

Leandro Vendramin

Curvas y superficies

– Notas –

19 de julio de 2019

Índice general

Parte I Curvas

1. Curvas en el espacio	3
2. Las fórmulas de Frenet	9
3. El teorema fundamental	13
4. La desigualdad isoperimétrica	15
5. Ejercicios	19

Parte II Superficies

6. Superficies regulares	23
7. El teorema de la función inversa	29
8. El plano tangente y las funciones diferenciables	33
9. Orientabilidad	41
10. La primera forma fundamental	47
11. La segunda forma fundamental	51
12. El teorema de Hilbert	71
13. Isometrías y aplicaciones conformes	75
14. El teorema de Gauss	83
15. Geodésicas	89

16. El teorema de Gauss–Bonnet	97
17. Ejercicios	99
Referencias	105
Índice alfabético	107

Parte I

Curvas

Capítulo 1

Curvas en el espacio

En este capítulo daremos una introducción a la teoría de curvas en el espacio. Una curva representará el viaje emprendido por algún móvil α (una partícula o una mosca, por ejemplo) en el espacio \mathbb{R}^3 . Así, en cada tiempo t , el móvil α se ubicará en el punto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$. Esta interpretación sugiere que una curva sea una función α con valores en \mathbb{R}^3 . Es natural pedir que α sea una función continua, pero esta hipótesis no resulta del todo conveniente ya que las funciones continuas pueden resultar bastante poco intuitivas. Para evitar patologías pediremos entonces que nuestras curvas sean funciones de clase C^∞ .

Definición 1.1. Una **curva diferenciable** es una función $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^∞ , donde $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Entenderemos a un intervalo abierto en un sentido amplio, digamos $I = (a, b)$, donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. En este curso toda *curva* será una curva diferenciable. Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable, digamos $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, las funciones coordenadas x , y y z también son de clase C^∞ . El vector

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

es el **vector tangente** a α en el punto $\alpha(t)$. El vector $\alpha'(t)$ también se denomina el vector velocidad de α .

En la definición anterior utilizamos implícitamente la siguiente convención: una función se dice *diferenciable* si es de clase C^∞ .

Ejemplo 1.2. Si $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, |t|)$, entonces α no es una curva diferenciable ya que la función $t \mapsto |t|$ no es de clase C^∞ . Sin embargo, $\beta(t) = (t^3, |t|t^2)$ sí es una curva diferenciable y las imágenes de α y β coinciden. La traza de estas curvas puede verse en la figura 1.1.

Es evidente que la curva del ejemplo anterior presenta una particularidad en el origen. Más adelante explicaremos este fenómeno mediante el concepto de regularidad de una curva.

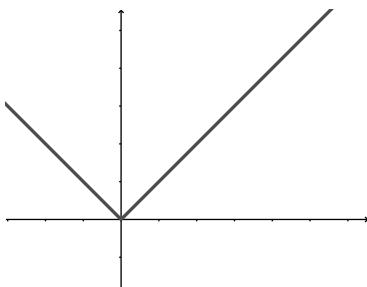


fig:abs

Figura 1.1: ¿Es este gráfico la traza de una curva diferenciable?

Definición 1.3. Una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice **plana** si existe un plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) \in P$ para todo $t \in I$.

Después de aplicar una traslación y una rotación conveniente, toda curva plana puede pensarse como una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$. Esta observación nos permitirá tratar a nuestras curvas planas como curvas de la forma $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.4. Una curva no tiene por qué ser inyectiva. Si $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es la curva de la figura 1.2, entonces $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$.

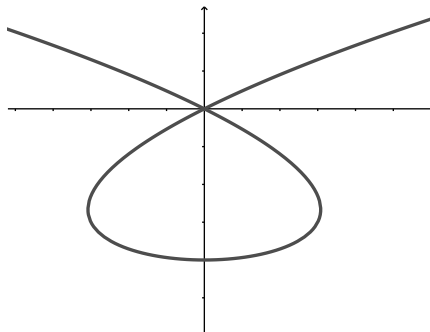


fig:not_injective

Figura 1.2: Una curva no tiene por qué ser inyectiva.

Ejemplo 1.5. Si α es una curva, su imagen puede tener picos. Si $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, entonces $\alpha(\mathbb{R})$ es el gráfico de la función $x \mapsto x^{2/3}$, ver figura 1.3.

Ejemplo 1.6. En general $\alpha: I \rightarrow \alpha(I)$ no es un homeomorfismo, ni siquiera en el caso en que α sea inyectiva. Sea $\alpha: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$.

Veamos ahora ejemplos de curvas no planas. Los tres ejemplos siguientes resultarán fundamentales:

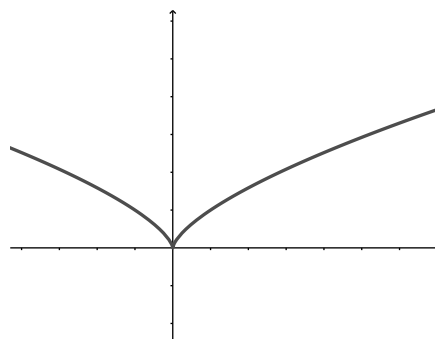


fig:picos

Figura 1.3: Una curva podría tener picos.

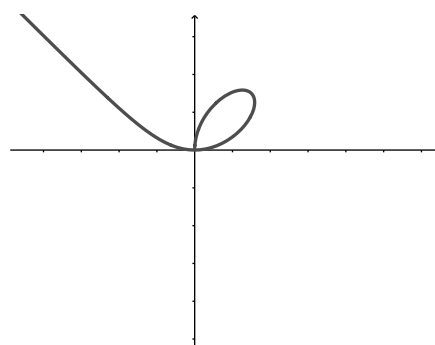


Figura 1.4: Folium de Descartes. Esta curva no es un homeomorfismo con su imagen.

Recta

Ejemplo 1.7. Sean $p \in \mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$. La **recta** que pasa por p y tiene dirección v es una curva: $\alpha(t) = p + tv$.

Ejemplo 1.8. Sean $p \in \mathbb{R}^3$ y $r > 0$. El **círculo** con centro en p y radio r es una curva: $\alpha(t) = p + r(\cos(t/r), \sin(t/r))$.

exa:helice

Ejemplo 1.9. Sean $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. La curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = \left(a \cos \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

se conoce como **hélice circular** y puede verse en la figura 1.5.

Intentaremos a continuación definir la longitud de una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Intrínsecamente es claro que la longitud de una cierta curva puede aproximarse por la longitud de una poligonal que comparta algunos puntos con la curva. Sea entonces $[a, b] \subseteq I$ y sea P una partición del intervalo $[a, b]$. Recordemos que P es un conjunto de puntos

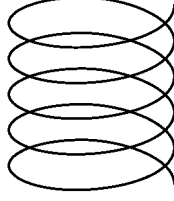


fig:helice

Figura 1.5: La hélice circular.

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Definimos entonces la longitud de α en $[a, b]$ con respecto a P como

$$L_a^b(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

Se define además el tamaño de la partición P como el número

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|.$$

Puede demostrarse que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} L_a^b(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt,$$

y esto justifica la siguiente definición:

Definición 1.10. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva y sean $a, b \in I$. Se define la **longitud** de α entre a y b como el número

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Definición 1.11. Sean I y J intervalos abiertos. Un **difeomorfismo** entre J e I es una función inversible $\varphi: J \rightarrow I$ de clase C^∞ con inversa de clase C^∞ .

Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva y $\varphi: J \rightarrow I$ es un difeomorfismo, podemos construir una nueva curva $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta = \alpha \circ \varphi$. La curva β es lo que se conoce como una **reparametrización** de α . Veamos cómo se comporta la longitud de una curva con respecto a reparametrizaciones:

Proposición 1.12. Sea $\varphi: J \rightarrow I$ un difeomorfismo y sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva. Si $[a, b] \subseteq J$ y $\varphi([a, b]) = [c, d]$, entonces $L_a^b(\alpha \circ \varphi) = L_c^d(\alpha)$.

Demostración. Por la regla de la cadena,

$$\|(\alpha \circ \varphi)'(t)\| = \|\alpha'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)|.$$

Como φ es un difeomorfismo y $\varphi'(t) \neq 0$ para todo t , tenemos que $\varphi' > 0$ o bien que $\varphi' < 0$. Si $\varphi'(t) > 0$ para todo t , entonces

$$\int_a^b \|(\alpha \circ \varphi)'(t)\| dt = \int_a^b \|\alpha'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt = \int_c^d \|\alpha'(s)\| ds.$$

En caso de que $\varphi' < 0$ la cuenta es similar. \square

Definición 1.13. Una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice **regular** si $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ para todo $t \in I$.

Círculos y líneas son curvas regulares.

Ejemplo 1.14. La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ no es regular ya que $\alpha'(0) = (0, 0)$. Vimos la imagen de esta curva en la figura 1.3.

Queremos definir invariantes geométricos de una curva. Estos invariantes no dependerán de la parametrización sino de las propiedades geométricas de la curva. Nos convendrá entonces elegir, entre las muchas parametrizaciones existentes, alguna que sea, en algún sentido, la mejor posible.

Definición 1.15. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva. Se dice que α está **parametrizada por longitud de arco** si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

A las curvas parametrizadas por longitud de arco también se las denomina **curvas de rapidez unitaria**.

Teorema 1.16. Toda curva regular puede parametrizarse por longitud de arco.

Demostración. Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva y $t_0 \in I$, definimos

$$s: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^t(\alpha).$$

Como la función $u \mapsto \|\alpha'(u)\|$ es continua, s es una función diferenciable tal que $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$. Como $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ para todo t , $s: I \rightarrow s(I)$ es un difeomorfismo. En particular s es inversible. Sea φ la inversa de s y sea $J = s(I)$. Si

$$\beta(s) = (\alpha \circ \varphi)(s): J \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

entonces

$$\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s) = \frac{\alpha'(\varphi(s))}{\|\alpha'(\varphi(s))\|}$$

y luego $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo $s \in J$. \square

Observación 1.17. La función s no es única pues depende de t_0 y de una constante de integración.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.18. Sea v un vector no nulo de \mathbb{R}^3 y $p \in \mathbb{R}^3$. Si $\alpha(t) = tv + p$, entonces $\alpha'(t) = v$. Como $s(t) = \int_0^t \|v\| du = t\|v\|$, se concluye que $\varphi(s) = s/\|v\|$ y luego

$$\beta(s) = \frac{v}{\|v\|}s + p.$$

Ejemplo 1.19. Sea $a > 0$ y $b \neq 0$. La curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, es regular pues $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \neq (0, 0, 0)$. Parametricemos α por longitud de arco. Primero calculamos $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y luego

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = \sqrt{a^2 + b^2}t.$$

Tenemos entonces que $\varphi(s) = s/\sqrt{a^2 + b^2}$ y luego

$$\beta(s) = \alpha(s/\sqrt{a^2 + b^2}) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Capítulo 2

Las fórmulas de Frenet

Comenzaremos por ver qué pasa en el caso de curvas planas.

Sea entonces $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por longitud de arco. Escribamos $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ y para cada $s \in I$ definamos

$$T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)).$$

La función $T: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es entonces diferenciable y además $\|T(s)\| = 1$ para todo $s \in I$. Sea $N: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función diferenciable dada por

$$N(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Entonces $\|N(s)\| = 1$ y además $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$ para todo $s \in I$. En particular, $\{T(s), N(s)\}$ es una base de \mathbb{R}^2 tal que

$$\det(T(s), N(s)) = 1$$

para todo $s \in I$; esta base se conoce como **diedro de Frenet** y nos dice qué tanto se tuerce la curva α . Sea $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ la función diferenciable dada por

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle.$$

La función κ es la **curvatura** de α .

Al derivar

$$\langle T(s), T(s) \rangle = \|T(s)\|^2 = 1, \quad \langle N(s), N(s) \rangle = \|N(s)\|^2 = 1, \quad \langle T(s), N(s) \rangle = 0,$$

obtenemos que

$$T'(s) = \kappa(s)N(s), \quad N'(s) = -\kappa(s)T(s).$$

Ejemplo 2.1. Sea $\alpha(s) = r(\cos(s/r), \sin(s/r))$ el círculo con centro en $(0,0)$ y radio $r > 0$. Observemos que α está parametrizada por longitud de arco. Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(1) = (-\sin(s/r), \cos(s/r)), \\ T'(s) &= (1/r)(-\cos(s/r), -\sin(s/r)), \\ N'(s) &= (-\cos(s/r), -\sin(s/r)). \end{aligned}$$

Luego $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = 1/r$.

Veamos qué pasa si en el ejemplo anterior cambiamos la orientación de la curva.

Veamos ahora una construcción análoga para curvas espaciales.

Sea α una curva parametrizada por longitud de arco. Si $T(s) = \alpha'(s)$, entonces $\|T(s)\| = 1$ para todo s . Además T es ortogonal a T' pues, como $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ para todo s , al derivar obtenemos que $\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$ pues

$$\langle T'(s), T(s) \rangle + \langle T(s), T'(s) \rangle = 0.$$

La **curvatura** de α en s es la función

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|.$$

Nuestra definición de curvatura implica que $\kappa(s) \geq 0$ para todo s , algo que no pasa en el caso de curvas planas.

En general solamente podemos asegurar que κ es una función continua. Si $T'(s) \neq 0$ para todo s , entonces κ es una función de clase C^∞ .

De ahora en adelante supondremos que $\kappa(s) > 0$ para todo s .

El **vector normal** a α en s se define como la función $N: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \kappa(s)^{-1} T'(s).$$

De la definición se tiene que N es diferenciable y que

$$\langle N(s), N(s) \rangle = 1, \quad \langle T(s), N(s) \rangle = 0$$

para todo $s \in I$.

Por último, el **vector binormal** a α en s se define como la función

$$B(s) = T(s) \times N(s),$$

donde $T(s) \times N(s)$ denota al producto vectorial entre $T(s)$ y $N(s)$.

Definición 2.2. La base de \mathbb{R}^3 formada por $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ se conoce como el triedro de Frenet.

Si derivamos $B(s) = T(s) \times N(s)$, obtenemos

$$B'(s) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) = T(s) \times N'(s)$$

pues $T'(s) = \kappa(s)N(s)$. Luego $\langle B'(s), T(s) \rangle = 0$. Por otro lado, al derivar la expresión $\langle B(s), B(s) \rangle = 1$, obtenemos $\langle B'(s), B(s) \rangle = 0$. Luego existe $\tau(s)$ tal que

$B'(s) = \tau(s)N(s)$. La **torsión** de α en s es el escalar $\tau(s)$. La función $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle$ es diferenciable.

Teorema 2.3. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa > 0$. Entonces

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T - \tau B, \quad B' = \tau N.$$

Demostración. La primera fórmula es consecuencia de la definición de $N(s)$ y la tercera de la definición de $\tau(s)$. Al derivar la expresión $\langle N(s), T(s) \rangle = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle N'(s), T(s) \rangle + \langle N(s), T'(s) \rangle &= \langle N'(s), T(s) \rangle + \langle N(s), \kappa(s)N(s) \rangle \\ &= \langle N'(s), T(s) \rangle + \kappa(s) \end{aligned}$$

Similarmente al derivar $\langle N(s), B(s) \rangle = 0$,

$$\langle N'(s), B(s) \rangle + \langle N(s), B'(s) \rangle = \langle N'(s), B(s) \rangle + \tau(s) = 0.$$

Luego

$$N'(s) = \langle N'(s), T(s) \rangle T(s) + \langle N'(s), B(s) \rangle B(s) = -\kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s). \quad \square$$

Las fórmulas del teorema anterior se conocen como las **fórmulas de Frenet**.

Ejemplo 2.4. Si $\alpha(s) = sv + v_0$, con $\|v\| = 1$, entonces $T(s) = v$ y $\kappa(s) = 0$.

Ejemplo 2.5. Sea $\alpha(s) = r(\cos(s/r), \sin(s/r), 0) + c$ el círculo con centro en c y radio $r > 0$. Calculamos

$$\alpha'(s) = r \left(-\frac{1}{r} \sin(s/r), \frac{1}{r} \cos(s/r), 0 \right) = (-\sin(s/r), \cos(s/r), 0),$$

y entonces $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo s . Esto nos dice que $T(s) = \alpha'(s)$. Calculamos ahora

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos(s/r), -\frac{1}{r} \sin(s/r), 0 \right),$$

y obtenemos que $\kappa(s) = \frac{1}{r} \neq 0$. Como entonces $N(s) = (-\cos(s/r), -\sin(s/r), 0)$ y $B(s) = (0, 0, 1)$, se concluye que $B'(s) = 0$ y luego $\tau(s) = 0$.

Veamos otra interpretación geométrica de la torsión:

Proposición 2.6. Sea α una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa(s) > 0$ para todo s . Entonces α es plana si y sólo si $\tau = 0$.

Demostración. Supongamos primero que $\tau = 0$. Como entonces $B'(s) = 0$ para todo s , existe un vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $B(s) = v$ para todo s . Veamos que $\alpha(s)$ pertenece al plano con vector normal v que pasa por el punto $\alpha(0)$. Queremos demostrar entonces que $\langle \alpha(s) - \alpha(0), v \rangle = 0$ para todo s . Sea $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), v \rangle$. Como

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), v \rangle = \langle T(s), B(s) \rangle = 0$$

y además $f(0) = 0$, entonces la función f es constantemente igual a cero.

Sea P un plano con vector normal $v \in \mathbb{R}^3$ y tal que $p \in P$ y supongamos que $\alpha(s) \in P$ para todo s . Entonces $\langle \alpha(s) - p, v \rangle = 0$ para todo s . Al derivar dos veces esta expresión se obtiene

$$\langle \alpha'(s), v \rangle = \langle \alpha''(s), v \rangle = 0$$

y luego v es ortogonal a $\alpha'(s) = T(s)$ y también es ortogonal a $N(s) = \kappa(s)^{-1} \alpha''(s)$. Como entonces $v = \lambda B$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, se concluye que $B(s) = \pm \frac{v}{\|v\|}$ es un vector constante. Esto implica que $B'(s) = 0$ y luego $\tau(s) = 0$. \square

Veamos otra interpretación:

Proposición 2.7. *Sea α una curva parametrizada por longitud de arco tal que su curvatura $\kappa(s) = \kappa$ es una constante positiva. Si $\tau(s) = 0$ para todo s , entonces α es parte de una circunferencia de radio $1/\kappa$.*

Demostración. Como $\tau(s) = 0$ para todo s , la proposición anterior nos dice que α es una curva plana. Sea $\gamma(s) = \alpha(s) + \kappa^{-1}N(s)$. Si derivamos y usamos las fórmulas de Frenet obtenemos

$$\gamma'(s) = \alpha'(s) + \kappa^{-1}N'(s) = T(s) + \kappa^{-1}(-\kappa T(s)) = 0.$$

Esto implica que $\gamma(s) = c$ es una constante y entonces $\alpha(s) + \kappa^{-1}N(s) = c$ para todo s . Veamos ahora que todo punto de la curva dista en κ^{-1} del punto c :

$$\|\alpha(s) - c\| = \|\kappa^{-1}N(s)\| = \kappa^{-1}. \quad \square$$

Capítulo 3

El teorema fundamental

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa > 0$. Las fórmulas de Frenet pueden escribirse matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s)I_3 & 0 \\ -\kappa(s)I_3 & 0 & -\tau(s)I_3 \\ 0 & \tau(s)I_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix},$$

donde I_3 es la matriz identidad de 3×3 .

Teorema 3.1. Sean $\kappa_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva de clase C^∞ y $\tau_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ . Existe entonces una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa(s) = \kappa_0(s)$ y $\tau(s) = \tau_0(s)$ para todo s .

Demostración. Consideremos la ecuación diferencial

$$X'(s) = A_0(s)X(s), \quad A_0(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_0(s)I_3 & 0 \\ -\kappa_0(s)I_3 & 0 & -\tau_0(s)I_3 \\ 0 & \tau_0(s)I_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}, \quad (3.1) \quad \boxed{\text{eq:fundamental}}$$

donde I_3 denota la matriz identidad de 3×3 . Sea $a \in \mathbb{R}^9$ tal que los vectores

$$t_0 = (a_1, a_2, a_3), \quad m_0 = (a_4, a_5, a_6), \quad b_0 = (a_7, a_8, a_9)$$

forman una base orientada ortonormal de \mathbb{R}^3 . Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}^9$ una solución de (3.1) tal que $f(s_0) = a$, para algún $s_0 \in I$ fijo, y sean

$$t = (f_1, f_2, f_3), \quad n = (f_4, f_5, f_6), \quad b = (f_7, f_8, f_9).$$

Entonces

$$t'(s) = \kappa_0(s)n(s), \quad n'(s) = -\kappa_0(s)t(s) - \tau_0(s)b(s), \quad b'(s) = \tau_0(s)n(s).$$

Veamos que $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 para todo $s \in I$. Para cada $s \in I$ sea $M(s)$ la matriz

$$M(s) = \begin{pmatrix} \langle t(s), t(s) \rangle & \langle t(s), n(s) \rangle & \langle t(s), b(s) \rangle \\ \langle n(s), t(s) \rangle & \langle n(s), n(s) \rangle & \langle n(s), b(s) \rangle \\ \langle b(s), t(s) \rangle & \langle b(s), n(s) \rangle & \langle b(s), b(s) \rangle \end{pmatrix}.$$

Como $M'(s) = A(s)M(s) - M(s)A(s)$, donde

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_0(s) & 0 \\ -\kappa_0(s) & 0 & -\tau_0(s) \\ 0 & \tau_0(s) & 0 \end{pmatrix},$$

y además $M(s_0) = I_3$, el teorema de existencia y unicidad garantiza que $M(s) = I_3$ para todo $s \in I$. Luego $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es una base ortonormal. Como, en particular, $\det(t(s), n(s), b(s)) = \pm 1$ y $\det(t(s_0), n(s_0), b(s_0)) = 1$, la continuidad implica que $\det(t(s), n(s), b(s)) = 1$ y luego $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es una base positivamente orientada.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s t(u) du.$$

Entonces α es una curva diferenciable tal que $T(s) = \alpha'(s) = t(s)$. En particular, $|T(s)| = |\alpha'(s)| = |t(s)| = 1$ y luego α está parametrizada por longitud de arco. Además $\kappa(s) = |T'(s)| = |t'(s)| = \kappa_0(s)$ y entonces $N(s) = n(s)$. Por último,

$$B(s) = T(s) \times N(s) = t(s) \times n(s) = b(s)$$

y luego $\tau(s) = \tau_0(s)$ pues $\tau(s)n(s) = \tau(s)N(s) = B'(s) = b'(s) = \tau_0(s)n(s)$. \square

Puede demostrarse que la curva α del teorema anterior es única salvo movimientos rígidos.

Capítulo 4

La desigualdad isoperimétrica

En esta sección nos concentraremos en curvas planas simples y cerradas. Diremos que una curva plana α es **cerrada** si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $I = [a, b]$, es tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$. Además α es **simple** si α no tiene autointersecciones.

Ejemplo 4.1. Sean $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$. La elipse $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (p \cos t, q \sin t)$, es una curva simple y cerrada. El interior

$$\text{inn } \alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/p)^2 + (y/q)^2 < 1\}$$

de α es una región acotada y el exterior es

$$\text{ext } \alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/p)^2 + (y/q)^2 > 1\}$$

es una región no acotada.

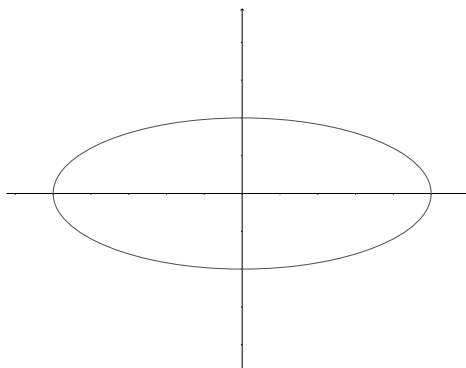


fig:ellipse

Figura 4.1: La elipse con $p = 5$ and $q = 2$.

Ejemplo 4.2. La curva $\alpha(t) = ((1 + 2\cos t)\cos t, (1 + 2\cos t)\sin t)$ que vemos en la figura 4.2 es cerrada pero no es simple ya que tiene autointersecciones: $\alpha(2\pi/3) = \alpha(4\pi/3)$.

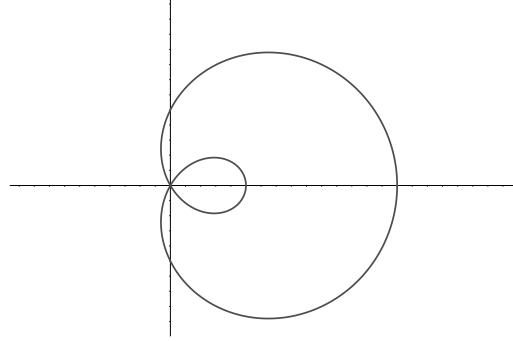


fig:self

Figura 4.2: Una curva cerrada y no simple.

El **teorema de Jordan** afirma que toda curva simple y cerrada divide al plano en dos regiones de las cuales una es acotada y la otra no. Más precisamente, si α es una curva simple y cerrada, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha = \text{inn } \alpha \cup \text{ext } \alpha$ (unión disjunta), donde el interior $\text{inn } \alpha$ de α es una región acotada y conexa y el exterior $\text{ext } \alpha$ de α es una región no acotada y conexa. La figura 4.3 nos muestra por qué el teorema de Jordan no es algo obvio.

El teorema de Jordan nos permite orientar una curva simple y cerrada: diremos que nuestra curva α está orientada positivamente si en cada punto $\alpha(t)$ normal apunta hacia el interior de α .

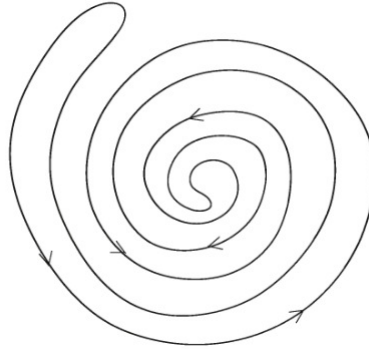


fig:Jordan

Figura 4.3: El teorema de Jordan no es una trivialidad.

El problema isoperimétrico es el siguiente. Entre todas las curvas planas simples y cerradas de una longitud dada, queremos encontrar la curva que acote la región con mayor área. Para resolver el problema isoperimétrico necesitamos recordar el **teorema de Green**. Si R es la región acotada dentro de una curva simple y cerrada α de \mathbb{R}^2 y $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, entonces

$$\int_{\text{inn } \alpha} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\alpha} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

Si en el teorema de Green $f(x, y) = -y$ y $g(x, y) = x$, entonces se obtiene la siguiente fórmula:

$$2\text{área}(R) = \int_a^b \left(x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right) dt$$

Otra de la herramientas que necesitamos para resolver el problema isoperimétrico es la **desigualdad de Cauchy–Schwarz**: si $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Más aún, vale la igualdad si y sólo si $v = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.3. *Sea α una curva plana simple y cerrada de longitud L y sea R la región encerrada por α . Entonces*

$$\text{área}(R) \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Demostración. Supongamos que la curva C está parametrizada por longitud de arco, digamos $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, L]$. El área de la región R encerrada por α puede calcularse como

$$\text{área}(R) = \frac{1}{2} \int_0^L (xy' - yx')(s) ds.$$

Como α es una curva cerrada,

$$\begin{aligned} \int_0^L x(s)y'(s) ds &= \int_0^L ((xy)'(s) - x'(s)y(s)) ds \\ &= (xy)(L) - (xy)(0) - \int_0^L x'(s)y(s) ds = - \int_0^L x'(s)y(s) ds, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\text{área}(R) = \int_0^L x(s)y'(s) ds.$$

Consideremos ahora el círculo Z con centro en el origen y radio r parametrizado por $\beta(s) = (x(s), z(s))$. El área del círculo Z es

$$\pi r^2 = - \int_0^L x'(s)z(s) ds.$$

Al usar la desigualdad de Cauchy–Schwarz con los vectores $v = (x(s), -z(s))$ y $w = (y'(s), x'(s))$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \text{área}(R) + \pi r^2 &= \int_0^L (x(s)y'(s) - z(s)x'(s))ds \\
 &\leq \int_0^L \sqrt{x(s)^2 + z(s)^2} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds \\
 &= \int_0^L \sqrt{x(s)^2 + z(s)^2} \\
 &= rL
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

eq:isopetrimetrical

pues α está parametrizada por longitud de arco. Al usar la desigualdad $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ con $a = \text{área}(R)$ y $b = \pi r^2$ se obtiene que $2\sqrt{\text{área}(R)}\sqrt{\pi r^2} \leq \text{área}(R) + \pi r^2 \leq rL$. Luego

$$4\pi r^2 \text{área}(R) \leq r^2 L^2, \tag{4.2}$$

eq:isoperimetrica2

que es equivalente a la desigualdad que queríamos demostrar. \square

Puede demostrarse que la igualdad en el teorema anterior vale si y sólo si C parametriza un círculo.

Capítulo 5

Ejercicios

xca:L_t

Ejercicio 5.1. Sea C el círculo de radio 1 con centro en $(0,0)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ sea L_t la recta de pendiente t que pasa por el punto $(-1,0)$. La recta L_t corta a C en un cierto punto $\alpha(t)$. Encuentre una fórmula para $\alpha(t)$ que no use funciones trigonométricas y demuestre que α es una curva cuya imagen es $C \setminus \{(-1,0)\}$.

xca:minima_distancia

Ejercicio 5.2. Demuestre que si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva y $[a,b] \subseteq I$, entonces

$$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq L_a^b(\alpha).$$

xca:espiral_log

Ejercicio 5.3. Dados $a > 0$ y $b < 0$, sea $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la **espiral logarítmica**, ver figura 5.1. Esta curva está dada por

$$\alpha(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t)).$$

Si $t_0 = 0$, demuestre que $s(t) = \frac{e^{bt}-1}{b}a(b^2+1)^{1/2}$.

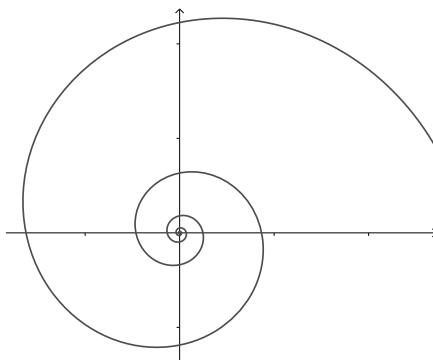


fig:log_spiral

Figura 5.1: La espiral logarítmica.

`xca:circle`**Ejercicio 5.4.** Sea $\alpha(s) = r(\cos(s/r), -\sin(s/r))$. Demuestre que $\kappa(s) = -1/r$.`xca:t=0`**Ejercicio 5.5.** Sea

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right).$$

Verifique que α está parametrizada por longitud de arco y calcule la curvatura y la torsión.

`xca:helice`**Ejercicio 5.6.** Demuestre que si α es la hélice circular del ejemplo 1.9, entonces

$$\kappa(s) = \frac{|a|}{a^2 + b^2}, \quad \tau(s) = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

`xca:curvatura`**Ejercicio 5.7.** Demuestre que la curvatura de una curva regular α puede calcularse como

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}.$$

`xca:torsion`**Ejercicio 5.8.** Demuestre que la torsión de una curva regular α puede calcularse como

$$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

`xca:(t,t2,t3)`**Ejercicio 5.9.** Calcule la curvatura y la torsión de la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$.`xca:y=f(x)`**Ejercicio 5.10.** Sea f una función de clase C^∞ . Calcule la curvatura y la torsión de la curva $\alpha(t) = (t, f(t), 0)$.

Parte II

Superficies

Capítulo 6

Superficies regulares

Intuitivamente, una superficie será un conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 donde cada punto posea un entorno similar a un pedazo de plano después de haber sido doblado no muy violentamente. De esta forma una superficie será un conjunto bidimensional de \mathbb{R}^3 suficientemente bueno como para permitirnos definir cálculo diferencial e integral.

Definición 6.1. Una **superficie** (regular) es un conjunto S de \mathbb{R}^3 tal que para todo $p \in S$ existe un abierto V de \mathbb{R}^3 que contiene a p y existen un abierto de \mathbb{R}^2 y una función $X: U \rightarrow V \cap S$ sobreyectiva tal que

1. X es de clase C^∞ ,
2. $X: U \rightarrow X(U) = V \cap S$ es un homeomorfismo, y
3. para cada $q \in U$, la diferencial $(dX)_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La función X se conoce como **parametrización** (o carta) local en el punto p . Si escribimos $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, entonces las funciones x , y y z son de clase C^∞ . Utilizaremos además la siguiente notación:

$$X_u(q) = \frac{\partial X}{\partial u}(q), \quad X_v(q) = \frac{\partial X}{\partial v}(q).$$

Veamos qué pasa con la diferencial $(dX)_q$ de X en q . Para cada $w \in \mathbb{R}^2$ sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ una curva tal que $\alpha(0) = q$ y $\alpha'(0) = w$ (podríamos tomar por ejemplo la curva $t \mapsto q + tw$). La **diferencial** de X en q se define como

$$(dX)_q(w) = \frac{d}{dt}(X \circ \alpha)(0).$$

Esta definición no depende de la curva α . En efecto, si $\{e_1, e_2\}$ denota la base estándar de \mathbb{R}^2 y escribimos $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, entonces

$$\alpha'(0) = (u'(0), v'(0)) = u'(0)e_1 + v'(0)e_2.$$

Si $\{f_1, f_2, f_3\}$ denota la base estándar de \mathbb{R}^3 y escribimos

$$(X \circ \alpha)(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))),$$

entonces

$$\frac{d}{dt}(X \circ \alpha) = (x_u u' + x_v v')f_1 + (y_u u' + y_v v')f_2 + (z_u u' + z_v v')f_3.$$

Matricialmente:

$$\frac{d}{dt}(X \circ \alpha) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Al evaluar en $t = 0$ observamos que la expresión solamente depende de $\alpha'(0) = w$ y de $q = \alpha(0)$. Más aún, vemos que $(dX)_q$ es inyectiva si y sólo si $\{X_u(q), X_v(q)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 6.2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Veamos que el plano $ax + by + cz = d$ es una superficie. Sin pérdida de generalidad supongamos que $c \neq 0$. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$. Como $c \neq 0$, podemos escribir

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = Ax + By + C\}.$$

La función $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (u, v, Au + Bv + C)$, es diferenciable y $X(\mathbb{R}^2) = S$. Además $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow X(\mathbb{R}^2)$ es un homeomorfismo con inversa $X^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ y los vectores $X_u = (1, 0, A)$ y $X_v = (0, 1, B)$ son linealmente independientes.

En general las superficies no pueden cubrirse con una única parametrización:

Ejemplo 6.3. Sea S^2 la esfera de radio uno y centro en $(0, 0, 0)$, es decir:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Si $z > 0$ vamos a utilizar la parametrización $X_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, donde $(x, y) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Observemos que $X_1(U)$ es el casquete superior (abierto) de la esfera contenido en $z > 0$. Es fácil verificar que X_1 es una función C^∞ , que la diferencial $(dX_1)_q$ es inyectiva (pues los vectores $(X_1)_x$ y $(X_1)_y$ son linealmente independientes y que $X_1 : U \rightarrow X_1(U)$ es un homeomorfismo con inversa $X^{-1}(x, y, z) = (x, y)$.

Hacemos algo similar ahora para el resto de los pedazos de la esfera que no logramos cubrir. Necesitamos utilizar las siguientes parametrizaciones:

$$\begin{aligned} X_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}), & (x, y) \in U, & & z < 0, \\ X_3(x, z) &= (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z), & (x, z) \in U' = \{(x, z) : x^2 + z^2 < 1\}, & & y > 0, \\ X_4(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z), & (x, z) \in U', & & y < 0, \\ X_5(y, z) &= (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z), & (y, z) \in U'' = \{(y, z) : y^2 + z^2 < 1\}, & & x > 0, \\ X_6(y, z) &= (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z), & (y, z) \in U'', & & x < 0. \end{aligned}$$

Las X_j cubren completamente a nuestra esfera, tal como muestra la figura 6.1. No podemos utilizar una única parametrización pues la esfera S^2 es compacta y en consecuencia no puede ser homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 .

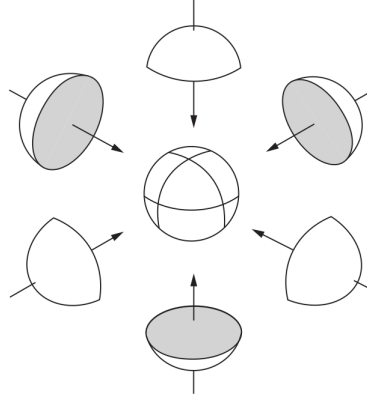


fig:esfera

Figura 6.1: La esfera es una superficie.

exa:cilindro_recto

Ejemplo 6.4. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ el cilindro recto de radio uno. Para demostrar que S es una superficie consideramos la función $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Como

$$X(u + 2\pi, v) = X(u, v)$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}$, necesitamos restringir el dominio a un abierto donde X quede inyectiva. Si $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, entonces la restricción $X|_U$ es inyectiva. El problema es que $X|_U$ no cubre a todo S ya que la recta $(x, y, z) = (1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$ no está contenida en $X(U)$. Necesitamos entonces otra carta y para esto podemos considerar la restricción $X|_V$, donde $V = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Las parametrizaciones $X|_U$ y $X|_V$ cubren completamente a S . Un cálculo sencillo muestra que S es entonces una superficie.

Los gráficos de funciones diferenciables son superficies. La importancia de este resultado radica en que nos permitirá construir muchas superficies. Probaremos más adelante que toda superficie puede describirse localmente como el gráfico de una función diferenciable.

Proposición 6.5. Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 y sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . El gráfico de f ,

$$G(f) = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\},$$

es una superficie regular.

Demostración. Sea $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Como f es C^∞ , X es también C^∞ . Además X es inyectiva y $X: U \rightarrow X(U)$ es sobreyectiva, por lo que en-

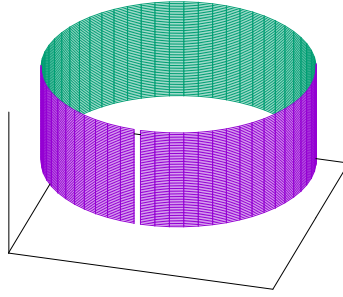


fig:cilindro

Figura 6.2: Una de las parametrizaciones del cilindro recto.

tonces existe $X^{-1}: X(U) \rightarrow U$. La función X^{-1} es continua pues es la restricción a $G(f)$ de la función $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Como los vectores $X_u = (1, 0, f_u)$ y $X_v = (0, 1, f_v)$ son linealmente independientes, se concluye que $G(f)$ es una superficie. \square

Veamos un conjunto que no es una superficie:

Ejemplo 6.6. Veamos que el cono circular

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

no es una superficie. Observemos que $S \setminus \{(0, 0, 0)\}$ es unión disjunta de los conos $S_+ = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ y $S_- = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$.

Si fuera una superficie, tendríamos una parametrización $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ alrededor de punto $(0, 0, 0) \in S$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U es una bola con centro en un cierto punto $u \in U$ tal que $X(u) = (0, 0, 0)$. Como $X(U) = V \cap S$ para algún abierto V de \mathbb{R}^3 , existen puntos $p \in S_+ \cap V$ y $q \in S_- \cap V$. Sean $a, b \in U$ tales que $X(a) = p$ y $X(b) = q$. En U existe una curva continua que no contiene al punto u y que une a y b , digamos $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ es tal que $u \notin \gamma([0, 1])$, $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. La composición $X \circ \gamma$ es entonces una curva continua en S que une los puntos p y q y que no pasa por $(0, 0, 0)$, una contradicción.

Puede demostrarse que el conjunto $S \setminus \{(0, 0, 0)\}$ sí es una superficie que puede cubrirse con las parametrizaciones

$$X_{\pm}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X_{\pm}(u, v) = (u, v, \pm \sqrt{u^2 + v^2}).$$

Ejemplo 6.7. Si S es una superficie y $T \subseteq S$ es un abierto no vacío, entonces T es una superficie. De hecho, si $X: U \rightarrow X(U)$ es una parametrización de S tal que $X(U) \cap T \neq \emptyset$, entonces $X: X^{-1}(T) \rightarrow T$ es una parametrización de T .

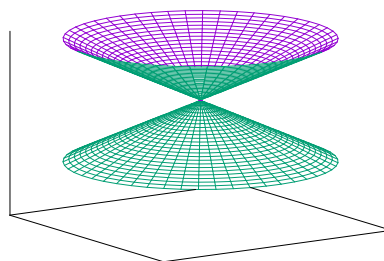


fig:cono

Figura 6.3: El cono circular no es una superficie.

Capítulo 7

El teorema de la función inversa

En esta sección veremos algunos resultados levemente técnicos pero de gran utilidad. Todos se basan en utilizar astutamente el **teorema de la función inversa**:

Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y sea $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Sea $a \in U$ tal que la matriz jacobiana

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(a)$$

es inversible. Existe entonces un entorno V de a en U y un entorno W de $f(a)$ en \mathbb{R}^n tal que $f: V \rightarrow W$ tiene inversa diferenciable $f^{-1}: W \rightarrow V$.

Para la demostración referimos por ejemplo al capítulo dos del libro de Spivak [3], más precisamente al teorema 2–11 de la página 35. Es importante mencionar que ahí el teorema está demostrado para funciones de clase C^1 . Sin embargo, la regla de Cramer y la fórmula para la diferencial de f^{-1} demuestran que f^{-1} es de clase C^∞ si f lo es.

lem:inverse

Lema 7.1. Sea S una superficie y $X: U \rightarrow X(U)$ una parametrización alrededor de un punto $p \in S$. Existe entonces un entorno M de $X^{-1}(p)$ y una proyección $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en alguno de los planos coordenados de \mathbb{R}^3 tal que

$$\pi \circ X: M \rightarrow (\pi \circ X)(M)$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Sea $q = X^{-1}(p)$. Escribimos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Como $(dX)_q$ tiene rango dos, dos filas de $(dX)_q$ son linealmente independientes. Podemos suponer entonces sin pérdida de generalidad que

$$\det \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sea $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Entonces $\pi \circ X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable y

$$d(\pi \circ X)_q = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{pmatrix}$$

es inversible. Por el teorema de la función inversa existe un entorno $M \subseteq U$ de q tal que $\pi \circ X: M \rightarrow (\pi \circ X)(M)$ es un difeomorfismo. \square

ro:cambio_de_coordenadas

Proposición 7.2. Si S es una superficie, $p \in S$ y $X: U \rightarrow X(U)$ e $Y: V \rightarrow Y(V)$ son parametrizaciones de S tales que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$, entonces la función de cambio de coordenadas $X^{-1} \circ Y: Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ es un difeomorfismo (es decir: diferenciable, inversible y con inversa diferenciable).

Demostración. Como X e Y son inversibles, basta con demostrar que $h = X^{-1} \circ Y$ es diferenciable. Sean r y s tales que $p = X(r) = Y(s)$. El lema anterior nos dice que existe un entorno $M \subseteq X^{-1}(W)$ de r y una proyección π , que podemos suponer igual a $\pi(x, y, z) = (x, y)$, tal que $\pi \circ X: M \rightarrow (\pi \circ X)(M)$ es un difeomorfismo. Como $h^{-1}(M)$ es un entorno de s , y además

$$(\pi \circ X) \circ h = (\pi \circ X) \circ (X^{-1} \circ Y) = \pi \circ Y$$

en $h^{-1}(M)$, la función $h = (\pi \circ X)^{-1} \circ (\pi \circ Y)$ es diferenciable en $h^{-1}(M)$ (pues $(\pi \circ X)^{-1}: (\pi \circ X)(M) \rightarrow M$, $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $Y: h^{-1}(M) \rightarrow \mathbb{R}^3$ son funciones diferenciables). \square

Como consecuencia casi inmediata del lema 7.1 obtenemos que toda superficie es localmente una superficie de alguna de los siguientes tipos: $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$, $z = h(x, y)$.

Proposición 7.3. Sea S una superficie regular y sea $p \in S$. Existe entonces un entorno W de p donde $S \cap W$ es el gráfico de una función diferenciable.

Demostración. Sea $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, una parametrización alrededor de p . Por el lema, existe un entorno M de $X^{-1}(p)$ y una proyección $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\pi \circ X: M \rightarrow (\pi \circ X)(M)$ es un difeomorfismo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Si escribimos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

y $f = \pi \circ X$, entonces $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Como $f(M) = (\pi \circ X)(M)$ es un abierto de \mathbb{R}^2 y $f: M \rightarrow f(M)$ es un difeomorfismo, la función $h: f(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = z \circ f^{-1}(x, y)$, es diferenciable y

$$X(M) = X \circ f^{-1}(f(M)) = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in f(M)\}$$

es el gráfico de la función h . \square

Ejemplo 7.4. El cono $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ no es una superficie. Por la proposición anterior sabemos que alrededor del origen, C es el gráfico de una

función diferenciable. Las posibilidades son: $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$, $z = h(x, y)$. Como las proyecciones de C sobre $y = 0$ y $x = 0$ no son inyectivas, se concluye que alrededor del origen C es el gráfico de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, que no es una función diferenciable.

Recordemos que si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(a) = \{p \in \mathbb{R}^n : f(p) = a\}.$$

Definición 7.5. Sea U un abierto de \mathbb{R}^3 y sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es un **valor regular** de f si para cada $p \in f^{-1}(a)$ se tiene $\nabla f(p) \neq 0$.

La siguiente proposición permite construir muy fácilmente muchas superficies.

pro:regular

Proposición 7.6. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si 0 es un valor regular para f y además $S = f^{-1}(0)$ es no vacío, entonces S es una superficie.

Demostración. Sea $p = (x_0, y_0, z_0)$ tal que $f(p) = 0$ y $f_z(p) \neq 0$. Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función dada por $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$. Como el jacobiano de F en p es

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(p) & f_y(p) & f_z(p) \end{pmatrix} = f_z(p) \neq 0,$$

el teorema de la función inversa implica que existen entornos $V \subseteq U$ de p y W de

$$F(p) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0, z_0)) = (x_0, y_0, 0)$$

tales que $F: V \rightarrow W$ es un inversible con inversa diferenciable $G: W \rightarrow U$. Como G es la inversa de F , podemos escribir $G(x, y, z) = (x, y, g(x, y, z))$ para alguna función diferenciable g . Observemos que como

$$f(x, y, z) = 0 \iff F(x, y, z) = (x, y, 0) \iff (x, y, z) = G(x, y, 0) \iff z = g(x, y, 0),$$

el conjunto $V \cap f^{-1}(0)$ es el gráfico de la función diferenciable $h(x, y) = g(x, y, 0)$ con dominio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, 0) \in W\}$. Luego $f^{-1}(0)$ es una superficie. \square

Como aplicación de la proposición anterior veamos que los elipsoides (y en particular las esferas) son superficies:

Ejemplo 7.7. El elipsoide S dado por los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es una superficie pues 0 es un valor regular para la función

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Veamos ahora un ejemplo de superficie no conexa:

Ejemplo 7.8. El hiperboloide de dos hojas

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie pues 0 es un valor regular para la función

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1.$$

Preimagen de valores no regulares también podrían ser superficies:

Ejemplo 7.9. Si $f(x, y, z) = z^2$, entonces 0 no es un valor regular para f . Sin embargo, el conjunto $f^{-1}(0)$ es una superficie pues $f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

Capítulo 8

El plano tangente y las funciones diferenciables

Veamos ahora cómo transportar los conceptos del cálculo diferencial clásico al cálculo diferencial en superficies. Comenzaremos con la definición de función diferenciable. Para la definición de diferenciabilidad resultará esencial tener a mano la proposición 7.2, que establece que los cambios de coordenadas son funciones diferenciables.

def:diferenciable1

Definición 8.1. Una función $f: S \rightarrow T$ entre superficies se dirá **diferenciable** si para cada $p \in S$ existe una parametrización $X: U \rightarrow S$ alrededor de p y existe una parametrización $Y: V \rightarrow T$ alrededor de $f(p)$ tal que la composición $Y^{-1} \circ f \circ X$ es diferenciable.

La definición anterior no incluye funciones a valores reales:

Definición 8.2. Si S es una superficie, una función $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ se dirá **diferenciable** si para cada $p \in S$ existe una parametrización $X: U \rightarrow S$ alrededor de p tal que $f \circ X$ es diferenciable.

Las composiciones $f \circ X$ y $Y^{-1} \circ f \circ X$ de las definiciones anteriores se conoce como las **expresiones en coordenadas** de la función f . Nuestras definiciones de diferenciabilidad no dependen de las parametrizaciones elegidas. Lo demostraremos para el caso de funciones entre superficies: como los cambios de coordenadas son funciones diferenciables, la composición

$$Y^{-1} \circ f \circ X = (Y^{-1} \circ \bar{Y}) \circ (\bar{Y}^{-1} \circ f \circ \bar{X}) \circ (\bar{X}^{-1} \circ X)$$

es diferenciable por ser composición de funciones diferenciables.

De la definición se obtiene fácilmente que toda función diferenciable es continua. Por ejemplo: como $Y^{-1} \circ f \circ X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua por ser diferenciable, se concluye que $f = Y \circ (Y^{-1} \circ f \circ X) \circ X^{-1}$ es también una función continua.

Ejemplo 8.3. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto y sea $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si S es una superficie contenida en V , la restricción $F|_S: S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable pues si $X: U \rightarrow X(U) \subseteq V$ es una parametrización, la composición

$$(F|_S) \circ X = F|_{X(U)}$$

es diferenciable.

El ejemplo anterior tiene varias consecuencias útiles e interesantes:

Ejemplo 8.4. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^3$ un plano con vector normal n y sea $p_0 \in P$. Si S es una superficie, la función $h: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p \mapsto \langle p - p_0, n \rangle$, es diferenciable pues es la restricción de la función $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle p - p_0, n \rangle$.

Ejemplo 8.5. Sea $p_0 \in \mathbb{R}^3$. La función $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(p) = \|p - p_0\|^2$, es diferenciable.

Ejemplo 8.6. Las componentes de la inclusión $\iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_3): S \rightarrow \mathbb{R}^3$ son funciones diferenciables. Por ejemplo: como $\pi_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, es diferenciable, la restricción $\pi_1|_S = \iota_1$ es también diferenciable.

Una función diferenciable $f: S \rightarrow T$ entre superficies es un **difeomorfismo** si es inversible y su inversa es diferenciable. La diferenciablez de los cambios de coordenadas implica que las parametrizaciones son difeomorfismos.

Ejemplo 8.7. Si $X: U \rightarrow X(U)$ es una parametrización de una superficie, entonces $X^{-1}: X(U) \rightarrow U$ es diferenciable pues si $Y: V \rightarrow Y(V)$ es una parametrización tal que $W = X(U) \cap Y(V) \neq \emptyset$, entonces

$$Y^{-1} \circ X: X^{-1}(W) \rightarrow Y^{-1}(W)$$

es diferenciable.

Ejemplo 8.8. Sean T una superficie, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto y $F: V \rightarrow T$ una función diferenciable. Si S es una superficie contenida en V , la restricción $F|_S: S \rightarrow T$ es una función diferenciable. Si $X: U \rightarrow X(U) \subseteq V$ e $Y: V \rightarrow T$ son parametrizaciones tales que $F(X(U)) \subseteq Y(V)$, la composición

$$Y^{-1} \circ (F|_S) \circ X = Y^{-1} \circ F|_{X(U)}$$

es diferenciable.

Veamos algunos casos particulares del ejemplo anterior:

Ejemplo 8.9. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ no nulos. Como

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (ax, by, cz),$$

es diferenciable, la restricción $F|_{S^2}$ de F a la esfera unitaria es una función diferenciable

$$S^2 \rightarrow \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

Ejemplo 8.10. Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva tal que $\alpha(I)$ está contenida en una superficie S , entonces $\alpha: I \rightarrow S$ es diferenciable.

El ejemplo anterior nos permite hablar de curvas (diferenciables) en superficies. Esto resulta fundamental para poder definir el plano tangente a una superficie sin apelar a parametrizaciones:

Definición 8.11. Sea S una superficie y sea $p \in S$. Decimos que $v \in \mathbb{R}^3$ es un **vector tangente** a S en p si existe una curva $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Escribiremos $T_p S$ para denotar al conjunto de los vectores tangente a la superficie S en el punto p . Esta definición, si bien no depende del uso de coordenadas, no es conveniente para hacer cálculos. Para poder calcular planos tangente tenemos el siguiente resultado:

Proposición 8.12. Sea S una superficie y sea $p \in S$. Si $X: U \rightarrow S$ es una parametrización de S en p , entonces

$$T_p S = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2).$$

Demostración. Sea $v \in T_p S$ y sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq X(U)$. Si

$$\beta = X^{-1} \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

entonces β es diferenciable y tal que $\beta(0) = X^{-1}(p)$. Al derivar $\alpha = X \circ \beta$ y usar la regla de la cadena se concluye entonces que

$$v = \alpha'(0) = dX_{X^{-1}(p)}(\beta'(0)).$$

Sea $w \in \mathbb{R}^2$ y sea $\beta(t) = X^{-1}(p) + tw$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\beta(t) \subseteq U$ si $|t| < \varepsilon$. Al derivar $X \circ \beta = \alpha$ obtenemos, gracias a la regla de la cadena, que

$$dX_{X^{-1}(p)}(w) = dX_{X^{-1}(p)}(\beta'(0)) = \alpha'(0) \in T_p S. \quad \square$$

La proposición anterior nos dice que si S es una superficie y $p \in S$, entonces $T_p S$ es un espacio vectorial. Tenemos entonces la siguiente consecuencia:

Proposición 8.13. Sea S una superficie y sea $p \in S$. Si $X: U \rightarrow S$ es una parametrización de S en p y $q = X^{-1}(p)$, entonces $T_p S$ está generado por $\{X_u(q), X_v(q)\}$.

Demostración. Gracias a la proposición anterior, basta con demostrar que el espacio generado por $X_u(q)$ y $X_v(q)$ está contenido en $T_p S$. Sea $v = aX_u(q) + bX_v(q)$. Entonces la curva $\alpha(t) = X(q + (a, b)t)$ cumple que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. \square

Calculemos algunos planos tangente:

exa:TpS:z=x^2+y^2

Ejemplo 8.14. Calculemos el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $p = (1, 1, 2)$. Consideramos la parametrización $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $p = X(1, 1)$. Calculamos:

$$X_u(u, v) = (1, 0, 2u), \quad X_v(u, v) = (0, 1, 2v).$$

El plano tangente $T_p S$ es el plano de ecuación $z = 2(x + y)$ pues $T_p S$ está entonces generado por $X_u(1, 1) = (1, 0, 2)$ y $X_v(1, 1) = (0, 1, 2)$.

Ejemplo 8.15. Sea P algún plano con normal $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, digamos

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\},$$

donde $c \neq 0$, y sea $p \in P$. Vamos a calcular $T_p P$. Vimos que

$$X(u, v) = (u, v, (-a/c)u + (-b/c)v + d/c)$$

es una parametrización aldededor de $p \in P$. Por la proposición anterior sabemos que $T_p P$ es el espacio vectorial de dimensión dos generado por $X_u = (1, 0, -a/c)$ y $X_v = (0, 1, -b/c)$. Como

$$X_u \times X_v = (ac, cb, c^2),$$

se concluye que (a, b, c) es el normal al plano $T_p P$.

Vimos que la preimagen de valor regular da una superficie. Calculemos el plano tangente de este tipo de superficies:

Proposición 8.16. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que 0 es un valor regular. Si $S = f^{-1}(0)$ y $p \in S$, entonces

$$T_p S = \ker((df)_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}).$$

Demostración. Como 0 es un valor regular,

$$\dim T_p S = \dim \ker((df)_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}) = 2.$$

Basta entonces con demostrar que $T_p S \subseteq \ker((df)_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$. Sea $v \in T_p S$ y sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Como $f(\alpha(t)) = 0$ para todo t , al derivar y usar la regla de la cadena,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0) = (df)_{\alpha(0)} \alpha'(0) = (df)_p(v).$$

□

Ejemplo 8.17. Sea $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : \|p\|^2 = 1\}$ la esfera de radio uno y centro en el origen. Sabemos que $S^2 = f^{-1}(1)$, donde

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(p) = \|p\|^2 = \langle p, p \rangle.$$

Para calcular $T_p S^2$ en algún punto p de S^2 podemos entonces utilizar el resultado del ejemplo anterior:

$$T_p S^2 = \ker(df_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}).$$

Si $v \in T_p S^2$ y α es una curva en S^2 tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}(f(\alpha(t)))(0) = 2\langle v, p \rangle.$$

Luego $T_p S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, p \rangle = 0\}$ es el plano cuyo vector normal está en la dirección de p .

Definición 8.18. Sea S una superficie y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Para cada $p \in S$ se define la diferencial de f en p como la función

$$(df)_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (df)_p(v) = \frac{d}{dt}f(\alpha(t))(0) = (f \circ \alpha)'(0),$$

donde α es una curva en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Proposición 8.19. Sea S una superficie y sea $p \in S$. Para cada $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, la diferencial $(df)_p$ está bien definida y es una transformación lineal.

Demostración. Sea $X: U \rightarrow X(U)$ una parametrización en p y sea $q = X^{-1}(p)$. Sea $v \in T_p S$ y sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq X(U)$. Como $X \circ (X^{-1} \circ \alpha) = \alpha$, al derivar y evaluar en $t = 0$, obtenemos

$$(dX)_q(X^{-1} \circ \alpha)'(0) = v,$$

que podemos reescribir como

$$(X^{-1} \circ \alpha)'(0) = (dX_q)^{-1}(v).$$

Al calcular

$$\begin{aligned} (df)_p(v) &= (f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}((f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \alpha))(0) \\ &= d(f \circ X)_q(X^{-1} \circ \alpha)'(0) = d(f \circ X)_q(dX_q)^{-1}(v), \end{aligned}$$

vemos que $(df)_p$ está bien definida (no depende de la curva α que elegimos) y que es una transformación lineal por ser producto de transformaciones lineales. \square

Para poder calcular efectivamente la diferencial de una función contamos con la siguiente herramienta:

Lema 8.20. Sea $X: U \rightarrow S$ una parametrización de una superficie S alrededor de un punto $p = X(u_0, v_0)$. Si $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable, entonces

$$(df)_p(X_u(u_0, v_0)) = (f \circ X)_u(u_0, v_0), \quad (8.1)$$

$$(df)_p(X_v(u_0, v_0)) = (f \circ X)_v(u_0, v_0). \quad (8.2)$$

eq:dfXu

eq:dfXv

Demostración. Demostremos (8.1). Si $\alpha(t) = X(u_0 + t, v_0)$, entonces $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_u(u_0, v_0)$. Calculamos:

$$(df)_p(X_u(u_0, v_0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ X)(u_0 + t, v_0) = (f \circ X)_u(u_0, v_0).$$

La igualdad (8.2) se demuestra en forma similar. \square

Ejemplo 8.21. Sea S la superficie dada por $z = x^2 + y^2$. Sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función dada por

$$f(x, y, z) = (\cos(\pi z), xz, y + z^2).$$

Queremos ver que f es diferenciable y para $p = (1, 1, 2)$ calcular $(df)_p(2, -1, 2)$. Si consideramos la parametrización $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, entonces

$$f \circ X(u, v) = (\cos(\pi(u^2 + v^2)), u(u^2 + v^2), v + (u^2 + v^2)^2)$$

y luego f es diferenciable.

Vimos que en el ejemplo 8.14 que $T_p = \langle (1, 0, 2), (0, 1, 2) \rangle$. Como

$$(2, -1, 2) = 2(1, 0, 2) + (-1)(0, 1, 2),$$

necesitamos poder calcular $(df)_p(1, 0, 2)$ y $(df)_p(0, 1, 2)$. Calculamos

$$\begin{aligned} (f \circ X)_u(u, v) &= (-2\pi u \sin(\pi(u^2 + v^2)), 3u^2 + v^2, 4u(u^2 + v^2)), \\ (f \circ X)_v(u, v) &= (-2\pi v \sin(\pi(u^2 + v^2)), 2uv, 1 + 4v(u^2 + v^2)), \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} (df)_p(1, 0, 2) &= (f \circ X)_u(1, 1) = (0, 4, 8), \\ (df)_p(0, 1, 2) &= (f \circ X)_v(1, 1) = (0, 2, 9). \end{aligned}$$

Luego

$$(df)_p(2, -1, 2) = 2(0, 4, 8) - (0, 2, 9) = (0, 6, 7).$$

En el ejemplo anterior podríamos haber utilizado otra parametrización, digamos por ejemplo $Y(u, v) = (u, \sqrt{v - u^2}, v)$, y obviamente obtendríamos también que $(df)_p(2, -1, 2) = (0, 6, 7)$.

Ejemplo 8.22. Sea S una superficie y sean $p_0 \in \mathbb{R}^3$ y $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Si $h: S \rightarrow \mathbb{R}$, $h(p) = \langle p - p_0, a \rangle$, entonces $(dh)_p(v) = \langle v, a \rangle$ para todo $v \in T_p S$.

Ejemplo 8.23. Sea S una superficie y sea $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Si $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(p) = \|p - p_0\|^2$, entonces $(df)_p(v) = 2\langle v, p - p_0 \rangle$ para todo $v \in T_p S$.

Ejemplo 8.24. Sea S una superficie. y sea $\iota: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión canónica. Entonces $(d\iota)_p(v) = v$ para todo $v \in T_p S$.

thm:chain_rule

Teorema 8.25 (regla de la cadena). Sean $f: S_1 \rightarrow S_2$ y $g: S_2 \rightarrow S_3$ funciones diferenciables entre superficies. Si $p \in S_1$, entonces $g \circ f$ es diferenciable y además

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p.$$

Demostración. Sean X una parametrización de S_1 y Z una parametrización de S_3 . La composición $Z^{-1} \circ (g \circ f) \circ X$ es diferenciable ya que puede escribirse como

$$Z^{-1} \circ (g \circ f) \circ X = (Z^{-1} \circ g \circ Y) \circ (Y^{-1} \circ f \circ X),$$

donde Y es una parametrización de S_2 .

Sea $v \in T_p S_1$. Si α una curva en S_1 tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $f \circ \alpha$ es una curva en S_2 tal que $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ y $(f \circ \alpha)'(0) = (df)_p(v)$ por definición. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_p(v) &= ((g \circ f) \circ \alpha)'(0) = (g \circ (f \circ \alpha))'(0) \\ &= (dg)_{f(p)}(f \circ \alpha)'(0) = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p(v). \end{aligned} \quad \square$$

Capítulo 9

Orientabilidad

Nuestro objetivo es poder medir cuánto se curva una superficie. Si en cada punto p de nuestra superficie se tiene bien definido un vector normal $N(p)$, es natural estudiar la tasa de variación de $N(p)$.

Recordemos algunas definiciones básicas. Un **campo vectorial** V en una superficie S es una función diferenciable $V: S \rightarrow \mathbb{R}^3$. El campo V se será **normal** si $\langle V(p), v \rangle$ para todo $v \in T_p$, y se será **unitario** si $\langle V(p), V(p) \rangle = 1$ para todo $p \in S$.

Definición 9.1. Diremos que una superficie S es **orientable** si existe un campo vectorial $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ normal y unitario.

El siguiente lema muestra que toda superficie es localmente orientable:

Lema 9.2. Si S es una superficie y $X: U \rightarrow S$ es una parametrización, entonces existe al menos un campo vectorial normal unitario en $X(U)$.

Demostración. Sea $q \in U$ y sea $p = X(q)$. Como $X_u(q)$ y $X_v(q)$ son linealmente independientes, el vector

$$N_X(q) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{\|X_u(q) \times X_v(q)\|} \neq 0$$

es unitario. Además $N_X(q)$ es ortogonal al plano tangente $T_p S$ pues el plano tangente $T_p S$ está generado por $X_u(q)$ y $X_v(q)$. Queda así bien definida una función $N_X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $N_X(q) \perp T_p S$ y $\|N_X(q)\| = 1$ para todo $q \in U$. La composición $N = N_X \circ X^{-1}: X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es entonces un campo normal y unitario en $X(U)$. \square

Un campo normal y unitario sobre la superficie nos permite intuitivamente tener una idea de qué significa estar de un lado o de otro de la superficie. Hay además a lo sumo dos lados.

Recordemos que un conjunto X se dice conexo si los únicos conjuntos abiertos y cerrados de X son \emptyset y X .

Lema 9.3. Sea S una superficie conexa. Si N_1 y N_2 son campos normales y unitarios en S , entonces $N_1 = N_2$ o bien $N_1 = -N_2$.

Demostración. Si $p \in S$, como $N_1(p)$ y $N_2(p)$ son vectores unitarios y ortogonales al plano tangente $T_p S$, entonces $N_1(p) = N_2(p)$ o bien $N_1(p) = -N_2(p)$. Sean

$$A = \{p \in S : N_1(p) = N_2(p)\}, \quad B = \{p \in S : N_1(p) = -N_2(p)\}.$$

Como N_1 y N_2 son continuas, A y B son cerrados. Además $S = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces, como S es conexo, se concluye que $A = \emptyset$ y $B = S$ o bien $A = S$ y $B = \emptyset$. \square

Ejemplo 9.4. Calculemos una de las normales a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $p = (1, 1, 2)$. Si usamos $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ entonces $p = X(1, 1)$ y vimos que $X_u(1, 1) = (1, 0, 2)$ y $X_v(1, 1) = (0, 1, 2)$. Luego

$$N(p) = \frac{X_u(1, 1) \times X_v(1, 1)}{\|X_u(1, 1) \times X_v(1, 1)\|} = \frac{1}{3}(-2, -2, 1).$$

Ejemplo 9.5. Los planos son superficies orientables. Sea P el plano de ecuación $ax + by + cz = d$. Entonces $N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$ es un campo normal unitario para P .

Ejemplo 9.6. La esfera S^2 es orientable y $N(p) = p$ es un campo normal unitario para S^2 .

Ejemplo 9.7. Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función diferenciable que define una superficie $S = G(f)$. Veamos que S es orientable. Vimos que $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es una parametrización global para S tal que $X_u = (1, 0, f_u)$ y $X_v = (0, 1, f_v)$. Si

$$N_X = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}(f_u, f_v, -1),$$

entonces $N = N_X \circ X^{-1}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo normal y unitario para S .

Ejemplo 9.8. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ el **cilindro recto** de radio uno. Entonces $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ es un campo normal y unitario para S .

Ejemplo 9.9. Sea $S = f^{-1}(0)$ una superficie dada por la preimagen de un valor regular de una función diferenciable f . Vimos que

$$T_p S = \ker(df)_p = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle \nabla f, v \rangle = 0\}.$$

Luego

$$N: S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N(p) = \frac{1}{\|\nabla f\|} \nabla f|_S = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}(f_x, f_y, f_z),$$

es un campo normal y unitario para S .

Existen ejemplos de superficies no orientables. Intuitivamente es fácil convencerse de que la banda de Möbius es una superficie no orientable. Una representación gráfica de esta superficie puede verse en la figura 9.1.

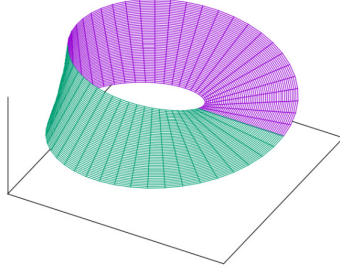


fig:Moebius

Figura 9.1: La banda de Möbius es una superficie no orientable.

Definición 9.10. Sea S una superficie orientable. La función $N: S \rightarrow S^2$, $p \mapsto N(p)$, se conoce como la **aplicación de Gauss** de S .

Vimos que la normal a la esfera S^2 en el punto p es $N(p) = p$. Como la esfera puede definirse como $S^2 = f^{-1}(0)$, donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, entonces

$$\begin{aligned} T_{N(p)}S^2 &= \ker(df)_{N(p)} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle N(p), v \rangle = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle p, v \rangle = 0\} = T_pS. \end{aligned}$$

lem:N_u, N_v

Lema 9.11. Sea $X: U \rightarrow X(U)$ una parametrización de una superficie S alrededor de $p \in S$ y sea $q = X^{-1}(p)$. Entonces

$$(N_X)_u(q) = (dN)_p(X_u(q)), \quad (N_X)_v(q) = (dN)_p(X_v(q)).$$

Demostración. Como $N_X = N \circ X: U \rightarrow S^2$,

$$\begin{aligned} (N_X)_u(q) &= (dN_X)_q(1, 0) = (d(N \circ X))_q(1, 0) \\ &= (dN)_p(dX)_q(1, 0) = (dN)_p(X_u(q)). \end{aligned}$$

Análogamente se demuestra que $(N_X)_v(q) = (dN)_p(X_v(q))$. □

Una transformación lineal $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **autoadjunta** si $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 9.12. Sean S una superficie orientable y $p \in S$. Si N es la aplicación de Gauss, entonces $(dN)_p: T_pS \rightarrow T_{N(p)}S^2 \simeq T_pS$ es autoadjunta.

Demostración. Sea $X: U \rightarrow S$ una parametrización en p y sea $q = X^{-1}(p)$. Como $\{X_u(p), X_v(p)\}$ es una base de $T_p S$ basta ver que

$$\langle (dN)_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, (dN)_p(X_v) \rangle$$

en un entorno de q . Sabemos que $\langle N_X, X_u \rangle = 0$ alrededor de q . Al derivar esta expresión con respecto a la variable v obtenemos

$$\langle (N_X)_v, X_u \rangle + \langle N_X, X_{uv} \rangle = 0.$$

Similarmemente, al derivar $\langle N_X, X_v \rangle = 0$ con respecto a la variable u tenemos

$$\langle (N_X)_u, X_v \rangle + \langle N_X, X_{vu} \rangle = 0.$$

Como $X_{uv} = X_{vu}$, se concluye al usar el lema anterior que

$$\begin{aligned} \langle (dN)_p(X_u), X_v \rangle &= \langle (N_X)_u, X_v \rangle \\ &= \langle (N_X)_v, X_u \rangle = \langle (dN)_p(X_v), X_u \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Las transformaciones lineales autoadjuntas tienen autovalores reales y pueden diagonalizarse. En cada punto p de nuestra superficie orientable S , el endomorfismo $-(dN)_p: T_p S \rightarrow T_p S$ tiene dos autovalores reales $k_1(p) \leq k_2(p)$. Estos valores son las **curvaturas principales** de S en p . Se define la **curvatura gaussiana** de S en p como el número

$$K(p) = \det(-(dN)_p) = k_1(p)k_2(p).$$

La **curvatura media** de S en p es el número

$$H(p) = -\frac{1}{2} \text{traza}(dN)_p = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)).$$

Vale entonces que

$$k_i(p)^2 - 2H(p)k_i(p) + K(p) = 0$$

para todo $i \in \{1, 2\}$. Como la ecuación cuadrática $X^2 - 2HX + K = 0$ tiene dos soluciones reales, se deduce que $K(p) \leq H(p)^2$ para todo $p \in S$.

Ejemplo 9.13. Sea S un plano. Como $N: S \rightarrow S^2$ es una constante, $(dN)_p = 0$ para todo $p \in S$. Luego $k_1(p) = k_2(p) = H(p) = K(p) = 0$ en todo punto $p \in S$.

Ejemplo 9.14. Sea S la **esfera** de radio r con centro en el origen y sea $p \in S$. Vimos que $N(p) = p/r$. Calculemos la diferencial $(dN)_p$ en un vector tangente $v \in T_p S$. Sea α una curva en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Como $N \circ \alpha(t) = \frac{1}{r}\alpha(t)$, por definición de diferencial,

$$(dN)_p(v) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(0) = \frac{1}{r}\alpha'(0) = \frac{1}{r}v.$$

Luego $-(dN)_p(v) = -\frac{1}{r}v$ para todo $v \in T_p S$ y, en particular,

$$k_1(p) = k_2(p) = -1/r, \quad H(p) = -\frac{1}{r}, \quad K(p) = \frac{1}{r^2}.$$

exa:cilindro_recto:K

Ejemplo 9.15. Sea $r > 0$ y sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ el **cilindro recto** de radio r . Si $p = (x, y, z) \in S$, entonces $N(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, 0)$. Vamos a calcular $-(dN)_p(v)$, donde $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_p S$. Sea α una curva en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Por definición,

$$-(dN)_p(v) = -\frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(0) = -\frac{1}{r}(v_1, v_2, 0).$$

Tenemos que encontrar los autovalores de $-(dN)_p$. A simple vista vemos que

$$-(dN)_p(0, 0, v_3) = (0, 0, 0) = 0(0, 0, v_3), \quad -(dN)_p(0, v_2, 0) = -\frac{1}{r}(0, v_2, 0).$$

Como $k_1(p) = -1/r$ y $k_2(p) = 0$ son los autovalores de $-(dN)_p$, se concluye que $K(p) = 0$ y $H(p) = -\frac{1}{2r}$.

paraboloide_hiperbolico

Ejemplo 9.16. Sea S el **paraboloide hiperbólico** dado por $z = y^2 - x^2$ que vemos en la figura 9.2. Calculemos las curvaturas de S en el punto $p = (0, 0, 0)$. Sea $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ y sea $q = X^{-1}(p) = (0, 0)$. Un cálculo directo muestra que $X_u(u, v) = (1, 0, -2u)$, $X_v(u, v) = (0, 1, 2v)$, y

$$N_X(u, v) = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}(2u, -2v, 1).$$

Si N es la aplicación de Gauss, entonces

$$(dN)_p(X_u(q)) = (dN)_p(1, 0, 0) = (N_X)_u(q) = (2, 0, 0),$$

y similarmente

$$(dN)_p(X_v(q)) = (dN)_p(0, 1, 0) = (N_X)_v(q) = (0, -2, 0).$$

Esto nos dice que $k_1(p) = -2$, $k_2(p) = 2$, $K(p) = -4$ y $H(p) = 0$.

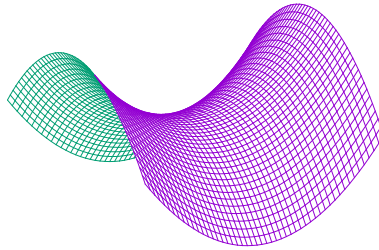


fig:hiperboloide

Figura 9.2: El paraboloide hiperbólico.

Capítulo 10

La primera forma fundamental

El producto interno de \mathbb{R}^3 induce un producto interno en el tangente $T_p S$ a S en el punto p . De alguna forma, esto indica que S hereda el producto escalar natural que se tiene en el espacio ambiente, y gracias a esto podemos medir longitud de curvas, ángulos y áreas en S sin apelar a \mathbb{R}^3 .

Definición 10.1. La **primera forma fundamental** de una superficie S en un punto p se define como la función

$$I_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_p(v) = \langle v, v \rangle.$$

Sea $X: U \rightarrow X(U) \subseteq S$ una parametrización local de una superficie S alrededor de un punto $p \in S$. Los **coeficientes de la primera forma fundamental** son

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Por definición, E , F y G son funciones diferenciables.

Calculemos algunas primeras formas fundamentales:

Ejemplo 10.2. El plano $z = 0$ puede parametrizarse con

$$X(u, v) = (u, v, 0).$$

Como $X_u = (1, 0, 0)$ y $X_v = (0, 1, 0)$, los coeficientes de la primera forma fundamental son entonces $E = G = 1$ y $F = 0$.

Ejemplo 10.3. Consideremos la parametrización del cilindro

$$X(u, v) = (\cos v, \sin v, u).$$

Como $X_u = (0, 0, 1)$ y $X_v = (-\sin v, \cos v, 0)$, se concluye que $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$.

Es interesante observar que las primeras formas fundamentales que calculamos para el plano y el cilindro coinciden.

Ejemplo 10.4. Consideremos la parametrización de la **esfera** dada por

$$X(u, v) = (\sin u \sin v, \cos u \sin v, \cos v).$$

Como $X_u = (\cos u \sin v, -\sin u \sin v, 0)$ y $X_v = (\sin u \cos v, -\cos u \cos v, -\sin v)$, se concluye que $E = \sin^2 v$, $F = 0$, $G = 1$.

Ejemplo 10.5. Consideremos la parametrización del **cono** dada por

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u).$$

Como $X_u = (\cos v, \sin v, 1)$ y $X_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$, se concluye inmediatamente que $E = 2$, $F = 0$, $G = u^2$.

Ejemplo 10.6. Consideremos la parametrización del **helicoides**

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u),$$

donde $0 < u < 2\pi$ y $v \in \mathbb{R}$. Un cálculo sencillo muestra que $E = 1 + v^2$, $F = 0$ y $G = 1$.

La primera forma fundamental da la geometría de la superficie. Podemos por ejemplo utilizarla para calcular la **longitud de curvas** en S . Sea $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva en S . Entonces

$$L(\alpha) = \int_I \sqrt{I_p(\alpha'(t))} dt.$$

Podemos utilizar la primera forma fundamental para calcular **ángulos entre curvas**: si α y β son curvas en una superficie S tales que $\alpha(0) = \beta(0)$, y θ es el ángulo que forman $\alpha'(0)$ y $\beta'(0)$, entonces

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle}{\|\alpha'(0)\| \|\beta'(0)\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

También podemos utilizar la primera forma fundamental para el **cálculo de áreas**. Recordemos que un **dominio** en una superficie S es un abierto conexo $D \subseteq S$ tal que ∂D es la imagen del círculo S^1 por un homeomorfismo diferenciable a trozos. Una **región** R es la unión de un dominio D junto con su frontera ∂D . Definimos entonces el área de un dominio R como

$$\text{área}(R) = \int_{X^{-1}(R)} \|X_u \times X_v\| du dv.$$

Esta definición no depende de la parametrización X pues si $Y: V \rightarrow Y(V)$ es otra parametrización tal que $R \subseteq X(U) \cap Y(V)$, la fórmula de cambio de variables implica que

$$\int_{X^{-1}(U)} \|X_u \times X_v\| du dv = \int_{Y^{-1}(R)} \|Y_u \times Y_v\| du dv.$$

Para ver que podemos escribir el área en términos de la primera forma fundamental necesitamos la **identidad de Lagrange**:

$$\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 = \langle v \times w, v \times w \rangle.$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^3$. Para demostrar rápidamente esta identidad alcanza con recordar que si θ es el ángulo que forman v y w , entonces

$$\langle v, v \rangle^2 = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \cos^2 \theta, \quad \langle v \times w, v \times w \rangle^2 = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \sin^2 \theta.$$

Luego

$$\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v \times w, v \times w \rangle^2 = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle (1 - \sin^2 \theta) = \langle v, w \rangle^2.$$

Se tiene entonces la siguiente fórmula:

$$\text{área}(R) = \int_{X^{-1}(U)} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Capítulo 11

La segunda forma fundamental

La **segunda forma fundamental** de una superficie orientable S en un punto p se define como la función

$$\Pi_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto -\langle (dN)_p(v), w \rangle.$$

Veamos una interpretación geométrica. Sea γ una curva en S parametrizada por longitud de arco. Como el vector normal N a la superficie S es unitario y perpendicular a γ' , los vectores N y $N \times \gamma'$ son perpendiculares y unitarios. Además $1 = \|\gamma'\|^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle$ pues γ está parametrizada por longitud de arco, al derivar obtenemos que $0 = \langle \gamma'', \gamma' \rangle$. Como γ'' es perpendicular a γ' , existen funciones κ_N y κ_g tales que

$$\gamma'' = \kappa_N N + \kappa_g N \times \gamma' \quad (11.1)$$

eq:Nyg

La función κ_N se conoce como la **curvatura normal** de γ . La función κ_g es la **curvatura geodésica** de γ . Como $\{\gamma', N, N \times \gamma'\}$ es un conjunto ortonormal, la fórmula (11.1) implica que

$$\kappa_N = \langle \gamma'', N \rangle, \quad \kappa_g = \langle \gamma'', N \times \gamma' \rangle.$$

Lema 11.1. Sea κ la curvatura de γ vista como curva en \mathbb{R}^3 . Si n es el vector normal a la curva γ , sea θ tal que $\cos \theta = \langle n, N \rangle$. Valen las siguientes fórmulas:

$$\kappa^2 = \kappa_N^2 + \kappa_g^2, \quad \kappa_N = \kappa \cos \theta, \quad \kappa_g = \pm \kappa \sin \theta. \quad (11.2)$$

Demostración. Como γ está parametrizada por longitud de arco y los vectores N y $N \times \gamma'$ son unitarios, la curvatura κ de γ verifica que

$$\kappa^2 = \|\gamma''\|^2 = \langle \gamma'', \gamma'' \rangle = \langle \kappa_N N + \kappa_g N \times \gamma', \kappa_N N + \kappa_g N \times \gamma' \rangle = \kappa_N^2 + \kappa_g^2.$$

Como $\gamma'' = \kappa n$, entonces $\kappa \cos \theta = \langle \kappa n, N \rangle = \langle \gamma'', N \rangle = \kappa_N$.

De la fórmula $\kappa^2 = \kappa_N^2 + \kappa_g^2 = \kappa^2 \cos^2 \theta + \kappa_g^2$ se obtiene inmediatamente que $\kappa_g^2 = \kappa^2(1 - \cos^2 \theta)$ y luego $\kappa_g = \pm \kappa \sin \theta$. \square

Demostraremos a continuación que dos curvas de una superficie que se cortan en un mismo punto p y tienen tangentes paralelos en p tienen la misma curvatura normal en ese punto p .

Teorema 11.2 (Meusnier). *Sea S una superficie orientable y sea γ una curva en S parametrizada por longitud de arco. Entonces*

$$\kappa_N(s) = \Pi_{\gamma(s)}(\gamma'(s)).$$

Demostración. Si $N(s) = N(\gamma(s))$, entonces $N'(s) = (dN)_{\gamma(s)}(\gamma'(s))$. Además como $\langle N(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, al derivar obtenemos que $\langle N'(s), \gamma'(s) \rangle + \langle N(s), \gamma''(s) \rangle = 0$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) &= \langle -(dN)_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), \gamma'(s) \rangle \\ &= \langle -N'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle N(s), \gamma''(s) \rangle = \kappa_N(s). \end{aligned} \quad \square$$

Veamos cómo calcular la curvatura normal en un punto p a lo largo de una dirección v de $T_p S$. Supongamos que $\|v\| = 1$ y sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de $T_p S$ tal que $-(dN)_p(e_i) = k_i e_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Podemos escribir entonces

$$v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2,$$

pues $\cos \theta = \langle v, e_1 \rangle$ y $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \langle v, e_2 \rangle$. Luego

$$\begin{aligned} \kappa_N &= \Pi_p(v) = -\langle (dN)_p(v), v \rangle \\ &= -\langle (dN)_p(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2), \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (11.3) \quad \boxed{\text{eq:Euler}}$$

La expresión (11.3) se conoce como la **fórmula de Euler**.

thm:k1min_k2max

Teorema 11.3. *Si S es una superficie orientada y $p \in S$, entonces*

$$k_1(p) = \min\{\Pi_p(v) : v \in T_p S\}, \quad k_2(p) = \max\{\Pi_p(v) : v \in T_p S\}.$$

Demostración. Veamos que como $k_1(p) \leq k_2(p)$, entonces $k_1(p)$ es el mínimo y $k_2(p)$ es el máximo de las curvaturas normales de las curvas de la superficie que pasan por el punto p . En efecto,

$$\begin{aligned} \kappa_N &= (\cos^2 \theta)k_1 + (\sin^2 \theta)k_2 \\ &= k_1(1 - \sin^2 \theta) + k_2 \sin^2 \theta = (k_2 - k_1) \sin^2 \theta + k_1 \geq k_1; \end{aligned}$$

y vale la igualdad si y sólo si $\theta \in \{0, \pi\}$ (es decir, si y sólo si γ' es paralelo a e_1). Similarmente vemos que $\kappa_N \leq k_2$ y vale la igualdad si y sólo si γ' y e_2 son paralelos. \square

Definición 11.4. Un punto p de una superficie se dice **elíptico** si $K(p) > 0$.

Vimos que todo punto de la esfera es elíptico.

thm:compacta_eliptico

Teorema 11.5. *Toda superficie compacta contiene al menos un punto elíptico.*

Demostración. Sea $h: S \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \|x\|^2$. Como h es continua y S es compacto, h alcanza su máximo en un punto $p \in S$. Sea γ una curva en S parametrizada por longitud de arco tal que $\gamma(0) = p$. Como entonces $h \circ \gamma$ alcanza su máximo en $t = 0$,

$$\frac{d}{dt}(h \circ \gamma)(0) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}(h \circ \gamma)(0) \leq 0.$$

Como γ está parametrizada por longitud de arco, al derivar $h \circ \gamma(t) = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h \circ \gamma)(t) &= 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle, \\ \frac{d^2}{dt^2}(h \circ \gamma)(t) &= 2\langle \gamma''(t), \gamma(t) \rangle + 2\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2(1 + \langle \gamma''(t), \gamma(t) \rangle). \end{aligned}$$

Al evaluar la primera fórmula en $t = 0$, $\langle p, \gamma'(0) \rangle = 0$, que nos dice p es ortogonal a cualquier vector tangente a S en p . Luego $N(p) = \pm p/\|p\|$. Al evaluar la segunda fórmula en $t = 0$,

$$\langle \gamma''(0), p \rangle + 1 \leq 0.$$

Sin perder generalidad supongamos que $N(p) = p/\|p\|$. Como por definición curvatura normal de γ en $t = 0$ es $\kappa_N(0) = \langle \gamma''(0), N(p) \rangle$, la desigualdad anterior puede reescribirse entonces como $\kappa_N(p) \leq -1/\|p\|$ y esta desigualdad vale para cualquier curvatura normal. Como $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son el mínimo y el máximo de las curvaturas normales, se concluye que $k_j(p) \leq -1/\|p\|$ para todo $j \in \{1, 2\}$. En consecuencia,

$$K(p) = k_1(p)k_2(p) \geq \frac{1}{\|p\|^2} > 0.$$

De forma similar se trata el caso en que $N(p) = -p/\|p\|$. □

Las superficies donde la curvatura media es siempre nula son de interés y se conocen como **superficies mínimas**.

Corolario 11.6. *No existen superficies mínimas compactas.*

Demostración. Si S es una superficie mínima, entonces, como $H(p) = 0$ para todo $p \in S$, se tiene que $-k_1(p) = k_2(p)$. Como entonces $K(p) = k_1(p)k_2(p) \leq 0$, el teorema anterior implica que S no puede ser compacta. □

En el teorema 11.5 es necesario suponer que la superficie es compacta. Veremos por ejemplo que la superficie $z = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$ tiene curvatura gaussiana siempre negativa (en este caso, nuestra superficie no es acotada). Puede probarse además que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$ es una superficie que tiene curvatura siempre cero (en este caso, nuestra superficie no es cerrada). Observemos que no tiene sentido considerar $\{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ ya que este conjunto no es una superficie.

Definición 11.7. Un punto p de una superficie se dice **hiperbólico** si $K(p) < 0$.

Vimos en el ejemplo 9.16 que el punto $(0, 0, 0)$ es un punto hiperbólico del paraboloides hiperbólico $z = y^2 - x^2$.

Definición 11.8. Un punto p de una superficie se dice **parabólico** si $K(p) = 0$ y además $(dN)_p \neq 0$.

Vimos en el ejemplo 9.15 que los puntos del cilindro son parabólicos.

Definición 11.9. Diremos que un punto p de una superficie es **plano** si $(dN)_p = 0$.

Obviamente todo punto de un plano es un punto plano. Más adelante veremos ejemplos no triviales de puntos planos.

Definición 11.10. Un punto p de una superficie se dice **umbílico** si $k_1(p) = k_2(p)$.

Vimos que todo punto de la esfera o de un plano es umbílico. Veremos más adelante que el punto $(0, 0, 0)$ es un punto umbílico y no plano de la superficie $z = x^2 + y^2$.

Nuestro objetivo ahora es entender qué significan estas definiciones y poder realizar cálculos. Vamos encontrar los **coeficientes de la segunda forma fundamental**. Sea $X: U \rightarrow X(U)$ una parametrización de una superficie S y sea α una curva en S , digamos

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)).$$

Al derivar obtenemos

$$\alpha'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t),$$

donde sabemos que X_u denota a la función $X_u(u(t), v(t))$ y X_v denota a la función $X_v(u(t), v(t))$. Queremos calcular

$$\Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \langle -(dN)_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle.$$

Al desarrollar la expresión

$$\Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \langle -(dN)_{\alpha(t)}(X_u u'(t) + X_v v'(t)), X_u u'(t) + X_v v'(t) \rangle$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= u'(t)^2 \langle -(dN)_p(X_u), X_u \rangle + u'(t)v'(t) \langle -(dN)_p(X_u), X_v \rangle \\ &\quad + u'(t)v'(t) \langle -(dN)_p(X_v), X_u \rangle + v'(t)^2 \langle -(dN)_p(X_v), X_v \rangle. \end{aligned}$$

Como además $(dN)_{\alpha(t)}(X_u) = (N_X)_u$ y $(dN)_{\alpha(t)}(X_v) = (N_X)_v$, $X_{uv} = X_{vu}$ y

$$\begin{aligned} \langle -(dN)_{\alpha(t)}X_u, X_u \rangle &= \langle -(N_X)_u, X_u \rangle = \langle N_X, X_{uu} \rangle, \\ \langle -(dN)_{\alpha(t)}X_u, X_v \rangle &= \langle -(N_X)_u, X_v \rangle = \langle N_X, X_{uv} \rangle, \\ \langle -(dN)_{\alpha(t)}X_v, X_u \rangle &= \langle -(N_X)_v, X_u \rangle = \langle N_X, X_{vu} \rangle, \\ \langle -(dN)_{\alpha(t)}X_v, X_v \rangle &= \langle -(N_X)_v, X_v \rangle = \langle N_X, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

se concluye que

$$\Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = u'(t)^2 e + 2u'(t)v'(t)f + v'(t)^2 g,$$

donde

$$e = \langle N_X, X_{uu} \rangle, \quad f = \langle N_X, X_{uv} \rangle, \quad g = \langle N_X, X_{vv} \rangle.$$

Es importante recordar que e , f y g son en realidad funciones $U \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposición 11.11. Sea $X: U \rightarrow X(U)$ una parametrización de una superficie S . Las funciones $e, f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables.

Demostración. Las funciones $e, f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables pues pueden escribirse como

$$\begin{aligned} e &= \langle N_X, X_{uu} \rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle, \\ f &= \langle N_X, X_{uv} \rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \langle X_u \times X_v, X_{uv} \rangle, \\ g &= \langle N_X, X_{vv} \rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \langle X_u \times X_v, X_{vv} \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Estamos ahora en condiciones de explicar la terminología introducida. Sea S una superficie y $p \in S$. Sabemos que en un entorno de p , S es la superficie dada por el gráfico de una función h diferenciable. Sea entonces X una parametrización en p de la forma

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)),$$

donde h es una función diferenciable.

Para simplificar la presentación supongamos que $p = (0, 0, 0)$ y que $T_p S$ es el plano $z = 0$ con normal $N_X = (0, 0, 1)$. Como $p = (0, 0, 0) = X(0, 0)$, entonces $h(0, 0) = 0$. Además

$$X_u = (1, 0, h_u), \quad X_v = (0, 1, h_v),$$

y entonces $h_u(0, 0) = h_v(0, 0) = 0$ pues $X_u \times X_v$ es perpendicular al plano $T_p S$. El teorema de Taylor nos permite escribir

$$\begin{aligned} h(u, v) &= h(0, 0) + uh_u(0, 0) + vh_v(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(u^2 h_{uu}(0, 0) + 2uv h_{uv}(0, 0) + v^2 h_{vv}(0, 0)) + \dots \end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos indican términos que involucran monomios en u y v de orden ≥ 3 . Esto nos dice que cerca del $(0, 0)$ la función h se parece a la función

$$z(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 h_{uu}(0, 0) + 2uv h_{uv}(0, 0) + v^2 h_{vv}(0, 0))$$

y luego $X(u, v)$ es aproximadamente igual a $(u, v, z(u, v))$ cerca de $(0, 0)$. Como

$$X_{uu} = (0, 0, h_{uu}), \quad X_{uv} = (0, 0, h_{uv}), \quad X_{vv} = (0, 0, h_{vv}),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} h(u, v) &= \langle X(u, v), N \rangle \sim z(u, v) \\ &= \frac{1}{2}(u^2 h_{uu}(0, 0) + 2uv h_{uv}(0, 0) + v^2 h_{vv}(0, 0)) \\ &= \frac{1}{2}(u^2 \langle X_{uu}(0, 0), N \rangle + 2uv \langle X_{uv}(0, 0), N \rangle + v^2 \langle X_{vv}(0, 0), N \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(u^2 e(0, 0) + 2uv f(0, 0) + v^2 g(0, 0)) \\ &= \frac{1}{2} \Pi_p(u, v, 0). \end{aligned}$$

Sean e_1 y e_2 las direcciones principales de S en p y para simplificar la presentación supongamos que $e_1 = (1, 0, 0)$ y $e_2 = (0, 1, 0)$. Sean k_1 y k_2 tales que $-(dN)_p(e_i) = k_i e_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Si escribimos al vector tangente $(x, y, 0)$ como

$$(x, y, 0) = x e_1 + y e_2,$$

entonces

$$-(dN)_p(x, y, 0) = -(dN)_p(x e_1 + y e_2) = x k_1 e_1 + y k_2 e_2 = (x k_1, y k_2, 0)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} 2z(x, y) &= \Pi_p(x, y, 0) \\ &= \langle -(dN)_p(x, y, 0), (x, y, 0) \rangle = \langle (k_1 x, k_2 y, 0), (x, y, 0) \rangle = k_1 x^2 + k_2 y^2. \end{aligned}$$

Esto nos dice que cerca del punto p la superficie S se parece a la superficie dada por la ecuación

$$2z = k_1 x^2 + k_2 y^2. \quad (11.4)$$

eq: z=f(x, y)

Hay entonces cuatro casos para considerar:

- Si $k_1 k_2 > 0$, entonces (11.4) es la ecuación de un paraboloides elíptico y por eso p es un punto elíptico.
- Si $k_1 k_2 < 0$, entonces (11.4) es la ecuación de un paraboloides hiperbólico y por eso p es un punto hiperbólico.
- Si $k_1 k_2 = 0$ y $k_1 + k_2 \neq 0$, entonces (11.4) es la ecuación de un cilindro parabólico y por eso p es un punto parabólico.
- Si $k_1 = k_2 = 0$, entonces (11.4) es la ecuación de un plano y por eso p es un punto plano.

La explicación anterior motiva además otra interpretación geométrica de la curvatura gaussiana. Si p es un punto de una superficie S entonces valen las siguientes afirmaciones:

- Si $K(p) > 0$, existe un entorno V de p en S tal que todo punto de V está de un mismo lado del plano $p + T_p S$. $S \cap U \setminus \{p\}$ son disjuntos.
- Si $K(p) < 0$, todo entorno p contiene puntos de ambos lados de $p + T_p S$. entre el plano $p + T_p S$ y el conjunto $S \cap U \setminus \{p\}$ es no vacía.

Como consecuencia de este resultado podríamos demostrar que toda superficie con curvatura gaussiana positiva es orientable.

thm:umbilico

Teorema 11.12. *Si S es una superficie conexa tal que todos sus puntos son umbilicos, entonces S es un abierto de un plano o de una esfera.*

Demostración. Sea $X: U \rightarrow X(U) \subseteq S$ una parametrización. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U es conexo. Por el lema 9.11,

$$(dN)_{X(u,v)}X_u(u,v) = (N_X)_u(u,v), \quad (dN)_{X(u,v)}X_v(u,v) = (N_X)_v(u,v)$$

para todo $(u,v) \in U$. Como el punto $X(u,v)$ es umbilico, en ese punto las curvaturas principales coinciden y luego $(dN)_{X(u,v)}$ es un múltiplo escalar de la identidad del tangente a S en $X(u,v)$. Esto implica que existe una función $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(dN)_{X(u,v)}(w) = \lambda(u,v)w$$

para todo $w \in T_{X(u,v)}S$. Como

$$(N_X)_u = \lambda X_u, \quad (N_X)_v = \lambda X_v. \quad (11.5)$$

eq:NcircX

la función λ resulta diferenciable. En efecto, las funciones $(N_X)_u$ y X_u son diferenciables y vale que $\langle (N_X)_u, X_u \rangle = \langle \lambda X_u, X_u \rangle = \lambda \langle X_u, X_u \rangle$. Como $X_u \neq 0$, podemos escribir a λ como

$$\lambda = \frac{\langle (N_X)_u, X_u \rangle}{\|X_u\|^2}.$$

Al derivar las fórmulas (11.5) obtenemos

$$(N_X)_{uv} = \lambda_v X_u + \lambda X_{uv}, \quad (N_X)_{vu} = \lambda_u X_v + \lambda X_{vu}$$

y luego $\lambda_u X_v = \lambda_v X_u$. Pero como X_u y X_v son linealmente independientes, se concluye que $\lambda_u = \lambda_v = 0$. Luego λ es una función constante pues U es conexo.

Vamos ahora a distinguir dos casos.

Supongamos primero que $\lambda = 0$. Las fórmulas de (11.5) implican entonces que N_X es constante. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle X(u,v), N_X \rangle &= \langle X_u(u,v), N_X \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle X(u,v), N_X \rangle &= \langle X_v(u,v), N_X \rangle = 0, \end{aligned}$$

existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\langle X(u, v), N_X \rangle = c$ para todo $(u, v) \in U$. Luego $X(U)$ está contenido en el plano $\{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, N_X \rangle = c\}$.

Supongamos ahora que $\lambda \neq 0$. Por las fórmulas de (11.5) sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(X(u, v) - \frac{1}{\lambda} N_X(u, v) \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(X(u, v) - \frac{1}{\lambda} N_X(u, v) \right) = 0,$$

y luego existe un $c \in \mathbb{R}^3$ tal que $X(u, v) - \frac{1}{\lambda} N_X(u, v) = c$ para todo $(u, v) \in U$. Como entonces

$$\|X(u, v) - c\|^2 = \frac{1}{\lambda^2} \langle N_X, N_X \rangle = \frac{1}{\lambda^2},$$

se concluye que $X(U)$ queda contenido en una esfera de radio $\frac{1}{|\lambda|}$.

Quedó demostrado entonces el teorema en el caso en que la superficie pueda cubrirse con una única parametrización. Probamos además que cada parche queda contenido en un plano o en una esfera. Si dos parches tienen intersección no vacía, entonces ambos estarán contenidos en la misma esfera o en el mismo plano. \square

Para obtener un corolario del teorema anterior necesitamos un lema:

Lema 11.13. *Sea S y T superficies tales que $S \subseteq T$. Si S es compacta y T es conexa, entonces $S = T$.*

Demostración. Como S es compacto, es cerrado en T pues $S = S \cap T$. Además S es abierto y luego $S = S \cap T$ es abierto en S . Como T es conexo y S es no vacío, se concluye que $S = T$. \square

thm:es_esfera

Teorema 11.14. *Si S es una superficie compacta y conexa tal que todos sus puntos son umbílicos, entonces S es una esfera.*

Demostración. Sabemos por el teorema 11.12 que S está contenida en una superficie T y que T es un plano o una esfera. Como S es compacta y T es conexa, $S = T$ por el lema anterior. Luego S es una esfera ya que los planos no son superficies compactas. \square

Proposición 11.15. *Sea $X: U \rightarrow X(U)$ una parametrización de una superficie S . Entonces*

$$K(X(u, v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H(X(u, v)) = \frac{1}{2} \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}.$$

En particular, K y H también son funciones diferenciables.

Demostración. Como

$$-(N_X)_u = -(dN)_{X(u, v)}(X_u) \in T_{X(u, v)}S, \quad -(N_X)_v = -(dN)_{X(u, v)}(X_v) \in T_{X(u, v)}S,$$

existen escalares a_{ij} tales que

$$\begin{aligned} -(N_X)_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ -(N_X)_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned}$$

Luego $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es la matriz de $-(dN)_{X(u,v)}$ en la base $\{X_u, X_v\}$ y luego $K(X(u,v)) = \det A$ y $H(X(u,v)) = -\frac{1}{2} \text{traza} A$. Calculamos

$$\begin{aligned} e &= \langle -(N_X)_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ f &= \langle -(N_X)_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ f &= \langle -(N_X)_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ g &= \langle -(N_X)_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

y escribimos matricialmente estas ecuaciones como

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Al aplicar determinante obtenemos

$$eg - f^2 = (EG - F^2)K(X(u,v)),$$

y luego, como $EG - F^2 = \|X_u \times X_v\|^2 > 0$, K es una función diferenciable pues

$$K(X(u,v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

es diferenciable. Como $\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 = \|X_u \times X_v\|^2 > 0$, la matriz $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ es inversible y su inversa es

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Luego H también es diferenciable pues

$$H(X(u,v)) = \frac{1}{2} \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}$$

es una función diferenciable. \square

Ejemplo 11.16. Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 + y^2\}$. Utilizaremos la parametrización global

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2 + v^2}{2}\right).$$

Primero calculamos

$$X_u = (1, 0, u), \quad X_v = (0, 1, v), \quad X_{uu} = X_{vv} = (0, 0, 1), \quad X_{uv} = (0, 0, 0).$$

Como $X_u \times X_v = (-u, -v, 1)$,

$$N_X = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(-u, -v, 1).$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = 1 + u^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + v^2,$$

y los de la segunda

$$e = g = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \quad f = 0$$

Luego

$$K(X(u, v)) = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} > 0.$$

y entonces todos los puntos de S son elípticos. Además

$$H(X(u, v)) = \frac{1}{2} \frac{2+u^2+v^2}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}.$$

Podemos ver un gráfico de la superficie S en la figura 11.1. El código `gnuplot` utilizado para producir esta figura es el siguiente:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set iso 50,30
gnuplot> set urange [-5:5]
gnuplot> set vrange [-pi:pi]
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> unset xtics
gnuplot> unset ytics
gnuplot> unset ztics
gnuplot> set key off
gnuplot> set view 70,130
gnuplot> splot u, v, 0.5*(v**2+u**2)
```

exa:helicoide

Ejemplo 11.17. Sea S el helicoide parametrizado por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} X_u &= (-v \sin u, v \cos u, 1), & X_v &= (\cos u, \sin u, 0), \\ N_X &= \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}(-\sin u, \cos u, -v), & X_{uu} &= (-v \cos u, -v \sin u, 0), \\ X_{uv} &= (-\sin u, \cos u, 0), & X_{vv} &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

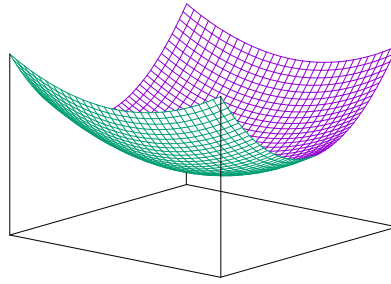


fig:eliptico

Figura 11.1: El paraboloide elíptico.

Los coeficientes de las formas fundamentales son entonces

$$E = 1 + v^2, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad e = g = 0, \quad f = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}.$$

Luego todo punto de S es elíptico pues

$$K(X(u, v)) = -\frac{1}{(1 + v^2)^2} > 0.$$

Además $H(X(u, v)) = 0$. Podemos ver un gráfico de S en la figura

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set isosamples 50,30
gnuplot> set urange [-pi:pi]
gnuplot> set vrange [-pi:pi]
gnuplot> set hidd
gnuplot> unset xtics
gnuplot> unset ytics
gnuplot> unset ztics
gnuplot> set key off
gnuplot> set view 60,300
gnuplot> splot v*cos(u), v*sin(u), u
```

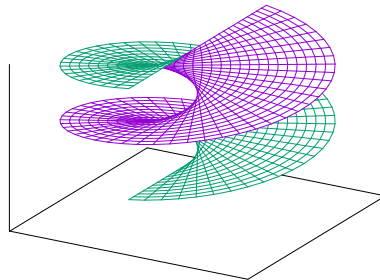


fig:helicoido

Figura 11.2: El helicoido.

Ejemplo 11.18. Sea S la superficie parametrizada por

$$X(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u).$$

Veamos que el punto $X(0, 0)$ es un punto plano. Primero calculamos

$$X_u = (1, 0, 3(u^2 - v^2)), \quad X_v = (0, 1, -6vu)$$

y luego $X_u(0, 0) = (1, 0, 0)$, $X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$ y $N_X(0, 0) = (0, 0, 1)$. Calculemos ahora

$$X_{uu} = (0, 0, 6u), \quad X_{uv} = (0, 0, -6v), \quad X_{vv} = (0, 0, -6u)$$

y entonces $X_{uu}(0, 0) = X_{uv}(0, 0) = X_{vv}(0, 0) = (0, 0, 0)$. Los coeficientes de las forma fundamentales son entonces

$$E(0, 0) = G(0, 0) = 1, \quad F(0, 0) = 0, \quad e(0, 0) = f(0, 0) = g(0, 0) = 0.$$

Luego $-(dN)_{X(0,0)} = 0$ pues su matriz en la base $\{X_u(0, 0), X_v(0, 0)\}$ es

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El código

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set isosamples 50, 30
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> unset xtics
gnuplot> unset ytics
gnuplot> unset ztics
gnuplot> set key off
gnuplot> set view 75, 125
gnuplot> splot u, v, u**3-3*v**2*u
```

produce el gráfico de S que vemos en la figura 11.3.

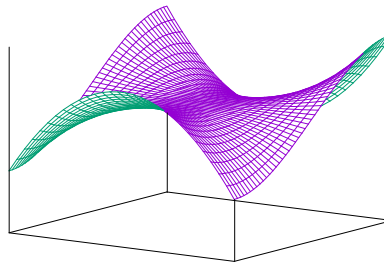


fig:monkey

Figura 11.3: La silla de montar del mono.

exa:revolucion

Ejemplo 11.19 (superficies de revolución). Sea γ una curva regular sin autointersecciones contenida en el semiplano $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$, digamos

$$\gamma(u) = (\sigma(u), 0, \tau(u)), \quad u \in I.$$

Vamos a considerar la superficie S que se obtiene al rotar la **curva generatriz** γ alrededor del eje z . Es decir, todo punto de $q \in S$ se obtiene de haber rotado en un ángulo v un punto p de la imagen de γ alrededor del eje z .

Si $p = \gamma(u) = (\sigma(u), 0, \tau(u))$ es un punto de la curva, entonces todo punto q de la superficie S puede escribirse como

$$X(u, v) = (\sigma(u) \cos v, \sigma(u) \sin v, \tau(u)).$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$\begin{aligned} X_u &= (\sigma'(u) \cos v, \sigma'(u) \sin v, \tau'(u)), \\ X_v &= (-\sigma(u) \sin v, \sigma(u) \cos v, 0), \\ X_u \times X_v &= (-\tau'(u) \sigma(u) \cos v, -\tau'(u) \sigma(u) \sin v, \sigma'(u) \sigma(u)), \end{aligned}$$

y luego

$$\|X_u \times X_v\|^2 = \sigma^2(u)(\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2) \neq 0$$

pues la curva γ es regular. Puede demostrarse fácilmente que $X: I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización. Esta parametrización no cubre la totalidad de la superficie de revolución pero si utilizamos otra parametrización similar a X , digamos por ejemplo

$$Y: I \times (-\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Y(u, v) = X(u, v),$$

se concluye que S es una superficie.

Calculemos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$E(u, v) = \sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = \sigma^2(u).$$

Como

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (\sigma''(u) \cos v, \sigma''(u) \sin v, \tau''(u)), \\ X_{uv} &= (-\sigma'(u) \sin v, \sigma'(u) \cos v, 0), \\ X_{vv} &= (-\sigma(u) \cos v, -\sigma(u) \sin v, 0), \end{aligned}$$

y además $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \sigma(u) \sqrt{\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2}$, los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$e(u, v) = \frac{\tau''(u)\sigma'(u) - \sigma''(u)\tau'(u)}{\sqrt{\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2}} = \frac{\det \begin{pmatrix} \sigma'(u) & \tau'(u) \\ \sigma''(u) & \tau''(u) \end{pmatrix}}{\sqrt{\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2}},$$

$$f(u, v) = 0,$$

$$g(u, v) = \frac{\tau'(u)\sigma(u)}{\sqrt{\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2}}.$$

Como $F = f = 0$, las curvaturas principales son entonces

$$\frac{e}{E}(u, v) = \frac{\tau''(u)\sigma'(u) - \sigma''(u)\tau'(u)}{(\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2)^{3/2}} \quad \frac{g}{G}(u, v) = \frac{\tau'(u)}{\sigma(u)\sqrt{\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2}}$$

y luego la curvatura gaussiana es

$$K \circ X(u, v) = \frac{\tau'(\tau''\sigma' - \tau'\sigma'')}{\sigma(\sigma'^2 + \tau'^2)^2}(u).$$

Lo hecho en el ejemplo anterior por supuesto nos da también una fórmula para la curvatura media. Si la curva γ estuviera parametrizada por longitud de arco, las fórmulas para las curvaturas quedarían mucho más sencillas. En efecto, si

$$\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2 = 1$$

para todo u , al derivar esta expresión, $\sigma'(u)\sigma''(u) + \tau'(u)\tau''(u) = 0$. Al reemplazar esto en la fórmula para la curvatura gaussiana se concluye que

$$K \circ X(u, v) = -\frac{\sigma''}{\sigma}(u).$$

Veamos algunos ejemplos concretos de cálculo de curvaturas de superficies de revolución.

Ejemplo 11.20. Calculemos la curvatura gaussiana del toro que vemos en la figura 11.4 y que se obtiene de rotar la curva

$$\sigma(u) = 3 + \cos u, \quad \tau(u) = \sin u.$$

Tal como hicimos en el ejemplo anterior consideramos la parametrización

$$X(u, v) = ((3 + \cos u) \cos v, (3 + \cos u) \sin v, \sin u).$$

Como

$$\sigma'(u) = -\sin u, \quad \sigma''(u) = -\cos u, \quad \tau'(u) = \cos u, \quad \tau''(u) = -\sin u,$$

vemos que $\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2 = 1$ para todo u . Las curvaturas son

$$K = \frac{\cos u}{3 + \cos u}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{3 + 2 \cos u}{3 + \cos u}.$$

El código que produce la figura 11.4 es el siguiente:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set isosamples 50,30
gnuplot> set hidd
gnuplot> unset xtics
gnuplot> unset ytics
gnuplot> unset ztics
gnuplot> set key off
gnuplot> set view 36,16
gnuplot> splot [-pi:pi][-pi:pi] (3+cos(u))*cos(v), \
> (3+cos(u))*sin(v), sin(u)
```

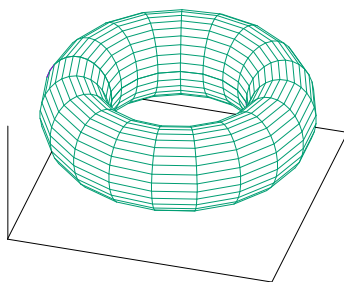


fig:toro

Figura 11.4: El toro.

exa:catenoide

Ejemplo 11.21. Calculemos ahora las curvaturas del catenoide, que se obtiene de rotar la curva catenaria

$$\sigma(u) = \cosh u, \quad \tau(u) = u.$$

Vemos en la figura 11.5 un gráfico de esta superficie de revolución. Consideremos la parametrización

$$X(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u).$$

Calculamos:

$$\sigma'(u) = \sinh u, \quad \sigma''(u) = \cosh u, \quad \tau'(u) = 1, \quad \tau''(u) = 0.$$

Como $\sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u$, al usar las fórmulas del ejemplo anterior vemos que las curvaturas principales son entonces

$$\frac{e}{E} = \frac{-1}{\cosh^2 u}, \quad \frac{g}{G} = \frac{1}{\cosh^2 u}.$$

Luego

$$K \circ X(u, v) = \frac{-1}{\cosh^4 u},$$

$$H \circ X(u, v) = 0.$$

El código que produce la figura 11.5 es el siguiente:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set isosamples 50,30
gnuplot> set hidd
gnuplot> unset xtics
gnuplot> unset ytics
gnuplot> unset ztics
gnuplot> set key off
gnuplot> set view 70,200
gnuplot> splot cosh(u)*cos(v), cosh(u)*sin(v),u
```

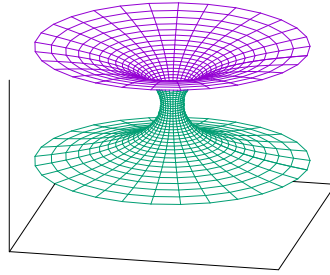


fig:catenoide

Figura 11.5: La catenoide.

Para finalizar esta sección vamos a construir una superficie con curvatura constante negativa. Comenzamos con una curva $\gamma(u) = (\sigma(u), \tau(u))$ parametrizada por longitud de arco. Consideramos la parametrización

$$X(u, v) = (\sigma(u) \cos v, \sigma(u) \sin v, \tau(u))$$

de la superficie de revolución obtenida al rotar γ alrededor del eje z . Sabemos que la curvatura de esta superficie está dada por

$$K(X(u, v)) = -\frac{\sigma''(u)}{\sigma(u)}$$

Si queremos que nuestra superficie tenga curvatura constante igual a -1 , entonces $\sigma(u) = ae^u + be^{-u}$ para constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Si suponemos que $a = 1$ y $b = 0$ y que $u \leq 0$, entonces $\sigma(u) = e^u$ y luego, como $\sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2 = 1$,

$$\tau(u) = \int \sqrt{1 - e^{2u}} du.$$

Si utilizamos la sustitución $\cosh t = e^u$ y hacemos que la constante de integración sea igual a cero, obtenemos

$$\tau(u) = \sqrt{1 - e^{2u}} - \log(e^{-u} + \sqrt{e^{-2u} - 1}).$$

Como $x = \sigma(u)$, $z = \tau(u)$ y $\cosh^{-1} v = \log(v + \sqrt{v^2 - 1})$, se concluye que la curva γ puede escribirse como

$$z = \sqrt{1 - x^2} - \cosh^{-1}(1/x).$$

La superficie que construimos puede verse en la figura 11.6 y se conoce como **pseudo-esfera**.

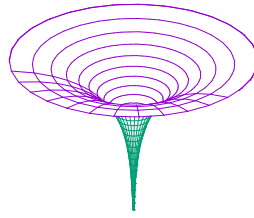


fig:pseudo

Figura 11.6: La pseudo-esfera.

La curva γ que utilizamos para construir esta superficie de revolución se conoce como la **tractriz** y puede verse en la figura 11.7.

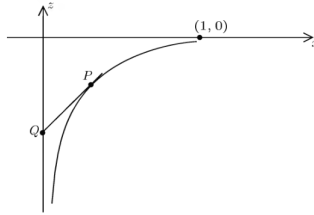


fig:tractriz

Figura 11.7: La tractriz.

Esta curva tiene una interesante propiedad geométrica: Sea P un punto de γ y sea Q la intersección entre la tangente a γ en P y el eje z . Veamos que la distancia entre P y Q es constantemente igual a uno: si $P = (x_0, z_0)$, entonces

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

y luego la tangente en P es

$$z - z_0 = \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0}(x - x_0).$$

Esta recta corta al eje z en el punto $(0, z_1)$, donde $z_1 - z_0 = -\sqrt{1 - x_0^2}$. Luego la distancia entre P y Q es siempre igual a 1 pues $x_0^2 + (z_1 - z_0)^2 = 1$. La tractriz suele describirse así: Supongamos que un nene tiene un autito atado con un cordón de longitud fija igual a uno. Si el nene está ubicado inicialmente en $(0, 0)$ el autito se ubicará en el punto $(1, 0)$. Si el nene camina sobre el eje z en la dirección de los negativos, el autito se moverá a lo largo de la tractriz.

Ejemplo 11.22. Otra familia de superficies de interés es la familia de superficies regladas. Una superficie se dirá **reglada** si puede escribirse como unión de líneas rectas. Una parametrización

$$X(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

donde γ y δ son curvas que cumplen ciertas condiciones que garantizan que X sea la parametrización de una superficie. (Por ejemplo, el cono que vemos en la figura 11.8 será una superficie siempre y cuando quitemos el origen de coordenadas.) Las líneas rectas de nuestra superficie serán $v \mapsto \gamma(u) + v\delta(u)$.

En la figura 11.8 vemos algunos ejemplos de superficies regladas. La banda de Möbius también es una superficie reglada.

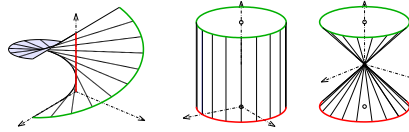


Figura 11.8: Algunas superficies regladas.

fig:reglada

Supongamos que X es la parametrización de una superficie reglada. Calculamos

$$X_u = \gamma' + v\delta', \quad X_v = \delta, \quad X_{uv} = \delta', \quad X_{vv} = 0.$$

Como $f = \langle \delta', N_X \rangle$ y $g = 0$, se concluye entonces que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\langle \delta', N_X \rangle}{EG - F^2} \leq 0.$$

Ejemplo 11.23. Los **cilindros generalizados** son ejemplos de superficies regladas. Para definirlos necesitamos un vector unitario $a \in \mathbb{R}^3$ (y entonces $\delta(u) = a$ para todo u) y una curva γ parametrizada por longitud de arco tal que $\langle \gamma(u), a \rangle = 0$ para todo u . En ese caso

$$X(u, v) = \gamma(u) + va$$

parametriza una superficie. Los coeficientes de la primera forma fundamental son $E = G = 1$ y $F = 0$. Como $\delta' = 0$, el ejemplo anterior nos dice que la curvatura de Gauss es idénticamente nula.

Capítulo 12

El teorema de Hilbert

Veremos ahora tres teoremas de rigidez de esferas. Básicamente son teoremas que nos dicen que si alguna superficie, desde cierto punto de vista se parece a una esfera, es entonces una esfera.

Teorema 12.1 (Hilbert). *Sea S una superficie orientada. Si existe un punto $p \in S$ tal que $K(p) > 0$, $k_1(p)$ es un máximo local para k_1 y $k_2(p)$ es un mínimo local para k_2 , entonces el punto p es umbílico.*

Demostración. Después de aplicar un movimiento rígido si fuera necesario, podemos suponer que $p = (0, 0, 0)$, que las direcciones principales son

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0),$$

y que $N(p) = (0, 0, 1)$. En un entorno suficientemente pequeño de p , S es el gráfico de una función h . Sea $X: U \rightarrow S$, $X(u, v) = (u, v, h(u, v))$, una parametrización alrededor de p tal que $X(0, 0) = p$. Entonces

$$X_u(0, 0) = (1, 0, h_u(0, 0)), \quad X_v(0, 0) = (0, 1, h_v(0, 0)).$$

Si escribimos $X_u(0, 0) = e_1 + \lambda N(p)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $0 = \langle X_u(0, 0), N(p) \rangle$ implica que $\lambda = 0$ y luego $h_u(0, 0) = 0$. Análogamente vemos que $h_v(0, 0) = 0$,

$$X_u(0, 0) = (1, 0, 0) = e_1, \quad X_v(0, 0) = (0, 1, 0) = e_2.$$

Como $X(U)$ es el gráfico de una función h , los coeficientes de la segunda forma fundamental en $X(0, 0)$ son

$$e = \frac{h_{uu}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad f = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad g = \frac{h_{vv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}.$$

Luego, como por otro lado,

$$\begin{aligned} e &= \langle -(dN)_p(X_u), X_u \rangle = k_1(p), \\ f &= \langle -(dN)_p(X_u), X_v \rangle = 0, \\ g &= \langle -(dN)_p(X_v), X_v \rangle = k_2(p), \end{aligned}$$

se concluye que

$$h_{uu}(0,0) = k_1(p), \quad h_{uv}(0,0) = 0, \quad h_{vv}(0,0) = k_2(p).$$

Sea $\alpha, \beta: U \rightarrow S$ las curvas en S dadas por

$$\alpha(u) = X(u, 0), \quad \beta(v) = X(0, v)$$

y sean $A, B: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ las curvas dadas por

$$A(u) = \frac{1}{\|X_v(u, 0)\|} X_v(u, 0), \quad B(v) = \frac{1}{\|X_u(0, v)\|} X_u(0, v).$$

Sean

$$\begin{aligned} a(u) &= \Pi_{\alpha(u)}(A(u)) = \frac{1}{1+h_v^2} \frac{h_{vv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}(u, 0), \\ b(v) &= \Pi_{\beta(v)}(B(v)) = \frac{1}{1+h_u^2} \frac{h_{uu}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}(0, v). \end{aligned}$$

Como por hipótesis $k_2(p)$ es un mínimo local para k_2 , el teorema de Meusnier y la fórmula de Euler implican que

$$a(0) = h_{vv}(0,0) = k_2(p) \geq k_2(\alpha(u)) \leq \Pi_{\alpha(u)} A(u) = a(u).$$

Análogamente, como $k_1(p)$ es un máximo local para k_1 ,

$$b(0) = h_{uu}(0,0) = k_1(p) \leq k_1(\beta(v)) \geq \Pi_{\beta(v)} B(v) = b(v).$$

Como entonces $a(u)$ tiene un máximo local en $u = 0$ y $b(v)$ tiene un mínimo local en $v = 0$,

$$b''(0) \leq 0 \leq a''(0).$$

Un cálculo sencillo y tedioso nos muestra que

$$\begin{aligned} a''(0) &= -h_{uu}^2(0,0)h_{vv}(0,0) + h_{vvuu}(0,0), \\ b''(0) &= -h_{vv}^2(0,0)h_{uu}(0,0) + h_{uuvv}(0,0). \end{aligned}$$

Como $h_{vvuu}(0,0) = h_{uuvv}(0,0)$, $K(p) > 0$ y $k_1(p) \geq k_2(p)$ por hipótesis, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq b''(0) - a''(0) \\ &= h_{uu}(0,0)h_{vv}(0,0)(h_{uu}(0,0) - h_{vv}(0,0)) = K(p)(k_1(p) - k_2(p)) \leq 0. \end{aligned}$$

Luego $k_1(p) = k_2(p)$. \square

Veamos algunos corolarios:

Teorema 12.2 (Jellet–Liebmann). *Toda superficie orientable compacta y conexa con curvatura gaussiana positiva y curvatura media constante es una esfera.*

Demostración. Como las curvaturas principales $k_1, k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y S es compacto, existe $p \in S$ donde k_1 alcanza su máximo. Como $k_2 = 2c - k_1$, entonces k_2 alcanza su mínimo en ese mismo punto p . Por el teorema de Hilbert, p es entonces un punto umbílico. Si $q \in S$, entonces

$$k_2(q) \leq k_1(q) \leq k_1(p) = k_2(p) \leq k_2(q)$$

y luego $k_1(q) = k_2(q)$ para todo $q \in S$. Como todo punto es entonces umbílico y S es compacto, S es una esfera por el teorema 11.14. \square

En el teorema anterior tuvimos que suponer que la superficie es orientable para tener definida la curvatura media en todo punto. Puede omitirse esta hipótesis al observar que toda superficie con curvatura gaussiana positiva en todo punto es orientable. Como alternativa podría usarse el teorema de Brouwer–Samelson, que afirma que toda superficie compacta es orientable. Una demostración de este resultado puede verse en [2, Theorem 4.16] o bien en [1, Theorem 4.7.15].

Teorema 12.3 (Hilbert–Liebmann). *Toda superficie orientable, compacta y conexa con curvatura gaussiana constante es una esfera.*

Demostración. La demostración es similar a la del teorema anterior. Si K es una constante c , entonces $c > 0$ (pues por el teorema 11.5 sabemos que S tiene al menos un punto de curvatura positiva). La clave ahora es observar que $k_2(p) = c/k_1(p)$ y que, como que si k_1 alcanza un mínimo en un punto, ese punto será un máximo para k_2 pues k_2 puede escribirse como una función decreciente en k_1 . \square

El argumento utilizado para demostrar los teoremas anteriores da otros resultados similares. Puede demostrarse por ejemplo que toda superficie conexa y compacta de curvatura positiva y tal que K/H es constante es necesariamente una esfera.

Capítulo 13

Isometrías y aplicaciones conformes

Diremos que una función diferenciable $f: S \rightarrow T$ entre superficies es una **isometría local** si para cada $p \in S$,

$$\langle (df)_p(v), (df)_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in T_p S$.

Recordemos que si transformación lineal $T: V \rightarrow W$ entonces $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in V$ si y sólo si $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in V$.

lem:longitud_curvas

Lema 13.1. *Una función diferenciable $f: S \rightarrow T$ es una isometría local si y sólo si f preserva la longitud de las curvas.*

Demostración. Sea α una curva en S . Supongamos que f es una isometría local. Como

$$\|(f \circ \alpha)'(t)\| = \|(df)_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\| = \|\alpha'(t)\|,$$

se concluye que α y $f \circ \alpha$ tienen la misma longitud pues

$$L_a^b(f \circ \alpha) = \int_a^b \|(f \circ \alpha)'(t)\| dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L_a^b(\alpha).$$

Supongamos ahora que f preserva la longitud de curvas. Sea $p \in S$ y sea $v \in T_p S$. Si α es una curva en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces

$$\int_0^t \|(f \circ \alpha)'(u)\| du = L_0^t(f \circ \alpha) = L_0^t(\alpha) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Al derivar esta expresión con respecto a t y usar el teorema fundamental del cálculo,

$$\|(df)_p(v)\| = \|(f \circ \alpha)'(t)\| = \|v\|,$$

que como v es arbitrario, es equivalente a decir que $\langle (df)_p v, (df)_p w \rangle = \langle v, w \rangle$. \square

Del lema anterior puede obtenerse fácilmente el siguiente hecho: una función f es una isometría local si y sólo si $\|(f \circ \alpha)'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$ para toda curva α .

Ejemplo 13.2. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}.$$

La función $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, y, 0)$, no es una isometría local. La longitud de la curva $\alpha(t) = (t, 0, t)$ en $[1, 2]$ es igual a

$$L_1^2(\alpha) = \int_1^2 \|\alpha'(t)\| dt = \sqrt{2}.$$

En cambio, como $f(\alpha(t)) = (t, 0, 0)$, la longitud de $f \circ \alpha$ es

$$\int_1^2 \|(1, 0, 0)\| dt = 1.$$

Una función diferenciable $f: S \rightarrow T$ entre dos superficies es un **difeomorfismo local** si para cada $p \in S$ existe un entorno V de p en S tal que $f(V)$ es un abierto de T y la restricción $f|_V: V \rightarrow f(V)$ es un difeomorfismo.

Proposición 13.3. Si f es una isometría local, entonces f es un difeomorfismo local.

Demostración. Si existe algún $p \in S$ tal que $(df)_p$ no es inversible, existe $0 \neq v \in T_p S$ tal que $(df)_p(v) = 0$. Luego

$$0 \neq \langle v, v \rangle = \langle (df)_p(v), (df)_p(v) \rangle = 0,$$

una contradicción. □

lem:isometria_local

Lema 13.4. Sea $f: S \rightarrow T$ un difeomorfismo local. Entonces f es una isometría local si y sólo si para cada parametrización X de S las primeras formas fundamentales de X y $Y = f \circ X$ coinciden.

Demostración. Como $Y = f \circ X$, la regla de la cadena implica que

$$Y_u = (df)_X(X_u), \quad Y_v = (df)_X(X_v).$$

Vemos entonces que f es una isometría local si y sólo si

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle Y_u, Y_u \rangle, \quad \langle X_u, X_v \rangle = \langle Y_u, Y_v \rangle, \quad \langle X_v, X_v \rangle = \langle Y_v, Y_v \rangle. \quad \square$$

Ejemplo 13.5. El plano y el cilindro son localmente isométricos. El plano de ecuación $z = 0$ puede parametrizarse como $X(u, v) = (u, v, 0)$ y el cilindro como $Y(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Como

$$X_u = (1, 0, 0), \quad X_v = (0, 1, 0), \quad Y_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad Y_v = (0, 0, 1),$$

se tiene que el plano y el cilindro son localmente isométricos pues en ambos casos $E = G = 1$ y $F = 0$.

Ejemplo 13.6. Veamos que el helicoides y la catenoide son superficies localmente isométricas. Para la catenoide:

$$Y(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad v \in (0, 2\pi).$$

En el ejemplo 11.21 calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$E = G = \cosh^2 u, \quad F = 0.$$

Para el helicoides usamos la parametrización

$$X(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, \bar{u}), \quad \bar{u} \in (0, 2\pi).$$

El cambio de variables

$$\begin{cases} \bar{u} = v, \\ \bar{v} = \sinh u \end{cases},$$

tiene jacobiano igual a

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cosh u & 0 \end{pmatrix} = -\cosh u \neq 0.$$

Entonces, como

$$X(u, v) = X(v, \sinh u) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v),$$

se tiene que

$$X_u = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0), \quad X_v = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 1).$$

y luego $E = G = \cosh^2 u$ y $F = 0$. Esto nos dice que la función $(u, v) \mapsto (v, \sinh u)$ es una isometría local entre el helicoides y la catenoide.

Nos interesa ahora estudiar funciones que preservan ángulos entre curvas. ¿Cómo definimos ángulos entre curvas? Simplemente usando la geometría del espacio tangente: el ángulo entre dos curvas γ_1 y γ_2 que se cortan en el punto $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ es por definición el ángulo que forman los vectores tangente $\gamma'_1(0)$ y $\gamma'_2(0)$. Un difeomorfismo local $f: S \rightarrow T$ se dirá **conforme** si f preserva ángulos.

El ángulo θ formado por las curvas regulares γ_1 y γ_2 en el punto $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ está definido por

$$\cos \theta = \frac{\langle \gamma'_1(0), \gamma'_2(0) \rangle}{\|\gamma'_1(0)\| \|\gamma'_2(0)\|}.$$

Para que f preserve ángulos necesitamos que las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ también sean regulares (y así podremos calcular el ángulo que forman), y es por eso que pedimos que f sea un difeomorfismo local.

Si X es una parametrización de S en p tal que $p = X(0, 0)$ y escribimos a cada γ_j en coordenadas, digamos $\gamma_1(t) = X(u_1(t), v_1(t))$ y $\gamma_2(t) = X(u_2(t), v_2(t))$, entonces

$$\gamma'_j(0) = X_u(0,0)u'_j(0) + X_v(0,0)v'_j(0)$$

para $j \in \{1, 2\}$. Luego

$$\cos \theta = \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv'_1v'_2}{\sqrt{Eu_1^2 + 2Fu_1v_1 + Gv_1^2}\sqrt{Eu_2^2 + 2Fu_2v_2 + Gv_2^2}}.$$

Lema 13.7. Sea $f: S \rightarrow T$ un difeomorfismo local. Entonces f es conforme si y sólo si existe una función $\lambda: S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle (df)_p(v), (df)_p(w) \rangle = \lambda(p) \langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in T_pS$.

Demostración. Demostremos primero la implicación \Leftarrow . Si γ_1 y γ_2 son curvas en S tales que $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y θ es el ángulo que forman en p , calculamos

$$\langle (f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0) \rangle = \langle (df)_p(\gamma'_1(0)), (df)_p(\gamma'_2(0)) \rangle = \lambda(p) \langle \gamma'_1(0), \gamma'_2(0) \rangle$$

para cada $i, j \in \{1, 2\}$. En particular,

$$\begin{aligned} \frac{\langle (f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0) \rangle}{\|(f \circ \gamma_1)'(0)\| \|(f \circ \gamma_2)'(0)\|} &= \lambda(p) \frac{\langle \gamma'_1(0), \gamma'_2(0) \rangle}{\sqrt{\lambda(p)} \|\gamma'_1(0)\| \sqrt{\lambda(p)} \|\gamma'_2(0)\|} \\ &= \frac{\langle \gamma'_1(0), \gamma'_2(0) \rangle}{\|\gamma'_1(0)\| \|\gamma'_2(0)\|} \end{aligned}$$

y luego f es conforme.

Recíprocamente, sea $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormal de T_pS y sean

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \langle (df)_p(v_1), (df)_p(v_1) \rangle, \\ \lambda_2 &= \langle (df)_p(v_1), (df)_p(v_2) \rangle, \\ \lambda_3 &= \langle (df)_p(v_2), (df)_p(v_2) \rangle. \end{aligned}$$

Por hipótesis,

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{\langle (df)_p(v), (df)_p(w) \rangle}{\|(df)_p(v)\| \|(df)_p(w)\|}$$

para todo $v, w \in T_pS$. En particular, si $v = v_1$ y $w = (\cos \theta)v_1 + (\sin \theta)v_2$, entonces

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta \lambda_1 + \sin \theta \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1(\cos^2 \theta \lambda_1 + 2 \cos \theta \sin \theta \lambda_2 + \sin^2 \theta \lambda_3)}}$$

para todo θ . Si $\theta = \pi/2$ obtenemos $\lambda_2 = 0$ y luego

$$\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_3 \sin^2 \theta = \lambda_1$$

para todo θ . Si ahora $\theta = 0$, se concluye entonces que $\lambda_1 = \lambda_3$. Con $\lambda = \lambda_1$, obtenemos

$$\langle (df)_p(v), (df)_p(w) \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in T_p S$. \square

Ejemplo 13.8. Sea X una parametrización de una superficie S y sea $p = X(0, 0) \in S$. Para las curvas $\gamma_1(t) = X(0, t)$ y $\gamma_2(t) = X(t, 0)$ tenemos

$$u_1(t) = 0, \quad v_1(t) = t, \quad u_2(t) = t, \quad v_2(t) = 0.$$

Como entonces $u'_1(t) = v'_2(t) = 0$ y $u'_2(t) = v'_1(t) = 1$, el ángulo θ formado por las curvas γ_1 y γ_2 en el punto $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ cumple

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}(0, 0).$$

Un ejemplo famoso de aplicación conforme está dado por la **proyección estereográfica**. Consideremos la esfera unitaria S^2 con centro en $(0, 0, 0)$ y sea $N = (0, 0, 1)$ el polo norte. Cada punto de $S^2 \setminus \{N\}$ se corresponde biyectivamente con un punto del plano $z = 0$. En efecto, la línea recta que une N con q corta el plano $z = 0$ en el punto p . Queda definida entonces la **proyección estereográfica**

$$\Pi: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}, \quad q \mapsto p.$$

thm:estereografica

Teorema 13.9. *La proyección estereográfica Π es conforme.*

Demostración. Vamos a encontrar una parametrización de la esfera S^2 sin el polo norte $N = (0, 0, 1)$. Dado un punto $q = (x, y, z)$ de la esfera, trazamos la recta L que une N con q . Esta recta L corta al plano de ecuación $z = 0$ en un punto $p = (u, v, 0)$. Sea

$$\Pi(a, b, c) = (u, v).$$

La ecuación de la recta L es $q - N = N + \lambda(p - N)$, es decir:

$$x = \lambda u, \quad y = \lambda v, \quad z = 1 - \lambda.$$

Como $z \neq 1$,

$$\Pi(x, y, z) = (u, v, 0) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right).$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, entonces $(\lambda u)^2 + (\lambda v)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1$ y luego

$$\lambda = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}, \quad q = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Tenemos entonces una parametrización de $S^2 \setminus \{N\}$ dada por

$$X(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Si parametrizamos al plano $z = 0$ como $Y(u, v) = (u, v, 0)$, vemos entonces que $\Pi(X(u, v)) = Y(u, v)$. Sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental con respecto a Y son $E = G = 1$ y $F = 0$. Para $\Pi \circ X$ son

$$E = G = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \quad F = 0.$$

Si $\lambda = 4/(u^2 + v^2 + 1)^2$, entonces las primeras formas fundamentales son proporcionales y luego Π es conforme. \square

A continuación veremos otros dos ejemplos importante de aplicación conforme, ambos relacionados con superficies mínimas. Para el primero de estos ejemplos recordemos el siguiente caso particular del teorema de Cayley–Hamilton: toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es raíz del polinomio

$$X^2 - (a + d)X + (ad - bc)I = 0.$$

Teorema 13.10. *Si S es una superficie mínima con curvatura de Gauss no nula, entonces N es conforme.*

Demostración. Sabemos que N es conforme si y sólo si

$$\langle (dN)_p(v), (dN)_p(w) \rangle = \lambda(p) \langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in T_p S$ y algún $\lambda(p) \in \mathbb{R}$. Como $(dN)_p$ es autoadjunta, esta condición puede reescribirse como

$$\langle (dN)_p^2(v), w \rangle = \lambda(p) \langle v, w \rangle.$$

Por el teorema de Cayley–Hamilton, $(dN)_p$ es raíz del polinomio

$$X^2 + 2H(p)X + K(p)I = 0.$$

Como $H(p) = 0$, entonces $(dN)_p^2 = -K(p)I$ y luego N es conforme si y sólo si $-K(p) \langle v, w \rangle = \lambda(p) \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in T_p S$ y algún $\lambda(p)$. Basta entonces tomar $\lambda(p) = -K(p)$. \square

Si S es una superficie y X es una parametrización, tiene sentido preguntarse cuándo la función X será una aplicación conforme. En caso afirmativo, X se dirá una **parametrización conforme**.

Teorema 13.11. *Sea S una superficie mínima. Para cada $p \in S$ existe una parametrización conforme en p de S .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p = (0, 0, 0)$. Sabemos que localmente en el punto p la superficie S es el gráfico de una función diferenciable $h: V \rightarrow \mathbb{R}$, donde podemos suponer sin perder generalidad que

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Entonces

$$E = 1 + h_x^2, \quad F = h_x h_y, \quad G = 1 + h_y^2.$$

Sea $A = \sqrt{EG - F^2}$. Como

$$0 = H(x, y, h(x, y)) = \frac{(1 + h_y^2)h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2)h_{yy}}{2(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}},$$

un cálculo directo muestra que

$$\left(\frac{F}{A}\right)_x = \left(\frac{E}{A}\right)_y, \quad \left(\frac{G}{A}\right)_x = \left(\frac{F}{A}\right)_y.$$

Sabemos que entonces existen funciones $\varphi, \psi: V \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\varphi_x = E/A, \quad \varphi_y = F/A, \quad \psi_x = F/A, \quad \psi_y = G/A.$$

De hecho, podríamos tomar por ejemplo

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_0^1 \frac{x E(tx, ty) + y F(tx, ty)}{A(tx, ty)} dt, \\ \psi(x, y) &= \int_0^1 \frac{x F(tx, ty) + y G(tx, ty)}{A(tx, ty)} dt. \end{aligned}$$

Sean $u(x, y) = x + \varphi(x, y)$ y $v(x, y) = y + \psi(x, y)$. Como

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 + \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & 1 + \psi_y \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 + E/A & F/A \\ F/A & 1 + G/A \end{pmatrix} \\ &= (1 + E/A)(1 + G/A) - (F/A)^2 = 2 + \frac{E + G}{A} > 0, \end{aligned}$$

el teorema de la función inversa garantiza la existencia de un abierto $W \subseteq V$ tal que la función $F: W \rightarrow F(W)$, $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, es diferenciable e inversible con inversa $F^{-1}: F(W) \rightarrow W$, $F^{-1}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, diferenciable.

Vamos a demostrar que $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), h(x(u, v), y(u, v)))$ es una parametrización conforme. Por la regla de la cadena, sabemos que

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = I$$

y entonces

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{E + G + 2A} \begin{pmatrix} G + A & -F \\ -F & E + A \end{pmatrix}.$$

Sea $z(u, v) = h(x(u, v), y(u, v))$. Entonces

$$z_u = h_x x_u + h_y y_u = \frac{h_x(G+A) - h_y F}{E+G+2A}, \quad z_v = h_x x_v + h_y y_v = \frac{-h_x F + h_y(E+A)}{E+G+2A}.$$

Un cálculo directo muestra que

$$z_u z_v = \frac{F}{E+G+2A}$$

y luego

$$\langle X_u, X_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0.$$

Similarmente, uno demuestra mediante un cálculo directo que

$$\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = \frac{A^2}{E+G+2A}. \quad \square$$

El teorema anterior puede demostrarse para superficies generales (sin necesidad de suponer que la curvatura media es cero), aunque la demostración es más difícil.

Una función diferenciable $f: S \rightarrow T$ será una **isometría** si es un difeomorfismo y además es una isometría local para todo punto de S . Intuitivamente, una isometría es una transformación que flexiona una superficie sin alterar las distancias intrínsecas entre puntos de la superficie.

Ejemplo 13.12. Sea $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $BB^T = B^T B = I$ y sea S una superficie. La función $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = B(x, y, z)^T$, es una isometría. Si $p \in S$ y $v, w \in T_p S$, entonces

$$\langle (df)_p(v), (df)_p(w) \rangle = \langle Bv, Bw \rangle = (Bv)^T (Bw) = v^T B^T B w = v^T w = \langle v, w \rangle.$$

Estudiaremos a continuación funciones entre superficies que preservan áreas.

Capítulo 14

El teorema de Gauss

En esta sección vamos a demostrar el “Theorema Egregium” de Gauss, que afirma que la curvatura gaussiana es invariante por isometrías locales. Esto nos dice que la curvatura gaussiana es un concepto intrínseco. Nos será de utilidad tener a mano unas fórmulas que involucran las derivadas parciales de los coeficientes de la primera forma fundamental.

Lema 14.1. *Si $X: U \rightarrow S$ es una parametrización de una superficie S , entonces*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_u &= \langle X_{uu}, X_u \rangle, & \frac{1}{2}E_v &= \langle X_{uv}, X_u \rangle, & F_u &= \langle X_{uu}, X_v \rangle + \frac{1}{2}E_v, \\ F_v &= \langle X_{vv}, X_u \rangle + \frac{1}{2}G_u, & \frac{1}{2}G_u &= \langle X_{uv}, X_v \rangle, & \frac{1}{2}G_v &= \langle X_{vv}, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Demostración. Como $X_{uv} = X_{vu}$, tenemos $\frac{\partial}{\partial u}E = \frac{\partial}{\partial u}\langle X_u, X_u \rangle = 2\langle X_{uu}, X_u \rangle$ y luego $\frac{1}{2}E_u = \langle X_{uu}, X_u \rangle$. Análogamente se demuestra que $\frac{1}{2}E_v = \langle X_{uv}, X_u \rangle$, $\frac{1}{2}G_u = \langle X_{uv}, X_v \rangle$ y $\frac{1}{2}G_v = \langle X_{vv}, X_v \rangle$. Además

$$\frac{\partial}{\partial u}F = \frac{\partial}{\partial u}\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \frac{1}{2}E_v,$$

y similarmente $F_v = \langle X_{vv}, X_u \rangle + \frac{1}{2}G_u$. □

Teorema 14.2 (Gauss). *Si $f: S \rightarrow T$ es una isometría local y $p \in S$, entonces $K_S(p) = K_T(f(p))$.*

Demostración. Sea $X: U \rightarrow S$ una parametrización. Como $\{X_u, X_v, N_X\}$ es una base, podemos escribir

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + \lambda_1 N_X, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + \lambda_2 N_X, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \lambda_3 N_X, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + \lambda_4 N_X, \end{aligned} \tag{14.1} \quad \boxed{\text{eq:gamma}}$$

donde las Γ_{ij}^k y las λ_j son funciones $U \rightarrow \mathbb{R}$. Los λ_j son los coeficientes de la primera fórmula fundamental:

$$\lambda_1 = \langle X_u, X_u \rangle, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \langle X_u, X_v \rangle, \quad \lambda_4 = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Los Γ_{ij}^k se conocen como los **símbolos de Christoffel**.

Veamos qué propiedades tienen: De la igualdad $X_{uv} = X_{vu}$ se obtiene que

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Podemos calcular explícitamente los Γ_{ij}^k . Si usamos el lema anterior tenemos tres sistemas lineales:

$$\frac{1}{2}E_u = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \quad (14.2) \quad \text{eq:gamma1}$$

$$F_u - \frac{1}{2}E_v = \langle X_{uu}, X_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \quad (14.3) \quad \text{eq:gamma2}$$

$$\frac{1}{2}E_v = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, \quad (14.4) \quad \text{eq:gamma3}$$

$$\frac{1}{2}G_u = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G, \quad (14.5) \quad \text{eq:gamma4}$$

$$F_v - \frac{1}{2}G_u = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, \quad (14.6) \quad \text{eq:gamma5}$$

$$\frac{1}{2}G_v = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G. \quad (14.7) \quad \text{eq:gamma6}$$

Los sistemas lineales (14.2)–(14.3), (14.4)–(14.5) y (14.6)–(14.7) tienen solución única pues $EG - F^2 > 0$.

No vamos a calcular explícitamente los Γ_{ij}^k ya que nos alcanzará con observar que cada Γ_{ij}^k puede escribirse en función de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas. Como

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u,$$

si derivamos las primeras dos igualdades de (14.1), obtenemos

$$\begin{aligned} (X_{uu})_v &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N_X + e(N_X)_v, \\ (X_{uv})_u &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 X_{uv} + f_u N_X + f(N_X)_u. \end{aligned} \quad (14.8) \quad \text{eq:X_uu, X_uv}$$

Vimos que si

$$(N_X)_u = -a_{11}X_u - a_{21}X_v, \quad (N_X)_v = -a_{12}X_u - a_{22}X_v,$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Si usamos (14.1) en (14.8) e igualamos el coeficiente de X_v obtenemos

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - ea_{22} = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - fa_{21}.$$

Como entonces

$$ea_{22} - fa_{21} = \frac{e(-Ff + Eg)}{EG - F^2} - \frac{f(-Fe + Ef)}{EG - F^2} = \frac{E(eg - f^2)}{EG - F^2} = EK,$$

podemos escribir la curvatura gaussiana como

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{E}(ea_{22} - fa_{21}) \\ &= \frac{1}{E} (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2). \end{aligned}$$

Si bien esta fórmula no es muy práctica a la hora de hacer cálculos, nos dice que la curvatura gaussiana depende únicamente de la primera forma fundamental y de sus derivadas. Luego K es invariante por isometrías locales. \square

Corolario 14.3. *El plano y la esfera no son localmente isométricos.*

Demostración. Esto es consecuencia del teorema de Gauss pues vimos que el plano tiene curvatura gaussiana nula y que, en cambio, la esfera tiene curvatura gaussiana positiva. \square

El corolario anterior implica que no existe el mapa perfecto. Todo mapa de alguna región del planeta distorsionará distancias. Como ejemplo, mencionamos que en el clásico mapa que vemos en la figura 14.1 Australia ($7.617.930 \text{ km}^2$) se ve mucho más pequeño que Groenlandia ($2.175.600 \text{ km}^2$).



fig:mapa

Figura 14.1: No existe el mapa perfecto.

Es interesante aclarar que sí existen mapas que preservan ángulos. De hecho, vimos que la proyección estereográfica es una aplicación conforme. También existen mapas que preservan áreas.

Ejemplo 14.4. Calculemos los símbolos de Christoffel para la parametrización

$$X(u, v) = (\sigma(u) \cos v, \sigma(u) \sin v, \tau(u))$$

de una superficie de revolución. Vimos que

$$E(u, v) = \sigma'(u)^2 + \tau'(u)^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = \sigma^2(u).$$

De las fórmulas (14.2)–(14.7) obtenemos entonces

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\sigma' \sigma'' + \tau' \tau''}{\sigma'^2 + \tau'^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-\sigma \sigma'}{\sigma'^2 + \tau'^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

Veamos que el recíproco del teorema de Gauss no es cierto. Para eso presentaremos dos superficies no localmente isométricas que en todos sus puntos poseen la misma curvatura gaussiana.

Ejemplo 14.5. Consideremos la superficie S de revolución que se obtiene al rotar la curva $\sigma(u) = u$, $\tau(u) = \log u$, alrededor del eje z tal como hicimos en el ejemplo 11.19. Si $U = (0, 2\pi) \times (0, +\infty)$ y $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la parametrización

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u),$$

el abierto $X(U) \subseteq S$ es también una superficie. Podemos ver un gráfico de esta superficie en la figura 14.2. Como

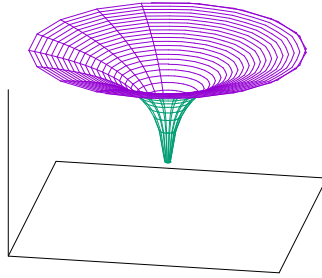


fig:egregium

Figura 14.2: Una superficie de revolución.

$$\sigma'(u) = 1, \quad \sigma''(u) = 0, \quad \tau'(u) = 1/u, \quad \tau''(u) = -1/u^2,$$

los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$E = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad F = 0, \quad G = u^2,$$

y la curvatura gaussiana queda

$$K_X \circ X(u, v) = \frac{-1}{(1+u^2)^2}.$$

Consideremos ahora la superficie $Y(U)$ contenida en el helicoides T que vimos en el ejemplo 11.17, donde

$$Y(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

La primera forma fundamental está entonces dada por

$$E = 1 + u^2, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

y curvatura gaussiana igual a

$$K_Y \circ Y(u, v) = \frac{-1}{(1+u^2)^2}.$$

A pesar de que las curvaturas gaussianas coinciden, las superficies $X(u)$ y $Y(U)$ no son localmente isométricas. De hecho, si $f: X(U) \rightarrow Y(U)$ es una isometría local, entonces, por el lema 13.4, llevaría un punto $X(u, v)$ en un punto de la forma $Y(\pm u, \bar{v})$, una contradicción.

El código utilizado para producir la figura 14.2 es el siguiente:

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> set isosamples 50,30
gnuplot> set hidden3d
gnuplot> unset xtics
gnuplot> unset ytics
gnuplot> unset ztics
gnuplot> set key off
gnuplot> set view 60,190
gnuplot> splot u*cos(v),u*sin(v),log(u)
```


Capítulo 15

Geodésicas

Definición 15.1. Sea S una superficie. Diremos que una curva γ en S es una **geodésica** si $\langle \gamma''(t), T_{\gamma(t)}S \rangle = 0$ para todo t .

Veamos algunas propiedades básicas de las curvas geodésicas:

Proposición 15.2. Si γ es una geodésica, entonces $\|\gamma'(t)\|$ es constante.

Demostración. Simplemente calculamos

$$\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = 0,$$

y en consecuencia $\|\gamma'(t)\|$ es una constante. \square

Proposición 15.3. Si γ es una curva en S parametrizada por longitud de arco. Entonces γ es una geodésica si y sólo si $\kappa_g = 0$.

Demostración. Sea X una parametrización de S . Supongamos primero que γ es una geodésica. Como entonces γ'' es paralelo a N_X , entonces $\kappa_g = \langle \gamma'', N_X \times \gamma' \rangle = 0$. Supongamos ahora que $\kappa_g = 0$. Como entonces γ'' es perpendicular a $N_X \times \gamma'$ y $\{\gamma', N_X, N_X \times \gamma'\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , se concluye que γ'' es paralelo a N_X ya que γ'' y γ' son perpendiculares. \square

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 15.4. En el plano, toda parte de una línea recta es una geodésica.

Ejemplo 15.5. Los grandes círculos de la esfera son geodésicas.

Ejemplo 15.6. La intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $z = 0$ es una geodésica.

thm:geodesicas

Teorema 15.7. Sea $X: U \rightarrow S$ una parametrización de una superficie S y sea γ una curva en $X(U)$. Entonces γ es una geodésica si y sólo si

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') &= \frac{1}{2}(Eu'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2), \\ \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') &= \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2).\end{aligned}$$

Demostración. La curva γ es una geodésica si y sólo si $\gamma' \perp X_u$ y $\gamma' \perp X_v$. Como además $\gamma' = X_u u' + X_v v'$, tenemos entonces que γ es una geodésica si y sólo si

$$\left\langle \frac{d}{dt}(X_u u' + X_v v'), X_u \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}(X_u u' + X_v v'), X_v \right\rangle = 0.$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle X_u u' + X_v v', X_u \rangle &= \langle X_u u' + X_v v', \frac{d}{dt}X_u \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt}(X_u u' + X_v v'), X_u \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt}(\langle Eu' + Fv' \rangle - \langle X_u u' + X_v v', u'X_{uu} + v'X_{uv} \rangle) \\ &= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - u'^2 \langle X_u, X_{uu} \rangle - u'v'(\langle X_u, X_{uv} \rangle + \langle X_v, X_{uu} \rangle) - v'^2 \langle X_v, X_{uv} \rangle.\end{aligned}$$

Como además

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E_u &= \langle X_u, X_{uu} \rangle, \\ \frac{1}{2}G_u &= \langle X_v, X_{uv} \rangle, \\ F_u &= \frac{\partial}{\partial u}\langle X_u, X_v \rangle = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle,\end{aligned}$$

se concluye directamente que

$$\left\langle \frac{d}{dt}(X_u u' + X_v v'), X_u \right\rangle = \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \frac{1}{2}(u'^2 + 2F_u u'v' + v'^2 G_u).$$

La otra fórmula se demuestra de forma similar. \square

Las ecuaciones del teorema anterior quizá no son útiles a la hora de encontrar geodésicas, ya que estas ecuaciones son en general muy difíciles de resolver. El punto es que nos permiten obtener el siguiente resultado:

Corolario 15.8. Sea S una superficie, sea $p \in S$ y sea $v \in T_p S$ un vector unitario. Entonces existe una única geodésica γ en S parametrizada por longitud de arco tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

Demostración. Las ecuaciones del teorema anterior pueden escribirse como

$$u'' = F(u, v, u', v'), \quad v'' = G(u, v, u', v'), \quad (15.1)$$

eq:geodesicasFG

donde F y G son funciones diferenciables. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, la teoría de ecuaciones diferenciales nos dice que el sistema (15.1) tiene una única solución (u, v) que cumple que $u(0) = a$, $v(0) = b$, $u'(0) = c$, $v'(0) = d$ y tal que u y v son funciones diferenciables en algún entorno de $t = 0$. Sea X una parametrización de S y supongamos que $p = X(a, b)$. Sea $v = cX_u + dX_v$. Entonces $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ es una curva en S tal que $\gamma(0) = X(a, b) = p$ y $\gamma'(0) = cX_u + dX_v$. \square

El corolario anterior nos permite calcular, sin resolver ecuaciones diferenciales, todas las geodésicas de algunas superficies:

Ejemplo 15.9. Sabemos que las rectas son geodésicas del plano. Como además en el plano existe una única recta que pasa por un cierto punto dado y tiene una cierta dirección del plano dada, no existen otras geodésicas.

Ejemplo 15.10. Sabemos que los grandes círculos son geodésicas de la esfera S^2 . No existen otras geodésicas ya que dado $p \in S^2$ y $v \in T_p S^2$, existe un gran círculo que pasa por p y tiene a v como vector tangente en p (basta tomar la intersección de S^2 con el plano que pasa por el origen y tiene normal $p \times v$).

Veamos otra consecuencia:

Corolario 15.11. Sea $f: S \rightarrow T$ una isometría local. Si γ es una geodésica en S , entonces $f \circ \gamma$ es una geodésica en T .

Demostración. Sea X una parametrización de S y sea $p = X(q) \in S$. Si γ es una geodésica, podemos escribir $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, donde $u(t)$ y $v(t)$ son funciones diferenciables que satisfacen las ecuaciones del teorema 15.7. Como $Y = f \circ X$ es una parametrización de T con la misma forma fundamental que tiene la parametrización X , la curva $f(\gamma(t)) = f(X(u(t), v(t))) = Y(u(t), v(t))$ también resulta una geodésica en T gracias al teorema 15.7. \square

Veamos ahora cuál es la conexión entre las curvas geodésicas y las curvas de menor longitud que unen dos ciertos puntos de una superficie. Antes necesitamos una lema:

lem:suavizante

Lema 15.12. Existe una función diferenciable ϕ tal que $\psi(t) > 0$ si $t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ y $\psi(t) = 0$ si $t \notin (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$.

Demostración. Primero observamos que, como

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^n e^{1/t^2} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

es diferenciable. La función $\psi(t) = \theta(1+t)\theta(1-t)$ es también diferenciable y cumple que $\psi(t) > 0$ si $t \in (-1, 1)$ y $\psi(t) < 0$ si $t \notin (-1, 1)$. La función

$$\phi(t) = \psi\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)$$

es entonces diferenciable y cumple con las condiciones del enunciado. \square

Sea $X: U \rightarrow X(U)$ una parametrización de una superficie S y sean $p, q \in X(U)$ dos puntos tales que $p \neq q$. Sea γ una curva parametrizada por longitud de arco que pasa por p y por q . Si γ es el camino más corto entre p y q , podemos pensar que γ es en realidad una de las curvas de una familia diferenciable de curvas del parche $X(U)$ que pasan por p y q . Para definir esa familia diferenciable de curvas hacemos lo siguiente: Para cada $\tau \in (-1, 1)$ tenemos una curva γ_τ en el parche $X(U)$ y se verifican las siguientes propiedades:

1. cada $\gamma_\tau(t)$ está definida para $t \in (-1, 1)$,
2. existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $-1 < a < b < 1$ y tales que $\gamma_\tau(a) = p$ y $\gamma_\tau(b) = q$,
3. la función $(-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\tau, t) \mapsto \gamma_\tau(t)$, es diferenciable, y por último
4. $\gamma_0 = \gamma$.

Tenemos entonces definida una familia diferenciable $\{\gamma_\tau : \tau \in (-1, 1)\}$ de curvas en $X(U)$. La longitud de cada γ_τ entre p y q será denotada por

$$L(\tau) = \int_a^b \|\gamma'_\tau(t)\| dt.$$

Observemos que no suponemos que las curvas γ_τ están parametrizadas por longitud de arco.

Teorema 15.13. *Sea γ una curva parametrizada por longitud de arco. Entonces γ es una geodésica si y sólo si*

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} L(\tau) = 0.$$

Demostración. Como las funciones involucradas son diferenciables, podemos intercambiar el orden de las derivadas con el de la integral. Si $g(\tau, t) = \|\gamma'_\tau(t)\|$, entonces

$$\frac{d}{d\tau} L(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_a^b \|\gamma'_\tau(t)\| dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{g(\tau, t)} dt = \frac{1}{2} \int_a^b g(\tau, t)^{-1/2} \frac{\partial g}{\partial \tau} dt.$$

Observemos que, como

$$g(\tau, t) = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2,$$

entonces un cálculo tedioso nos dice que

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \dots$$

Luego podemos escribir

$$\frac{d}{d\tau}L(\tau) = \int_a^b \left(U \frac{\partial u}{\partial \tau} + V \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) dt,$$

donde

$$U = \frac{1}{2}g^{-1/2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2) - \frac{d}{dt}(g^{-1/2}(Eu' + Fv')),$$

$$V = \frac{1}{2}g^{-1/2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2) - \frac{d}{dt}(g^{-1/2}(Fu' + Gv')).$$

Como $\|\gamma'(t)\|^2 = 1$ para todo $t \in (-1, 1)$, entonces $g(0, t) = 1$ para todo $t \in (-1, 1)$.

Si γ es una geodésica, entonces $U = V = 0$ si $\tau = 0$ y luego

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} L(\tau) = 0.$$

Supongamos entonces que

$$\int_a^b = 0$$

si $\tau = 0$. Si $U(0, t) \neq 0$, entonces podemos suponer sin perder generalidad que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $U(0, t_0) > 0$ (ya que el caso en que $U(0, t_0) < 0$ se hace de forma similar). Como U es continua, existe $\eta > 0$ tal que $U(0, t) > 0$ para todo $t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$. Sea ϕ una función diferenciable tal que $\phi(t) > 0$ si $t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ y $\phi(t) = 0$ en otro caso (la existencia de una tal ϕ está garantizada por el lema 15.12). Sean

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t)), \quad \gamma_\tau(t) = X(u(\tau, t), v(\tau, t)),$$

donde

$$u(\tau, t) = u(t) + \tau\phi(t), \quad v(\tau, t) = v(t).$$

Como $\partial u / \partial \tau = \phi$ y $\partial v / \partial \tau = 0$ para todo τ y todo t , tenemos que

$$0 = \left. \int_a^b (\dots) dt \right|_{\tau=0} = \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} U(0, t) \phi(t) dt > 0,$$

una contradicción. Similarmente vemos que $V(0, t) = 0$ para todo $t \in (a, b)$. Luego γ es una geodésica pues satisface las ecuaciones geodésicas. \square

Veamos algunas consecuencias importantes del teorema anterior. La primera es la siguiente:

1. El camino más corto entre dos puntos de una superficie es una geodésica. En efecto, si γ es el camino más corto en un parche $X(U)$ entre los puntos p y q , entonces la función $L(\tau)$ del teorema anterior tendrá un mínimo absoluto cuando $\tau = 0$. Luego $\frac{d}{d\tau}L(\tau) = 0$ si $\tau = 0$ y entonces, por el teorema anterior, γ será una geodésica.
2. Una geodésica no siempre será el camino más corto entre dos puntos. Si γ es una geodésica que une los puntos p y q , entonces $L(\tau)$ tendrá un punto crítico

en $\tau = 0$. Sin embargo, como bien sabemos gracias al curso de cálculo, esto no implica la existencia de un mínimo ahí.

3. El camino más corto entre dos puntos de una superficie podría no existir. Parece raro esto, pero pensemos en el plano $z = 0$ sin el orden de coordenadas. Es una superficie (porque es un abierto contenido en una superficie) pero el camino más corto que une $p = (-1, 0, 0)$ con $q = (1, 0, 0)$ no pertenece a la superficie (y puede demostrarse que no existe otro camino más corto entre p y q).

Sea γ una curva en una superficie S . Un **campo vectorial tangente a lo largo de** γ es una función diferenciable $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $v(t) \in T_{\gamma(t)}S$ para todo $t \in (0, 1)$. La **derivada covariante** $\nabla_\gamma v$ de v a lo largo de γ se define como la proyección ortogonal de v' en $T_{\gamma(t)}S$, es decir

$$\nabla_\gamma v = v' - \langle v', N \rangle N,$$

donde N es el vector normal unitario de $T_{\gamma(t)}S$. Diremos que el campo v es **paralelo** a lo largo de γ si $\nabla_\gamma v = 0$.

Proposición 15.14. *El campo v es paralelo a lo largo de γ si y sólo si $v' \perp T_{\gamma(t)}S$.*

Demostración. Si v es paralelo a lo largo de γ , entonces, por definición, $\nabla_\gamma v = 0$. Luego $v' = \langle v', N \rangle N$ y entonces $v' \perp T_{\gamma(t)}S$. Recíprocamente, si $v' \perp T_{\gamma(t)}S$, entonces $v' = \lambda N$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y luego

$$\nabla_\gamma v = v' - \langle v', N \rangle N = v' - \langle \lambda N, N \rangle N = v' - \lambda N = 0. \quad \square$$

Proposición 15.15. *Sea $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ una curva en el parche $X(U)$ de S . Sean α y β funciones diferenciables tales que $v(t) = \alpha(t)X_u + \beta(t)X_v$ es un campo vectorial tangente a lo largo de γ . Entonces v es paralelo a lo largo de γ si y sólo si*

$$\begin{aligned} \alpha' + (\Gamma_{11}^1 u' + \Gamma_{12}^1 v')\alpha + (\Gamma_{12}^1 u' + \Gamma_{22}^1 v')\beta &= 0, \\ \beta' + (\Gamma_{11}^2 u' + \Gamma_{12}^2 v')\alpha + (\Gamma_{12}^2 u' + \Gamma_{22}^2 v')\beta &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. Ya calculamos:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + e N_X, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + f N_X, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + g N_X. \end{aligned}$$

Entonces, como

$$v' = \alpha' X_u + \beta' X_v + \alpha u' X_{uu} + \alpha (X_{uu} u' + X_{uv} v') + \beta (X_{uv} u' + X_{vv} v')$$

se concluye que

$$\begin{aligned}
v' = & \alpha' X_u + \beta' X_v + \alpha u' (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + e N_X) \\
& + (\alpha v' + \beta u') (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + f N_X) + \beta v' (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + g N_X). \quad (15.2)
\end{aligned}$$

eq: X_u X_v = 0

Sabemos que v es paralelo a lo largo de γ si y sólo si v' es paralelo a N_X . Esto es equivalente a pedir que los coeficientes de X_u y X_v en la expresión (15.2) sean ambos iguales de cero. \square

El sistema de ecuaciones del resultado anterior puede escribirse como

$$\alpha' = F(\alpha, \beta, t), \quad \beta' = G(\alpha, \beta, t),$$

donde F y G son funciones diferenciables. Dado cualquier conjunto de condiciones iniciales, este sistema tiene una única solución. Es decir: si $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, entonces existen únicas funciones diferenciables α y β tales que $\alpha' = F(\alpha, \beta, t)$, $\beta' = G(\alpha, \beta, t)$, $\alpha(t_0) = \alpha_0$ y $\beta(t_0) = \beta_0$. Luego dada una curva γ en S y un vector $v_0 \in T_{\gamma(t_0)} S$, existe un único campo vectorial v que cumple que $v(t_0) = v_0$ y además es paralelo a lo largo de γ .

Corolario 15.16. *Una curva γ en una superficie S es una geodésica si y sólo si para todo pedazo $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ de γ contenido en un parche X , se satisface el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned}
u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 &= 0, \\
u'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Demostración. Primero observamos que, por definición, una curva γ es una geodésica si y sólo si γ' es paralelo a lo largo de γ . Como $\gamma' = u'X_u + v'X_v$ por la regla de la cadena, las ecuaciones geodésicas son exactamente las ecuaciones del enunciado, donde $\alpha = u'$ y $\beta = v'$. \square

Capítulo 16

El teorema de Gauss–Bonnet

En esta sección vamos a demostrar varias versiones del famoso teorema de Gauss–Bonnet. Primero haremos un repaso de la teoría de curvas planas.

Sea γ una curva plana parametrizada por longitud de arco. Sea $T = \gamma'$ el vector tangente a γ y sea N el vector unitario normal obtenido al rotar T en sentido antihorario en un ángulo $\pi/2$. Como $T' = \gamma''$ y $T = \gamma'$ son perpendiculares, el vector T' es paralelo a N y luego puede escribirse $\gamma'' = \kappa_s N$ para alguna función κ_s . La función κ_s se conoce como **curvatura con signo** de γ . Como por construcción $\|N\| = 1$, sabemos que la curvatura usual κ satisface

$$\kappa = \|\gamma''\| = \|\kappa_s N\| = |\kappa_s|.$$

Proposición 16.1. *Sea $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco. Para $s_0 \in (a, b)$ sea φ_0 tal que $\gamma'(s_0) = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$. Existe entonces una única función $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\varphi(s_0) = \varphi_0$ y tal que*

$$\gamma'(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$$

para todo $s \in (a, b)$.

Demostración. Como γ está parametrizada por longitud de arco, podemos escribir $\gamma'(s) = (\sigma(s), \tau(s))$, donde $\sigma(s)^2 + \tau(s)^2 = 1$ para todo $s \in (a, b)$. Sea

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_{s_0}^s (\sigma \tau' - \tau \sigma')(t) dt.$$

Entonces $\varphi(s_0) = \varphi_0$ y además, como σ y τ son diferenciables, φ es una función diferenciable.

Sean $F = \sigma \cos \varphi + \tau \sin \varphi$ y $G = \sigma \sin \varphi - \tau \cos \varphi$. Entonces

$$F' = (\sigma' + \tau \varphi') \cos \varphi + (\tau' - \sigma \varphi') \sin \varphi$$

y luego

$$\begin{aligned}\sigma' + \tau\varphi' &= \sigma'(1 - \tau^2) + \sigma\tau\tau' = \sigma(\sigma\sigma' + \tau\tau') = 0, \\ \tau' - \sigma\varphi' &= 0.\end{aligned}$$

Esto implica que $F' = 0$ y luego F es constante. Análogamente se demuestra que G es una función constante. . . .

Similarmente se demuestra que la función

□

Capítulo 17

Ejercicios

Ejercicio 17.1. Demuestre que si S es una superficie, S es un conjunto abierto.

Ejercicio 17.2. Calcule las curvaturas en el punto $p = (0, 0, 0)$ de la superficie dada por $z = x^2 + ky^2$, donde k es una constante positiva.

Ejercicio 17.3. Calcule los coeficientes de la primera forma fundamental del plano $z = 0$ en coordenadas polares.

5.1 Todo punto de L_t es de la forma $(x(t), t(x(t) + 1))$. Para calcular $\alpha(t)$ escribimos $1 = x(t)^2 + y(t)^2 = x(t)^2 + t^2(x(t) + 1)^2$ como

$$0 = (1+t)^2 x(t)^2 + 2t^2 x(t) + (t^2 - 1).$$

Esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones:

$$x(t) = -1, \quad x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Luego

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

es una curva diferenciable cuya imagen es $C \setminus \{(-1, 0)\}$.

5.2 Sea v un vector cualquiera tal que $\|v\| = 1$. Como $\frac{d}{dt} \langle \alpha(t), v \rangle = \langle \alpha'(t), v \rangle$,

$$\langle \alpha(b) - \alpha(a), v \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle dt,$$

por el fundamental del cálculo. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$-\|\alpha'(t)\| \leq \langle \alpha(b) - \alpha(a), v \rangle \leq \|\alpha'(t)\|.$$

Luego

$$\langle \alpha(b) - \alpha(a), v \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle dt \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L_a^b(\alpha).$$

Si $v = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{\|\alpha(b) - \alpha(a)\|}$, entonces $\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq L_a^b(\alpha)$.

5.5 Un cálculo directo muestra que

$$T(t) = \alpha'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t), \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \right)$$

y luego α está parametrizada por longitud de arco pues $|\alpha'(t)| = 1$ para todo t . Calculamos

$$T'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-\cos t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}(-\cos t), \frac{1}{\sqrt{3}}(-\cos t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \right)$$

y luego $\kappa(t) = |T'(t)| = 1$ y $N(t) = T'(t)$. Como $B(t) = T(t) \times N(t)$, al derivar, tenemos que

$$B'(t) = T'(t) \times N(t) + T(t) \times N'(t) = T'(t) \times T'(t) + T(t) \times T''(t) = T(t) \times T''(t).$$

Como además $T''(t) = -T(t)$, se tiene que $B'(t) = 0$ y luego $\tau(t) = 0$ pues $\tau(t)N(t) = B'(t) = 0$.

5.7 Si α está parametrizada por longitud de arco, entonces $T(s) = \alpha'(s)$ y $|T(s)| = 1$ para todo s . Como además $T'(s) = \kappa(s)N(s)$, entonces

$$\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\| = \|T(s) \times \kappa(s)N(s)\| = \kappa(s)\|T(s) \times N(s)\| = \kappa(s)\|B(s)\| = \kappa(s).$$

Sea β una reparametrización de α por longitud de arco, es decir $\alpha(t) = \beta(s(t))$, donde $s(t)$ es la función de longitud de arco. Al derivar:

$$\alpha'(t) = \beta'(s(t))s'(t), \quad \alpha''(t) = \beta''(s(t))s'(t)^2 + \beta'(s(t))s''(t). \quad (17.1)$$

eq:derivadas

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= s'(t)^3 \beta'(s(t)) \times \beta''(s(t)) + s'(t)s''(t) \beta'(s(t)) \times \beta'(s(t)) \\ &= s'(t)^3 \beta'(s(t)) \times \beta''(s(t)) \\ &= s'(t)^3 \kappa(s(t))B(s(t)). \end{aligned}$$

De aquí se obtiene la fórmula para la curvatura ya que

$$\|\alpha'(t)\| = \|T(s(t))\| |s'(t)| = |s'(t)|.$$

5.8 Sabemos que $\alpha'(s) = T(s)$ y que $\alpha''(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s)$. Calculamos entonces

$$\alpha'(s) \times \alpha''(s) = T(s) \times \kappa(s)N(s) = \kappa(s)B(s).$$

Por otro lado, si derivamos $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ y usamos las fórmulas de Frenet obtenemos

$$\alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s)).$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle &= \langle \kappa(s)B(s), \kappa'(s)N(s) - \kappa(s)^2 T(s) - \kappa(s)\tau(s)B(s) \rangle \\ &= -\kappa(s)^2 \tau(s). \end{aligned}$$

Como además $|\alpha'(s) \times \alpha''(s)|^2 = \kappa(s)^2$, se concluye la fórmula buscada.

Supongamos ahora que α no está parametrizada por longitud de arco. Como α es regular, podemos parametrizarla por longitud de arco, digamos $\alpha(t) = \beta(s(t))$, donde $s(t)$ es la función de longitud de arco. Calculamos:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \beta'(s(t))s'(t), \\ \alpha''(t) &= \beta''(s(t))s'(t)^2 + \beta'(s(t))s''(t), \\ \alpha'''(t) &= \beta'''(s(t))s'(t)^3 + 3\beta''(s(t))s'(t)s''(t) + \beta'(s(t))s'''(t). \end{aligned}$$

Entonces

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = s'(t)^3 \beta'(s(t)) \times \beta''(s(t))$$

y luego

$$\begin{aligned} \langle \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle &= \langle \beta'''(s(t)) s'(t)^3, s'(t)^3 \beta'(s(t)) \times \beta''(s(t)) \rangle \\ &= s'(t)^6 \langle \beta'''(s(t)), \beta'(s(t)) \times \beta''(s(t)) \rangle \\ &= -s'(t)^6 \kappa(s(t))^2 \tau(s(t)). \end{aligned}$$

5.9 No es posible encontrar explícitamente una parametrización de α por longitud de arco, por lo que es esencial usar los ejercicios anteriores. Calculamos:

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2), \quad \alpha''(t) = (0, 2, 6t), \quad \alpha'''(t) = (0, 0, 6).$$

Calculamos entonces $\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (6t^2, -6t, 2)$ y luego

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 4t^4)^{3/2}}, \\ \tau(t) &= \frac{12}{36t^4 + 36t^2 + 4} = \frac{3}{1 + 9t^4 + 9t^2}. \end{aligned}$$

5.10 Como α es una curva plana sabemos que tiene torsión nula. Calculemos la curvatura. Un cálculo directo muestra que

$$\alpha'(t) = (1, f'(t), 0), \quad \alpha''(t) = (0, f''(t), 0), \quad \alpha'(t) \times \alpha''(t) = (0, 0, f''(t)).$$

Luego gracias al ejercicio 5.7,

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.$$

Referencias

1. M. Abate and F. Tovena. *Curves and surfaces*, volume 55 of *Unitext*. Springer, Milan, 2012. Translated from the 2006 Italian original by Daniele A. Gewurz.
2. S. Montiel and A. Ros. *Curves and surfaces*, volume 69 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, second edition, 2009. Translated from the 1998 Spanish original by Montiel and edited by Donald Babbitt.
3. M. Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.

Índice alfabético

- Ángulo
 - entre curvas, 77
- Aplicación
 - conforme, 77
 - de Gauss, 43
- Círculo, 5
- Cambio de coordenadas, 30
- Campo vectorial, 41
- Campo vectorial tangente
 - a lo largo de una curva, 94
- Carta
 - local, 23
- Catenoide, 65, 77
- Cilindro, 25, 42, 45, 47, 76
 - generalizado, 68
- Coefficientes
 - de la primera forma fundamental, 47
 - de la segunda forma fundamental, 54
- Conjunto
 - conexo, 41
- Cono, 26, 48
- Curva
 - cerrada, 15
 - de rapidez unitaria, 7
 - diferenciable, 3
 - en una superficie, 35
 - longitud de una, 6
 - parametrizada por longitud de arco, 7
 - plana, 4
 - regular, 7
 - simple, 15
 - vector tangente a una, 3
 - velocidad de una, 3
- Curvatura
 - con signo, 97
 - de una curva, 10
 - gaussiana, 44
 - gaussiana, interpretación geométrica, 56
 - geodésica, 51
 - media, 44
 - normal, 51
- Curvaturas principales, 44
- Desigualdad
 - de Cauchy–Schwarz, 17
 - isopetrimétrica, 17
- Difeomorfismo, 6, 34
- Difeomorfismo local, 76
- Diferencial, 37
 - de una función, 23
- Dominio, 48
- Esfera, 24, 44, 48
- Fórmula
 - de Euler, 52
- Fórmulas de Frenet
 - para curvas en el espacio, 11
- Función
 - altura, 34
 - diferenciable, 33
 - distancia al cuadrado, 34
- Geodésica, 89
- Gráfico
 - de una función, 25
- Hélice circular, 5
- Helicoide, 48, 60, 77, 86
- Identidad de Lagrange, 49
- Inclusión, 34
- Isometría, 82
- Isometría local, 75

- Paraboloide
 - elíptico, 36, 38, 42
- Paraboloide hiperbólico, 45
- Parametrización
 - conforme, 80
 - local, 23
- Plano, 24, 44, 47, 76
- Preimagen de un valor regular, 42
- Primera forma fundamental, 47
 - ángulo entre curvas, 48
 - área, 48
 - longitud de curvas, 48
- Problema isoperimétrico, 16
- Proyección estereográfica, 79
- Proyección estereográfica, 79
- Pseudo-esfera, 67
- Punto
 - elíptico, 52
 - hiperbólico, 54
 - parabólico, 54
 - plano, 54
 - umbílico, 54
- Regla de la cadena, 39
- Reparametrización
 - de una curva, 6
- Símbolos de Christoffel, 84
- Segunda forma fundamental, 51
 - coeficientes, 54
- Superficie
 - de revolución, 63, 86
 - mínima, 53
 - orientable, 41
 - reglada, 68
 - regular, 23
 - totalmente umbílica, 57
- Teorema
 - de Brouwer–Samelson, 73
 - de Hilbert, 71
 - de Hilbert–Liebmann, 73
 - de Jellett–Liebmann, 73
 - de la curva de Jordan, 16
 - de la función inversa, 29
 - de Meusnier, 52
 - Egregium de Gauss, 83
 - fundamental de curvas, 13
- Toro, 64
- Torsión
 - de una curva, 10
- Tractriz, 67
- Triedro de Frenet, 10
- Valor regular, 31
- Vector
 - binormal a una curva, 10
 - tangente a una curva, 3
 - tangente a una superficie, 35
 - velocidad de una curva, 3
- Vector normal
 - a una curva, 10