

# 五一数学建模竞赛

## 承 诺 书

我们仔细阅读了五一数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与本队以外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其它公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们愿意承担由此引起的一切后果。

我们授权五一数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

参赛题号（从 A/B/C 中选择一项填写）：                     A                    

参赛组别（研究生、本科、专科、高中）：                     本科                    

所属学校（学校全称）：                     苏州科技大学                    

参赛队员： 队员 1 姓名：                     谢奕轩                    

队员 2 姓名：                     贺龙林森                    

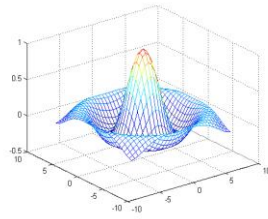
队员 3 姓名：                     常莉                    

联系方式： Email: 1934468970@qq.com 联系电话： 15312201219

日期： 2024 年 5 月 1 日

（除本页外不允许出现学校及个人信息）

# 五一数学建模竞赛



题 目： 钢板最优切割路径问题

关键词：空程最短原则

摘 要：

本文针对钢板最优切割路径问题，通过拓扑取点法，三角性质以及是亨公式进行推导，求解出满足空程最小的切割路径

针对问题一，我们利用了三角性质以及闭合曲线与直线关系进行求解

针对问题二，我们利用了三角性质以及闭合曲线与直线关系以及图形对称性进行求解

针对问题三，我们利用了三角性质以及闭合曲线与直线关系以及桥式模型进行求解

针对问题四，我们利用了三角性质以及闭合曲线与直线关系以及桥不均匀分布模型结论进行求解



# 一. 问题重述

## 1.1 问题背景

提高钢板下料切割过程中的工作效率，是模具加工企业降低成本和增加经济效益的重要途径，其中钢板切割的路径规划是钢板切割过程的一个关键环节。

钢板切割就是使用特殊的切割技术,基于给定的下料切割布局图纸对钢板进行加工。切割过程中设计切割路径至关重要，最优切割路径要满足空程最短的原则。

## 1.2 问题提出

**问题 1：**给定如图 2 所示的下料切割布局 N1，其中 B3-B4 为钢板边界线，不用切割，B1 为切割起始点。请建立数学模型，设计最优切割路径方案，并给出最优切割路径的空程总长度。

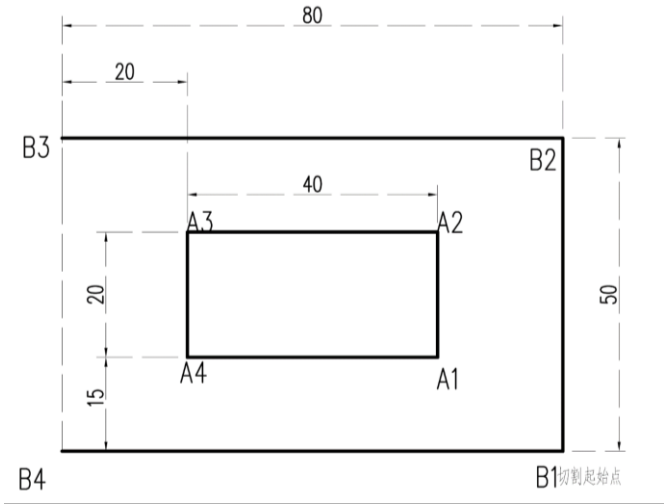


图 2 下料切割布局 N1

**问题 2：**给定下料切割布局 N2 见图 3，构件的外边界切割成上下对称的锯齿状，同时内部切割出四个半径为 3 的圆形和一个椭圆形。请根据下料切割布局 N2 的参数信息，建立数学模型，设计最优切割路径方案，并给出最优切割路径的空程总长度。

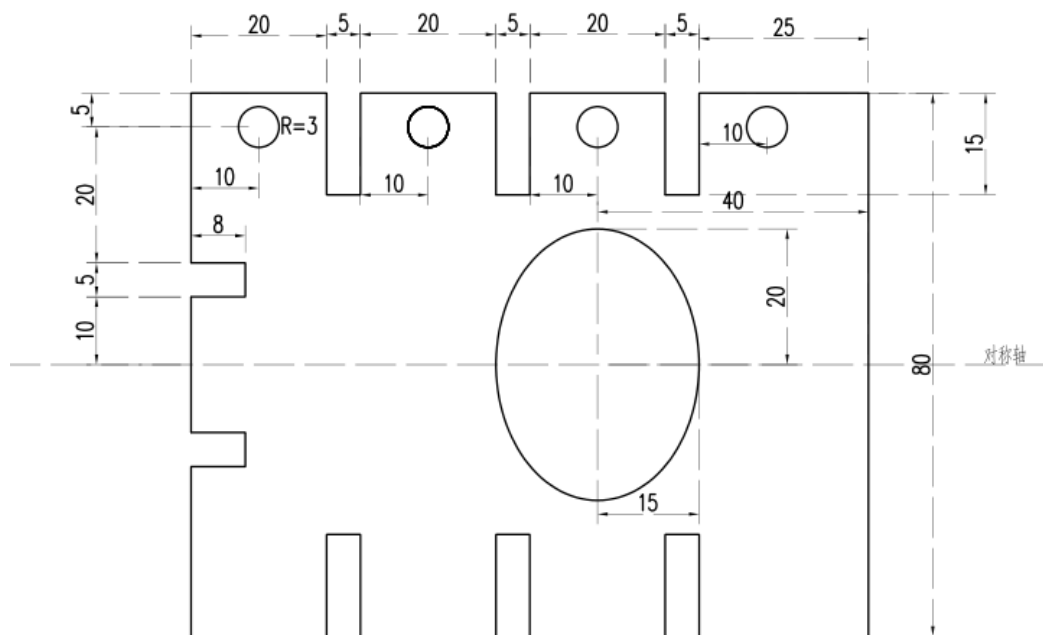


图 3 含多个孔的下料切割布局 N2

**问题 3：**给定下料切割布局 N3 见图 4。N3 与 N2 相比，需要在椭圆中多切割出 12 个矩形件(它们在椭圆中的位置是对称分布的，左右相邻的两个矩形件的中心距离为 6，上下相邻的两个矩形件的中心距离为 5)。请建立数学模型，设计最优切割路径方案，并给出最优切割路径的空程总长度(要求椭圆内部的所有矩形件要先于椭圆切割)。

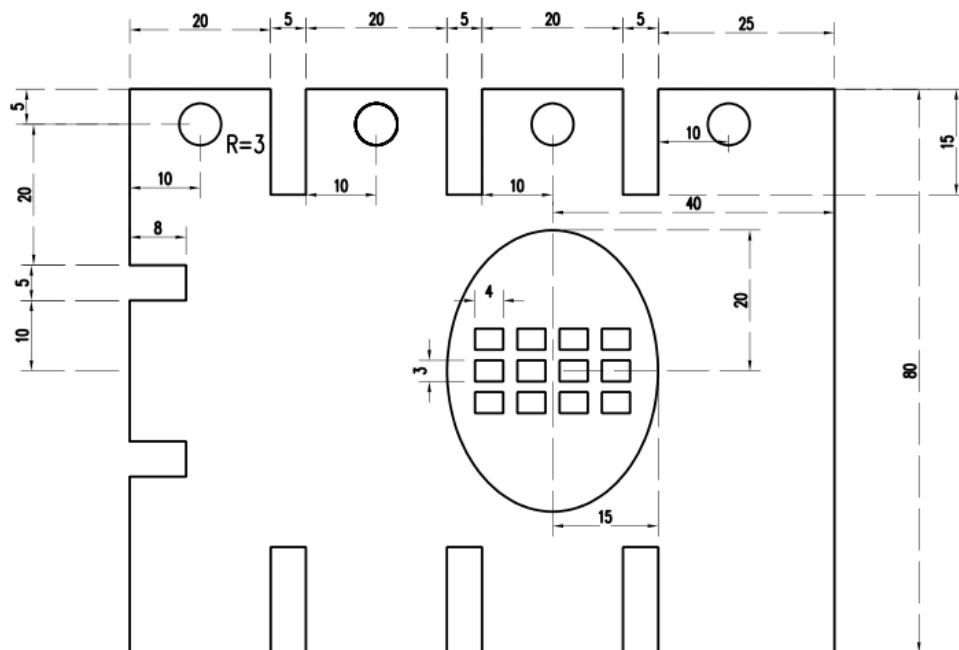


图 4 含矩形件嵌套的下料切割布局 N3

**问题 4：**给定下料切割布局 N4 见图 5，需要在椭圆中切割出 4 个矩形小零件。由于小零件尺寸较小，为防止小零件掉落，两个相邻的小零件之间需要采用“过桥”的方式，使得相邻零件连接成一个大尺寸零件，要求“过桥”与矩形小零件顶点的最短距离至少为 1。“过桥”的宽度为 2，且在空程计算中不可以忽略“过桥”的宽度。

请根据 N4 的具体情况，建立数学模型，确定“过桥”的数目和位置，设计最优切割路径方案，给出最优切割路径的空程总长度(要求切割起始点设计在钢板的右下角，N4 中的小圆形切割件不考虑过桥问题)。

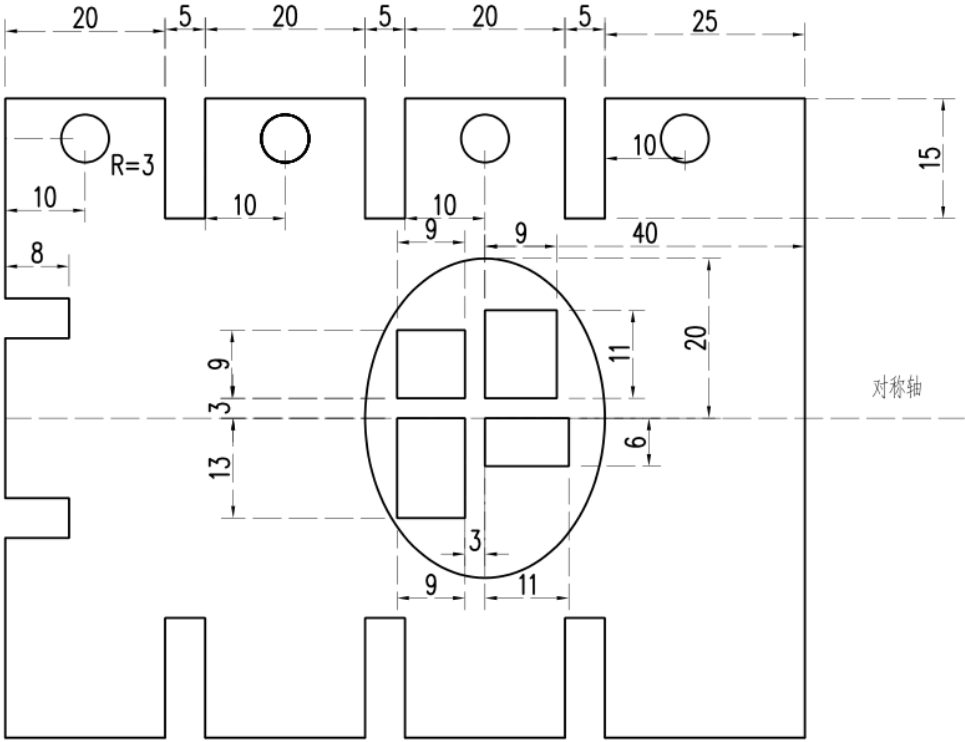
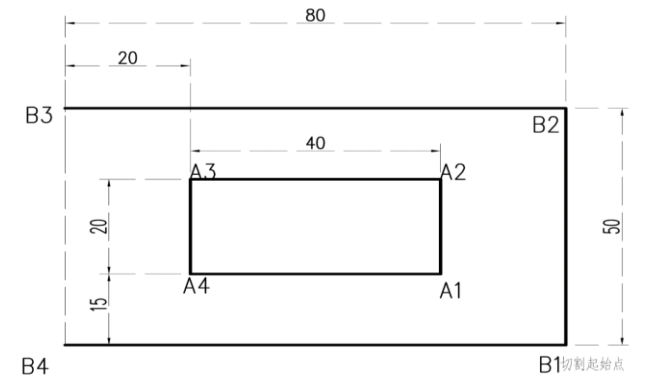


图 5 需要添加过桥的嵌套矩形件套料图 N4

## 二. 问题分析

**问题 1：**给定如图 2 所示的下料切割布局 N1，其中 B3-B4 为钢板边界线，不用切割，B1 为切割起始点。请建立数学模型，设计最优切割路径方案，并给出最优切割路径的空程总长度。



本质：对单一图像描述以及切入点选择问题

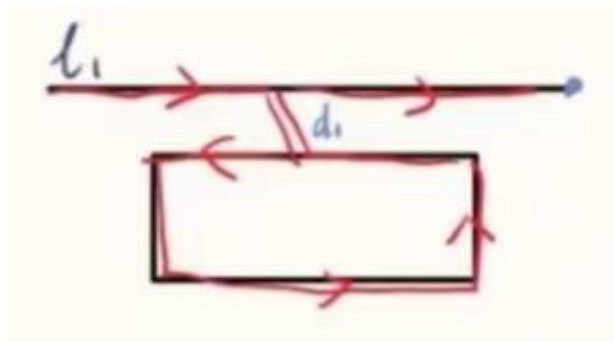
解法：利用其对称性以及拓扑原理确定出“内含闭合图形有唯一入口唯一出口”原则后进行路径规划，列举出两种极限情况，并计算出各自最短空程，取最小结果

令内部区域  $A1 \rightarrow A2 \rightarrow A3 \rightarrow A4 \rightarrow A1$  为  $X$

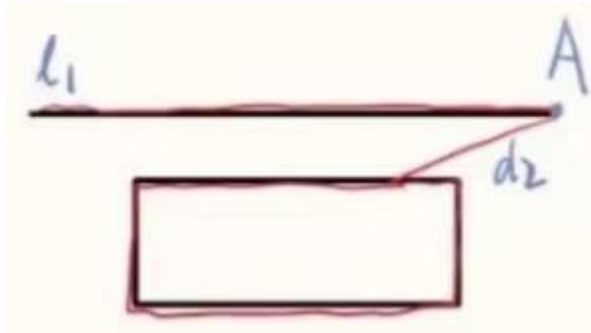
注：验证无拐点线段与闭合曲线的空程关系

对于无拐点线段和闭合图形：设

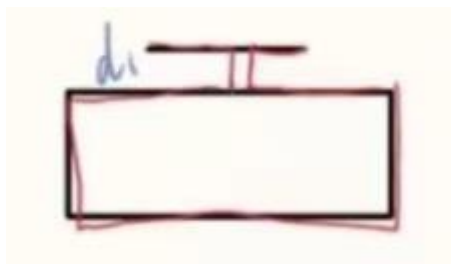
- (1) 线段长度超过闭合曲线，不在端点处往返，则 11 空程为  $2d_1$ ，在直线  $l_1$  和闭合曲线上各取一任一点  $O, A$ ，则线段  $OA$  最短时， $2d_1$  为一倍空程



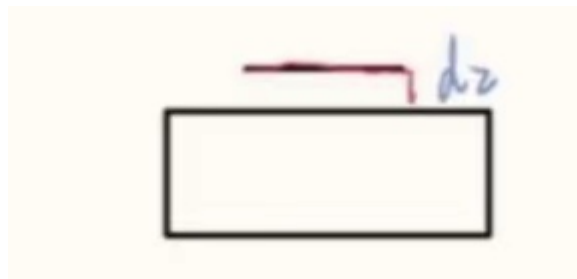
- (2) 线段长度超过闭合曲线，在  $A$  端点处往返，12 空程为  $d_2$ ，在直线  $l_1$  和闭合曲线上各取一任一点  $O, A$ ，则线段  $OA$  最短时，取  $2d_1$  与  $d_2$  中最小的为一倍空程



- (3) 线段长度未超过闭合曲线，不在端点处往返，则 1 空程为  $2d_1$ ，在直线 1 和闭合曲线上各取一任一点 O, A，则线段 OA 最短时， $2d_1$  为一倍空程。点到直线所有连线中，垂线段最短

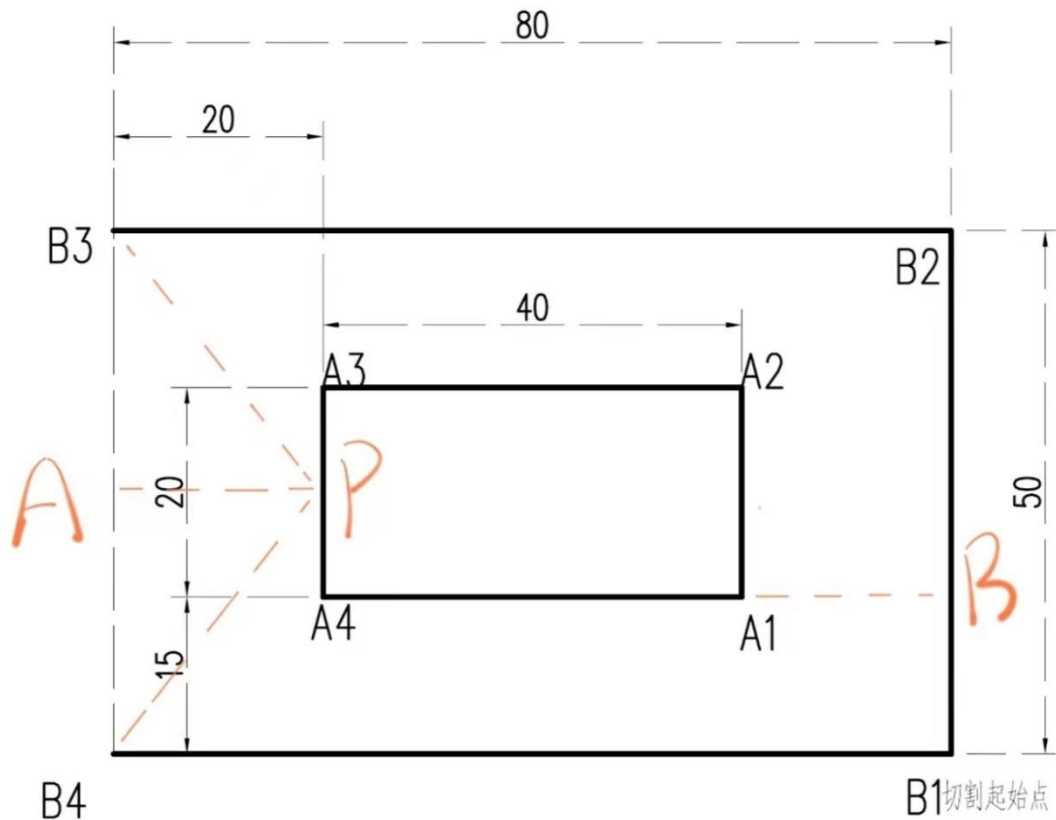


- (4) 线段长度未超过闭合曲线，在端点处往返，则 1 空程为  $d_2$ ，在直线 1 和闭合曲线上各取一任一点 O, A，则线段 OA 最短时， $d_2$  为一倍空程。点到直线所有连线中，垂线段最短



又因为： $d_1 = d_2$ ,  $2d_1 > d_2$ ，所以从线段一端开始，走到对应闭合曲线边缘，垂直走，计算两倍空程差宠，若线段长度未超过闭合曲线，可直接得出结果。





路径 1：出口与入口不重合且入口在顶点，出口不在顶点

自切割起点沿 B1B2 进行切割，到 B 后向左开始直线切到 A1，线段 BA1 垂直于线段 A1A2，切割完后沿 A1→B 返回切割外边界，并沿着切割线切割至 A，由于该图像有良好的对称性，所以沿着 B1→B2 或者 B1→B4，结果不变。

计算其空程，则可得到： $\Delta = 20 + 20 + 50 = 90$

路径 2：出口与入口重合且在非切割线中垂线上

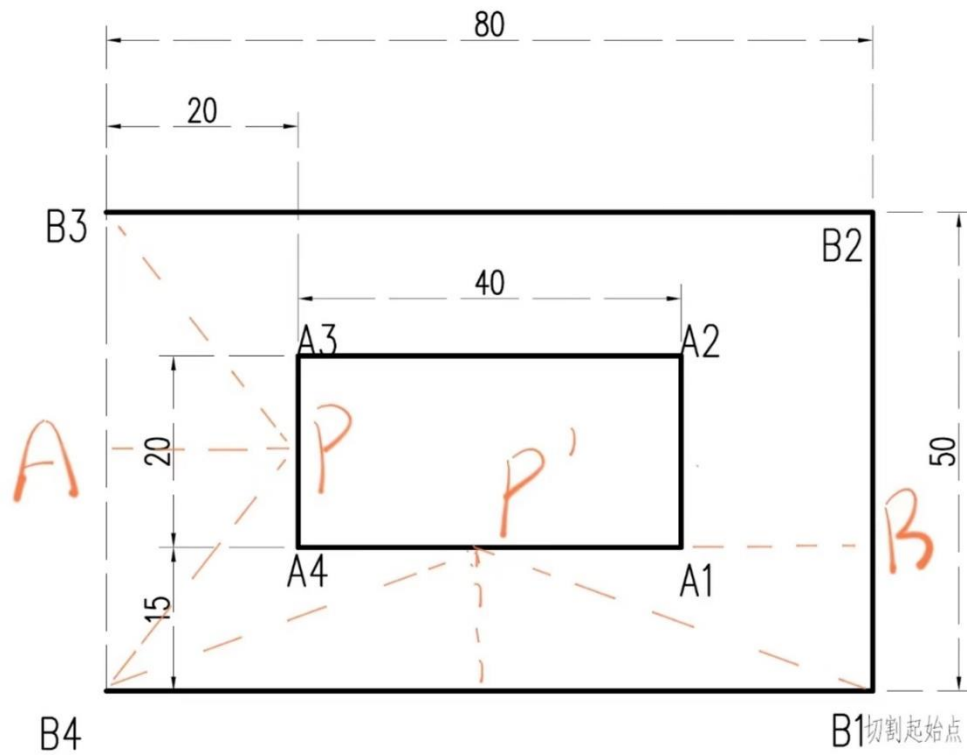
已知：对于有拐点的线段内含闭合图形的图中，拐点到内含图形距离的值已经是其距离函数的极值，则只需要遍历所有拐点到内含图形的最短距离，并将其返回为一倍最短空程差即可。

自切割点开始沿 B1→B2→B3→P→A3→A2→A1→A4→P→B4→B1

计算其空程差，则可得到： $\Delta = 32.0156 \times 2 = 64.0312$

路径 3：出口与入口重合，不在非切割线中垂线上

自切割点开始沿 B1→B4→P'→B1→B2→B3



$$d=2\sqrt{73}$$

由此可得计算其结果为： $\Delta=85.440$

综上可得最优路径为路径 2

**问题 2：**给定下料切割布局 N2 见图 3，构件的外边界切割成上下对称的锯齿状，同时内部切割出四个半径为 3 的圆形和一个椭圆形。请根据下料切割布局 N2 的参数信息，建立数学模型，设计最优切割路径方案，并给出最优切割路径的空程总长度。



圆切割)。

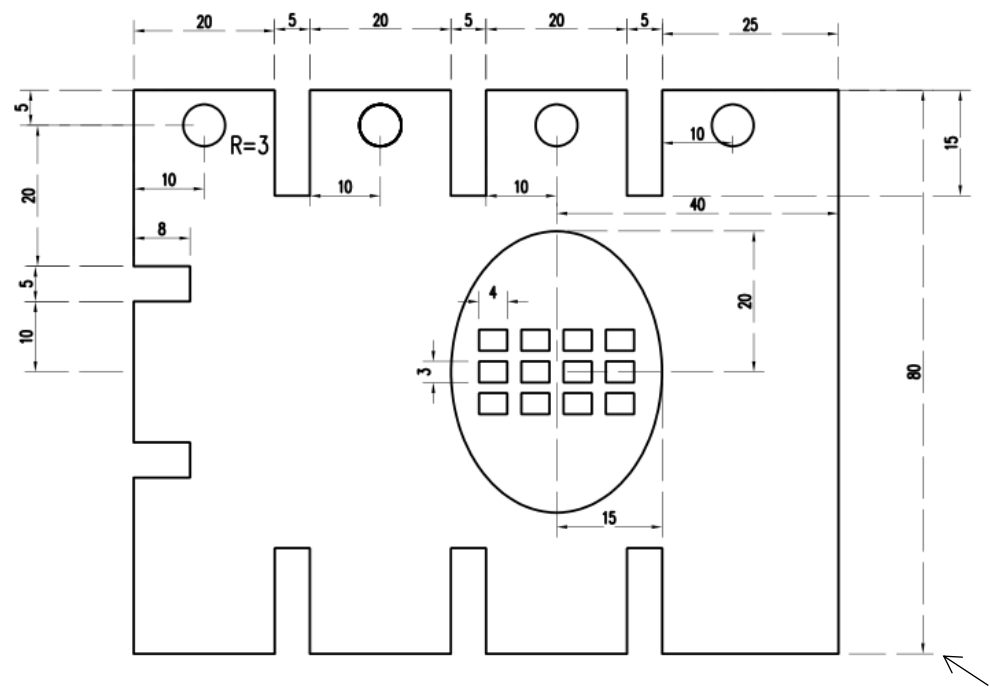


图 4 含矩形件嵌套的下料切割布局 N3

本质：外轮廓和内轮廓的处理问题

解法：关于小圆已经在问题中进行了计算，在此基础上优化处理椭圆及其内含矩形阵列问题算法即可。

对于椭圆内部的矩形阵列，采取图 5 左图所示的切割规划，然后由三角形两边之和大于第三边的规律可以确定阵列连接外部的空程差

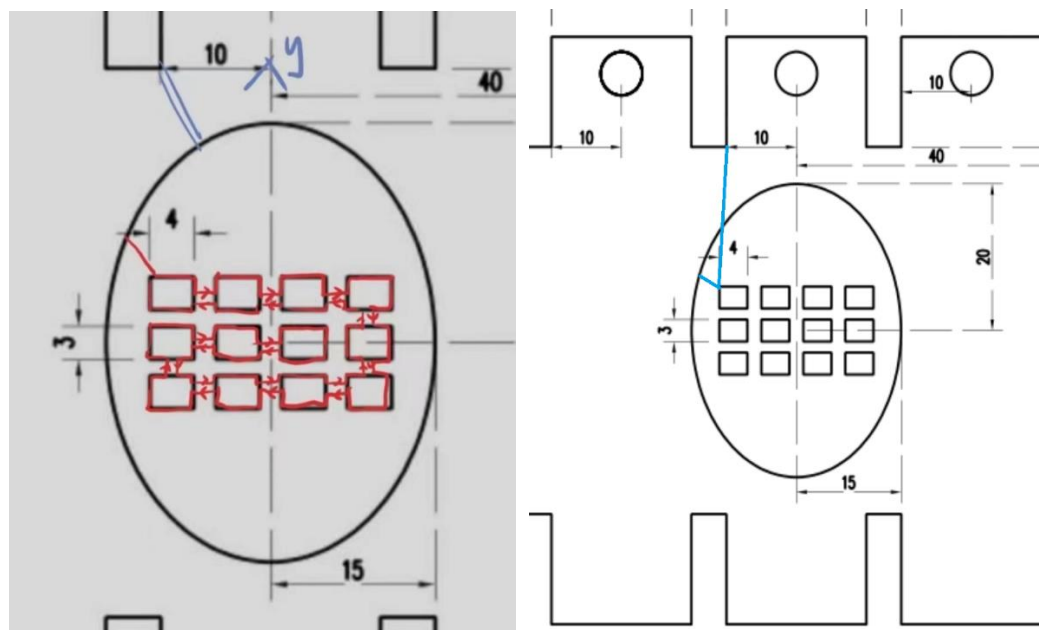


图 5 矩形阵列内外的切割规划

- (1) 小圆空程差:  $\Delta_1=16$
- (2) 椭圆空程差:  $\Delta_2=2.5941*2=5.1882$
- (3) 矩形阵列空程差:  $\Delta_{\text{内}}=11*2*2=44$
- (4) 总空程差:  $\Delta=\Delta_{\text{内}}+16+d\min(-11, 6.5)+\sqrt{1^2+18.5^2}$   

$$= 44 + 16 + 3.0703 + 18.5270 = 81.5973$$

综上，第三题的最小空程差为 81.5973

**问题 4:** 给定下料切割布局 N4 见图 5，需要在椭圆中切割出 4 个矩形小零件。由于小零件尺寸较小，为防止小零件掉落，两个相邻的小零件之间需要采用“过桥”的方式，使得相邻零件连接成一个大尺寸零件，要求“过桥”与矩形小零件顶点的最短距离至少为 1。“过桥”的宽度为 2，且在空程计算中不可以忽略“过桥”的宽度。

请根据 N4 的具体情况，建立数学模型，确定“过桥”的数目和位置，设计最优切割路径方案，给出最优切割路径的空程总长度(要求切割起始点设计在钢板的右下角，N4 中的小圆形切割件不考虑过桥问题)。

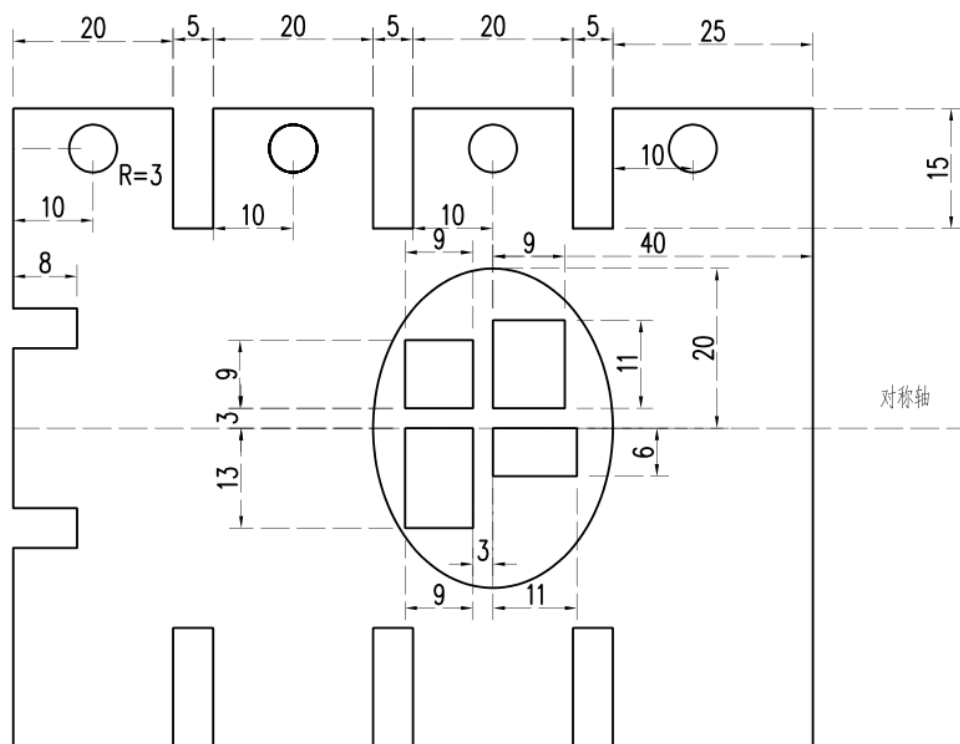


图 6 需要添加过桥的嵌套矩形件套料图 N4

本质：桥的布局问题

解法：

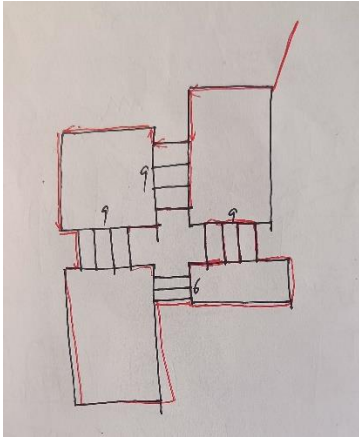


图 7 桥的分布图

过桥的分布如图 7 所示， $\triangle_{\text{内}}=16$

参考资料：

中国知网—常见的数学模型-桥式与闭合图形

百度知道—闭合图形中的数学

百度文库—椭圆的性质

《拓扑学》

计算点到椭圆的最短距离的代码

```
clc; clear;

a = 15;

b = 20;

x0 = -10;

y0 = 25;

tolerance = 1e-2; % 容差值

t_range = linspace(0, 2*pi, 5000); % 使用足够多的点来近似椭圆

% 参数化椭圆

x = a * cos(t_range);

y = b * sin(t_range);

% 椭圆的导数，用于计算切线斜率

dx_dt = -a * sin(t_range);
```

```

dy_dt = b * cos(t_range);

% 垂直于点到椭圆上点连线的斜率

m_line = (y - y0) ./ (x - x0);

% 判断斜率乘积是否接近-1，即两条线是否接近垂直

is_perpendicular = abs(m_line .* (dy_dt ./ dx_dt) + 1) < tolerance;

% 寻找垂直条件满足的点

valid_points = find(is_perpendicular);

if isempty(valid_points)

    fprintf('没找到这样的点.\n');

else

    distances = sqrt((x(valid_points) - x0).^2 + (y(valid_points) - y0).^2);

    % 找出最小距离

    [min_distance, min_index] = min(distances);

    % 获取对应点的坐标

    x_min = x(valid_points(min_index));

    y_min = y(valid_points(min_index));

    fprintf('点(%.2f, %.2f)到该椭圆的最小距离为 %.4f，该点坐标为 (%.4f, %.4f).\n', ...

        x0, y0, min_distance, x_min, y_min);

end

```