Leandro Vendramin

Brazas y soluciones conjuntistas de la ecuación de Yang–Baxter

– Notas –

27 de julio de 2019

Índice general

Capítulo 1
Braces

1. Definitions

Braces were introduced by Rump in [**?**] to study set-theoretical involutive solutions of the Yang–Baxter equation. The following definition generalizes braces to the non-commutative setting.

Definición 1.1. A *skew brace* is a pair (A,λ), where A is a group and $\lambda\colon A\to\operatorname{Aut}(A)$ is a map such that

$$\lambda_{a\lambda_a(b)}=\lambda_a\lambda_b$$

for all $a,b\in A$.

Of course Rump's left braces are examples of skew braces. These are braces where the group A is abelian.

Definición 1.2. A *homomorphism* between two skew left braces A and B is a group homomorphism $f\colon A\to B$ such that $f\lambda_a=\lambda_{f(a)}f$ for all $a\in A$. The *kernel* of f is

$$\ker f=\{a\in A: f(a)=1\}.$$

lemma:adjoint **Lema 1.3.**

Definición 1.4. Let (A,λ) be a skew brace. The group $(A,\circ)$ of Lemma 1.3 is called the *adjoint group* of (A,λ).

lem:basic **Lema 1.5.** *Let A be a skew left brace. Then the following properties hold:*

1) $1=1_\circ$, *where* $1_\circ$ *denotes the unit of the group* $(A,\circ)$.
2) $a\circ(b^{-1}c)=a(a\circ b)^{-1}(a\circ c)$ *for all* $a,b,c\in A$.
3) $a\circ(bc^{-1})=(a\circ b)(a\circ c)^{-1}a$ *for all* $a,b,c\in A$.

Demostración. □

rem:formulas

Observación 1.6. Let A be a skew left brace. For each $a \in A$ the map

$$\lambda_a \colon A \to A, \quad b \mapsto a^{-1}(a \circ b),$$

is bijective with inverse $\lambda_a^{-1} \colon A \to A$, $b \mapsto \overline{a} \circ (ab)$, where $\overline{a}$ is the inverse of a with respect to $\circ$. It follows that

$$a \circ b = a\lambda_a(b), \quad ab = a \circ \lambda_a^{-1}(b)$$

hold for all $a, b \in A$.

pro:GI

Proposición 1.7. *Let A be a set and assume that A has two operations such that $(A,\cdot)$ and $(A,\circ)$ are groups. Assume that $\lambda \colon A \to \mathbb{S}_A$, $a \mapsto \lambda_a$, is given by $\lambda_a(b) = a^{-1}(a \circ b)$. The following are equivalent:*

1) *A is a skew left brace.*
2) *$\lambda_{a\circ b}(c) = \lambda_a\lambda_b(c)$ for all $a,b,c \in A$.*
3) *$\lambda_a(bc) = \lambda_a(b)\lambda_a(c)$ for all $a,b,c \in A$.*

Demostración. Let us first prove that $(1) \implies (2)$. Let $a,b,c \in A$. Since A is a brace and $a \circ b^{-1} = a(a \circ b)^{-1}a$ by Lemma 1.5,

$$\begin{aligned}\lambda_a\lambda_b(c) &= a^{-1}(a \circ \lambda_b(c)) = a^{-1}(a \circ (b^{-1}(b \circ c)))\\ &= a^{-1}(a \circ b^{-1})a^{-1}(a \circ b \circ c) = (a \circ b)^{-1}(a \circ b \circ c) = \lambda_{a\circ b}(c).\end{aligned}$$

Now we prove $(2) \implies (3)$. Since $ab = a \circ \lambda_a^{-1}(b)$ for all $a,b \in A$,

$$\begin{aligned}\lambda_a(bc) &= \lambda_a(b \circ \lambda_b^{-1}(c)) = a^{-1}(a \circ b \circ \lambda_b^{-1}(c))\\ &= a^{-1}(a \circ b)(a \circ b)^{-1}(a \circ b \circ \lambda_b^{-1}(c))\\ &= \lambda_a(b)\lambda_{a\circ b}\lambda_b^{-1}(c) = \lambda_a(b)\lambda_a\lambda_b\lambda_b^{-1}(c) = \lambda_a(b)\lambda_a(c).\end{aligned}$$

Finally we prove that $(3) \implies (1)$. Let $a,b,c \in A$. Then

$$a^{-1}(a \circ (bc)) = \lambda_a(bc) = \lambda_a(b)\lambda_a(c) = a^{-1}(a \circ b)a^{-1}(a \circ c),$$

and hence $a \circ (bc) = (a \circ b)a^{-1}(a \circ c)$. □

cor:lambda

Corolario 1.8. *Let A be a skew left brace and*

$$\lambda \colon (A,\circ) \to \operatorname{Aut}(A,\cdot), \quad a \mapsto \lambda_a(b) = a^{-1}(a \circ b).$$

Then λ is a group homomorphism.

Demostración. It follows immediately from Proposition 1.7. □

Let A and G be groups and assume that $G \times A \to A$, $(g,a) \mapsto g \cdot a$, is a left action of G on A by automorphisms. A *bijective* 1*-cocyle* is a bijective map $\pi \colon G \to A$ such that

$$\pi(gh) = \pi(g)(g \cdot \pi(h)) \tag{1.1}$$

eq:1cocycle

for all $g, h \in G$.

pro:1cocycle

Proposición 1.9. *Over any group $(A, \cdot)$ the following data are equivalent:*

1) *A group G and a bijective 1-cocycle $\pi \colon G \to A$.*
2) *A skew left brace structure over A.*

Demostración. Consider on A a second group structure given by

$$a \circ b = \pi(\pi^{-1}(a)\pi^{-1}(b))$$

for all $a, b \in A$. Since π is a 1-cocycle and G acts on A by automorphisms,

$$\begin{aligned} a \circ (bc) &= \pi(\pi^{-1}(a)\pi^{-1}(bc)) = a(\pi^{-1}(a) \cdot (bc)) \\ &= a((\pi^{-1}(a) \cdot b)(\pi^{-1}(a) \cdot c)) = (a \circ b)a^{-1}(a \circ c) \end{aligned}$$

holds for all $a, b, c \in A$.

Conversely, assume that A is a skew left brace. Set $G = A$ with the multiplication $(a, b) \mapsto a \circ b$ and $\pi = \mathrm{id}$. By Corollary 1.8, $a \mapsto \lambda_a$, is a group homomorphism and hence G acts on A by automorphisms. Then (1.1) holds and therefore $\pi \colon G \to A$ is a bijective 1-cocycle. □

Observación 1.10. The construction of Proposition 1.9 is categorical.

1. Ideals and quotients

ideals

Definición 1.1. Let A be a skew brace. A *left ideal* of A is a subgroup I of A such that $\lambda_a(I) \subseteq I$ for all $a \in A$.

Definición 1.2. A normal subgroup I of $(A, \circ)$ is said to be an *ideal* of A if $Ia = aI$ and $\lambda_a(I) \subseteq I$ for all $a \in A$.

Ejemplo 1.3. Let $f \colon A \to B$ be a skew brace homomorphism. Then $\ker f$ is an ideal of A since

$$f(\lambda_a(x)) = \lambda_{f(a)}(f(x)) = 1$$

for all $x \in \ker f$ and $a \in A$.

Lema 1.4. *Let A be a skew left brace and $I \subseteq A$ be an ideal. Then the following properties hold:*

1) *I is a normal subgroup of $(A, \cdot)$.*
2) *$a \circ I = aI$ for all $a \in A$.*
3) *I and A/I are skew braces.*

Demostración. Let $a,b\in I$. Then $a^{-1}b=\lambda_a(\overline{a}\circ b)\in I$ and hence I is a subgroup of $(A,\cdot)$. Remark 1.6 implies

$$aI=a\circ I=I\circ a=Ia$$

for all $a\in A$. Thus I is a normal subgroup of $(A,\cdot)$ and hence it follows that I is a skew left brace. Since the quotient groups A/I for both operations are the same, A/I is a skew left brace. $\square$

Definición 1.5. Let (A,λ) be a skew brace. The subgroup $\mathrm{Soc}(A)=\ker\lambda\cap Z(A)$ is the *socle* of A.

lem:socle **Lema 1.6.** *Let A be a skew left brace. Then* $\mathrm{Soc}(A)$ *is an ideal of A contained in the center of* $(A,\cdot)$.

Demostración. Let us first prove that $\mathrm{Soc}(A)$ is a subgroup of $(A,\circ)$. Clearly $1\in\mathrm{Soc}(A)$. Let $a,a'\in A$ and $b\in A$. Then $a\circ a'\in\mathrm{Soc}(A)$ since

$$(a\circ a')\circ b=a\circ(a'\circ b)=a\circ(a'b)=a(a'b)=(aa')b=(a\circ a')b.$$

Now since $\overline{a}=a^{-1}\in\mathrm{Soc}(A)$ and $b=(aa^{-1})\circ b=a\circ(a^{-1}\circ b)=a(a^{-1}\circ b)$, it follows that $\overline{a}b=a^{-1}b=a^{-1}\circ b=\overline{a}\circ b$. Hence $\mathrm{Soc}(A)$ is a subgroup of $(A,\circ)$.

A direct calculation proves that

$$\lambda_b(a)=b\circ a\circ\overline{b}\quad\text{for all } a\in\mathrm{Soc}(A)\text{ and } b\in A. \tag{1.2}$$ eq:util

Then it follows that $\mathrm{Soc}(A)\subseteq\{a\in A: a\circ b=ab, \lambda_b(a)\circ b=b\circ a \text{ for all } b\in A\}$.

Let $a\in\mathrm{Soc}(A)$ and $b,c\in A$. Then

$$\begin{aligned}
&\lambda_c\lambda_b(a)=\lambda_{c\circ b}(a)=(c\circ b)\circ a\circ\overline{c\circ c}=c\circ\lambda_b(a)\circ\overline{c},\\
&\lambda_b(a)c=b^{-1}(b\circ a)c=(b\circ a)b^{-1}c=b\circ(a(\overline{b}\circ c))=b\circ a\circ\overline{b}\circ c=\lambda_b(a)\circ c.
\end{aligned}$$

Hence $\lambda_b(\mathrm{Soc}(A))\subseteq\mathrm{Soc}(A)$ for all $b\in A$ and $\mathrm{Soc}(A)$ is a normal subgroup of $(A,\circ)$ by (1.2).

Now we prove that $\mathrm{Soc}(A)$ is central in $(A,\cdot)$. Let $a\in\mathrm{Soc}(A)$, $b\in A$ and $c=\overline{b}$. Since

$$c\circ(ba)=(c\circ b)c^{-1}(c\circ a)=c^{-1}(c\circ a)=(c\circ a)c^{-1}=c\circ(ab),$$

it follows that $ba=ab$. $\square$

1. Exercises

1.1. Let (A,λ^A) and (B,λ^B) be skew braces. Then A and B are isomorphic if and only if there is a group homomorphism $\alpha\colon A\to B$ such that $\alpha\lambda^A_a\alpha^{-1}=\lambda^B_{\alpha(a)}$ for all $a\in A$.

1.2. Let A be a skew brace.

1.3. Let A be a cyclic brace, i.e. the additive group is cyclic.

Capítulo 2
Anillos radicales

Diremos que una braza es asociativa si la operación $(x,y) \mapsto x*y = \lambda_x(y) - y$ es asociativa. Recordemos que en toda braza vale la siguiente igualdad

$$(a + a*b + b)*c = (a \circ b)*c = a*(b*c) + b*c + a*c. \tag{2.1}$$

eq:(aob)*c

Lema 2.1. *Si A es una braza de tipo abeliano asociativa, entonces*

$$(-a)*b = -(a*b)$$

para todo $a,b \in A$. En particular, $(-a) \circ b = 2b - (a \circ b)$ para todo $a,b \in A$.

Demostración. Por la igualdad (2.1) y la asociatividad,

$$\begin{aligned}(a*(-a))*b &= (a*(-a) + a + (-a))*b \\ &= a*((-a)*b) + (-a)*b + a*b \\ &= (a*(-a))*b + (-a)*b + a*b,\end{aligned}$$

lo que implica que $(-a)*b = -(a*b)$. La segunda afirmación se obtiene entonces inmediatamente. $\square$

Lema 2.2. *Si A es una braza de tipo abeliano, valen las siguientes afirmaciones:*

1) *$a*0 = 0*a = 0$,*
2) *$a*(-b) = -(a*b)$,*
3) *$a*(b-c) = a*b - a*c$,*
4) *$a*(b_1 + \cdots + b_n) = a*b_1 + \cdots + a*b_n$,*

Ejercicio 2.3. Demuestre que en toda braza de tipo abeliano vale que

$$a*\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{j=1}^{m} c_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a*b_i - \sum_{j=1}^{m} a*c_j,$$

y que esta fórmula puede rescribirse como

$$a\circ\left(\sum_{i=1}^{n}b_i-\sum_{j=1}^{m}c_j\right)=\sum_{i=1}^{n}a\circ b_i-\sum_{j=1}^{m}a\circ c_j+(m-n+1)a. \qquad (2.2)$$ eq:Lau

thm:Lau **Teorema 2.4.** *Si A es una braza de tipo abeliano asociativa, entonces A es un anillo radical.*

Demostración. Necesitamos demostrar que A es una braza a derecha. Como A es asociativa, $(a*b)*c=a*(b*c)$ para todo $a,b,c\in A$. Rescribimos la asociatividad entre $a,b,c\in A$ como

$$(a\circ b-a-b)\circ c-(a\circ b-a-b)-c=a\circ(b\circ c-b-c)-a-(b\circ c-b-c),$$

que es equivalente a la igualdad

$$a'\circ((a\circ b-a-b)\circ c-a\circ b)=a'\circ(a\circ(b\circ c-b-c)-a-a-b\circ c+2c).$$

Si usamos la fórmula (2.2) en el miembro de la derecha con $n=1$ y $m=2$ y en el miembro izquierdo con $n=m=3$,

$$a'\circ(a\circ b-a+(-b))=b+a'\circ(-b)$$

La fórmula (2.2) ahora con $n=2$ y $m=1$ implica que la asociatividad de A es equivalente a la identidad

$$(b+a'\circ(-b))\circ c+c=b\circ c+a'\circ(-b)\circ c. \qquad (2.3)$$ eq:asociatividad

Sean $b,c\in A$. Si $d\in A$ existe $a\in a$ tal que $d=a'\circ(-b)$. La fórmula (2.3) implica entonces que

$$(b+d)\circ c+c=b\circ c+d\circ c,$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Notas

El teorema 2.4 fue demostrado por Iván Lau en `arXiv:1811.04894` e independientemente por Michael Kinyon. Responde a una pregunta hecha por Cedó, Gateva–Ivanova y Smoktunowicz en [1, Question 2.1(2)].

Capítulo 3

We will use the following theorem of Kegel and Wielandt:

Teorema 3.1 (Kegel–Wielandt).

Teorema 3.2. *Let A be a finite skew left brace with nilpotent multiplicative group. Then A is of solvable type.*

Demostración. ... □

Capítulo 4
Producto semidirecto

Si A y B son brazas, una acción de A en B se define como un morfismo de grupos $\sigma\colon (B,\circ) \to \mathrm{Aut}_{Br}(A)$.

Definición 4.1. Sean A y B brazas y supongamos que B actúa en A. Se define el producto semidirecto $A \rtimes_\sigma B$ como la estructura de braza en el producto cartesiano $A \times B$ dada por las operaciones

$$\begin{aligned}(a_1,b_1)+(a_2,b_2) &= (a_1+a_2, b_1+b_2),\\ (a_1,b_1)\circ(a_2,b_2) &= (a_1\circ\sigma(b_1)(a_2), b_1\circ b_2),\end{aligned}$$

donde $a_1,a_2 \in A$ y $b_1,b_2 \in B$.

Un cálculo directo nos permite demostrar que

$$\lambda_{(a_1,b_1)}(a_2,b_2) = (\lambda_{a_1}(\sigma(b_1)(a_2)), \lambda_{b_1}(b_2)), \tag{4.1}$$

Ejercicio 4.2. Demuestre que en el producto semidirecto $A \rtimes_\sigma B$ vale

$$(a_1,b_1)*(a_2,b_2) = (\lambda_{a_1}(\sigma(b_1)(a_2)) - a_2, b_1 * b_2).$$

Teorema 4.3. *Sean A y B brazas. El producto semidirecto $A \rtimes_\sigma B$ es nilpotente a derecha si y sólo si A y B son nilpotentes a derecha.*

Demostración. Sea $P = A \rtimes_\sigma B$. Si $P^{(n)} = 0$ para algún n, entonces $A^{(n)} = 0$ y $B^{(n)} = 0$. Recíprocamente, si $A^{(k)} = 0$ y $B^{(l)} = 0$, entonces $P^{(k+l)} = 0$. $\boxed{\text{FIXME}}$ □

Para un subconjunto X del producto semidirecto $A \rtimes_\sigma B$, definimos

$$\begin{aligned}\pi_A(X) &= \{a \in A : (a,b) \in X \text{ para algún } b \in B\},\\ \pi_B(X) &= \{b \in B : (a,b) \in X \text{ para algún } a \in A\}.\end{aligned}$$

Lema 4.4. *Si I es un ideal del producto semidirecto $A \rtimes_\sigma B$, entonoces $\pi_B(I)$ es un ideal de B.*

Demostración. Veamos que $(\pi_B(I),+)$ es un subgrupo de $(B,+)$. Como $(0,0)\in I$, entonces $0\in\pi_B(I)$. Además si $b_1,b_2\in B$, sean $a_1,a_2\in A$ tales que $(a_j,b_j)\in I$, $j\in\{1,2\}$. Como entonces

$$(a_1,b_1)-(a_2,b_2)=(a_1-a_2,b_1-b_2)\in I,$$

y además $a_1-a_2\in A$, se concluye que $b_1-b_2\in\pi_B(I)$.

Veamos ahora que $(\pi_B(I),+)$ es normal en $(B,+)$. Sean $b\in\pi_B(I)$ y $a\in A$ tal que $(a,b)\in I$. Si $y\in B$, entonces, como $(I,+)$ es normal en $(A\rtimes_\sigma B,+)$, tenemos que

$$(0,y)+(a,b)-(0,y)=(a,y+b-y)\in I,$$

que implica que $y+b-y\in\pi_B(I)$.

Veamos que si $y\in B$, entonces $\lambda_y(\pi_B(I))\subseteq\pi_B(I)$. Sea $b\in\pi_B(I)$ y sea $a\in A$ tal que $(a,b)\in I$. Entonces

$$(\sigma(y)(a),\lambda_y(b))=(\lambda_0(\sigma(y)(a),\lambda_y(b))=\lambda_{(0,y)}(a,b)\in I$$

pues $(a,b)\in I$ y sabemos que I es un ideal. Como $\sigma(y)(a)\in A$, se concluye que $\lambda_y(b)\in\pi_B(I)$.

Queda demostrar que $(\pi_B(I),\circ)$ es normal en $(B,\circ)$. Si $y\in B$ y $b\in\pi_B(I)$, sea $a\in A$ tal que $(a,b)\in I$. Sabemos que existe $x\in A$ tal que

$$(0,y)\circ(a,b)\circ(0,y)'=(x,y\circ b\circ y').$$

Como I es un ideal, $(x,y\circ b\circ y')\in I$ y luego $y\circ b\circ y'\in\pi_B(I)$. $\square$

Lema 4.5. *Si I es un ideal del producto semidirecto $A\rtimes_\sigma B$ tal que $\pi_B(I)=0$, entonces $\pi_A(I)$ es un ideal de A.*

Demostración. Como hicimos en el lema anterior, vemos que $(\pi_A(I),+)$ es un subgrupo normal de $(A,+)$. Si $x\in A$ y $a\in\pi_A(I)$, entonces

$$(\lambda_x(a),b)=(\lambda_x(\sigma(0)(a)),\lambda_0(b))=\lambda_{(x,0)}(a,b)\in I$$

y luego $\lambda_x(a)\in\pi_A(I)$. Para ver que $(\pi_A(I),\circ)$ es normal en $(A,\circ)$ basta observar que si $x\in A$ y $a\in\pi_A(I)$ entonces

$$(x,0)\circ(a,b)\circ(x,0)'=(x\circ a\circ x',b)$$

pues si $b\in B$ es tal que $(a,b)\in I$, entonces $x\circ a\circ x'\in\pi_A(I)$. $\square$

Definición 4.6. Sea A una braza. Diremos que A es **semiprima** si el único ideal I de A tal que $I*I=0$ es el ideal nulo.

Teorema 4.7. *Si A y B son brazas semiprimas, entonces el producto semidirecto $A\rtimes_\sigma B$ es también una braza semiprima.*

Demostración. Sea I un ideal de $A \rtimes_\sigma B$ tal que $I*I=0$. Para ver que $I=0$ basta con demostrar que $\pi_A(I)=0$ y que $\pi_B(I)=0$

Primero vamos a demostrar que $\pi_B(I)=0$. Como $\pi_B(I)$ es un ideal de B, y B es semiprima, basta ver que $\pi_B(I)*\pi_B(I)=0$. Sean $b_1,b_2\in\pi_B(I)$ y sean $a_1,a_2\in A$ tales que $(a_j,b_j)\in I$ para todo $j\in\{1,2,\}$. Como

$$(x,b_1*b_2)=(a_1,b_1)*(a_2,b_2)\in I*I=0$$

para algún $x\in A$, se tiene que $b_1*b_2=0$.

Vamos a demostrar ahora que $\pi_A(I)=0$. Como $\pi_B(I)=0$, sabemos que $\pi_A(I)$ es un ideal de A. Como A es semiprimo, para ver que $\pi_A(I)=0$ basta entonces ver que $\pi_A(I)*\pi_A(I)=0$. Sean $a_1,a_2\in\pi_A(I)$ y sean $b_1,b_2\in B$ tales que $(a_j,b_j)\in I$ para todo $j\in\{1,2\}$. Como $b_j\in\pi_B(I)=0$ para todo j, se concluye que $(a_j,0)\in I$ para todo j. Luego

$$(a_1*a_2,0)=(a_1,0)*(a_2,0)\in I*I=0$$

y entonces $a_1*a_2=0$. $\square$

Lema 4.8. *Sean A y B brazas. Demuestre que*

$$W=\{f\colon B\to A \textit{ tal que } |\{b\in B: f(b)\neq 0\}|<\infty\}$$

es una braza con las operaciones

$$(f_1+f_2)(b)=f_1(b)+f_2(b),$$
$$(f_1\circ f_2)(b)=f_1(b)\circ f_2(b).$$

Lema 4.9. *If I is an ideal of W and* $b\in B$*, then*

$$J_b=\{a\in A: f(b)=a \textit{ for some } f\in I\}$$

is an ideal of A.

Demostración. Observemos que la función nula $0_W\colon B\to A$ pertenece a W. Es fácil ver que $(J_b,+)$ es un subgrupo de $(W,+)$ pues $0_W\in W$ y además $a_1-a_2=(f_1-f_2)(b)$ si $f_1(b)=a_1$ y $f_2(b)=a_2$.

Dado $x\in A$ definimos la función $\delta_x\colon B\to A$ como

$$\delta_x(y)=\begin{cases} x & \text{if } y=b,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Como $\delta_x(y)\neq 0$ si y sólo si $y=b$, se tiene que $\delta_x\in W$. Para ver que $(J_b,+)$ es normal en $(W,+)$ basta obvervar que si $x\in A$ y $a\in J_b$, digamos con $f(b)=a$ para algún cierto $f\in I$, entonces

$$x+a-x=(\alpha_x+f-\alpha_x)(b)\in J_b$$

pues $\alpha_x+f-\alpha_x\in I$. Similarmente $\lambda_x(J_b)\subseteq J_b$ pues

$$\lambda_x(a) = (-\alpha_x + \alpha_x \circ f)(b)$$

y sabemos que $-\alpha_x + \alpha_x \circ f \in I$ pues I es un ideal y $f \in I$. Por último, la normalidad de $(J_b, \circ)$ en $(W, \circ)$ es similar pues podemos escribir

$$x \circ a \circ x' = (\alpha_x \circ f \circ \alpha_x^{-1})(b)$$

y sabemos que $\alpha_x \circ f \alpha_x^{-1} \in I$. □

Proposición 4.10. *Si A es una braza semiprima, entonces W también es semiprima.*

Demostración. Sea I un ideal de W tal que $I * I = 0$. Sabemos que para cada $b \in B$, el conjunto J_b es un ideal de A. Para demostrar que $I = 0$ alcanza con demostrar que todos los J_b son cero. Fijemos $b \in B$ y sean $a_1, a_2 \in J_b$. Entonces existen $f_1, f_2 \in I$ tales que $f_i(b) = a_i$ para todo $i \in \{1, 2\}$. Como

$$a_1 * a_2 = f_1(b) * f_2(b) = (f_1 * f_2)(b)$$

y $f_1 * f_2 \in I * I = 0$, se tiene que $J_b * J_b = 0$. Como A es semiprimo, $J_b = 0$. Veamos ahora que $I = 0$. Sea $f \in I$. Si $b \in B$, entonces $f(b) \in J_b = 0$. □

Definición 4.11. Sean A y B brazas. Se define el **producto corona** $A \wr B$ como la braza dada por el producto semidirecto $W \rtimes_\sigma B$, donde $\sigma \colon B \to \mathrm{Aut}(W)$ está definido por

$$\sigma(b)(f)(y) = f(by)$$

para todo $y, b \in B$ y $f \in W$.

Teorema 4.12. *Si A y B son brazas semiprimas, entonces $A \wr B$ es semiprima.*

Demostración. Como A es semiprima, la braza W es también semiprima. El producto corona $A \wr B = W \rtimes_\sigma B$ es también una braza semiprima por ser producto semidirecto de brazas semiprimas. □

Pregunta 4.1. Sean A y B brazas tales que el producto semidirecto $A \rtimes_\sigma B$ es semiprimo. ¿Es cierto que entonces A es una braza semiprima?

Capítulo 5
Clasificación de brazas

Si A es un grupo, el holomorfo de A se define como el producto semidirecto

$$\mathrm{Hol}(A) = A \rtimes \mathrm{Aut}(A)$$

con la operación

$$(a, f)(b, g) = (a + f(b), fg), \quad a, b \in A, \quad f, g \in \mathrm{Aut}(A).$$

Todo subgrupo G de $\mathrm{Hol}(A)$ actúa en A con la operación

$$(x, f) \cdot a = \pi_1((x, f)(a, \mathrm{id})) = \pi_1(x + f(a), f) = x + f(a), \quad a, x \in A, \quad f \in \mathrm{Aut}(A),$$

donde $\pi_1 \colon \mathrm{Hol}(A) \to A$, $(a, f) \mapsto a$.

Ejercicio 5.1. Demuestre que $\mathrm{Hol}(A)$ actúa transitivamente en A y que el estabilizador de cualquier elemento $a \in A$ es isomorfo a $\mathrm{Aut}(A)$.

Un subgrupo G de $\mathrm{Hol}(A)$ se dirá **regular** cuando actúa regularmente en A, es decir si dados $a, b \in A$ existe un único $(x, f) \in G$ tal que

$$b = (x, f) \cdot a = x + f(a).$$

Lema 5.2. *Si G es un subgrupo regular de* $\mathrm{Hol}(A)$*, entonces $\pi_1 \colon G \to A$ es bijectiva.*

Demostración. □

Teorema 5.3. *Si A es una braza, entonces $\{(a, \lambda_a) : a \in A\}$ es un subgrupo regular de* $\mathrm{Hol}(A)$*. Recíprocamente, si A es un grupo (escrito aditivamente) y G es un subgrupo regular de* $\mathrm{Hol}(A)$*, entonces A es una braza con*

$$a \circ b = a + f(b)$$

donde $(\pi_1|_G)^{-1}(a) = (a, f) \in G$.

Demostración. □

lem:BNY **Lema 5.4.**

Demostración. Dados $(g,b) \in \mathrm{Hol}(A)$ y G un subgrupo regular de $\mathrm{Hol}(A)$, sabemos que existe $(f,a) \in G$ tal que $a + f(b) = (f,a) \cdot b = 0$. Como

$$(f,a)(g,b) = (fg, a + f(b)) = (fg, 0) \in \mathrm{Aut}(A) \times 0,$$

y además $(f,a) \in G$, entonces

$$\begin{aligned}(g,b)^{-1}G(g,b) &= (g,b)^{-1}(f,a)^{-1}G(f,a)(g,b)\\ &= ((f,a)(g,b))^{-1}G((f,a)(g,b)) = (fg,0)^{-1}G(fg,0).\end{aligned}$$ □

Notas

El lema 5.4 fue demostrado por Bardakov, Neshchadim y Yadav en `arXiv:1907.08978`.

Referencias

1. F. Cedó, T. Gateva-Ivanova, and A. Smoktunowicz. Braces and symmetric groups with special conditions. *J. Pure Appl. Algebra*, 222(12):3877–3890, 2018.

Índice alfabético