah Acak

Proses stokastik memberikan kajian yang luas mengenai fenomena kuantitatif diberbagai bidang melalui peubah acak. Pemahaman konsep peubah acak dan peluang menjadi krusial dan berperan dalam memprediksi observasi yang akan datang.

Perhatikan contoh proses stokastik pada bidang asuransi dan keuangan. Kegiatan asuransi berkaitan dengan keinginan untuk mengatur dan memindahkan risiko kepada pihak lain. Kegiatan berinvestasi adalah upaya meningkatkan “nilai” uang. Keduanya memiliki kesamaan yaitu (1) memiliki risiko (besar) dan (ii) bersifat tidak pasti. Untuk itu, belajar dan “bermain” tentang ketidakpastian merupakan suatu keharusan. Dengan kata lain, memahami konsep dan menghitung peluang (atas kejadian dan/atau nilai peubah acak) menjadi sangat esensial.

## BAB 1: PEUBAH ACAK DAN DISTRIBUSI

Silabus: Konsep peubah acak, fungsi peluang, fungsi distribusi, distribusi diskrit (binomial, Poisson, geometrik), distribusi kontinu (normal, seragam/uniform, eksponensial).

Tujuan:

1. Memahami definisi dan menentukan peubah acak
2. Menghitung fungsi peluang (f.p) dan fungsi distribusi (f.d); f.p ke f.d; f.d ke f.p
3. Menghitung peluang suatu peubah acak dari distribusi diskrit atau kontinu

ILUSTRASI-1 Maskapai penerbangan “Serigala Air” mengetahui bahwa lima persen pemesan tiket tidak akan datang untuk membeli tiketnya. Dengan alasan ini, maskapai tidak ragu untuk menjual 52 tiket penerbangan pada pesawat dengan kapasitas duduk 50 orang. Berapa peluang akan ada kursi yang tersedia untuk setiap pemesan tiket yang datang?

ILUSTRASI-2 Misalkan  $X$  peubah acak berdistribusi Poisson dengan mean  $\lambda$ . Parameter  $\lambda$  berdistribusi eksponensial dengan mean 1. Tunjukkan bahwa  $P(X = n) = (1/2)^{n+1}$ .

Peubah acak tidaklah “acak” dan bukanlah “peubah”. Peubah acak adalah “fungsi” yang memetakan anggota  $S$  ke bilangan riil  $\mathbb{R}$ . Peubah acak terbagi atas diskrit dan kontinu. Perhatikan bahwa sebuah peubah acak diskrit tidak selalu berasal ruang sampel diskrit.

LATIHAN:

1. Tentukan fungsi peluang dari fungsi distribusi berikut:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3.1 \\ 3/5, & -3.1 \leq x < 0 \\ 7/10, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

2. Tentukan fungsi peluang dari fungsi distribusi berikut:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{x}{5}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{5}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{9}{10}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

3. Diketahui fungsi peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} p, & x = -1.9 \\ 0.1, & x = -0.1 \\ 0.3, & x = 20p \\ p, & x = 3 \\ 4p, & x = 4 \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$$

Hitung  $P(-1.9 \leq |X| \leq 3), F(2), F(F(3.1))$

## DISTRIBUSI DISKRIT

(ILUSTRASI B-1) Untuk menghadapi gempa yang sering terjadi, sebuah perusahaan asuransi menentukan “premi atas gempa” dengan menggunakan asumsi-asumsi berikut: (i) setiap bulan paling banyak terjadi satu kali gempa (ii) peluang terjadi gempa adalah 0.05 (iii) banyak gempa di suatu bulan saling bebas dengan banyak gempa di bulan yang lain. Tentukan peluang ada kurang dari tiga gempa dalam setahun.

(ILUSTRASI B-2) Sebuah studi dilakukan untuk memonitor kesehatan dua kelompok yang independen (berisi masing-masing 10 pemegang polis) selama periode waktu satu tahun. Setiap individu atau partisipan akan keluar (mengundurkan diri) dari studi tersebut dengan peluang 0.2, saling bebas antar individu. Hitung peluang bahwa setidaknya 9 partisipan, pada satu kelompok dan bukan kedua kelompok, ikut dalam studi tersebut hingga akhir.

## DISTRIBUSI BINOMIAL

Misalkan  $S = \{sukses, gagal\}$  adalah ruang sampel yang menotasikan 'sukses' atau 'gagal' dari suatu percobaan. Definisikan  $X(sukses) = 1$  dan  $X(gagal) = 0$  dan

$$f_X(1) = P(X = 1) = p$$

$$f_X(0) = P(X = 0) = 1 - p$$

dengan  $0 \leq p \leq 1$  adalah peluang diperoleh sukses.  $X$  dikatakan peubah acak Bernoulli dengan parameter  $p$ . Jika dilakukan  $n$  percobaan independen dan jika  $X$  menyatakan banyaknya sukses yang diperoleh maka  $X$  dikatakan sebagai peubah acak Binomial dengan parameter  $(n, p)$ , dengan

$$f_X(k) = B(k; n, p) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

(ILUSTRASI P-1) Banyak klaim untuk setiap risiko dalam suatu kelompok risiko mengikuti distribusi Poisson. Banyak risiko (yang diharapkan) di kelompok risiko tersebut yang tidak mengajukan klaim adalah 96. Banyak risiko (yang diharapkan) di kelompok risiko tersebut yang mengajukan dua klaim adalah 3. Tentukan banyaknya risiko di kelompok tersebut yang memiliki 4 klaim.

(ILUSTRASI P-2) Misalkan  $N \sim POI(2)$ . Dapatkah anda menghitung  $E(N|N > 1)$  ?

## DISTRIBUSI POISSON

Misalkan  $X$  peubah acak dengan fungsi peluang

$$f_X(i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

untuk  $i = 0, 1, 2, \dots$  dan  $\lambda > 0$ .  $X$  disebut peubah acak Poisson dengan parameter  $\lambda$ .

(ILUSTRASI G-1) Diketahui  $N \sim Geo(0.2)$ . Hitung  $P(N = 1 | N \leq 1)$ .

(ILUSTRASI G-2) Banyaknya kecelakaan adalah peubah acak geometrik dengan  $\theta = 0.7$ ; banyaknya klaim setiap kecelakaan berdistribusi Poisson dengan mean 3.1. Tentukan fpp untuk total banyaknya klaim

(ILUSTRASI G-3) Ini kisah masa lalu Nurul yang sempat diceritakan sesaat sebelum Nurul menikah. Katanya “Ayahku meninggal waktu usiaku tiga tahun. Lalu Ibu kawin lagi. Dengan ayah tiriku, Ibu mendapat dua orang anak tiri dan melahirkan tiga orang anak. Ketika usiaku lima belas tahun, Ibu pun meninggal. Ayah tiriku kawin lagi dengan seorang janda yang sudah beranak dua. Ia melahirkan dua orang anak pula dengan ayah tiriku”. Pertanyaan yang mungkin adalah...

#### DISTRIBUSI GEOMETRIK

Misalkan percobaan-percobaan dilakukan hingga diperoleh sukses yang pertama. Percobaan-percobaan tersebut saling bebas dan memiliki peluang sukses  $p$ . Misalkan  $X$  menyatakan banyaknya percobaan yang dilakukan untuk mendapatkan sukses pertama tersebut, maka  $X$  dikatakan peubah acak Geometrik dengan parameter  $p$ . Fungsi peluangnya adalah

$$f(n) = P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p,$$

untuk  $n = 1, 2, \dots$  dan  $p > 0$ .

#### DISTRIBUSI KONTINU: UNIFORM DAN EKSPONENSIAL

## BAB 2: PELUANG DAN EKSPEKTASI BERSYARAT

Silabus: Fungsi peluang bersama, fungsi peluang marginal, peluang bersyarat, ekspektasi, ekspektasi bersyarat, kovariansi, korelasi.

Tujuan:

1. Menentukan fungsi peluang bersama dan fungsi peluang marginal
2. Menghitung peluang bersyarat dan menghitung ekspektasi bersyarat
3. Memahami dan menghitung ekspektasi melalui ekspektasi bersyarat
4. Memahami konsep kovariansi dan korelasi

ILUSTRASI-1 Seorang aktuaris menentukan banyaknya musibah dalam setahun di kota  $P(0,1,2)$  dan  $Q(0,1,2,3)$  dengan distribusi bersama sbb: 0.12, 0.06, 0.05, 0.02; 0.13, 0.15, 0.12, 0.03; 0.05, 0.15, 0.10, 0.02. Tentukan fungsi peluang marginal banyak musibah di kota  $P$  dan  $Q$ . Hitung mean/variansi bersyarat banyak musibah di kota  $Q$ , diberikan tidak ada musibah di kota  $P$ .

ILUSTRASI-2 Perusahaan asuransi menjual dua jenis polis asuransi kendaraan bermotor: “Basic” dan “Deluxe”. Misalkan waktu hingga klaim Basic selanjutnya masuk adalah peubah acak eksponensial dengan mean dua. Misalkan waktu hingga klaim Deluxe selanjutnya masuk adalah peubah acak eksponensial dengan mean tiga. Kedua waktu saling bebas. Hitung peluang bahwa klaim yang masuk selanjutnya adalah klaim Deluxe.

ILUSTRASI-3 Misalkan  $X$  peubah acak yang menyatakan banyaknya klaim,  $X \sim POI(\lambda)$ . Misalkan  $\Lambda$  berdistribusi Uniform pada selang  $(0, 4)$ . Hitung peluang tidak ada klaim. Tentukan ekspektasi banyaknya klaim.

### FUNGSI PELUANG BERSAMA DISKRIT

Misalkan  $X$  dan  $Y$  ada peubah acak-peubah acak diskrit yang terdefinisi di ruang sampel yang sama. Fungsi peluang bersama dari  $X$  dan  $Y$  adalah

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$



Catatan:

1. Kondisi bahwa  $X$  dan  $Y$  terdefinisi pada ruang sampel yang sama berarti dua peubah acak tsb memberikan informasi secara bersamaan terhadap keluaran (outcome) dari percobaan yang sama
2.  $\{X = x, Y = y\}$  adalah irisan kejadian  $\{X = x\}$  dan  $\{Y = y\}$ ; kejadian dengan  $X$  bernilai  $x$  dan  $Y$  bernilai  $y$

Fungsi peluang bersama  $f_{X,Y}$  memenuhi sifat-sifat berikut:

1.  $f_{X,Y}(x, y) \geq 0, \forall (x, y)$
2.  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p_{X,Y}(x, y) \neq 0$  terhitung
3.  $\sum \sum_{x,y} f_{X,Y}(x, y) = 1$

Misalkan  $X$  dan  $Y$  peubah acak-peubah acak diskrit yang didefinisikan pada ruang sampel yang sama. Maka,

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{dan} \quad f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y), \quad y \in \mathbb{R}$$

adalah fungsi peluang marginal dari  $X$  dan fungsi peluang marginal dari  $Y$ .

LATIHAN:

1. Seorang aktuaris menentukan banyaknya musibah dalam setahun di kota P(0,1,2) dan Q(0,1,2,3) dengan distribusi bersama sbb: 0.12, 0.06, 0.05, 0.02; 0.13, 0.15, 0.12, 0.03; 0.05, 0.15, 0.10, 0.02. Tentukan fungsi peluang marginal banyak musibah di kota P dan Q.
2. Misalkan kita punya 2 komponen elektronik yang identik. Misalkan juga  $X$  dan  $Y$  adalah waktu hidup (jam, diskrit). Asumsikan fungsi peluang bersama dari  $X$  dan  $Y$  adalah

$$f_{X,Y}(x, y) = p^2 (1 - p)^{x+y-2}, \quad x, y \in \mathcal{N}$$

dimana  $0 < p < 1$ . Tentukan peluang bahwa (a) kedua komponen elektronik tsb bertahan lebih dari 4 jam? (b) salah satu komponen bertahan setidaknya 2 kali dari komponen yang lain?

#### FUNGSI PELUANG BERSAMA KONTINU:

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak-peubah acak yang terdefinisi di ruang sampel yang sama. Fungsi distribusi bersama dari  $X$  dan  $Y$ ,  $F_{X,Y}$  adalah

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Misalkan  $X$  dan  $Y$  peubah acak-peubah acak terdefinisi di ruang sampel yang sama. Untuk semua bilangan riil  $a, b, c, d$  dengan  $a < b$  dan  $c < d$ ,

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(b, c) - F_{X,Y}(a, d) + F_{X,Y}(a, c)$$

atau

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y) \, dx dy$$

dengan

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{X,Y}(x, y).$$

Suatu fungsi peluang bersama  $f_{X,Y}(x, y)$  dari peubah acak  $X$  dan  $Y$  memenuhi 2 sifat berikut

1.  $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$  untuk semua  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx dy = 1$

#### LATIHAN:

1. Perusahaan asuransi menjual dua jenis polis asuransi kendaraan bermotor: “Basic” dan “Deluxe”. Misalkan waktu hingga klaim Basic selanjutnya masuk adalah peubah acak eksponensial dengan mean dua. Misalkan waktu hingga klaim Deluxe selanjutnya masuk adalah peubah acak eksponensial dengan mean tiga. Kedua waktu saling bebas. Hitung peluang bahwa klaim yang masuk selanjutnya adalah klaim Deluxe.
2. Pandang 2 komponen elektronik  $A$  dan  $B$  dengan masa hidup  $X$  dan  $Y$ . Fungsi peluang bersama dari  $X$  dan  $Y$  adalah

$$f_{X,Y}(x, y) = \lambda \mu \exp(-\lambda x + \mu y), \quad x, y > 0$$

dimana  $\lambda > 0, \mu > 0$

- Tentukan peluang bahwa kedua komponen berfungsi pada saat  $t$
- Tentukan peluang bahwa komponen  $A$  adalah komponen yang pertama kali rusak
- Tentukan peluang bahwa komponen  $B$  adalah komponen yang pertama kali rusak

#### FUNGSI PELUANG BERSYARAT

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak-peubah acak diskrit. Jika  $f_X(x) > 0$  maka fungsi peluang bersyarat dari  $Y$  diberikan  $X = x$  (notasi:  $f_{Y|X}(y|x)$ ), adalah

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Jika  $f_X(x) = 0$ , kita definisikan  $f_{Y|X}(y|x) = 0$  namun tidak dikatakan sebagai fungsi peluang bersyarat.

Catatan: Fungsi peluang bersyarat adalah fungsi peluang!

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak-peubah acak diskrit. Kedua peubah acak ini dikatakan saling bebas (independen) jika dan hanya jika

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

#### LATIHAN:

- Seorang aktuaris menentukan banyaknya musibah dalam setahun di kota P(0,1,2) dan Q(0,1,2,3) dengan distribusi bersama sbb: 0.12, 0.06, 0.05, 0.02; 0.13, 0.15, 0.12, 0.03; 0.05, 0.15, 0.10, 0.02. Tentukan fungsi peluang bersyarat banyak musibah di kota Q, diberikan tidak ada musibah di kota P.
- Misalkan  $X$  peubah acak yang menyatakan banyaknya klaim,  $X \sim POI(\lambda)$ . Misalkan  $\Lambda$  berdistribusi Uniform pada selang  $(0, 4)$ . Hitung peluang tidak ada klaim.

## EKSPEKTASI BERSYARAT

ILUSTRASI-1 Seorang narapidana terjebak dalam suatu sel penjara yang memiliki tiga pintu. Pintu pertama akan membawanya ke sebuah terowongan dan kembali ke sel dalam waktu dua hari. Pintu kedua dan ketiga akan membawanya ke terowongan yang kembali ke sel dalam tempo masing-masing empat dan satu hari. Asumsikan bahwa sang napi selalu memilih pintu 1, 2, dan 3 dengan peluang 0.5, 0.3 dan 0.2, berapa lama waktu rata-rata (expected number of days) yang dibutuhkan untuk dia agar selamat?

ILUSTRASI-2 Ferisa Ferina Ferita bermain bola. FFF memiliki peluang 0.2 untuk menang dalam setiap permainan, saling bebas satu sama lain. Ketika F3 bermain, mereka melawan tim lain yang baru saja menang. Setiap kali sebuah tim menang, tim itu akan bermain lagi. Jika tim kalah, tim istirahat dan menunggu giliran untuk main. Saat ini giliran F3 bermain setelah sebelumnya istirahat. Misalkan  $X$  banyak permainan yang dimainkan F3 hingga mereka istirahat lagi. Tentukan variansi  $X$ .

Nilai harapan/ekspektasi (*expected value/expectation*) atau ekspektasi dari peubah acak diskrit/kontinu  $X$  adalah

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) \text{ dan } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

dengan  $f_X$  adalah fungsi peluang dari  $X$ .

Catatan:

1. Ekspektasi adalah rata-rata tertimbang (weighted average) dari nilai yang mungkin dari  $X$
2. Ekspektasi = mean = momen pertama
3. Ekspektasi suatu peubah acak adalah nilai rata-rata (long-run average value) dari percobaan bebas yang berulang
3. Apakah ekspektasi harus berhingga? (Diskusi!)

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak-peubah acak kontinu dengan fungsi peluang bersama  $f_{X,Y}(x, y)$ . Jika  $f_X(x) > 0$  maka ekspektasi bersyarat dari  $Y$  diberikan  $X = x$  adalah ekspektasi dari  $Y$  relatif terhadap distribusi bersyarat  $Y$  diberikan  $X = x$ ,

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy$$

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak-peubah acak kontinu dengan fungsi peluang bersama  $f_{X,Y}(x, y)$ . Misalkan ekspektasi dari  $Y$  hingga. Maka

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X = x) f_X(x) dx$$

atau

$$E(Y) = E(E(Y|X = x))$$

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak-peubah acak kontinu dengan fungsi peluang bersama  $f_{X,Y}(x, y)$ . Jika  $f_X(x) > 0$  maka variansi bersyarat dari  $Y$  diberikan  $X = x$  adalah variansi dari  $Y$  relatif terhadap distribusi bersyarat  $Y$  diberikan  $X = x$ ,

$$Var(Y|X = x) = E\left((Y - E(Y|X = x))^2 \middle| X = x\right)$$

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah peubah acak-peubah acak kontinu dengan fungsi peluang bersama  $f_{X,Y}(x, y)$ . Misalkan variansi dari  $Y$  hingga. Maka

$$Var(Y) = E(Var(Y|X = x)) + Var(E(Y|X))$$

Latihan:

1. Misalkan  $Y$  menunjukkan banyaknya gol yang diciptakan oleh seorang pemain sepak bola di suatu pertandingan yang terpilih acak:

$y$	0	1	2	3	4	5	6
$p(y)$	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05

Misalkan  $W$  adalah banyaknya pertandingan dimana seorang pemain sepak bola menciptakan 3 atau lebih gol dalam 4 pertandingan terpilih acak. Berapa nilai harapan banyak pertandingan dimana pemain menciptakan 3 atau lebih gol?

2. Misalkan  $X$  menyatakan usia mobil yang mengalami kecelakaan. Misalkan  $Y$  menyatakan lama waktu pemilik mobil mengasuransikan mobilnya saat kecelakaan. Fungsi peluang

bersama:

$$f(x, y) = (10 - xy^2)/64, \quad 2 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 1.$$

Tentukan usia mobil yang diharapkan terlibat dalam kecelakaan.

3. Misalkan  $X$  dan  $Y$  peubah acak kontinu dengan fungsi peluang bersama

$$f(x, y) = e^{-x(y+1)}, \quad 0 \leq x, 0 \leq y \leq e - 1$$

- Tentukan  $f_Y(y)$
  - Hitung  $P(X > 1 | Y = \frac{1}{2})$
  - Hitung  $E(X | Y = \frac{1}{2})$
4. K meninggalkan kantor setiap hari kerja antara pukul 6-7 malam. Jika dia pergi  $t$  menit setelah pukul 6 maka waktu untuk mencapai rumah adalah peubah acak berdistribusi Uniform pada selang  $(20, 20 + (2t)/3)$ . Misalkan  $Y$  adalah banyak menit setelah pukul 6 dan  $X$  banya menit untuk mencapai rumah, berapa lama waktu mencapai rumah?

## KOVARIANSI DAN KORELASI

Kovariansi antara peubah acak  $X$  dan  $Y$ , dinotasikan  $Cov(X, Y)$ , adalah

$$Cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$

Catatan: Jika  $X$  dan  $Y$  saling bebas maka  $Cov(X, Y) = 0$  (implikasi).

Sifat-sifat kovariansi

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(X, X) = Var(X)$
- $Cov(aX, Y) = aCov(X, Y)$
- $Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Cov(X_i, Y_j)$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) &= \text{Cov} \left( \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Korelasi antara peubah acak  $X$  dan  $Y$ , dinotasikan  $\rho(X, Y)$ , didefinisikan sebagai

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}},$$

asalkan  $\text{Var}(X)$  dan  $\text{Var}(Y)$  bernilai positif. Dapat ditunjukkan pula bahwa

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

Koefisien korelasi adalah ukuran dari derajat kelinieran antara  $X$  dan  $Y$ . Nilai  $\rho(X, Y)$  yang dekat dengan  $+1$  atau  $-1$  menunjukkan derajat kelinieran yang tinggi. Nilai positif korelasi mengindikasikan nilai  $Y$  yang cenderung membesar apabila  $X$  membesar. Jika  $\rho(X, Y) = 0$  maka dikatakan  $X$  dan  $Y$  tidak berkorelasi.

LATIHAN:

1. Misalkan (sisa) masa hidup pasangan suami isteri saling bebas dan berdistribusi Uniform pada selang  $[0, 40]$ . Perusahaan asuransi menawarkan dua produk: pertama, produk yang membayar nilai klaim saat suami meninggal; kedua, produk yang membayar nilai klaim saat kedua suami isteri meninggal. Tentukan kovariansi kedua waktu pembayaran tersebut.
2. Misalkan  $X$  dan  $Y$  harga dua saham pada akhir periode lima tahun.  $X$  berdistribusi Uniform pada selang  $(0, 12)$ . Diberikan  $X = x$ ,  $Y$  berdistribusi Uniform pada selang  $(0, x)$ . Hitung  $\text{Cov}(X, Y)$ .

## BAB 3: RANTAI MARKOV

Silabus: Definisi rantai Markov, sifat Markov, peluang transisi  $n$ -langkah, persamaan Chapman-Kolmogorov, jenis keadaan, *recurrent* dan *transient*, limit peluang transisi (kestasioneran).

Tujuan:

1. Mempelajari model rantai Markov
2. Menghitung peluang transisi  $n$ -langkah
3. Menerapkan persamaan Chapman-Kolmogorov
4. Menentukan keadaan yang dapat diakses dan berkomunikasi
5. Menentukan keadaan-keadaan *recurrent* dan *transient*
6. Menghitung peluang transisi untuk jangka panjang

(ILUSTRASI 1) Perilaku bunuh diri kini kian menjadi-jadi. Hesti (nama sebenarnya) adalah sebuah contoh. Dia pernah melakukan percobaan bunuh diri, namun gagal. Menurut pakar, kalau pada suatu waktu seseorang melakukan percobaan bunuh diri maka besar kemungkinan dia akan melakukannya lagi di masa mendatang. Jika seseorang belum pernah melakukan percobaan bunuh diri, di masa mendatang orang tersebut akan mungkin melakukan percobaan bunuh diri. Deskripsikan fenomena diatas sebagai model peluang (*probability model*).

(ILUSTRASI 2) Akhir-akhir ini, hujan dan panas (baca: tidak hujan) datang silih berganti tanpa bisa diduga. Kalau hari ini hujan, besok mungkin hujan mungkin juga panas. Tentu saja peluang besok hujan akan lebih besar dibanding peluang besok akan panas. Begitu pula jika hari ini panas. Besok akan lebih mungkin panas dibandingkan hujan. Jika hari Senin hujan, berapa peluang bahwa hari Selasa akan hujan? Berapa peluang bahwa hari Kamis akan hujan?

(Ilustrasi 3) Sesuai saran dokter, kini Ayni setiap hari berlari pagi. Ayni akan pergi lewat pintu depan atau belakang dengan peluang sama. Ketika meninggalkan rumah, Ayni memakai sepatu olah raga atau bertelanjang kaki jika sepatu tidak tersedia di depan pintu yang dia lewati. Ketika pulang, Ayni akan masuk lewat pintu depan atau belakang dan meletakkan



sepatunya dengan peluang sama. Diketahui bahwa Ayni memiliki 4 pasang sepatu olah raga. Berapa peluang bahwa Ayni akan sering berolah raga dengan bertelanjang kaki?

#### DEFINISI

Proses stokastik  $\{X_n\}$  adalah Rantai Markov:

- $n = 0, 1, 2, \dots$
- nilai yang mungkin adalah hingga atau terhingga
- $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P_{ij} \quad (*)$
- distribusi bersyarat  $X_{n+1}$ , diberikan keadaan-keadaan lampau (*past states*)  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  dan keadaan sekarang (*present state*)  $X_n$ , hanya bergantung pada keadaan sekarang (“Sifat Markov”)
- keadaan-keadaan (*states*):  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$

$P_{ij}$  peluang bahwa proses akan berada di keadaan  $j$  dari keadaan  $i$ ;

$$P_{ij} \geq 0, i, j \geq 0; \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, i = 0, 1, \dots$$

Matriks peluang transisi  $P_{ij}$  adalah

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Perhatikan (\*):

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= P_{ij}, \end{aligned}$$

yang disebut sebagai peluang transisi 1-langkah atau *one-step transition probability*.

Peluang bersama

$$P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

dapat dihitung dengan sifat peluang bersyarat berikut.

$$\begin{aligned} P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &\quad \times P(X_n = i \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \times P(X_n = i \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \dots \\ &= p_{i_0} \dots P_{i_{n-1}, i_n} \end{aligned}$$

LATIHAN:

1. Jika, pada waktu  $t$ , Rez mengajukan klaim asuransi, maka Rez akan mengajukan klaim pada waktu  $t + 1$  dengan peluang  $\alpha$ ; jika Rez tidak mengajukan klaim asuransi saat ini maka di masa depan Rez akan mengajukan klaim asuransi dengan peluang  $\beta$ . Matriks peluang transisinya adalah...

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \beta & \beta \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

dengan keadaan-keadaan:

'0' tidak mengajukan klaim

'1' mengajukan klaim

2. Keadaan hujan pada suatu hari bergantung pada keadaan hujan dalam dua hari terakhir. Jika dalam dua hari terakhir hujan maka besok akan hujan dengan peluang 0.7; Jika hari ini hujan dan kemarin tidak hujan maka besok akan hujan dengan peluang 0.5; jika hari ini tidak hujan dan kemarin hujan maka besok akan hujan dengan peluang 0.4; jika dalam dua hari terakhir tidak hujan maka besok hujan dengan peluang 0.2. Matriks peluang transisinya adalah...

3. Tiga item produk A dan tiga item produk B didistribusikan dalam dua buah paket/kotak sedemikian hingga setiap paket terdiri atas tiga item produk. Dikatakan bahwa sistem berada dalam keadaan  $i, i = 0, 1, 2, 3$  jika dalam paket pertama terdapat  $i$  produk A. Setiap saat (langkah), kita pindahkan satu item produk dari setiap paket dan meletakkan item produk tersebut dari paket 1 ke paket 2 dan sebaliknya. Misalkan  $X_n$  menggambarkan keadaan dari sistem setelah langkah ke- $n$ . Matriks peluang transisinya adalah...
4. Menurut Kemeny, Snell dan Thompson, Tanah Australia diberkahi dengan banyak hal kecuali cuaca yang baik. Mereka tidak pernah memiliki dua hari bercuaca baik secara berturut-turut. Jika mereka mendapatkan hari bercuaca baik maka esok hari akan bersalju atau hujan dengan peluang sama. Jika hari ini mereka mengalami salju atau hujan maka besok akan bercuaca sama dengan peluang separuhnya. Jika terdapat perubahan cuaca dari salju atau hujan, hanya separuh dari waktu besok akan menjadi hari bercuaca baik. Tentukan matriks peluang transisi dari Rantai Markov yang dibentuk dari keadaan-keadaan diatas.
5. Suatu rantai Markov dengan keadaan-keadaan "0, 1, 2" memiliki matriks peluang transisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

dan  $P(X_0 = 0) = 0.3, P(X_0 = 1) = 0.4, P(X_0 = 2) = 0.3$ .

Hitung

$$P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$$

6. Suatu rantai Markov dengan keadaan-keadaan "0, 1, 2" memiliki matriks peluang transisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Hitung

$$P(X_2 = 1, X_3 = 1 \mid X_1 = 0) \text{ dan } P(X_1 = 1, X_2 = 1 \mid X_0 = 0)$$

## PELUANG $n$ -LANGKAH

### PERSAMAAN CHAPMAN-KOLMOGOROV

Misalkan  $P_{ij}^n$  menyatakan peluang transisi  $n$ -langkah suatu proses di keadaan  $i$  akan berada di keadaan  $j$ ,

$$P_{ij}^n = P(Y_{k+n} = j | Y_k = i), n \geq 0, i, j \geq 0.$$

Persamaan Chapman-Kolmogorov adalah alat untuk menghitung peluang transisi  $n+m$ -langkah:

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m, \text{ (Buktikan!)}$$

untuk semua  $n, m \geq 0$  dan semua  $i, j$ .  $P_{ik}^n P_{kj}^m$  menyatakan peluang suatu proses dalam keadaan  $i$  akan berada di keadaan  $j$  dalam  $n+m$  transisi, melalui keadaan  $k$  dalam  $n$  transisi/langkah.

### LATIHAN:

1. Jika hari ini hujan maka besok akan hujan dengan peluang  $\alpha = 0.7$ ; jika hari ini tidak hujan maka besok akan hujan dengan peluang  $\beta = 0.4$ . Matriks peluang transisi 4 langkah adalah...
2. Keadaan hujan pada suatu hari bergantung pada keadaan hujan dalam dua hari terakhir. Jika dalam dua hari terakhir hujan maka besok akan hujan dengan peluang 0.7; Jika hari ini hujan dan kemarin tidak hujan maka besok akan hujan dengan peluang 0.5; jika hari ini tidak hujan dan kemarin hujan maka besok akan hujan dengan peluang 0.4; jika dalam dua hari terakhir tidak hujan maka besok hujan dengan peluang 0.2. Matriks peluang transisinya adalah sbb:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Jika hari Senin dan Selasa hujan, berapa peluang bahwa hari Kamis akan hujan?

## PELUANG TRANSISI TAK BERSYARAT

Misalkan

$$\alpha_i = P(X_0 = i), i \geq 0,$$

dimana  $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$ . Peluang tak bersyarat dapat dihitung dengan mensyaratkan pada keadaan awal,

$$P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n \alpha_i$$

LATIHAN:

1. Pandang soal yang lalu dengan matriks peluang transisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Jika diketahui  $\alpha_0 = P(X_0 = 0) = 0.4$  dan  $\alpha_1 = P(X_0 = 1) = 0.6$ , maka peluang (tak bersyarat) bahwa hari akan hujan 4 hari lagi adalah...

$$\begin{aligned} P(X_4 = 0) &= 0.4 P_{00}^4 + 0.6 P_{10}^4 \\ &= (0.4)(0.5749) + (0.6)(0.5668) = 0.57 \end{aligned}$$

## JENIS KEADAAN

Keadaan  $j$  dikatakan dapat diakses (*accessible*) dari keadaan  $i$  jika  $P_{ij}^n > 0$  untuk suatu  $n \geq 0$ .

Notasi:  $i \rightarrow j$ . Keadaan  $j$  dapat diakses dari keadaan  $i$  jika dan hanya jika dimulai dari keadaan  $i$  proses akan masuk ke keadaan  $j$ . Dua keadaan  $i$  dan  $j$  yang saling akses satu sama lain dikatakan berkomunikasi (*communicate*). Notasi:  $i \leftrightarrow j$ .

Sifat-sifat:

1. Keadaan  $i$  berkomunikasi dengan keadaan  $i$ .
2. Jika keadaan  $i$  berkomunikasi dengan keadaan  $j$  maka keadaan  $j$  berkomunikasi dengan keadaan  $i$ .

3. Jika keadaan  $i$  berkomunikasi dengan keadaan  $j$  dan keadaan  $j$  berkomunikasi dengan keadaan  $k$  maka keadaan  $i$  berkomunikasi dengan keadaan  $k$ .

Dua keadaan yang berkomunikasi dikatakan berada dalam kelas (*class*) yang sama. Setiap dua kelas dari keadaan-keadaan dapat ‘identik’ (*identical*) atau ‘saling asing’ (*disjoint*). Rantai Markov dikatakan tidak dapat direduksi (*irreducible*) jika hanya terdapat sebuah kelas dan semua keadaan berkomunikasi satu sama lain.

Latihan:

1. Tentukan kelas keadaan dari rantai Markov dengan peluang transisi berikut:

(i)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Diketahui matrik peluang transisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}$$

Apakah rantai Markov dengan peluang transisi diatas tidak dapat direduksi (*irreducible*)?

3. Apakah yang dapat anda katakan tentang rantai Markov dengan matriks peluang transisi berikut:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### SIFAT KEADAAN *Recurrent* DAN *Transient*

Keadaan  $i$  dikatakan *recurrent* jika, dimulai dari keadaan  $i$ , proses akan pasti kembali ke keadaan  $i$ . Keadaan  $i$  dikatakan *transient* jika, dimulai dari keadaan  $i$ , proses akan mungkin kembali ke keadaan  $i$ . Jika keadaan  $i$  *recurrent* maka proses akan terus kembali ke keadaan  $i$  dengan peluang satu. Dengan definisi rantai Markov, proses akan dimulai lagi ketika kembali ke keadaan  $i$ , dan seterusnya, sehingga keadaan  $i$  akan dikunjungi lagi. Jika keadaan  $i$  *recurrent* maka dimulai dari keadaan  $i$  maka proses akan kembali ke keadaan  $i$  terus dan terus sebanyak tak hingga kali.

Misalkan keadaan  $i$  *transient*. Setiap kali proses kembali ke keadaan  $i$ , terdapat kemungkinan (peluang yang positif) bahwa proses tidak pernah kembali ke keadaan  $i$ . Jika keadaan  $i$  *transient* maka, dimulai dari keadaan  $i$ , banyak periode/kali bahwa proses akan berada di keadaan  $i$  adalah peubah acak geometrik dengan parameter  $(1 - \text{peluang kembali ke keadaan } i)$ .

“Keadaan  $i$  *recurrent* jika dan hanya jika, dimulai dari keadaan  $i$ , maka banyak periode/kali yang diharapkan (expected number of time periods) bahwa proses akan berada di keadaan  $i$  adalah tak hingga”

Misalkan  $I_n = 1$  untuk  $X_n = i$ ,  $I_n = 0$  untuk  $X_n \neq i$ .

Misalkan  $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$  menyatakan banyak periode/kali bahwa proses berada dalam keadaan  $i$ .

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(I_n | X_0 = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i | X_0 = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n \end{aligned}$$

Keadaan  $i$  adalah

$$\textit{recurrent} \text{ jika } \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = \infty, \quad \textit{transient} \text{ jika } \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n < \infty.$$

Catatan:

- Pada rantai Markov dengan keadaan hingga, tidak semua keadaan bersifat *transient*.
- Jika keadaan  $i$  *recurrent* dan keadaan  $i$  berkomunikasi (communicate) dengan keadaan  $j$  maka keadaan  $j$  *recurrent*.
- Semua keadaan pada rantai Markov (hingga) yang tidak dapat direduksi adalah *recurrent*.

Latihan:

1. Misalkan rantai Markov dengan keadaan 0,1,2,3 memiliki matriks peluang transisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan keadaan mana yang *recurrent* dan keadaan mana yang *transient*!

2. Bagaimana dengan rantai Markov dengan matriks peluang transisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} ?$$



3. Misalkan rantai Markov dengan keadaan 0,1,2,3 memiliki matriks peluang transisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan keadaan mana yang *recurrent* dan keadaan mana yang *transient*!

4. Diketahui matriks peluang transisi (keadaan: 0,1,2,3,4,5) sebagai berikut:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.94 & 0.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.96 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan sifat keadaan dari rantai Markov diatas.

## LIMIT PELUANG TRANSISI

Misalkan matriks peluang transisi pada rantai Markov dengan dua keadaan adalah

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix},$$

dan matriks peluang transisi 4 dan 8 langkahnya:

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.5840 & 0.4160 \\ 0.5824 & 0.4176 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0.5833 & 0.4167 \\ 0.5833 & 0.4167 \end{pmatrix},$$

...dst. Matriks  $P^8$  hampir identik dengan  $P^4$  (benar-benar identik dengan  $P^{10}$ ). Selain itu, setiap baris dari  $P^8$  memiliki unsur yang identik. Nampaknya,  $P_{ij}^n$  konvergen ke suatu nilai, untuk  $n \rightarrow \infty$ , yang sama untuk semua  $i$ . Dengan kata lain, terdapat peluang limit (*limiting probability*) bahwa proses akan berada di keadaan  $j$  setelah sekian/banyak langkah/transisi. Nilai limit ini saling bebas dengan nilai pada keadaan awal.

Perhatikan 2 sifat keadaan berikut:

Keadaan  $i$  dikatakan memiliki periode  $d$  jika  $P_{ii}^n = 0$  untuk  $n$  yang tidak dapat dibagi oleh  $d$  ( $d$  suatu integer). Contoh, suatu proses dimulai dari keadaan  $i$  akan kembali ke  $i$  pada waktu  $2, 4, 6, 8, \dots$ , maka keadaan  $i$  memiliki periode 2. Suatu keadaan yang memiliki periode 1 disebut aperiodik. Jika keadaan  $i$  memiliki periode  $d$  dan keadaan  $i$  berkomunikasi dengan keadaan  $j$  maka keadaan  $j$  juga memiliki periode  $d$ .

Jika keadaan  $i$  *recurrent*, maka keadaan tersebut akan dikatakan *positive recurrent* jika, dimulai dari keadaan  $i$ , waktu harapan hingga proses kembali ke  $i$  adalah hingga. Pada rantai Markov yang memiliki keadaan hingga, semua keadaan yang *recurrent* adalah *positive recurrent*. Suatu keadaan yang *positive recurrent* dan *aperiodik* disebut ergodik.

#### TEOREMA

Untuk rantai Markov yang ergodik dan tidak dapat direduksi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$$

ada dan saling bebas dari  $i$ . Misalkan

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n, j \geq 0,$$

maka  $\pi_j$  adalah solusi nonnegatif tunggal dari

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}^n, j \geq 0,$$

dengan  $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ .

Catatan:

- Perhatikan bahwa

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{n+1} = j | X_n = i) P(X_n = i) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} P(X_n = i).$$

- Limit peluang  $\pi_j$  adalah peluang jangka panjang (*long-run proportion of time*) bahwa suatu proses akan berada di keadaan  $j$ .
- Jika rantai Markov tidak dapat direduksi, maka terdapat solusi untuk

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}, j \geq 0,$$

dengan  $\sum_j \pi_j = 1$ , jika dan hanya jika rantai Markov bersifat *positive recurrent*. Jika solusinya ada maka solusi tersebut tunggal dan  $\pi_j$  adalah proporsi jangka panjang bahwa rantai Markov berada dalam keadaan  $j$ . Jika rantai Markov aperiodik maka  $\pi_j$  adalah peluang limit bahwa rantai akan berada di keadaan  $j$ .

LATIHAN:

1. Jika hari ini hujan maka besok akan hujan dengan peluang  $\alpha$ ; jika hari ini tidak hujan maka besok akan hujan dengan peluang  $\beta$ . Jika '0' adalah keadaan hujan dan '1' adalah keadaan tidak hujan maka peluang hujan dan tidak hujan untuk jangka adalah...

Matriks peluang transisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix},$$

dan kita punya persamaan-persamaan:

$$\pi_0 = \alpha \pi_0 + \beta \pi_1$$

$$\pi_1 = (1 - \alpha) \pi_0 + (1 - \beta) \pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Kita peroleh peluang hujan dan tidak hujan pada jangka panjang:

$$\pi_0 = \frac{\beta}{1 + \beta - \alpha}$$

dan

$$\pi_1 = \frac{1 - \alpha}{1 + \beta - \alpha}$$

2. Percobaan-percobaan dilakukan secara berurutan. Jika dalam dua percobaan terakhir SUKSES maka peluang SUKSES pada percobaan berikut adalah 0.8. Dalam keadaan YANG LAIN, peluang SUKSES adalah 0.5. Hitung peluang percobaan sukses untuk jangka panjang.
3. Pandang pelantunan-pelantunan sebuah koin (dengan peluang muncul MUKA adalah  $\theta$ ) yang saling bebas. Berapa banyak lantunan dibutuhkan yang diharapkan (*expected number of tosses needed*) agar pola *HTHT* muncul?

Catatan:

- Peluang jangka panjang  $\pi_j, j \geq 0$ , disebut juga peluang stasioner (*stationary probability*). Jika keadaan awal dipilih berdasarkan peluang  $\pi_j, j \geq 0$ , maka peluang akan menjadi keadaan  $j$  pada setiap waktu  $n$  adalah sama dengan  $\pi_j$ .
- Untuk keadaan  $j$ , definisikan  $m_{jj}$  yaitu banyak transisi yang diharapkan (*expected number of transitions*) hingga suatu rantai Markov, dimulai dari keadaan  $j$  akan kembali ke keadaan tersebut:

$$\pi_j = \frac{1}{m_{jj}}$$

## “WAKTU” DALAM RANTAI MARKOV

Pandang matriks peluang transisi (m.p.t) berukuran  $3 \times 3$  atau dengan ruang keadaan  $\{0, 1, 2\}$ ,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dimana  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  dan  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . Keadaan 0 dan 2 adalah keadaan yang *absorbing*.

Jika, pada waktu  $t$ , proses berada di keadaan 0 atau 2, maka proses akan tetap berada di keadaan itu. Jika proses berada di keadaan 1, proses akan bergerak ke keadaan lain,

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

atau

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

Pertanyaan:

- Ke keadaan mana, 0 atau 2, proses akan berakhir?
- Berapa lama (langkah) proses akan berada di keadaan 1 sebelum akhirnya ke keadaan 0 atau 2?

Dengan kata lain, misalkan

$$T = \min\{n : X_n = 0 \text{ atau } X_n = 2\}.$$

Kita akan menghitung

$$E(T | X_0 = 1)$$

Misalkan  $T = \min\{n \geq 0; X_n = 0 \text{ atau } X_n = 2\}$ . Kita akan menentukan

$$u = P(X_T = 0 | X_0 = 1)$$

dan

$$v = E(T|X_0 = 1).$$

Pada langkah pertama, setelah langkah 0, proses mungkin berada di keadaan 0, 1 atau 2 dengan peluang berturut-turut  $\alpha, \beta, \gamma$ . Jika  $X_1 = 0$  maka  $T = 1$  dan  $X_T = 0$ ; jika  $X_1 = 2$  maka  $T = 1$  dan  $X_T = 2$ . Jika  $X_1 = 1$  maka proses berlanjut,

$$P(X_T = 0|X_1 = 0) = 1,$$

$$P(X_T = 0|X_1 = 1) = u,$$

$$P(X_T = 0|X_1 = 2) = 0.$$

Dengan menggunakan konsep peluang total,

$$\begin{aligned} u &= P(X_T = 0|X_0 = 0) \\ &= \sum_{k=0}^2 P(X_T = 0|X_1 = k, X_0 = 1)P(X_1 = k|X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^2 P(X_T = 0|X_1 = k)P(X_1 = k|X_0 = 1) \\ &= 1 \cdot \alpha + u \cdot \beta + 0 \cdot \gamma, \end{aligned}$$

Kita peroleh,

$$u = \frac{\alpha}{1 - \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}.$$

Sementara itu,

$$\begin{aligned} v &= E(T|X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^2 E(1 + T|X_1 = k, X_0 = 1) \end{aligned}$$

yang sama dengan

$$\begin{aligned} &= 1 + E(T|X_1 = 0, X_0 = 1)P(X_1 = 0|X_0 = 1) \\ &\quad + E(T|X_1 = 1, X_0 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 1) \\ &\quad + E(T|X_1 = 2, X_0 = 1)P(X_1 = 2|X_0 = 1) \\ &= 1 + 0 \cdot \alpha + v \cdot \beta + 0 \cdot \gamma, \end{aligned}$$

Kita peroleh

$$v = \frac{1}{1 - \beta}.$$

Catatan:

Perhatikan bahwa peubah acak  $T$  yang menyatakan langkah untuk mencapai proses/keadaan yang absorbing, berdistribusi geometrik dengan distribusi peluang

$$P(T > k|X_0 = 1) = \beta^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

dan ekspektasi

$$E(T|X_0 = 1) = \frac{1}{1 - \beta}.$$

## BAB 4: DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

Silabus: Distribusi eksponensial, sifat tanpa memory (*memoryless property*), jumlah p.a eksponensial, statistik terurut eksponensial, antrean.

Tujuan:

1. Mengkaji distribusi eksponensial
2. Mempelajari dan menggunakan sifat tanpa memori
3. Memahami dan menggunakan sifat jumlah p.a eksponensial
4. Menghitung statistik terurut eksponensial
5. Mempelajari aplikasi distribusi eksponensial dalam antrean

(ILUSTRASI) Misalkan disebuah Bank terdapat 2 orang *teller* yang sibuk melayani nasabah. Tidak ada orang lain yang antre. Seseorang K yang datang akan dilayani salah satu *teller* yang telah selesai dengan nasabah sebelumnya. Jika waktu melayani dari *teller* ke- $i$  adalah peubah acak eksponensial dengan parameter  $\theta_i$ , hitung  $E(T)$ , dimana  $T$  adalah waktu yang dihabiskan K di Bank.

Distribusi eksponensial dapat dipandang sebagai analog (kontinu) dari distribusi geometrik. Kita ketahui bahwa distribusi geometrik memodelkan banyaknya percobaan yang dibutuhkan oleh suatu proses diskrit untuk mengubah keadaan. Sedangkan distribusi eksponensial menjelaskan waktu untuk proses kontinu untuk mengubah keadaan (lihat Tabel 1).

Table 1: Percobaan Bernoulli vs Proses Poisson.

	Percobaan Bernoulli	Proses Poisson
Bnyk “sukses”	Distribusi Binomial	Distribusi Poisson
“Wkt” utk sukses I	Distribusi Geometrik	Distribusi Eksponensial

## PEUBAH ACAK EKSPONENSIAL

Misalkan  $X$  peubah acak kontinu dengan fungsi peluang

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x \geq 0.$$



Peubah acak tersebut disebut peubah acak eksponensial dan distribusinya disebut distribusi eksponensial. Sifat distribusi dan momennya antara lain:

1. Fungsi distribusi:  $F(x) =$
2. Ekspektasi:  $E(X) =$
3. Fungsi pembangkit momen atau f.p.m:  $M(t) =$

Data berdistribusi eksponensial (contoh:  $Y \sim \exp(1/3)$ ) dapat dibangkitkan menggunakan kode berikut:

```
y = exprnd(3,10,1);
hist(y)
```

Membangkitkan data dapat pula menggunakan teknik simulasi stokastik yang sederhana yaitu “Inverse Transformation Method”. Misalkan  $U$  peubah acak Uniform(0, 1). Untuk setiap fungsi distribusi kontinu  $F$ , jika kita definisikan peubah acak  $X$  sbb:

$$X = F^{-1}(U)$$

maka peubah acak  $X$  memiliki fungsi distribusi  $F$ . Contoh. Jika  $F(x) = 1 - e^{-x/3}$  maka  $F^{-1}(u)$  adalah nilai  $x$  sehingga  $1 - e^{-x/3} = u$  atau  $x = -3 \log(1 - u)$ . Jadi, jika  $U$  adalah peubah acak Uniform(0,1) maka

$$F^{-1}(U) = -3 \log(1 - U)$$

adalah peubah acak eksponensial dengan mean 1 (parameter 1).

#### SIFAT TANPA MEMORI

Misalkan  $X$  peubah acak. Sifat tanpa memori (*memoryless property*) pada  $X$  adalah sifat dimana “peluang  $X$  lebih dari  $s + t$  dengan syarat/diberikan  $X$  lebih dari  $t$  sama dengan peluang  $X$  lebih dari  $s$ ”, atau

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$$

Contoh: Misalkan  $X$  menyatakan waktu tunggu seseorang mendapatkan kebahagiaan. Peluang orang tsb menunggu lebih dari 7 tahun setelah dia menunggu lebih dari 5 tahun sama dengan

peluang dia menunggu lebih dari 2 tahun. Orang itu tidak lagi mengingat bahwa dia telah menunggu selama 5 tahun. Itu sebabnya dikatakan “sifat tanpa memori”.

Perhatikan:

$$P(X > s + t | X > t) = \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)} = P(X > s)$$

Akibatnya:

$$P(X > s + t) = P(X > s) P(X > t)$$

yang dipenuhi HANYA oleh  $X$  berdistribusi eksponensial dengan parameter  $\theta$ . Misalkan  $X \sim \exp(\theta)$ , maka

$$\begin{aligned} P(X > s + t) &= 1 - P(X < s + t) \\ &= 1 - F_X(s + t) \\ &= 1 - (1 - e^{-\theta s - \theta t}) \\ &= e^{-\theta s - \theta t} \\ &= e^{-\theta s} e^{-\theta t} \\ &= P(X > s) P(X > t) \end{aligned}$$

Sifat tanpa memori ini tidak dipenuhi oleh distribusi lain. Sebagai contoh, misalkan  $X \sim U(0, 1)$ , maka

$$\begin{aligned} P(X > s + t) &= 1 - P(X < s + t) \\ &= 1 - F_X(s + t) = 1 - (s + t) \\ &\neq (1 - s)(1 - t) \\ &= (1 - F_X(s))(1 - F_X(t)) \\ &= P(X > s) P(X > t) \end{aligned}$$

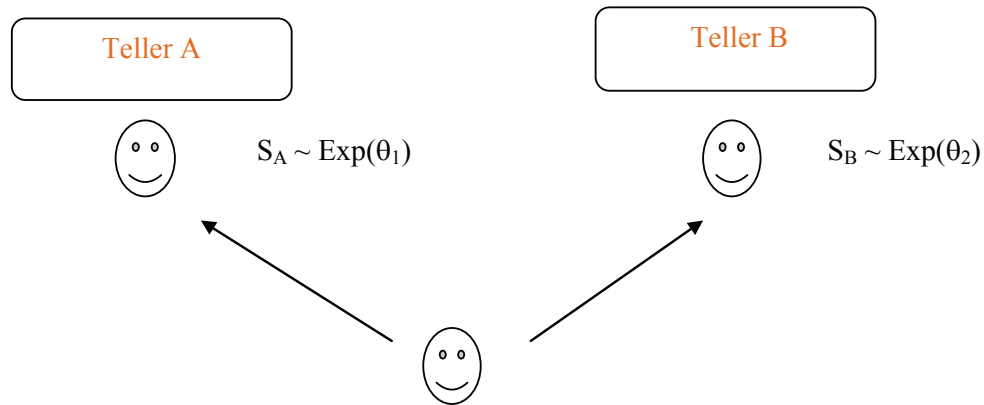


Figure 1: Antrean di Bank dengan 2 teller

Contoh/Latihan:

1. Misalkan waktu tunggu (dalam menit) antrean di Bank berdistribusi eksponensial dengan mean 10. Peluang bahwa seorang nasabah menunggu lebih dari 15 menit untuk dilayani adalah... Sedangkan peluang seseorang menunggu lebih dari 15 menit setelah dia menunggu lebih dari 10 menit adalah...
2. Misalkan disebuah Bank terdapat 2 orang *teller* A dan B yang sibuk melayani nasabah Uvi dan Ivi. Tidak ada orang lain yang antre. Seseorang, Ovi, yang datang akan dilayani salah satu *teller* yang telah selesai dengan nasabahnya. Diketahui waktu layanan (*service time*) *teller* A dan B berturut-turut adalah peubah acak eksponensial dengan parameter  $\theta_1$  dan  $\theta_2$ . Misalkan  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ . Berapa peluang bahwa Ovi adalah nasabah terakhir yang akan meninggalkan Bank?
3. Banyaknya uang yang terlibat dalam kecelakaan adalah peubah acak eksponensial dengan mean 1000. Banyaknya uang yang dibayar oleh perusahaan asuransi tergantung apakah klaim pemegang polis lebih dari 400. Tentukan mean dan variansi banyak uang yang dibayar perusahaan asuransi pada setiap kecelakaan.
4. Misalkan masa hidup (*lifetime*) sebuah lampu, sebelum akhirnya mati/terbakar, adalah p.a eksponensial dengan mean 10 (jam). Misalkan Ani memasuki ruangan dan mendapatkan lampu mati/terbakar. Jika Ani ingin bekerja di ruangan itu selama 5 jam, berapa peluang bahwa Ani dapat menyelesaikan pekerjaannya sebelum lampu mati/terbakar/padam?

## FUNGSI LAJU KEGAGALAN

Sifat tanpa memori dapat juga diilustrasikan dengan fungsi LG atau laju kegagalan (*failure/hazard rate function*) dari distribusi eksponensial. Misalkan peubah acak  $X$  memiliki fungsi peluang  $f$  dan fungsi distribusi  $F$ . Fungsi LG didefinisikan

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

dimana jika “sesuatu” memiliki waktu hidup  $X$  dan telah bertahan selama waktu  $t$  maka laju  $r(t)$  akan mengukur peluang sesuatu itu tidak dapat bertahan pada waktu tambahan  $dt$ . Dengan kata lain

$$P(X \in (t, t + dt) | X > t) \approx \frac{f(t) dt}{1 - F(t)}$$

atau peluang bersyarat bahwa sesuatu (dengan umur  $t$ ) akan gagal.

## JUMLAH PEUBAH ACAK EKSPONENSIAL DAN STATISTIK TERURUT

Misalkan  $X_1, \dots, X_n$  sampel acak berdistribusi eksponensial. Misalkan

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i,$$

maka distribusi dari  $Y$  dapat ditentukan dengan metode fungsi pembangkit momen,

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(\exp(tY)) = E(\exp(t[X_1 + \dots + X_n])) \\ &= \end{aligned}$$

Jadi,  $Y \sim \dots$ , dengan mean dan variansi....

Pandang dua buah p.a eksponensial  $X_1$  dan  $X_2$  yang saling bebas dengan parameter  $\theta_1$  dan  $\theta_2$ , maka

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \int \int f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \dots = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

## STATISTIK TERURUT EKSPONENSIAL

Misalkan  $X_1, \dots, X_n$  sampel acak berukuran  $n$  dari distribusi eksponensial dengan parameter  $\lambda$ . Akan ditentukan distribusi dari  $Y_{(k)}$ , statistik terurut ke- $k$ . Ambil kasus untuk  $k = 1$  dan/atau  $k = n$ .

Solusi:

Fungsi peluang untuk statistik terurut ke- $k$  adalah:

$$f_{X_{(k)}}(x) = C_{k-1,1,n-k}^n (F_X(x))^{k-1} f_X(x) (1 - F_X(x))^{n-k}$$

Untuk s.a berukuran 2 dari distribusi eksponensial dengan parameter  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(x) &= C_{0,1,1}^2 (1 - e^{-\lambda x})^{1-1} \lambda e^{-\lambda x} (e^{-\lambda x})^{2-1} \\ &= 2 \lambda e^{-2\lambda x} \end{aligned}$$

## APLIKASI PEUBAH ACAK EKSPONENSIAL DALAM ANTREAN

Misalkan disebuah Bank terdapat 2 orang *teller* yang sibuk melayani nasabah. Tidak ada orang lain yang antre. Seseorang K yang datang akan dilayani salah satu *teller* yang telah selesai dengan nasabah sebelumnya. Jika waktu melayani dari *teller* ke- $i$  adalah peubah acak eksponensial dengan parameter  $\theta_i$ , hitung  $E(T)$ , dimana  $T$  adalah waktu yang dihabiskan K di Bank.

Solusi:

$$\begin{aligned} E(T) &= E(T|R_1 < R_2) P(R_1 < R_2) + E(T|R_2 < R_1) P(R_2 < R_1) \\ &= \dots \end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned} E(T|R_1 < R_2) &= E(S + R_1|R_1 < R_2) \\ &= E(S|R_1 < R_2) + E(R_1|R_1 < R_2) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Solusi (alternatif):

$$\begin{aligned} E(T) &= E(\min(R_1, R_2) + S) \\ &= \dots \end{aligned}$$

dimana

$$E(S) = E(S|R_1 < R_2) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + E(S|R_2 < R_1) \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Contoh/Latihan:

1. Pandang soal sebelumnya (Uvi, Ivi, Ovi) dengan distribusi waktu layanan *teller* A dan B memiliki parameter yang berbeda. Berapa peluang Ovi bukanlah nasabah terakhir keluar dari bank?
2. Misalkan Ita memasuki sebuah bank yang memiliki seorang *teller*. Ita melihat ada 5 nasabah di bank, 1 orang sedang dilayani dan 4 orang yang lain antre. Ita pun antre. Jika waktu layanan berdistribusi dengan parameter  $\mu$ , berapa lama waktu (*expected amount of time*) yang dihabiskan Ita di bank?
3. Manakah pernyataan yang BENAR?

$$E(X^2|X > 1) = E((X + 1)^2)$$

$$E(X^2|X > 1) = E(X^2) + 1$$

$$E(X^2|X > 1) = (E(X) + 1)^2$$

Bagaimana dengan

$$E(X|X > 1)?$$

4. Disebuah toko ada 2 petugas jaga. Tiga orang: Fer, Fir dan Fur datang ke toko bersamaan. Fer dan Fir langsung mendatangi petugas toko, sedangkan Fur menunggu (baca: antre). Berapa peluang bahwa Fer masih berada di toko setelah Fir dan Fur pergi apabila waktu layanan:

- (a) untuk setiap pertugas adalah tepat (tidak acak) 10 menit?
  - (b) adalah  $i$  dengan peluang  $1/3$ ,  $i = 1, 2, 3$ ?
  - (c) berdistribusi eksponensial dengan mean  $1/\mu$ ?
5. Jika  $X_1$  dan  $X_2$  peubah acak-peubah acak kontinu non negatif yang saling bebas, tunjukkan

$$P(X_1 < X_2 \mid \min(X_1, X_2) = t) = \frac{r_1(t)}{r_1(t) + r_2(t)},$$

dimana  $r_i(t)$  fungsi LG untuk  $X_i$ .

## BAB 5: PROSES POISSON

Seperti sudah disampaikan sebelumnya, analog dengan percobaan Bernoulli, percobaan atau proses Poisson akan mengkaji (i) banyak sukses dalam suatu periode waktu, dan (ii) waktu (kontinu) yang dibutuhkan untuk mendapatkan sukses yang pertama. Distribusi yang terlibat dalam (i) adalah distribusi Poisson, sedangkan distribusi yang berkaitan dengan (ii) adalah distribusi eksponensial. Sebagai gambaran untuk melihat proses Poisson, perhatikan ilustrasi-ilustrasi berikut.

### Ilustrasi-1:

Para nasabah datang ke suatu tempat layanan dengan dua meja layanan. Nasabah yang datang akan menuju meja 1, meja 2, lalu pulang. Misalkan waktu layanan setiap meja adalah peubah acak eksponensial dengan parameter  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ . Waktu yang dihabiskan nasabah di tempat layanan adalah...

### Ilustrasi-2:

Para nasabah datang ke suatu tempat layanan dengan dua meja layanan. Ketika nasabah baru datang, setiap nasabah yang ada harus segera meninggalkan tempat layanan tersebut. Nasabah yang datang akan menuju meja 1, meja 2, lalu pulang. Jika waktu layanan setiap meja adalah peubah acak eksponensial dengan parameter  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ . Tentukan proporsi nasabah yang selesai di meja 2.

### Ilustrasi-3:

Para nasabah datang ke suatu tempat layanan, dengan dua meja layanan, mengikuti **proses Poisson** dengan laju  $\lambda$ . Ketika nasabah baru datang, setiap nasabah yang ada harus segera meninggalkan tempat layanan tersebut. Nasabah yang datang akan menuju meja 1, meja 2, lalu pulang. Jika waktu layanan setiap meja adalah peubah acak eksponensial dengan parameter  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ . Tentukan proporsi nasabah yang selesai di meja 2.

## WAKTU ANTAR KEDATANGAN

Misalkan  $T_1$  menyatakan waktu dari kejadian/kedatangan pertama. Untuk  $n > 1$ , misalkan  $T_n$  menyatakan waktu tersisa antara kejadian ke- $(n - 1)$  dan kejadian ke- $n$ . Barisan  $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$  adalah barisan waktu antar kejadian (*interarrival times*). Untuk menentukan distribusi dari  $T_n$ , perhatikan bahwa kejadian  $\{T_1 > t\}$  terjadi jika dan hanya jika tidak ada kejadian dari



proses Poisson yang terjadi pada interval  $[0, t]$ , sehingga

$$P(T_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

Jadi  $T_1$  berdistribusi eksponensial dengan mean  $1/\lambda$ .

Perhatikan juga bahwa

$$P(T_2 > t) = E(P(T_2 > t | T_1)),$$

sedangkan

$$\begin{aligned} P(T_2 > t | T_1 = s) &= P(\text{tidak ada kejadian pada } (s, s+t] | T_1 = s) \\ &= P(\text{tidak ada kejadian pada } (s, s+t]) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Dengan demikian,  $T_2$  juga peubah acak eksponensial dengan mean  $1/\lambda$ , dan  $T_2$  saling bebas dengan  $T_1$ . Demikian seterusnya untuk  $T_3, T_4, \dots, T_n$  yang juga berdistribusi eksponensial dan peubah acak-peubah acak tersebut saling bebas.

## WAKTU TUNGGU

Statistik lain yang kita perhatikan berikut adalah  $S_n$  yaitu waktu kedatangan kejadian ke- $n$  atau waktu tunggu (*waiting time*) hingga kejadian ke- $n$ ,

$$S_n = T_1 + \dots + T_n, \quad n \geq 1$$

yang berdistribusi...

(distribusi Erlang?)

Contoh-1:

Misalkan turis-turis datang ke suatu pulau mengikuti proses Poisson dengan parameter  $\lambda = 1$  per hari. Berapa waktu yang diharapkan hingga turis kesepuluh datang? Berapa peluang waktu yang dibutuhkan (*elapsed time*) antara turis kesepuluh dan kesebelas datang melebihi 2 hari?

Contoh-2:

Misalkan  $T_K$  menyatakan waktu yang dibutuhkan (*elapsed time*) untuk klaim-klaim asuransi diproses;  $T_1$  menyatakan waktu yang dibutuhkan hingga klaim pertama diproses. Diketahui  $T_1, T_2, \dots$  saling bebas dan berdistribusi dengan fungsi peluang

$$f(t) = 0.1 e^{-0.1t}, \quad t > 0$$

dengan  $t$  diukur dalam setengah-jam. Hitung peluang bahwa setidaknya sebuah klaim akan diproses pada 5 jam kedepan. Berapa peluang bahwa setidaknya 3 klaim diproses dalam 5 jam?

### MENGAPA PROSES POISSON?

Ilustrasi dan kajian tentang peubah acak waktu antar kedatangan serta waktu tunggu diatas telah menggiring kita untuk memahami lebih jauh tentang proses Poisson dan alasan mengapa proses ini penting.

- Proses Poisson (PP) adalah proses menghitung (*counting process*) untuk banyaknya kejadian yang terjadi hingga suatu waktu tertentu
- Proses ini sering disebut proses lompatan (*jump process*) karena keadaan akan berpindah ke yang lebih tinggi setiap kali kejadian terjadi

### PROSES MENGHITUNG

Suatu proses stokastik  $\{N_t, t \geq 0\}$  adalah proses menghitung (*counting process*) jika  $N_t$  merupakan total banyaknya kejadian (*events*) yang terjadi sampai waktu  $t$ . Sebagai contoh, (i) banyaknya orang yang masuk ke suatu restoran pada waktu/sampai waktu  $t$ , (ii) banyaknya gol yang diciptakan pemain, dan (iii) banyaknya klaim asuransi yang masuk.

Proses menghitung  $\{N_t, t \geq 0\}$  haruslah memenuhi kriteria berikut:

- $N_t \geq 0$
- $N_t$  bernilai integer
- Jika  $s < t$  maka  $N_s \leq N_t$
- Untuk  $s < t$ ,  $N_t - N_s$  adalah banyaknya kejadian pada interval  $(s, t]$

Dua sifat penting yang melekat pada proses menghitung adalah sebagai berikut. Pertama, **kenaikan independen** (*independent increments*). Suatu proses menghitung  $\{N_t\}$  memiliki *independent increments* jika banyak kejadian yang terjadi pada  $[s, t]$ , yaitu  $N_t - N_s$ , saling bebas dengan banyak kejadian sampai waktu  $s$ . Dengan kata lain, banyak kejadian yang terjadi pada selang waktu yang saling asing adalah saling bebas. Kedua, **kenaikan stasioner** (*stationary increments*). Suatu proses menghitung  $\{N_t\}$  memiliki *stationary increments* jika distribusi banyak kejadian pada setiap selang hanya bergantung pada panjang selang.

#### DEFINISI PROSES POISSON

##### DEFINISI -1

Proses menghitung  $\{N_t, t \geq 0\}$  adalah **proses Poisson** dengan laju  $\lambda(> 0)$ , jika

- $N_0 = 0$
- Proses memiliki kenaikan independen
- Banyaknya kejadian di sebarang interval dengan panjang  $t$  berdistribusi Poisson dengan mean  $\lambda t$ . Untuk setiap  $s, t \geq 0$

$$P(\{N_{s+t} - N_s = n\}) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

##### DEFINISI -2

Proses menghitung  $\{N_t, t \geq 0\}$  adalah **proses Poisson** dengan laju  $\lambda(> 0)$ , jika

- $N_0 = 0$
- Proses memiliki kenaikan stasioner dan independen
- $P(\{N_h = 1\}) = \lambda h + o(h)$
- $P(\{N_h \geq 2\}) = o(h)$

#### DISKUSI:

Tunjukkan bahwa kedua definisi proses Poisson diatas identik.

## JUMLAHAN PROSES POISSON SALING BEBAS

Pandang dua proses Poisson  $\{N_1(t)\}$  dan  $\{N_2(t)\}$  yang saling bebas dengan parameter, berturut-turut,  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ . Kita mendapatkan

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t),$$

yang juga merupakan proses Poisson dengan parameter  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

Contoh-3:

Mahasiswa-mahasiswa MA ITB akan datang ke Gedung Matematika melewati pintu Tamansari atau pintu DayangSumbi. Kedatangan mahasiswa melalui kedua pintu tersebut, berturut-turut, mengikuti proses Poisson dengan parameter  $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 3/2$  per menit. Berapa peluang tidak ada mahasiswa yang datang padang selang waktu 3 menit? Hitung mean waktu antara kedatangan mahasiswa-mahasiswa. Berapa peluang seorang mahasiswa benar-benar datang melalui pintu DayangSumbi?

Jawab:

$$N_{TS} \sim POI(1/2), \quad N_{DS} \sim POI(3/2)$$

dan  $N_{TS} + N_{DS} = N_T \sim POI(2)$ .

Karena  $\lambda = 2 = 1/2 + 3/2$ , maka  $T_1 \sim \exp(2)$ ,

$$P(T_1 > 3) = e^{-6}$$

$$E(T_k) = 1/2$$

$$P(T_{DS} < T_{TS}) = \dots$$

Contoh-4:

Penjualan tiket pertandingan semifinal AFF 2010 mengikuti tiga proses Poisson sbb:

- penjualan tiket harga sebenarnya: 2/jam
- penjualan tiket harga diskon (harga tembak kali...): 4/jam
- penjualan tiket VIP: 0.3/jam

Hitung: (a) waktu harapan hingga penjualan tiket berikutnya, (b) waktu harapan hingga penjualan tiket VIP berikutnya, (c) peluang bahwa penjualan tiket setelah tiket harga sebenarnya adalah tiket harga sebenarnya yang lain, (d) peluang bahwa tiket VIP akan dijual/terjual pada 30 menit kedepan, (e) peluang bahwa setidaknya 2 dari 3 tiket yang dijual berikutnya adalah tiket diskon

Contoh-5:

Di suatu terminal bis, Bis A dan Bis B datang saling bebas mengikuti proses Poisson. Ada sebuah bis A datang setiap 12 menit dan sebuah bis B setiap 8 menit. Misalkan Yun untuk melakukan observasi terhadap bis-bis tersebut. Berapa peluang bahwa tepat 2 bis A akan datang pada 24 menit pertama dan tepat 3 bis B datang pada 36 menit pertama? Hitung mean waktu tunggu (*expected waiting time*) hingga sebuah bis datang. Berapa peluang bahwa diperlukan waktu setidaknya 20 menit untuk 2 bis B datang?

#### “THINNING” DARI PROSES POISSON

Diketahui suatu proses Poisson  $\{N_t\}$  dengan parameter  $\lambda$ . Misalkan setiap kali terdapat suatu kejadian, kejadian tersebut dapat diklasifikasi ke Tipe I dengan peluang  $p$  atau Tipe II dengan peluang  $1 - p$ , yang saling bebas untuk seluruh kejadian.

Jika  $N_1(t)$  dan  $N_2(t)$  berturut-turut adalah kejadian tipe I dan II pada selang  $[0, t]$  maka

- $\{N_1(t)\}$  adalah proses Poisson dengan parameter  $\lambda p$
- $\{N_2(t)\}$  adalah proses Poisson dengan parameter  $\lambda(1 - p)$
- Kedua proses saling bebas

Contoh-6:

1. Sebuah perusahaan asuransi memiliki dua jenis polis yaitu polis K dan M. Pengajuan klaim yang datang mengikuti proses Poisson dengan parameter 9 (per hari). Pemilihan klaim secara acak menunjukkan bahwa peluang polis jenis K terpilih adalah  $1/3$ . Hitung peluang bahwa klaim-klaim polis jenis K (atau M) yang diajukan pada suatu hari kurang dari 2. Berapa peluang bahwa total klaim yang diajukan pada suatu hari kurang dari 2?

2. Sejalan dengan soal sebelumnya, ternyata  $\frac{2}{3}$  klaim dari polis jenis K memiliki besar klaim lebih dari 10jt. Sementara itu, hanya  $\frac{2}{9}$  dari polis M. Tentukan nilai harapan banyaknya klaim yang bernilai lebih dari 10jt. Berapa peluang bahwa pada suatu hari klaim yang bernilai lebih dari 10jt kurang dari 2?
3. Ike datang ke halte bis transjakarta pukul 8.15 pagi. Informasi yang ada sbb:
- hingga pukul 9, bis akan datang mengikuti proses Poisson dengan parameter 1 (per 30 menit)
  - mulai pukul 9, bis akan datang mengikuti proses Poisson dengan parameter 2 (per 30 menit)
- Berapa waktu tunggu yang diharapkan (*expected waiting time*) Ike hingga sebuah bis datang?