Leandro Vendramin

Historia de la matemática

– Notas –

18 de agosto de 2022

Índice general

Prefacio

Estas notas pertenecen a un curso dictado el segundo cuatrimestre de 2019, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Me propuse que ni el curso ni estos apuntes fueran una colección de anécdotas sobre las personas que desarrollaron la matemática. No tengo nada en contra de tales anécdotas: la matemática y su historia es más interesante que esos simpáticos cuentos acerca de las hazañas o particularidades de las personas involucradas. Los interesados en la vida de algunos personajes de la matemática deberían consultar el libro de Bell [6], el libro de Osen [40], o quizá mejor aún las biografías del MacTutor History of Mathematics Archive.

Este curso no pretende ser un tratado enciclopédico sobre la historia de la matemática. El objetivo es, simplemente, el de desarrollar, más o menos en detalle, algunos tópicos caprichosamente seleccionados, e intentar explicarlos desde un contexto histórico. Por eso, siempre que sea posible, intentaré utilizar algunos de los temas estudiados como excusa para discutir algunos temas más o menos actuales de la investigación matemática.

Muchas páginas de estas notas estarán dedicadas a la matemática griega. Sin embargo, dado que el curso no está destinado al especialista sino al estudiante con ganas de conocer más sobre el desarrollo de la matemática, aquel que quiera profundizar en la matemática griega deberá consultar, por ejemplo, alguno de los textos de Heath [28, 29, 30].

El curso tiene una estructura similar al libro de Stillwell [47]. Como ya mencioné, hay una selección personal más o menos arbitraria de los temas a desarrollar. Algunos de estos tópicos son clásicos y prácticamente imposibles de evitar: el teorema de Pitágoras, los trece libros de Euclides, el análisis infinitesimal. Otros temas son un poco más actuales y creo que –quizá por por gusto, lo admito– también son difíciles de omitir; la titánica clasificación de los grupos simples finitos es un claro ejemplo.

Cada uno de los temas que componen el curso será desarrollado en un capítulo. La unidad de la matemática me permitirá hacer digresiones sobre la matemática en las civilizaciones antiguas, sobre cómo fueron creándose o formalizándose determinadas ideas, sobre cómo la matemática pura se conecta con otras ciencias, etc.

Para ilustrar la forma en la que este curso está organizado hay que observar que las notas comienzan con el teorema de Pitágoras. Después de haber enunciado el teorema y haber hecho algunos comentarios más o menos conocidos sobre las demostraciones, quedo casi obligado a mencionar la aparición de este famoso resultado en civilizaciones antiguas y puedo además intentar explicarlo dentro del contexto en el que fue descubierto, el ambiente donde un teorema es descubierto siempre es de gran importancia. Después del teorema de Pitágoras quedo naturalmente habilitado para hablar de los pitagóricos y la introducción de los números irracionales. Luego –ya sin culpa– hago un salto caprichoso de unos dos mil años y demuestro que e y π son números irracionales.

Veamos otro ejemplo. En la historia de la matemática la resolución de ecuaciones polinomiales en una variable ocupa un papel fundamental. Todos sabemos cómo resolver la ecuación cuadrática. Muchas personas saben que también pueden resolverse las ecuaciones de grado tres y cuatro, aunque pocas personas conocen explícitamente estas fórmulas y seguramente casi nadie las recuerda. Un capítulo de estas notas desarrolla algunas de estas fórmulas y nos lleva naturalmente a la imposibilidad de resolver la ecuación general de grado cinco con fórmulas que involucren raíces de expresiones racionales de los coeficientes del polinomio. Estamos entonces frente a una de las motivaciones de la teoría de grupos, que nos permitirá conectarnos con muchos tópicos actuales de gran importancia. Dentro de estos tópicos quiero destacar la clasificación de los grupos simples finitos, resultado conocido como el teorema de las diez mil –o quizá quince mil– páginas, o los sistemas formales de verificación computacional de demostraciones.

Los temas elegidos son la excusa perfecta para contar un poco de historia y para aprender un poco más de matemática.

Algunas sucesiones

Frecuentemente nos encontraremos con sucesiones de números. Para reconocer una sucesión particular y ver cómo se conecta con otros tópicos de la matemática identificaremos nuestra sucesión con una de las sucesiones de la *enciclopedia de sucesiones de enteros Sloane*, OEIS. En 1965 un estudiante de doctorado inglés de apellido Sloane comenzó a recopilar sucesiones ya que suponía que iban a serle de gran utilidad en sus investigaciones sobre combinatoria. La colección de sucesiones rápidamente tuvo éxito y por esa razón, en 1973, Sloane publicó un libro con algunas de las sucesiones de su colección; esta primera versión contenía 2372 sucesiones. En 1995 apareció una nueva versión del libro, esta vez con 5488 sucesiones. El éxito de estas ediciones hizo que muchos matemáticos se comunicaran con Sloane y le facilitaran nuevas sucesiones, cosa que hizo que la colección se tornara gigante e inmanejable. Cuando la enciclopedia alcanzó las 16000 sucesiones, Sloane comprendió que solamente existía una única forma de continuar con aquel proyecto: la enciclopedia tenía que transformarse y pasar a ser una base de datos disponible en Internet. Por casi cuarenta años Sloane fue el encargado del mantenimiento de la base de datos, hasta que, en 2002 una comisión editorial y muchos voluntarios se hicieron cargo de continuar con el proyecto. La enciclopedia está disponible acá y contiene actualmente[1] 320000 sucesiones. Cada una de las sucesiones de la enciclopedia está representada por un código. La sucesión de los números primos

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \ldots$$

es la sucesión A000040 y en esa página nos encontraremos no solo a los primeros números primos sino mucha otra información relevante, desde referencias bibliográficas relacionadas con esta sucesión y conexiones con otras sucesiones de la enciclopedia, hasta fragmentos de código en distintos lenguajes de programación que nos permitirán repetir los cálculos que dan los números que la enciclopedia nos muestra.

Sobre la estructura del curso

El curso estará organizado de la siguiente forma. El primer capítulo está dedicado al teorema de Pitágoras. Mencionaremos algunas demostraciones y cómo este teorema aparece en distintas épocas y comunidades matemáticas. Hablaremos además de ternas pitagóricas y nos encontraremos con la oportunidad de mencionar algunos hechos notables sobre la matemática en babilonia. El segundo capítulo es sobre números irracionales. Demostraremos que $\sqrt{2}$ es un número irracional de varias formas distintas y veremos cómo era tratada la irracionalidad de ciertos números en la matemática griega. Al final del capítulo nos encontraremos con la irracionalidad y la historia de dos de las constantes matemáticas más famosas: los números e y π.

En general cada capítulo contiene varios ejercicios de distinto nivel de dificultad, ya sea para que los estudiantes puedan apreciar las distintas técnicas utilizadas en la matemática o para que se pueda profundizar en temas específicos. Algunos de estos ejercicios pueden utilizarse como los temas necesarios para aprobar la materia.

Si alguien tuviera comentarios o sugerencias, automáticamente se ganará el derecho a ser mencionado en la siguiente sección.

Agradecimientos

Quiero agradecer a toda la gente que me prestó libros y que leyó y corrigió estas notas: Fernando Cukierman, Ricardo Durán, Guillermo Henry, Martín Mereb. También le agradezco a Juan Pablo Pinasco por compartir conmigo el material que usó para su propio curso sobre la historia de la matemática.

[1] junio de 2019

Capítulo 1
El teorema de Pitágoras

Tal como hace Stillwell en su libro [47], vamos a empezar el curso con el teorema de Pitágoras. Es una buena elección: el teorema de Pitágoras es uno de los teoremas más antiguos y además conecta varias ideas centrales en el desarrollo de la matemática.

La primera demostración rigurosa de este resultado se le atribuye conunmente a Pitágoras, aunque no hay evidencia concreta de que Pitágoras haya encontrado efectivamente una demostración. El teorema ya era conocido en Babilonia muchos años antes del nacimiento de Pitágoras. Se sabe además que el teorema fue descubierto independientemente en la matemática india y china, incluso con demostraciones especiales para ciertos casos particulares.

Deberíamos enunciar el teorema de Pitágoras sin apelar a la noción de longitud de un segmento sino solamente a la de área, ya que en tiempos de Pitágoras los matemáticos se sentían más cómodos con la noción de área que con la de longitud. De hecho, en aquellos tiempos, los matemáticos intentaban evitar números irracionales ya que no podrían comprenderlos completamente. El **teorema de Pitágoras** es el siguiente:

Teorema 1.1 (Pitágoras). *Si A, B y C son los cuadrados de la figura 1.1, de lados a, b y c respectivamente, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.*

Vale también la afirmación recíproca: si (a,b,c) es tal que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces existe un triángulo rectángulo de lados a y b e hipotenusa igual a c.

No sabemos cómo se demostró el teorema originalmente, se cree que fue mediante manipulaciones de áreas. Se conocen muchas demostraciones del teorema de Pitágoras, quizá casi cuatrocientas [36]. En la página Cut the knot, creada por Alexander Bogomolny, podremos encontrar más de cien demostraciones, todas muy bien explicadas.

Ejercicio 1.2. Demuestre el teorema de Pitágoras utilizando el diagrama de la figura 1.2.

Ejercicio 1.3. Utilice la figura 1.3 y demuestre el teorema de Pitágoras.

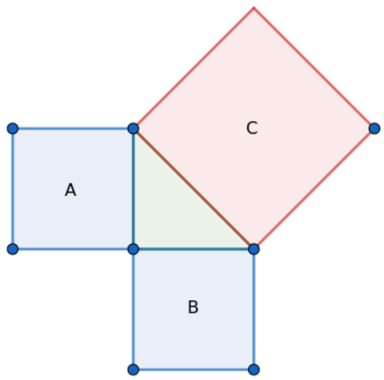


fig:pitagoras

Figura 1.1: El teorema de Pitágoras.

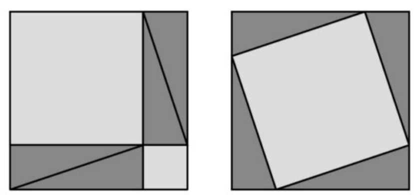


Figura 1.2: Otra demostración del teorema de Pitágoras, en general atribuida a la matemática china.

fig:pitagoras1

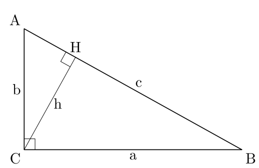


fig:semejanza

Figura 1.3: Otra demostración del teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1.4. Utilice la figura 1.4 y demuestre el teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1.5. Utilice la figura 1.5 y demuestre el teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1.6. Uno de los textos más antiguos de matemática china es el Zhoubi Suanjing, que data del período de la dinastía Zhou. Allí aparece una de las primeras demostraciones escritas del teorema de Pitágoras, basada en la figura 1.6. ¿Cómo puede usarse esa figura para demostrar el teorema de Pitágoras?

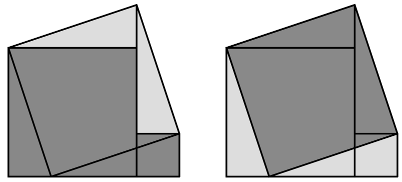


fig:Bhaskara

Figura 1.4: Otra demostración del teorema de Pitágoras, en general atribuida al matemático indio Bhaskara.

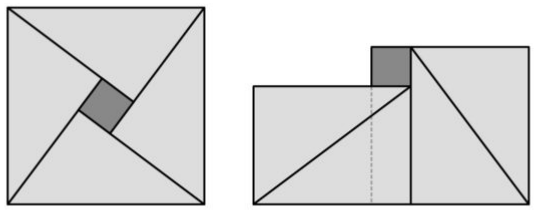


fig:arabe

Figura 1.5: Otra demostración del teorema de Pitágoras, en general atribuida al matemático árabe Thabit ibn Qurrá.

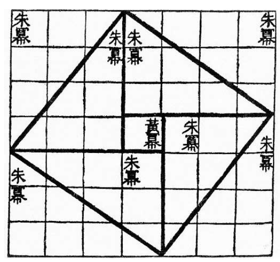


fig:China

Figura 1.6: Una demostración del teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1.7. En los elementos de Euclides aparece una demostración del teorema de Pitágoras. ¿Cuál es esa demostración? ¿Aparecen otras demostraciones del teorema de Pitágoras en estos famosos libros de Euclides?

Ejercicio 1.8. Existe una demostración del teorema de Pitagóras que se le atribuye a Leonardo Da Vinci. ¿Cuál es esa demostración?

Ejercicio 1.9. La demostración del teorema de Pitágoras de este ejercicio fue descubierta por Garfield, el vigésimo Presidente de los Estados Unidos. Demuestre el teorema de Pitágoras utilizando la figura 1.7.

El teorema de Pitágoras sugiere sutilmente que existe una profunda relación entre la aritmética y la geometría. Esta relación entre aritmética y geometría es también fundamental en el desarollo de las matemáticas.

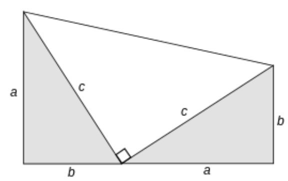


fig:garfield

Figura 1.7: La demostración de Garfield del teorema de Pitágoras.

Se cree que en tiempos antiguos se usaban distintas soluciones de la ecuación del teorema de Pitágoras para construir ángulos rectos. Por ejemplo, con una cuerda con doce nudos equidistantes (es decir, una cuerda de “longitud” igual a doce), se lograba construir el triángulo rectángulo $(3,4,5)$. Hoy en día usamos el teorema de Pitágoras para calcular longitudes y distancias. Si $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$ son dos puntos del plano cartesiano, se define la distancia entre A y B como

$$\operatorname{dist}(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}.$$

Esta fórmula para calcular la distancia entre dos puntos del plano puede extenderse fácilmente a puntos de un espacio de dimensión finita arbitraria.

Se tiene además una generalización del teorema de Pitágoras a espacios vectoriales de dimensión finita: Si V es un espacio vectorial con producto interno y $v_1,\dots,v_n\in V$ son vectores ortogonales dos a dos, entonces

$$\|v_1+\cdots+v_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|v_i\|^2.$$

Se recupera el teorema de Pitágoras al tomar $V=\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual.

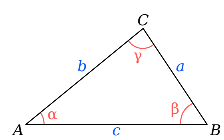


fig:coseno

Figura 1.8: El teorema del coseno.

El teorema de Pitágoras puede verse como un caso particular del **teorema del coseno**, que afirma que en un triángulo como el que vemos en la figura 1.8, se tiene $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Ejercicio 1.10. Demuestre el teorema del coseno.

Con el teorema del coseno podemos demostrar un lindo resultado publicado por el matemático escocés Matthew Stewart en 1746: Si se tiene un triángulo como el que vemos en la figura 1.9, entonces

$$mb^2 + nc^2 = mn^2 + nm^2 + ad^2.$$

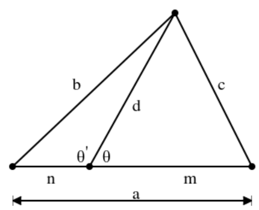


fig:Stewart

Figura 1.9: El teorema de Stewart.

Aparentemente Stewart publicó este resultado en 1746 cuando era candidato a reemplazar a Maclaurin como profesor de la Universidad de Edimburgo. Se cree que Arquímedes conocía ya este resultado. De hecho, el teorema de Stewart es una generalización del teorema de las medianas de Apolonio, que afirma que en el triángulo de la figura 1.9 se tiene

$$b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2d^2.$$

Ejercicio 1.11. Demuestre el teorema de Stewart.

Ejercicio 1.12. Demuestre el teorema de las medianas de Apolonio.

Ternas pitagóricas

Nos proponemos ahora encontrar ternas pitagóricas, es decir ternas $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Para más información sobre aspectos históricos sobre la construcción de ternas pitagóricas conviene mirar el segundo volumen del tratado de Dickson sobre la historia de la teoría de números [21].

Ejercicio 1.13. Si (a,b,c) es una terna pitagórica, entonces (ka,kb,kc) es una terna pitagórica.

Un ejemplo fácil de terna pitagórica es $(3,4,5)$. Otro ejemplo de terna pitagórica es $(6,8,10)$, aunque podríamos acusarlo de no es muy interesante pues puede obtenerse como

$$(6,8,10) = 2 \times (3,4,5).$$

Nos interesan entonces las ternas pitagóricas **primitivas**, es decir las ternas pitagóricas (a,b,c) con a, b y c coprimos. Veamos otros ejemplos de ternas pitagóricas primitivas:

$$\begin{array}{ccccc} (5,12,13), & (8,15,17), & (7,24,25), & (20,21,29), & (12,35,37), \\ (9,40,41), & (28,45,53), & (11,60,61), & (16,63,65), & (33,56,65), \\ (48,55,73), & (13,84,85), & (36,77,85), & (39,80,89), & (65,72,97). \end{array}$$

Si bien Pitágoras vivió alrededor del 500 a. C., las ternas pitagóricas se conocen desde mucho antes. Se sabe que las ternas pitagóricas fueron de interés en Babilonia, en China y en India, se cree que para la construccción de ángulos rectos. Una de las referencias más antiguas a las ternas pitagóricas es una tabla babilónica de arcilla conocida como Plimpton 322. Se cree que esta tabla fue escrita en el año 1800 a. C. El nombre se debe al siguiente hecho: a comienzos del siglo XX un editor llamado George Arthur Plimpton compró aquella tabla de barro y tiempo después la entregó a la Universidad de Columbia; esta tabla es la número 322 de la colección que Plimpton cedió a la Universidad de Columbia. Existen diversas interpretaciones sobre qué información contiene esta tabla y cómo fue que los babilónicos pudieron calcularla.

Un estudio reciente revela que la tabla describe las formas del triángulo rectángulo usando una novedosa forma de trigonometría; para más información referimos a [37].

fig:plimpton

Figura 1.10: La tabla Plimpton 322.

Según Proclo, Pitágoras conocía la regla

$$x = 2\alpha + 1, \quad y = 2\alpha^2 + 2\alpha, \quad z = y + 1,$$

para generar ternas pitagóricas. Platón conocía la regla

$$x = 2\alpha, \quad y = \alpha^2 - 1, \quad z = \alpha^2 + 1.$$

En sus elementos, en la proposición 5 del libro II, Euclides dio la regla

$$x = \alpha\beta\gamma, \quad y = \frac{1}{2}\alpha(\beta^2 - \gamma^2), \quad z = \frac{1}{2}\alpha(\beta^2 + \gamma^2),$$

para construir ternas pitagóricas. En la proposición 30 del libro X, dio otra regla:

$$x = \sqrt{mn}, \quad y = \frac{1}{2}(m - n), \quad z = \frac{1}{2}(m + n).$$

Al menos un siglo antes que Diofanto, Nipsus dio la siguiente regla:

$$z=\frac{1}{2}(x^2+1), \qquad y=\frac{1}{2}(x^2-1), \qquad \text{si } x \text{ es impar,}$$
$$z=\frac{1}{4}x^2+1, \qquad y=\frac{1}{4}x^2-1, \qquad \text{si } x \text{ es par,}$$

y además $x^2=z^2-y^2$. Estas fórmulas son equivalentes a las fórmulas dadas por Pitágoras y Platón. Más tarde, Diofanto presentó un ingenioso método geométrico que le permitió obtener la siguiente fórmula

$$a=(p^2-q^2)r, \quad b=2pqr, \quad c=(p^2+q^2)r, \tag{1.1}$$ eq:formula

para generar ternas pitagóricas.

Los babilónicas no disponían de notación algebraica, pero se cree que conocían la fórmula (1.1) en el caso $r=1$ y que así fue como lograron listar ternas pitagóricas. La fórmula (1.1) como método para obtener ternas pitagóricas aparece también en la matemática india y en manuscritos árabes. En 1738 Koerbero demostró que la fórmula (1.1) permite obtener todas las soluciones. Kronecker demostró en 1901 que la fórmula (1.1) no solamente da todas las soluciones sino que esto se hace sin repeticiones si $p>q>0$ y $r>0$.

Que las fórmulas (1.1) produzcan ternas pitagóricas es un caso particular de la siguiente identidad que involucra sumas de dos cuadrados:

$$(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2). \tag{1.2}$$ eq:2cuadrados

Esta identidad era ya conocida por Diofanto, que la interpretó como una regla para generar triángulos rectángulos: si se tienen dos triángulos rectángulos de lados (x_1,y_1) y (x_2,y_2), entonces puede construirse un triángulo rectángulo de lados $(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$.

Ejercicio 1.14. Demuestre la identidad (1.2).

Encontrar ternas pitagóricas es en realidad encontrar soluciones enteras a una cierta ecuación Diofántica.

xca:paridad **Ejercicio 1.15.** Demuestre que si (a,b,c) es una terna pitagórica primitiva, entonces $a\equiv b+1 \bmod 2$.

thm:ternas_pitagoricas **Teorema 1.16.** *Sea (a,b,c) una terna pitagórica primitiva tal que b es un número par. Entonces*

$$a=m^2-n^2, \quad b=2mn, \quad c=m^2+n^2$$

para ciertos enteros coprimos m,n tales que $m>n>0$ y $m\not\equiv n$ mód 2. Recíprocamente todas las ternas de esa forma son ternas pitagóricas primitivas.

Demostración. Como b es par, a es impar y luego $c^2=a^2+b^2$ es también impar. Escribimos

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a).$$

Los números $c+a$ y $c-a$ son ambos pares. Al dividir por cuatro podemos reescribir $b^2 = (c+a)(c-a)$ como

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c+a}{2}\frac{c-a}{2}.$$

Observemos que $\frac{c+a}{2}$ y $\frac{c-a}{2}$ son coprimos pues si d es un divisor común, entonces $d = 1$ pues d divide al número $c = \frac{c-a}{2} + \frac{c+a}{2}$ y también al número $a = \frac{c-a}{2} - \frac{c+a}{2}$. Por el teorema de factorización única sabemos que existen enteros coprimos m,n tales que

$$\frac{c+a}{2} = m^2, \quad \frac{c-a}{2} = n^2.$$

Al despejar obtenemos entonces que

$$c = m^2 + n^2, \quad a = m^2 - n^2$$

y luego $b = 2mn$ tal como queríamos demostrar.

Como m y n son coprimos, no pueden ser ambos números pares. Si ambos fueran impares, los números m^2+n^2, $2mn$ y m^2-n^2 serían pares, una contradicción pues (a,b,c) es una terna primitiva. $\square$

Veamos una explicación geométrica de las fórmulas de Euclides que utiliza las ideas de Diofanto. Utilizaremos nuestro lenguaje algebraico, ya que esto facilitará mucho las cuentas. Primero escribamos $a^2 + b^2 = c^2$ como

$$(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1.$$

Si $x = a/c$, $y = b/c$, el problema entonces es encontrar soluciones racionales de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Como sabemos, esta es la ecuación del círculo con centro en $(0,0)$ y radio 1. Sea $P = (x,y)$ una solución racional de la ecuación, podemos tomar por ejemplo $(x,y) = (-1,0)$. Si L es la recta con pendiente racional t que pasa por P, $y = t(x+1)$, entonces L corta al círculo $x^2+y^2 = 1$ en un punto Q que también tiene coordenadas racionales. Al reemplazar $y = t(m+1)$ en $x^2+y^2 = 1$ y utilizar que la ecuación cuadrática

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

tiene como solución $x = -1$, se obtiene que la otra solución es también un número racional. Como la segunda solución de esta cuadrática es

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

se concluye que

$$y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

De estas expresiones es fácil obtener la fórmula general para encontrar ternas pitagóricas que mencionamos anteriormente.

Es muy inmportante remarcar el siguiente hecho notable: encontrar ternas pitagóricas es entonces encontrar soluciones racionales de una cierta ecuación, es decir, encontrar los puntos racionales de una cierta curva.

Los babilónicos

Es un buen momento para hacer una pequeña digresión y hablar sobre la matemática de los babilónicos. Hasta principios del siglo XX poco se sabía sobre la matemática de los pueblos que habitaban la mesopotamia, sumerios, acadios, babilonios, asirios. Hacia el año 3000 a. C. los sumerios introdujeron un sistema de numeración posicional de base 60, que es esencialmente el sistema sexagesimal que aún hoy utilizamos en las mediciones de tiempo y ángulos. La inexistencia de un símbolo para el cero y de un signo que permitiera diferenciar parte entera y parte fraccionaria, hace que el sistema de numeración de los sumerios resulte impreciso para nuestros ojos, aunque los sumerios lo utilizaban hábilmente, ya sea mediante el uso de símbolos auxiliares que permitieran evitar ambigüedades o simplemente gracias al contexto en el que se encontraba un determinado problema.

A principios del siglo XX se encontraron textos pertenecientes al período babilónico, digamos del año 2000 a. C., donde se da cuenta de los conocimientos matemáticos que los sumerios tenían alrededor del año 3000 a. C. y una colección de problemas numéricos particulares junto con sus soluciones. Entre estos aportes vemos cómo los babilónicos resolvían ecuaciones lineales y cuadráticas. En uno de los problemas se plantea un problema cuya solución depende de resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x+y &= 1800, \\ (2/3)x-(1/2)y &= 500. \end{aligned}$$

La solución depende de la introducción de una nueva variable z tal que $x = 900+z$, $y = 900-z$. Al reemplazar estas fórmulas en la segunda ecuación del sistema puede obtenerse el valor de z, que nos da al par $(x,y) = (1200,600)$ como única solución del sistema.

En otro problema se plantea un problema que requiere resolver

$$\begin{aligned} xy+x-y &= 183, \\ x+y &= 27. \end{aligned}$$

Para resolver este problema se observa que el sistema puede reescribirse como

$$\begin{aligned} x(y+2) &= 210, \\ x+(y+2) &= 29 \end{aligned}$$

y luego se encuentran los números cuya suma es 29 y su producto es 210 de forma más o menos similar a la que usaríamos hoy en día.

Aparece además un problema de interés compuesto que requiere resolver la ecuación que hoy escribimos como

$$(5/6)^x = 2.$$

La solución de esta ecuación se obtiene en forma aproximada mediante un método que no es sino una forma precaria del método "regula falsi" que hoy en día podemos encontrarnos en casi cualquier curso de cálculo numérico.

Nos encontramos al teorema de Pitágoras como método para calcular raíces cuadradas; esto se hace en forma aproximada y mediante la fórmula

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 \pm r} \sim a \pm \frac{r}{2a}.$$

Para calcular el área de un círculo de circunferencia c, los babilónicos lo hacían aproximadamente gracias a la fórmula $c^2/12$. Como aceptaban que el triple del diámetro es igual a la circunferencia, tenían que el área de un círculo de radio r es aproximadamente igual a $3r^2$.

Podían realizar cálculos relacionados con segmentos circulares tal como el que vemos en la figura 1.11. Sabían, por ejemplo, que

$$h = R - \sqrt{R^2 - (c/2)^2}$$

y tenían una fórmula para calcular el valor del segmento c.

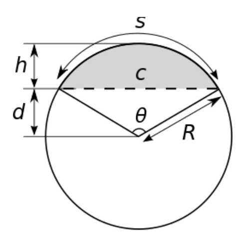


fig:circular

Figura 1.11: Un segmento circular.

Podría decirse que estos son los primeros pasos de la trigonometría, desarrollada mucho después por el matemático griego Hiparco. Los babilonios no desarrollaron la noción de ángulo, solamente aparecen en los documentos implícitamente los triángulos rectángulos.

De los textos encontrados resulta evidente que los babilónicos conocían la proporcionalidad entre los lados de triángulos semejantes, sabían cómo calcular áreas de triángulos y trapecios y volúmenes de prismas y cilindros. Los textos nos muestran que los babilónicos disponían de una técnica medio geométrica y medio algebraica, que les permitió manipular eficientemente ecuaciones lineales y cuadráticas. Esta técnica es muy similar a la que nos encontraremos en uno de los libros de

Euclides, escrito aproximadamente en el año 300 a. C. Intentaremos describir brevemente esta técnica de los babilónicos y para esto seguiremos la presentación del primer volumen del tratado de Babini y Rey Pastor [41, 42]. Supongamos que se tiene un cuadrado como el que vemos en la figura 1.12. Si el segmento AB mide a y

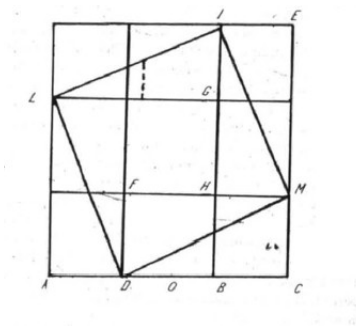


fig:babilonios

Figura 1.12: La técnica de los babilónicos.

AD mide b, entonces AC mide $a+b$ y BD mide $a-b$. Si O es el centro de simetría del segmento AC, entonces AO y OC son ambos iguales a $\frac{1}{2}(a+b)$ y además DO y OB son ambos iguales a $\frac{1}{2}(a-b)$. El cuadrado de la figura 1.12 puede descomponerse en cuadrados y rectángulos y de estas descomposiciones podemos obtener las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab,\\ (a-b)^2+2ab &= a^2+b^2,\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2,\\ (a+b)^2 &= 4ab+(a-b)^2,\end{aligned}$$

fórmulas que los babilónicos usaron en la resolución de problemas. Si c es la medida de la hipotenusa del triángulo DCM, entonces obtenemos también que

$$c^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2,$$

fórmula que no es otra cosa sino una versión del teorema de Pitágoras. La fórmula $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ nos lleva casi inmediatamente a la regla de construcción de ternas pitagóricas que mencionamos anteriormente: simplemente debemos tomar $a = m^2$, $b = n^2$ y luego

$$(m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2+n^2)^2.$$

Capítulo 2
Números irracionales

¿Por qué es tan importante el teorema de Pitágoras? El teorema de Pitágoras introduce naturalmente números irracionales. La hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 1 es igual a $\sqrt{2}$, un número cuyo cuadrado es dos. En tiempos de Pitágoras esto se mantuvo en secreto ya que no era un resultado que los pitagóricos pudieran comprender totalmente. Los pitagóricos no podían aceptar que $\sqrt{2}$ fuera un número, pero sabían que $\sqrt{2}$ es la diagonal de un cuadrado unitario. Como resultado, las cantidades geométricas eran en general tratadas de forma que no fuera necesario utilizar números. La relación entre aritmética y geometría estaba parcialmente rota. Sin embargo, para solventar las dificultades originadas por esta división, los griegos desarrollaron entonces ingeniosos métodos para entender cuánto podría aproximarse una cierta cantidad geométrica en términos de números racionales. Podemos encontrar estas ideas en el libro X de los Elementos, donde Euclides estudia detalladamente números de la forma

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

donde a y b son números racionales.

Durante muchos años la matemática no vio avances en relación con los números irracionales, salvo, quizá, la observación que hizo Fibonacci en 1225 sobre la irracionalidad de las soluciones de la ecuación

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Fibonacci demostró que las soluciones son números irracioanales, pero no esos irracionales estudiados por Euclides en el libro X.

Las ideas sobre irracionales de la matemática griega fueron redescubiertas por Dedekind en el siglo XIX y permitieron que la aritmética y la geometría finalmente pudieran convivir pacíficamente.

Ejercicio 2.1. Demuestre que un entero m es par si y sólo si m^2 es par.

La demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que daremos a continuación aparece en uno de los libros de Aristóteles.

Teorema 2.2. *El número $\sqrt{2}$ no es racional.*

Demostración. Si suponemos que $\sqrt{2} = a/b$ con a y b son números naturales sin factores en común, entonces $(a/b)^2 = 2$. Esto implica que $a^2 = 2b^2$ es un número par. Luego a es par, digamos $a = 2c$. Entonces $2b^2 = a^2 = 4c^2$ implica que $b^2 = 2c^2$ y luego b es par, una contradicción. $\square$

La demostración que vimos usa fuertemente la paridad de los números naturales. Gracias a uno de los diálogos de Platón sabemos que el matemático griego Teodoro estudió algunos números irracionales y demostró la irracionalidad de $\sqrt{n}$ para los $n < 17$ que no son cuadrados. Se nos dice además que Teodoro concibió la figura 2.1 y que justamente fue en el número 17 donde su análisis se detuvo.

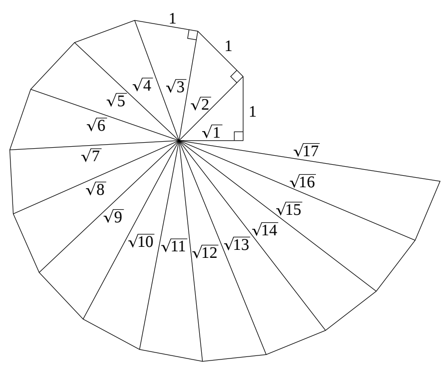


fig:teodoro

Figura 2.1: La espiral de Teodoro.

No se sabe exactamente qué demostraciones encontró Teodoro. Más interesante fue para los historiadores saber por qué Teodoro se detuvo justamente en 17. Algunos creen que fue porque a partir de ese número el dibujo que vemos en la figura 2.1 tiene superposiciones, aunque esta versión no parece ser una explicación suficientemente fuerte como para convencernos. De hecho, en 1958 se demostró que esas supuestas superposiciones son fácilmente evitables si extendemos la espiral tal como vemos en la figura 2.2.

Una explicación más razonable –observada por Heath en 1931– se basa en el siguiente hecho: la técnica basada en el uso de la paridad falla por primera vez justamente en 17. Supongamos que $\sqrt{17} = a/b$, donde a y b son coprimos; entonces $17b^2 = a^2$. Como a y b son coprimos, ambos son impares, digamos $a = 2k+1$ y $b = 2l+1$. Al reemplazar obtenemos entonces

$$17(4l^2 + 4l + 1) = 4k^2 + 4k + 1,$$

que al simplificarse queda $17l(l+1)) + 4 = k(k+1)$. ¡Aquí no hay contradicción!

Tal como se afirma en [38], muy probablemente esta sea la razón por la que Teodoro detuvo su análisis en 17. No nos olvidemos que los griegos creían fuertemente

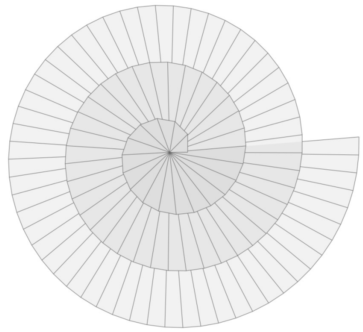


fig:espiral_infinita

Figura 2.2: Una extensión de la espiral de Teodoro.

en la potencia de las técnicas de paridad. De hecho, para Platón la aritmética era la teoría de los pares y los impares.

Veamos ahora que el argumento de paridad sí funciona para números menores que 17 que no son cuadrados. Este resultado será consecuencia de un resultado mucho más general:

Teorema 2.3. *Si n es un entero positivo que puede escribirse como $4m+2$, $4m+3$, $8m+5$, entonces puede demostrarse que $\sqrt{n}$ es irracional con un argumento de paridad.*

Demostración. Consideremos el caso $n=8m+5$ y escribamos $\sqrt{8m+5}=a/b$, donde a y b son coprimos. Como $(8m+5)b^2=a^2$, tanto a como b deberán ser números impares. Escribimos entonces $a=2k+1$ y $b=2l+1$ y reemplazamos para obtener

$$(8m+5)(l^2+l)+(2m+1)=k^2+k,$$

una contradicción pues $2m+1$ es impar y los números k^2+k y l^2+l son ambos números pares. Los dos casos restantes son similares. $\square$

Como sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional, también será irracional $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Similarmente, si demostramos la irracionalidad de $\sqrt{3}$ tendremos también demostrada la irracionalidad de $\sqrt{12}$ pues $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Como

$$\begin{array}{llll} 3=4\times 0+3, & 4=2^2, & 5=8\times 0+5, & 6=4\times 1+2,\\ 7=4\times 1+3, & 9=3^2, & 10=4\times 2+2, & 11=4\times 2+3,\\ 13=8\times 1+5, & 14=4\times 3+2, & 15=4\times 3+3. & 16=4^2, \end{array}$$

vemos que todos los números menores a 17 que no son cuadrados perfectos quedan cubiertos por el teorema.

Terminaremos nuestra discusión sobre números irracionales con el siguiente teorema, cuya demostración fue encontrada por Estermann en 1975 y está basada en ideas de Dedekind de 1858:

Teorema 2.4. *Si d es un número natural que no es un cuadrado, entonces $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 < d < (n+1)^2$ y escribamos $\sqrt{d} = p/q$, con q el menor entero positivo posible. Esto implica que

$$q = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : k\sqrt{d} \in \mathbb{Z}\}$$

y entonces

$$(\sqrt{d} - n)q\sqrt{d} = qd - qn\sqrt{d} \in \mathbb{Z}.$$

Pero por la forma en la que elegimos n, sabemos que $(\sqrt{d} - n)q < q$, y esto es una contradicción a la minimalidad de q. □

Los griegos no disponían del teorema fundamental de la aritmética, aunque conocían resultados casi equivalentes. Este teorema fue enunciado y demostrado tal comom lo conocemos por Gauss, ver por ejemplo [1, 2, 25, 32]. Si sabemos que todo número admite una única factorización como producto de números primos, podemos demostrar fácilmente la irracionalidad de muchos números. Como ejemplo demostremos que $\sqrt{17}$ es un número irracional: si suponemos que $\sqrt{17} = a/b$, donde a y b son enteros sin factores en común, entonces $17b^2 = a^2$. Pero como 17 divide al número a^2, 17 divide también al número a y luego 17 divide al número b.

Ejercicio 2.5. Demuestre que $\log_{10} 2$ es irracional.

Ejercicio 2.6. Sea x una raíz del polinomio $X^m + c_1X^{m-1} + \cdots + c_{m-1}X + c_m \in \mathbb{Z}[X]$. Demuestre que si $x \notin \mathbb{Z}$, entonces x es irracional.

El ejercicio anterior aplicado al polinomio $X^4 - 10X^2 + 1$ nos permite demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

Ejercicio 2.7. Demuestre que $\sqrt[7]{95}$ es irracional.

Antes de pasar al estudio de algunos números irracionales particulares, vamos a demostrar un resultado de Dirichlet, aproximadamente de 1840, sobre aproximación de irracionales por racionales. Dirichlet demostró este resultado con la mente puesta en resolver una cierta ecuación diofántica conocida como la ecuación de Pell. Es interesante observar que la prueba del teorema de Dirichlet contiene la primera manifestación de un principio básico que hoy conocemos como *el principio del palomar*, que afirma que si se tienen $n+1$ objetos distribuidos en n cajas, entonces alguna caja contendrá al menos dos de aquellos objetos.

Teorema 2.8 (Dirichlet). *Sea α un número irracional. Para cada entero positivo Q existen enteros p y q tales que $1 \le q \le Q$ y $|q\alpha - p| < 1/Q$.*

Demostración. Dado un entero positivo Q, consideramos los siguientes Q números: $\alpha, 2\alpha, \ldots, Q\alpha$. Para cada uno de estos números de la forma $k\alpha$, elegimos un entero p_k tal que

$$0 < p_k - k\alpha < 1.$$

Como α es irracional, estas desigualdades son estrictas. Además, si $i \neq j$, entonces $p_i - i\alpha \neq p_j - j\alpha$ pues α es irracional. Partimos ahora al intervalo $[0,1]$ en Q intervalitos, cada uno de longitud $1/Q$. Si agregamos el cero a nuestra lista original, tenemos $Q+1$ números distintos del intervalo $[0,1]$, el principio del palomar de Dirichlet nos dice que algún subintervalo contendrá al menos dos de esos números, digamos $p_k - k\alpha$ y $p_l - l\alpha$. Como la distancia entre estos dos números es entonces menor a $1/Q$, si definimos $p = p_k - p_l$ y $q = k + l$, tenemos

$$|p - q\alpha| = |(p_k - p_l) - (k - l)\alpha| = |(p_k - k\alpha) - (p_l - l\alpha)| < \frac{1}{Q}. \qquad \square$$

Existen otras demostraciones de este teorema de Dirichlet de aproximación de irracionales. Podría demostrarse, por ejemplo, con las ideas de Minkowski sobre la geometría de los números o bien mediante el uso de sucesiones de Farey.

Corolario 2.9. *Si α es un número irracional, entonces existen infinitos números racionales p/q, con p y q coprimos, tales que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Demostración. Sea α un número irracional. El teorema de Dirichlet con nos dice que existe un racional p_1/q_1, donde $1 \leq q_1$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{q_1^2},$$

Si tenemos a los racionales $p_1/q_1, \ldots, p_k/q_k$ tales que

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea Q un entero positivo tal que

$$\frac{1}{Q} < \min_{1 \leq i \leq k} \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right|.$$

Aquí es conveniente remarcar que este mínimo es un número positivo pues α es un número irracional. Por el teorema de Dirichlet, sabemos que existe entonces un racional p/q, con $1 \leq q < Q$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Pero además

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{Q} < \min_{1 \leq i \leq k} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

y luego $p/q \notin \{p_1/q_1, \ldots, p_k/q_k\}$. Esto nos permite agregar el número racional p/q a nuestra lista de racionales $\{p_i/q_i : 1 \leq i \leq k\}$, y como este procedimiento puede repetirse indefinidamente, el corolario queda demostrado. □

El teorema de Dirichlet de aproximación de irracionales tiene varias generalizaciones. Podemos por ejemplo utilizar estas ideas para estudiar números algebraicos. Recordemos que un número α se dice algebraico de grado n si es raíz de un polinomio de grado n con coeficientes enteros y n es el menor entero positivo posible. En 1844 Liouville demostró el siguiente resultado:

Teorema 2.10 (Liouville). *Sea α un número algebraico de grado $n \geq 2$. Existe entonces una constante c, que depende únicamente de α, tal que para todo $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}.$$

Demostración. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$. La minimalidad de n implica que f no tiene raíces racionales y que $f'(\alpha) \neq 0$. Existe entonces una constante $\varepsilon > 0$, que depende únicamente de α, tal que f' es no nula en el intervalo $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$. Sea

$$M = \min_{x \in I} \frac{\varepsilon}{|f'(x)|},$$

y sea $c = \min\{1, M\}$, una constante que depende únicamente de α. Si $p/q \in \mathbb{Q}$ no está en el intervalo I, entonces

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1 \geq \frac{1}{q^n} \geq \frac{c}{q^n}.$$

Supongamos ahora que $p/q \in Q$ sí está en el intervalo I. Como $f(p/q) \neq 0$ pues sabemos que f no tiene raíces racionales,

$$|f(p/q)| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i (p/q)^i\right| = \frac{1}{q^n}\left|\sum_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i}\right| \geq \frac{1}{q^n}$$

pues $|\sum_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i}| \in \mathbb{N}$. Por el teorema del valor medio, existe $\xi \in \mathbb{R}$ entre α y p/q tal que

$$\frac{f(\alpha) - f(p/q)}{\alpha - p/q} = f'(\xi).$$

En consecuencia, como $f(\alpha) = 0$ y además $\xi \in I$, tenemos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|f(p/q)|}{|f'(\xi)|} \geq \frac{1}{q^n |f'(\xi)|} \geq \frac{c}{q^n}.$$ □

Como aplicación del teorema de Liouville veremos un ejemplo explícito de número trascendente. Diremos que un número real α es un **número de Liouville** si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un racional p/q con $q > 1$ tal que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Proposición 2.11. *Todo número de Liouville es irracional.*

Demostración. Sea α un número de Liouville racional, digamos $\alpha = a/b$ con $b > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n-1} > b$. Como α es un número de Liouville, existe $p/q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Como $aq - bp$ es no nulo, $|aq - bp| \geq 1$. En particular, tenemos

$$\frac{1}{bq} \leq \left|\frac{aq - bq}{bq}\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n},$$

o equivalentemente $b > q^{n-1}$. Pero esto implica que $2^{n-1} > b > q^{n-1}$ y luego $2 > q$, una contradicción. $\square$

Proposición 2.12. *Todo número de Liouville es trascendente.*

Demostración. Supongamos que α es un número de Liouville algebraico. Como α es irracional por la proposición anterior, α es algebraico de grado $n \geq 2$ y entonces el teorema de Liouville nos dice que existe una constante positiva c tal que para todo racional p/q con $q \geq 1$ tenemos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}.$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 < c2^m$. Como α es un número de Liouville, existe un racional a/b con $b \geq 2$ tal que

$$0 < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^{n+m}}.$$

En particular,

$$\frac{c}{b^m} \leq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^{n+m}},$$

y luego $cb^m < 1$, una contradicción pues $1 < c2^m \leq cb^m$. $\square$

Estamos ahora en condiciones en mostrar un ejemplo explícito de un número trascendente.

Teorema 2.13. *El número* $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n!}$ *es transcendente.*

Demostración. Por lo que vimos anteriormente, será suficiente con demostrar que α es un número de Liouville. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean

$$p = \sum_{k=0}^{n} 2^{n!-k!} \in \mathbb{Z}, \quad q = 2^{n!} \geq 2.$$

Calculamos entonces

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\alpha - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k!}}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k!}} = \frac{1}{2^{(n+1)!}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k!-(n+1)!}}$$
$$< \frac{1}{2^{(n+1)!}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2^{(n+1)!-1}} \leq \frac{1}{2^{n\cdot n!}} = \frac{1}{q^n}. \qquad \square$$

Ejercicio 2.14. Sea $a_1, a_2, a_3 \ldots$ una sucesión de números del conjunto $\{1, \ldots, 9\}$. Demuestre que el número

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n!} = 0, a_1 a_2 000 a_3 00000000000000000 a_4 \cdots$$

es un número trascendente.

Los resultados de Dirichlet y Liouville que vimos admiten generalizaciones en varias direcciones.

El número e

Es natural preguntarse qué pasa con algunas de las constantes más famosas. Comencemos con el número e, la base de los logaritmos. Como bien sabemos e se define como

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

La historia del número e es bastante curiosa ya que durante muchos años se utilizó esta constante solamente de forma implícita [17]. Esta constante fue considerada por primera vez en 1618 en un apéndice al trabajo de Napier sobre logaritmos; el apéndice contiene los valores de logaritmos de varios números y se cree que fue escrito por Oughtred. En 1624 Briggs dio una aproximación numérica para $\log_{10} e$ pero sin hacer referencia explícita al número e. Por varios años el número e aparece implícitamente en trabajos de autores como Saint–Vincent, Huygens y Mercator. El descubrimiento del número e bien puede atribuírsele a Jacob Bernoulli ya que en 1683 demostró que el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es un número real acotado entre 2 y 3. Curiosamente, Bernoulli encontró este límite en relación con sus trabajos sobre interés compuesto y no con los logaritmos. De hecho, originalmente los logaritmos eran trucos que permitían realizar cálculos. Jacob Bernoulli fue quizá uno de los primeros matemáticos en reconocer al logaritmo como la función inversa de la exponencial. Esta relación aparece explícitamente en 1684 en un trabajo de Gregory.

El número e aparece explícitamente por primera vez en una carta de Leibniz a Huygens de 1690. El estudio de propiedades de las funciones exponenciales fue hecho por Johann Bernoulli en 1697. El número e aparece en los trabajos de Euler alrededor de 1727 en un trabajo no publicado y en una carta a Goldbach de 1731. Euler publicó muchas de las propiedades del número e que conocemos. Por ejemplo, en 1748 demostró que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

y aproximó el número e con una precisión de 18 dígitos. Demostró además que

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y dio varias expresiones para el número e en términos de fracciones continuas infinitas. Una de las expresiones de Euler para e como fracción continua es

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}}},$$

que abreviadamente puede escribirse como

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1 \dots],$$

ver la sucesión `A003417`.

Todas estas investigaciones sugieren que Euler sabía de la irracionalidad del número e. Veamos una demostración muy sencilla de la irracionalidad de e descubierta por Fourier en 1815.

Teorema 2.15. *El número e es irracional.*

Demostración. Supongamos que $e = a/b$ con a y b enteros coprimos. Entonces $n!be = n!a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escribimos

$$bn!e = bn!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) + bn!\left(\frac{1}{(n+1)}! + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right)$$

y observamos que, como el miembro izquierdo y el primer término del miembro de la derecha son enteros, entonces

$$\alpha = b\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right) = bn!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}.$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n},\end{aligned}$$

pues la sabemos que

$$1 + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

si $|x| < 1$, concluimos que $\frac{b}{n+1} < \alpha < \frac{b}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como n es arbitrario, esto implica que α es un entero tal que $0 < \alpha < 1$, una contradicción. □

Ejercicio 2.16. Sin asumir que $e \notin \mathbb{Q}$, demuestre que $e^{-1} \notin \mathbb{Q}$.

Para más información sobre la historia de esta constante y de los logaritmos referimos a los artículos [9, 10, 11, 12, 13, 14].

El número π

Sabemos que el número π es la razón entre la circunferencia y el diámetro de cualquier círculo, algo que en nuestra notación escribiríamos como

$$\pi = \frac{C}{D},$$

donde C es la circunsferencia y D es el diámetro.

Repasaremos un poco la historia del número π. Basaremos el capítulo principalmente en el libro [4].

De los documentos que conocemos puede verse que tanto los babilónicos como los egipcios conocían la existencia y algunas propiedades del número π. Los babilónicos lo aproximaban como

$$3\frac{1}{8} = \frac{25}{8} = 3,125$$

y los egipcios como

$$4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} \sim 3,16049\ldots$$

No sabemos con exactitud cómo fue que ambas civilizaciones llegaron a encontrar estas aproximaciones pero no es difícil hacer algunas conjeturas. La idea más inocente será la de dibujar algún círculo, medir su circunferencia, su diámetro y calcular el cociente de estos números. Sin embargo, no debemos olvidarnos que en Egipto esto se hizo sin tener instrumentos precisos de medición, sin el algoritmo de división, sin el sistema de numeración decimal, sin regla, sin compás, sin lápiz ni papel.

Alrededor del 250 a. C. Arquímedes divisó un algoritmo que le permitió calcular π con cierta exactitud. El algoritmo se basa en aproximar la longitud de una circunferencia por exceso y por defecto primero con un hexágono, luego por polígonos regulares de 12 lados, luego de 24 lados, y así sucesivamente hasta llegar a utilizar un polígono de 96 lados.

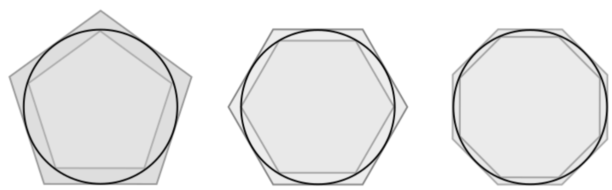


fig:Arquimedes

Figura 2.3: Aproximaciones de π mediante polígonos regulares.

Al calcular los perímetros de estos polígonos Arquímedes logró demostrar que

$$3,1408 = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3,1429$$

En otras civilizaciones encontramos distintas aproximaciones para el número π. En la matemática china, por ejemplo, nos encontramos con que π era aproximado por $3,1547$ y también por $\sqrt{10}$. Cerca del año 265 el matemático chino Liu Hui divisó un algoritmo que le permitió aproximar π como $3,1416$. En el año 480 el matemático chino Zu Chongzhi mostró que

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

y sugirió que π fuera aproximado por los racionales $355/113$ y $22/7$.

El cálculo del número π es un tema que ocupa un lugar preponderante en la historia de la matemática. Hay muchos matemáticos y muchas técnicas distintas que quizá convendría exponer, pero tal tarea nos llevaría mucho tiempo y solo podríamos hacerlo a expensas de sacrificar la presentación de otros resultados también importantes en el desarrollo de la matemática. Para más información sobre el cálculo de π referimos al libro [4].

Creemos que el primer matemático que utilizo la letra griega π para denotar al cociente entre la circunferencia y el diámetro fue William Jones en 1706. Euler utilizó la letra π para denotar esta famosa constante en su libro de 1736 sobre mecánica.

La aparición de las series infinitas en los siglos XVI y XVII permitieron obtener mejores aproximaciones para π que aquellas encontradas por Arquímedes mediante métodos geométricos.

Wallis Vieta

En 1593 Vieta encontró la expresión

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

y en 1655 Wallis encontró una expresión que involucra productos infinitos:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\cdots$$

LeibnizGregory

El cálculo de Leibniz y Newton permitió obtener muchas otras expresiones infinitas que involucran al número π. Gregory y Leibniz, alrededor del año 1670, descubrieron, independientemente la expresión

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

al especializar en un cierto valor la expansión en serie

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

encontrada por primera vez en la matemática india en el siglo XV.

En 1761 Lambert demostró que π es irracional. La demostración que dio Lambert sobre la irracionalidad de π es bastante difícil, se basa en la siguiente expansión para la tangente:

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}}$$

Hermite dio otra demostración de la irracionalidad de π en 1873, y esta demostración es mucho más sencilla que aquella encontrada por Lambert. En 1941 Niven encontró una demostración muy breve y sencilla, que bien podría darse en cualquier curso de cálculo. Esta demostración utiliza ingeniosamente algunas de las ideas de Hermite. Veamos la demostración de la irracionalidad de π encontrada por Niven:

Teorema 2.17. *El número π es irracional.*

Demostración. Supongamos que $\pi = a/b$ con a y b enteros positivos. Sea

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}.$$

Primero observemos que f es un polinomio de la forma $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=n}^{2n} c_j x^j$, donde los c_j son números enteros. En efecto, por la fórmula del binomio,

$$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j x^{2n-j},$$

que puede reescribirse como $f(x)=\sum_{j=n}^{2n} c_j x_j$ para ciertos enteros c_j. En particular, $f^{(k)}(0)=\frac{k!}{n!}c_k \in \mathbb{Z}$ si $n \leq k \leq 2n$. Como además $f(x)=f(a-bx)$, se demuestra fácilmente por inducción que $f^{(k)}(x)=(-b)^k f^{(k)}(a-bx)$ para todo k. Luego $f^{(k)}(\pi)=(-b)^k f^{(k)}(0)$ para todo k. Esto implica que si definimos

$$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x),$$

entonces $F(0)+F(\pi)\in\mathbb{Z}$.

Como $f(x)$ es un polinomio de grado $2n$, tenemos que $f^{(2n+2)}(x)=0$ y luego $F''(x)+F(x)=f(x)$. Un cálculo directo muestra entonces que

$$\frac{d}{dx}\big(F'(x)\operatorname{sen}x-F(x)\cos x\big)=(F''(x)+F(x))\operatorname{sen}x=f(x)\operatorname{sen}x.$$

En consecuencia,

$$\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x dx=F(0)+F(\pi)\in\mathbb{Z}.$$

En el intervalo $(0,\pi)$, las funciones $f(x)$ y $\operatorname{sen}x$ son estrictamente positivas. Sabemos además que en este intervalo vale que $0\leq x(a-bx)=xa-bx^2\leq \pi a$. Luego

$$0<\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x dx\leq\int_0^\pi \frac{(\pi a)^n}{n!}dx=\frac{(\pi a)^n}{n!}\pi.$$

Pero $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi^{n+1}a^n}{n!}=0$, una contradicción. □

Quizá sea este un buen momento para permitirnos ir hacia otro tópico importante en la historia de la matemática. Antes de irnos, mencionaremos una fantástica fórmula encontrada por Euler en 1734:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{2.1}$$

eq:pi^2/6

No vamos a demostrar en detalle esta fórmula pero sí mencionaremos brevemente cómo podríamos demostrarla utilizando simplemente técnicas de cálculo. La idea es calcular una cierta integral de dos formas distintas e igualar estos resultados. La integral a calcular es

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy.$$

Como dijimos, debemos calcular I de dos formas distintas. Un método para calcular esta integral consiste en escribir el integrando como una serie y realizar algunos cálculos sencillos:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n\geq 0} (xy)^n dxdy \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^n dxdy \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_0^1 x^n dx \int_0^1 y^n dy \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Otra forma de calcular I involucra realizar algún ingenioso cambio de variables. En efecto, si calculamos I con el cambio de variables $u = \frac{x+y}{2}$ y $v = \frac{-x+y}{2}$, podremos demostrar la fórmula encontrada por Euler.

Ejercicio 2.18. Demuestre la fórmula (2.1).

Veamos cómo fue que Euler encontró la fórmula (2.1). Una de las fórmulas de Newton para polinomios nos permite escribir polinomios como

$$1 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + (-1)^k \alpha_k x^k = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_k}\right),$$

donde

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \\
\alpha_2 &= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_3} + \cdots
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente. En particular,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots &= \alpha_1^2 - 2\alpha_2, \\
\frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \cdots &= \alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_3, \\
\frac{1}{a_1^4} + \frac{1}{a_2^4} + \cdots &= \alpha_1^4 - 4\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 4\alpha_4,
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente.

La arriesgada idea de Euler es la de utilizar una extensión de esta última fórmula pero para series de la forma

$$1 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots,$$

De hecho, en el caso particular de la serie

$$1-\operatorname{sen} x = 1 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots$$

tenemos que, como la función $x \mapsto x - \operatorname{sen} x$ tiene todos ceros en

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \dots$$

la fórmula para α_1 que vimos antes implica que

$$\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right) = 1,$$

de donde inmediatamente se obtiene la fórmula de Gregory–Leibniz. Si utilizamos la fórmula para $\alpha_1^2 - 2\alpha_2$ obtenemos además

$$\frac{8}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right) = 1.$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

de donde se deduce inmediatamente la fórmula (2.1).

Esta fórmula nos permite entender por qué algunas civilizaciones aproximaban a π con el número $\sqrt{10}$. Primero, observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{4n^2-1}.$$

Para sumar esta última serie, observamos que

$$\frac{4}{4n^2-1} = \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2(n+1)-1}.$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{7}-\frac{2}{9}\right) + \cdots = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

y entonces $\pi^2 < 6(5/3) = 10$. El error es bastante pequeño pues

$$\frac{5}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{4n^2-1}-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(4n^2-1)}\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{16}{60x^4}<\int_1^{\infty}\frac{16}{60}t^4dt=\frac{16}{180}.$$

Tal como hizo Euler, pueden usarse fórmulas similares para encontrar otras series que involucren potencias de π como por ejemplo

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Para más información sobre el magistral manejo que Euler tenía con las series infinitas referimos al artículo [48].

El teorema del binomio

El teorema del binomio fue mencionado en la demostración de Niven de la irracionalidad de π. El resultado afirma que para un entero positivo n vale la siguiente fórmula

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

son los coeficientes binomiales. Una versión más general afirma si $|x|<|y|$ y además $r\in\mathbb{C}$, entonces vale la siguiente fórmula

$$(x+y)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k y^{r-k},$$

donde

$$\binom{r}{k}=\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!},$$

expresión que coincide con los coeficientes binomiales si n es un entero positivo.

Ejemplo 2.19. Una aplicación sencilla de la fórmula del binomio nos da la siguiente fórmula, válida para todo x tal que $|x|<1$:

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots$$

La primera aparición escrita de algo similar al teorema del binomio aparece en uno de los libros de Euclides, donde se demuestra que vale la fórmula

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

Euclides también demuestra una identidad similar:

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a-b)^2.$$

Según Coolidge [16], Euclides estaba en condiciones de obtener fácilmente la fórmula para el cubo de un binomio pero en épocas de Euclides se priorizaba la claridad y la precisión y no se intentaba obtener resultados en la forma más general posible como pasa en la matemática de la actualidad. Se cree que en el siglo V el matemático indio Aryabhata conocía la fórmula para el cubo de un binomio, y que esta fórmula tenía interés dado que era utilizada para aproximar raíces cúbicas. No sabemos si la matemática india estaba interesada en otras potencias de un binomio, pero posiblemente este problema no resultara de interés ya que carecía de aplicaciones prácticas. Alrededor del año 1300 varios matemáticos chinos mostraron interés en lo que hoy –injustamente– conocemos como el triángulo de Pascal, que no es otra cosa que la representación de los coeficientes binomiales ordenados en forma de triángulo:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Se sabe que esta configuración de números era ya bien conocida desde tiempo antes, en particular en la matemática china y árabe. Varios historiadores creen que los matemáticos chinos sabían además cómo calcular elevadas potencias de un binomio.

En 1544 un monje alemán llamado Stifel publicó *Arithmetica integra*, un importante tratado sobre aritmética donde aparece una lista de números enteros que hoy interpretamos como la fórmula

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

El tratado de Stifel contiene además importantes avances en notación matemática (escribir la multiplicación por juxtaposición, por ejemplo, o el uso del término “exponente” para las potencias, así como también la introducción del término “coeficiente binomial”), contiene una tabla de potencias de dos que no es sino una forma precaria de una tabla de logaritmos, trata a los números negativos de la misma forma que trata a los números positivos, sin ninguno de los prejuicios que los negativos enfrentaban en aquellos tiempos. Stifel además estudió en su tratado propiedades de los números irracionales y concluye que tales números son necesarios en la matemática.

En 1655 Pascal publicó un tratado donde figuran muchos resultados sobre los coeficientes binomiales y utilizó además estos resultados para resolver problemas de la teoría de probabilidades. Fue en esta publicación donde Pascal observó que la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos es igual a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

aunque aparentemente esta fórmula era ya conocida por Briggs en 1620. En 1708 Pierre Rémond publicó un tratado sobre los juegos de azar y fue precisamente en aquel libro donde le atribuyó a Pascal la invención del triángulo formado por los coeficientes binomiales.

Años más tarde, Gregory e independientemente Newton consideraron necesario poder calcular potencias fraccionarias de binomios y obtuvieron algunos resultados. Newton, por ejemplo, encontró la fórmula

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} \cdots ,$$

aunque no sabemos exactamente cuál fue el método que le permitió obtener esa y otras fórmulas similares. Coolidge afirma que no es justo decir que Newton demostró el teorema del binomio, ya que, según parece, el gran genio inglés simplemente mostró que en ciertos casos la fórmula sugerida por el teorema del binomio daba el resultado correcto si el exponente era un cierto número racional.

Para encontrarnos con algunos de los primeros pasos hacia obtener una demostración rigurosa del teorema del binomio debemos saltar hacia 1742, año en un matemático italiano de apellido Salvemini publicó un trabajo donde menciona que todos conocen al teorema de Newton pero nadie parece haberlo demostrado. Demuestra entonces el teorema del binomio después de haber distinguido tres posibles casos: a) el exponente es un entero positivo, b) el exponente es una fracción positiva, y por último c) el exponente es negativo. Ese mismo año una demostración mucho más breve e ingeniosa aparece en *A treatise on Fluxions*, un libro de 736 páginas escrito por el matemático escocés Colin Maclaurin. La demostración de Maclaurin es más o menos así: Supongamos que queremos calcular $(1+x)^n$, donde n es un número racional positivo o negativo. Escribimos entonces

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots$$

Al derivar ambos miembros de la igualdad obtenemos la identidad

$$n(1+x)^{n-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \cdots \tag{2.2}$$

eq:Maclaurin

Al reemplazar x por cero en esta igualdad, obtenemos que $A = n$. Si derivamos la igualdad (2.2) para luego evaluar la nueva identidad en $x = 0$, podremos calcular explícitamente el valor de B. El resto de los coeficientes se obtendrá entonces muy fácilmente mediante esta técnica que involucra el cálculo de derivadas. Seguramente muchos lectores estarán algo incómodos, ya que en esta “demostración” hay varias cosas que falta justificar, de eso no hay duda. Un agujero particularmente importante es el de la convergencia. ¡Debemos asegurarnos de que las series convergen! Este problema era reconocido por Maclaurin, pero no fue capaz de resolverlo. El primer matemático capaz de resolver los problemas de convergencia en relación al teorema del binomio fue Abel y lo hizo en 1826.

Capítulo 3
La geometría griega

En este capítulo hablaremos de la geometría griega. Naturalmente una parte sustancial de este capítulo estará dedicada a los famosos trece libros de Euclides. Si bien cada vez que sea necesario transcribir partes de los libros de Euclides utilizaremos una traducción al castellano hecha por María Luisa Puertas Castaño [23, 24], quizá sea oportuno remarcar que el interesado en un estudio histórico más profundo de la matemática contenida en estos libros de Euclides deberá consultar la excelente versión de los libros de Euclides traducida y comentada por el historiador de la matemática (y además experto en la matemática griega) Thomas Heath [22].

Para los griegos, la geometría era la rama más importante de la matemática. Alrededor del 300 a. C. Euclides organizó gran parte de la matemática que se conocía en aquel momento y escribió trece libros. El tratado de Euclides fue el texto más influyente en la historia de la matemática y fue fundamental quizá hasta principios del siglo XX.

Es poco lo que se conoce de la matemática anterior a la época de Euclides. En sus comentarios sobre los elementos de Euclides, Proclo hace un breve resumen histórico; muy posiblemente este resumen esté fuertemente basado en un tratado sobre historia de la matemática escrito por Eudemo. Proclo menciona que muchos autores atribuyen a los egipcios la invención de la geometría, nacida para atacar problemas prácticos tales como la medición de campos. Proclo además afirma que los fenicios fueron los primeros en tener un conocimientos de los números debido a las transacciones comerciales. Según Proclo, Tales estuvo en egipto y fue el primero en llevar la geometría a Grecia. El estudio sistemático de la geometría, con teoremas abstractos que se obtienen a partir de principios generales, se le atribuye a los miembros de la escuela de Pitágoras. Platón mostró gran interés en la geometría y justamente eso fue lo que le dio un impulso extraordinario.

Los libros de Euclides comienzan con definiciones (que para nosotros quizá no siempre resultan del todo precisas). Por ejemplo, el *punto* se define como lo que no tiene partes; esta es la primera definición. La segunda definición dice que una *línea* es una longitud sin anchura. La tercera, que los extremos de una línea son puntos. Hay que aclarar que estas definiciones fueron tomadas de la traducción de los elementos hecha por Puertas Castaño. Figuran además las definiciones de círculo, ángulos rectos y agudos, etc.

Después de las definiciones, se presentan los postulados. El primero de los postulados afirma que siempre existe una línea recta que une dos puntos distintos del plano. En mi traducción[1], leo la siguiente oración:

> Postúlese el trazar una línea recta dado un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.

El segundo postulado afirma que es posible prolongar continuamente una recta finita en línea recta; es decir: se afirma que una línea puede extenderse tanto como sea necesario en cualquiera de las dos direcciones posibles. El tercer postulado afirma que dado un punto P y una distancia r, puede construirse un círculo con centro en P y radio r. Uno de estos postulados, el quinto, es particularmente importante dentro del desarrollo histórico de la matemática:

> Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que estén los (ángulos) menores que dos rectos.

En este postulado se basa un hecho notable: la geometría de los libros de Euclides no es sino una de las geometrías posibles. Es sorprendente que Euclides haya considerado necesario incluir este quinto postulado para fijar condiciones que garanticen que dos rectas se corten en un único punto. Más de dos mil años después de aquella genialidad, al reemplazar este postulado la matemática encontrará geometrías distintas a la geometría estudiada por Euclides, las denominadas geometrías no euclidianas.

Además de los postulados hay doce *nociones comunes*. La primera de estas nociones comunes afirma que *las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí*. En nuestro lenguaje algebraico, esto equivale a que si $A = B$ y además $A = C$, entonces $B = C$.

A partir de esas definiciones básicas, de los axiomas y los postulados, Euclides desarrolló la geometría. Por ejemplo, la primera proposición del libro I explica cómo construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada. La proposición es acompañada por una figura similar a la figura 3.1.

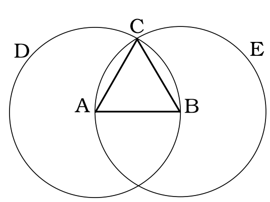


fig:libroI_prop1

Figura 3.1: La proposición 1 del libro I.

[1] La versión de los Elementos que se utilizará en este curso, y en particular durante este capítulo, es una edición la editorial Gredos, con traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños.

La demostración es breve y sencilla, aunque no es del todo convincente pues faltan justificaciones. Es la primera demostración de los libros de Euclides, y quizá por eso acumula muchas más críticas que las otras demostraciones.

La proposición 47 del libro I es el teorema de Pitágoras:

> En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Se cree que la demostración basada en la figura 3.2 fue descubierta por Euclides.

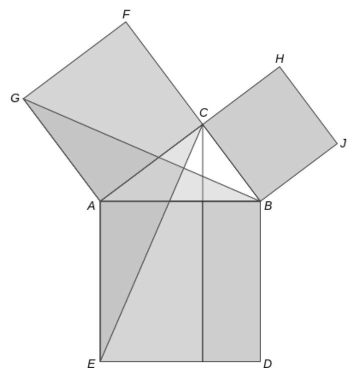


fig:libroI_prop47

Figura 3.2: La demostración del teorema de Pitágoras dada por Euclides.

En el segundo libro aparecen ciertas nociones algebraicas, aunque en un lenguaje completamente distinto al que usamos en estos tiempos. La primera proposición de este libro, por ejemplo, afirma lo siguiente:

> Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la (recta) no cortada y cada uno de los segmentos.

Nuestra notación algebraica nos permite reconocer en esta proposición la propiedad distributiva:

$$a(b+c+\cdots) = ab+ac+\cdots$$

La cuarta proposición afirma lo siguiente:

> Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

Esta proposición puede traducirse de la siguiente forma:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$$

Las proposiciones 12 y 13 del libro II contienen resultados similares al teorema del coseno, aunque sin hacer uso de funciones trigonométricas. La trigonometría se desarrolló algún tiempo después de que Euclides escribió sus Elementos.

Recordemos que los griegos no podían medir distancias pero sí sabían cómo comparar segmentos y reconocer cuándo dos segmentos son iguales o cuándo uno es, digamos, el doble de otro. Los griegos tampoco podían medir ángulos. Gran parte de la manera de pensar de los griegos era geométrica. Para ellos lo que ahora sería el producto ab entre los números a y b era simplemente el área de un rectángulo de lados a y b. La ecuación $ab = cd$ era interpretada entonces como la igualdad entre las áreas de ciertos rectángulos.

En los libros de euclides hay además construcciones explícitas con regla y compás, aunque Euclides en ningún momento hace referencia a estos u otros instrumentos geométricos.

Ejercicio 3.1. Construya con regla y compás el punto medio de un segmento.

El mismo truco permite también construir un triángulo equilátero si uno de los lados está dado.

Ejercicio 3.2. Construya con regla y compás un cuadrado.

Una pregunta interesante es la siguiente: ¿cómo puede construirse con regla y compás un pentágono regular? Euclides dio una construcción.

Ejercicio 3.3. Construya un pentágono regular con regla y compás.

Es natural preguntarse cómo puede construirse o hexágono regular o, más generalmente, cualquier n-ágono regular. Construir un hexágono es fácil ya que sabemos construir triángulos equiláteros. Sin embargo, no puede construirse un heptágono regular con regla y compás. Sí podemos, en cambio, construir un octágono.

En 1796 Gauss pudo construir con regla y compás un polígono regular de 17 lados. Gauss no solamente encontró la forma de construir ese polígono regular sino que demostró además que un polígono regular de n lados puede construirse con regla y compás sí y sólo si $n = 2^m p_1 \cdots p_k$ con $p_1, \dots, p_k$ primos de Fermat distintos. Los primos de la forma

$$p = 2^{2^l} + 1$$

se conocen como **primos de Fermat**. Hasta el momento los únicos primos de Fermat conocidos son los siguientes:

$$3, 5, 17, 257, 65537.$$

Y se conjetura que esos son los únicos primos de Fermat que existen. Para más información acerca de los primos de Fermat referimos a las sucesiones `A000215` y `A019434`.

Las construcciones con regla y compás ocupaban un lugar importante en el pensamiento de los geómetras griegos. Los griegos sabían cómo construir $\sqrt{2}$ e incluso cómo construir $\sqrt{n}$ para cualquier n. Sin embargo, no sabían cómo construir $\sqrt[3]{2}$; este problema se conoce como el **problema de la duplicación del cubo**, ya que el problema consiste en duplicar el volumen de un cubo dado). Otros problemas similares que mucho interesaban a los griegos y no pudieron resolver son los siguientes:

el **problema de la trisección de un ángulo** y el **problema de la cuadratura del círculo** (en este problema se pide construir un cuadrado de área igual al área de un círculo dado, o bien, equivalentemente, construir π).

Los pitagóricos habían resuelto el problema de la cuadratura de los polígonos. Antifón demostró que dado un polígono inscrito en un círculo, siempre se puede duplicar la cantidad de lados del polígono. De esto, concluyó erroneamente que el círculo es cuadrable ya que puede aproximarse con arbitraria precisión por polígonos cuadrables. Aristóteles observó que estos polígonos jamás llenarán al círculo, sin importar qué tan grande sea el número de lados empleado. Tiempo más tarde, Brisón mejoró el argumento y consideró sucesiones de polígonos inscritos y circunscritos que aproximan cada vez mejor al círculo. Esta idea fue retomada muy exitosamente por Arquímedes en sus trabajos sobre aproximaciones del número π. Hipócrates redujo el problema de la cuadratura del círculo a un problema de geometría plana. Si bien no logró resolver complemente el problema de la cuadratura del círculo, sí logró cuadrar ciertos recintos limitados por arcos, algo que hoy conocemos como *lúnulas de Hipócrates*

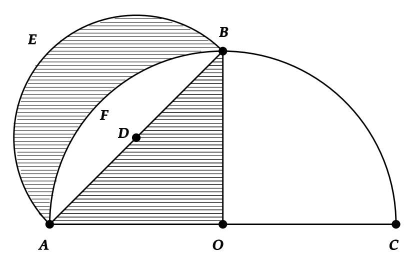


fig:lunula

Figura 3.3: Las lúnulas de Hipócrates.

Hipócrates probó que las áreas sombreadas que vemos en la figura 3.3 coinciden. La demostración del resultado sobre lúnulas de Hipócrates es más o menos así: Sabemos que D es el centro del círculo que incluye el arco AEB, y es también el punto medio entre A y B, que es la hipotenusa del triángulo ABO. Como ABO es rectángulo e isósceles, el diámetro AC del círculo grande es $\sqrt{2}$ veces el tamaño del diámetro del círculo que incluye al arco AEB. Como el área del círculo que incluye al arco ABC es la mitad del área del círculo que incluye al arco AEB, entonces el área del cuarto de círculo AFBOA es igual al área del semicírculo AEBDA. Esto implica que las áreas sombreadas coinciden ya que ambas se obtienen al restar el AFBDA de regiones con la misma área.

Ejercicio 3.4. ¿En qué consiste el problema de la trisección de un ángulo?

Hipias logró resolver el problema de la trisección de un ángulo si se admite el uso de una curva especial, que más tarde se demostró que también permitirá resolver el problema de la cuadtratura del círculo. Esta curva hoy se conoce como la *cuadratiz de Hipias*.

Ejercicio 3.5. ¿Cómo puede construirse el número $\sqrt{n}$ con regla y compás?

Hoy sabemos que ninguno de estos tres problemas clásicos de la matemática griega tiene solución. El problema de la duplicación del cubo y de la trisección de un ángulo fue resuelto en 1837 por un matemático francés llamado Pierre Wantzel. Poca gente hoy sabe que Wantzel fue el primer matemático que fue capaz de resolver esos famosos problemas, quizá porque los métodos de Wantzel fueron opacados por las ideas provenientes de la teoría de Galois. El problema de la cuadratura del círculo fue resuelto por Lindelmann en 1882 al demostrar que el número π es trascendente. Un número se dice **trascentente** si no es un número algebraico, es decir si no es raíz de un polinomio con coeficientes racionales. Los números trascendentes, en particular, no pueden construirse con regla y compás:

$$\{\text{números construibles}\} \subsetneq \{\text{números algebraicos}\}$$

Otro gran descubrimiento importante para griegos es la construcción de los cinco sólidos platónicos existentes. Un sólido platónico es un poliedro regular convexo acotado por un cierto número de caras. Los sólidos platónicos son los análogos espaciales de los polígonos regulares del plano. Sorprendentemente, y a diferencia de lo que pasa con los polígonos regulares en el plano, existen únicamente cinco poliedros regulares: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. No es difícil demostrar que, de existir poliedros regulares, hay únicamente cinco posibilidades (y se cree que este resultado era ya conocido por los pitagóricos). La dificultad está en demostrar que efectivamente existen esos cinco poliedros; la dificultad está en poder construir explícitamente esos cinco poliedros. Es fácil construir el tetraedro o el cubo pero ¿cómo podemos construir, por ejemplo un icosaedro? Euclides no solamente reconoció la dificultad y la belleza de este problema, sino que lo resolvió y lo ubicó cerca del final de sus elementos.

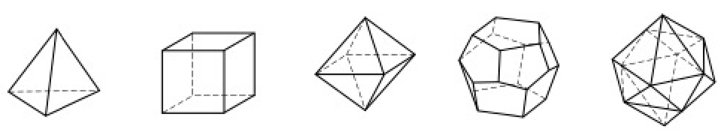


fig:platonic

Figura 3.4: Los sólidos platónicos.

Hay cierta controversia alrededor de los verdaderos descubridores de los sólidos platónicos. La tradición nos dice los orígenes del dodecaedro, del cubo y del octaedro están en los pitagóricos. Se nos dice además que el octaedro y el icosaedro fueron descubiertos por Teeteto, colaborador de Platón. Sin embargo, hay quienes creen que los sólidos platónicos son muy anteriores, creencia que se basa en la existencia de ciertas piedras del período neolítico encontradas en Escocia, y que podemos ver en la figura 3.5. En la opinión de Lloyd [35], a pesar de que haber encontrado estas piedras resulte un hecho absolutamente fascinante, existe poca o nula evidencia de que las piedras neolíticas de la figura 3.5 tengan alguna relación con la matemática.

fig:piedras

Figura 3.5: Piedras del período neolítico encontradas en Escocia.

En 1596 Kepler presentó una teoría sobre las distancias planetarias donde los cinco poliedros regulares ocupan un rol fundamental. La teoría de Kepler describe las órbitas planetarias como esferas encajadas entre sólidos platónicos.

fig:kepler

Figura 3.6: La teoría de Kepler sobre órbitas planetarias.

Kepler observó que la existencia de únicamente cinco poliedros regulares era compatible con la existencia de únicamente seis planetas. El descubrimiento de Urano en 1781 destrozó a la teoría de Kepler. De todas formas, no fueron necesarios otros planetas para que la teoría de Kepler perdiera valor. En 1609 Kepler descubrió que las órbitas planetarias son elipses; este hecho fue explicado en 1687 por la teoría gravitatoria de Newton.

Ejercicio 3.6. En 1509 Luca Pacioli presentó una ingeniosa construcción del icosaedro basada en la figura 3.7. ¿Cuál es esa construcción?

La construcción del icosaedro dada por Pacioli utiliza rectángulos áureos. Un rectángulo áureo es un rectángulo como el que vemos en la figura 3.8 donde

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Puede demostrarse que el cociente a/b es entonces solución de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ y luego

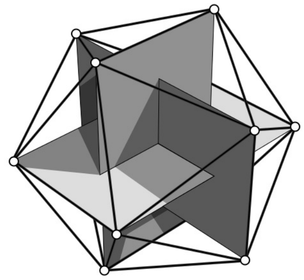


fig:Pacioli

Figura 3.7: La construcción del icosaedro de Pacioli.

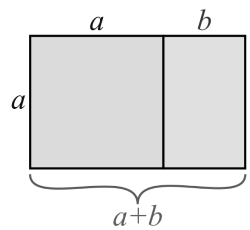


fig:golden

Figura 3.8: El rectángulo áureo.

$$a/b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\cdots,$$

número que comunmente se denota con la letra griega φ. La figura 3.9 nos muestra que el número φ es construible con regla y compás.

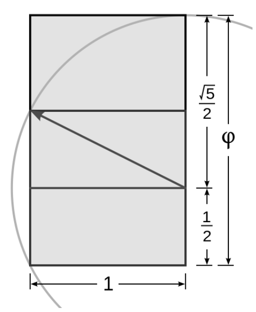


fig:construction

Figura 3.9: Una construcción con regla y compás del recángulo áureo.

Hay varias expresiones curiosas del número φ. Puede expresarse por ejemplo como la fracción continua

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

También como el número trigonométrico $\varphi = 2\cos(\pi/5)$ o como el límite

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}},$$

donde F_n es el n-ésimo término de la sucesión `A000045` de Fibonacci. Otra curiosa expresión para el número φ es

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}.$$

Ejercicio 3.7. Demuestre la veracidad de las expresiones del número φ mencionadas en esta sección.

Los rectángulos áureos aparecen en una tabla babilónica aproximadamente del año 850 a.C. que fue encontrada en Iraq en 1881. Se cree que desde la publicación en 1509 del libro *Divina proportione* de Pacioli, el número φ adquirió cada vez mayor importancia entre artistas y arquitectos, ya que los rectángulos áureos son estéticamente más agradables que otros rectángulos. Hoy en día es bastante fácil encontrarse con rectángulos áureos entre los objetos que utilizamos comunmente.

El método axiomático

La intención original de Euclides fue la de deducir resultados a partir de ciertas afirmaciones evidentes que llamó postulados (para nosotros, axiomas) gracias al uso de ciertos principios básicos de la lógica. Estos libros de Euclides constituyen el primer intento de derivar teoremas a partir de axiomas. Según Heath, el método deductivo se le debe a Tales.

Hoy en día nuestra forma de ver el método deductivo es levemente distinta. El método deductivo está basado en las leyes de la lógica y se compone de las siguientes partes:

1. *Términos primitivos*, que son ciertos elementos que no necesitan definirse tales como los puntos, las líneas y los planos de la geometría y las relaciones de incidencia entre ellos. No es importante el nombre que elijamos para estos elementos que no vamos a definir.
2. *Axiomas o postulados*, que son ciertas afirmaciones acerca de los elementos primitivos, como bien podría ser el axioma que dice que dados dos puntos distintos existe una única línea recta que los contiene. Los axiomas se asumen verdaderos y no necesitan ser demostrados.

3. *Teoremas*, que son simplemente las consecuencias lógicas de los axiomas.

El rigor matemático de nuestro tiempo parece sugerir que el tratamiento axiomático de Euclides no fue lo suficientemente riguroso. Sin embargo, no tiene sentido mirar el texto de Euclides con nuestros ojos, hay que mirar la matemática en perspectiva. En tiempos de Euclides el rigor matemático era obviamente visto de forma completamente distinta. ¡Si la humanidad utilizó durante dos mil años los libros de Euclides como libros de texto, seguro que no fue por error o accidente! No parece apropiado criticar el rigor matemático utilizado en los libros de Euclides después de recordar que fueron necesarios dos mil años para entender cuáles eran los puntos de debilidad del tratado de Euclides.

Veamos cuáles son los puntos donde hoy en día se critica el rigor matemático del método axiomático de Euclides. En los elementos de Euclides no existen los términos primitivos, la lista de axiomas no es exhaustiva, algunas demostraciones no están axiomáticamente justificadas, falta el uso de un cierto principio de continuidad que garantice la existencia de ciertos puntos o líneas que Euclides afirma que existen... Sí, nuestro rigor matemático se sentirá levemente molesto por algunas cosas que encontramos en los libros de Euclides, pero entre estas cosas hay una que se destaca notablemente. Una de las diferencias fundamentales entre nuestra forma de ver el método axiomático y aquella de Euclides está en el carácter que tienen los axiomas. ¡Los axiomas elegidos no tienen por qué ser evidentes! Hoy sabemos que hay otras geometrías además de aquella de Euclides, y precisamente la existencia de estas otras posibles geometrías no muestra que los axiomas elegidos pueden no ser evidentes. ¿Acaso son evidentes las geometrías no euclidianas?

Si bien desde nuestro punto de vista moderno los axiomas impuestos por Euclides tienen ciertas fallas, la matemática necesitó casi dos mil años para poder encontrar fundamentos más precisos para la geometría. En el invierno de 1898 Hilbert dictó un curso en Gotinga sobre los fundamentos de la geometría. A pedido de Klein, preparó notas poco tiempo después; notas que luego se transformaron en un libro muy influyente, *Grundlagen der Geometrie*, publicado en 1899, y que bien puede entenderse como una rectificación de la geometría euclidiana.

La fórmula de Herón

La fórmula de Herón nos dice que el área de un triángulo de lados a, b y c está dada por la fórmula

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Esta fórmula puede demostrarse de muchas formas distintas, por ejemplo con el teorema de Pitágoras o con la fórmula del coseno.

Ejercicio 3.8. Utilice el teorema del coseno y demuestre la fórmula de Herón.

La fórmula aparece en el libro de Herón *Métrica*, obra en tres volúmenes donde Herón estudia las áreas de las superficies y los volúmenes de los cuerpos. Estos libros estuvieron perdidos durante mucho tiempo, hasta que fueron encontrados en 1896 por Schone en la ciudad de Constantinopla. Una fórmula equivalente a la fórmula de Herón,

$$\frac{1}{4}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2},$$

fue encontrada en la matemática china y aparece en un libro publicado en 1247.

Se cree que Arquímedes conocía la fórmula de Herón pues entre sus escritos figura el siguiente resultado: Supongamos que se tiene un triángulo Δ de lados q_1, q_2 y q_3 y sean $Q_1=q_1^2$, $Q_2=q_2^2$ y $Q_3=q_3^2$. Entonces

$$16\times\text{área}(\Delta)^2=(Q_1+Q_2+Q_3)^2-2\times(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2).$$

Ejemplo 3.9. Consideremos en el plano el triángulo Δ con vértices en los puntos $(1,2)$, $(3,1)$ y $(0,0)$. Entonces

$$16\times\text{área}(\Delta)=20^2-2\times(25+25+100)=400-2\times150=100.$$

La fórmula de Herón puede deducirse de una fórmula más general conocida como la fórmula de Brahmagupta. Supongamos que se tiene un cuadrilátero de lados a, b, c y d inscripto en círculo. Entonces el área del cuadrilátero es igual a

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

donde $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

Ejercicio 3.10. Demuestre la fórmula de Herón a partir de la fórmula de Brahmagupta.

Ejercicio 3.11. Demuestre la fórmula de Brahmagupta.

Trigonometría

Hiparco fue el primero en compilar algo similar a una tabla trigonométrica y por eso se lo conoce como “el padre de la trigonometría”. Poco tiempo después Tolomeo tabuló las cuerdas para distintos ángulos y construyó una verdadera tabla trigonométrica. La motivación era puramente práctica: la astronomía requería la construcción de una tabla de cuerdas para distintos arcos de una circunferencia. Gran parte de los descubrimientos de Tolomeo están diseminadas a lo largo de sus escritos sobre astronomía. La construcción de Tolomeo se basa en la tabla comenzada por Hiparco y constituye una primera versión de lo que hoy entendemos como trigonometría. Tolomeo utiliza polígonos regulares de 3,4,5,6 y 10 lados y logra calcular las cuerdas de 36, 60, 72, 90 y 120 grados. Después de aplicar el teorema de Pitágoras obtiene también las cuerdas de 108 y 144 grados. El uso de otros teoremas le permite calcular otras cuerdas. Con la mente puesta en intentar obtener más datos para su tabla de cuerdas, Tolomeo demuestra la igualdad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}.$$

y que la función $x \mapsto \operatorname{sen} x/x$ es decreciente para ciertos valores de x, resultado que era ya conocido, aunque sin demostración, por Aristarco y Arquímedes. Demuestra además lo que conocemos como el teorema de Tolomeo, que afirma que si se tiene un cuadrilátero de vértices A, B, C y D inscripto en un círculo tal como lo vemos en la figura 3.10, entonces

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

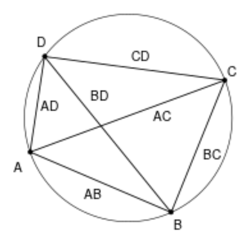


fig:Tolomeo

Figura 3.10: El teorema de Tolomeo.

Ejercicio 3.12. Demuestre el teorema de Tolomeo.

Motivados por la astronomía, los árabes también tabularon tablas trigonométricas hacia fines del siglo VIII. Ellos introdujeron las funciones circulares y construyeron y perfeccionaron tablas para los valores de la función seno. Grandes avances aparecieron en los siglos IX y X, donde por ejemplo se logró perfeccionar las tablas de Tolomeo hasta lograr calcular valores para la función seno con nueve decimales exactos.

Los indios también tabularon tablas trigonométricas y lo hicieron tabulando $\operatorname{sen}\theta$. Medían ángulos en grados, minutos y segundos, ya que usaban la base 60 de los babilónicos. Por eso, para ellos el valor máximo de la función seno se alcanzaba aproximadamente en 3438:

$$360 \times 60 = 21600 = 2\pi r$$

de donde se deduce que r debe ser aproximadamente igual a 3438. Utilizaban $3\frac{177}{1250} = 3,1416$ como aproximación para el número π.

Bhaskhara descubrió una sorprendente aproximación para la función seno, que lamentablemente no es muy conocida. Si el ángulo θ se mide en grados y está entre 0 y 180, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta \sim \frac{r40(180-\theta)}{40500-\theta(180-\theta)}.$$

Si traducimos esta fórmula al uso de radianes obtenemos

$$\operatorname{sen}x \sim \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}, \quad 0 < x < \pi,$$

fórmula que, tal como vemos en la figura 3.11 da una aproximación asombrosamente buena. No sabemos cómo hizo Bhaskhara para encontrar tal aproximación, hay muchas posibles explicaciones pero creo que ninguna resulta del todo convincente. Para el interesado, mas información sobre esta sorprendente aproximación y una demostración moderna de la fórmula puede encontrarse en [27, 44].

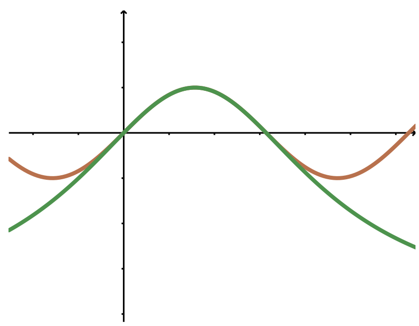


fig:baskhara

Figura 3.11: Una aproximación de Bhaskhara para la función seno.

Es interesante mencionar que la fórmula aproximada encontrada por Bhaskara es muy similar a la que se obtendría si se utilizara la aproximación de Padé. En 1890, el matemático francés Padé desarrolló una técnica de aproximación de funciones mediante funciones racionales: si f es una función, $m \geq 0$ y $n \geq 1$, se aproxima la función f por una expresión racional de la forma

$$g(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n},$$

donde los coeficientes $a_0, \ldots, a_m$ y $b_0 \ldots, b_n$ se calculan para que

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0), \quad \ldots \quad f^{(m+n)}(0) = g^{(m+n)}(0).$$

Para mostrar qué tan buena puede llegar a ser esta aproximación concebida por Palé, mencionamos que la función exponencial e^x puede aproximarse fabulosamente bien en el intervalo $-1/2 \leq x \leq 1/2$ por la función racional

$$\frac{120 + 60x + 12x^2 + x^3}{120 - 60x + 12x^2 - x^3}.$$

Las aproximaciones de Padé son en general muy buenas y tienen muchas aplicaciones que involucran cálculos computacionales, ver por ejemplo [3]. La idea de aproximar funciones por funciones racionales había sido ya considerada por Frobenius en un trabajo publicado en 1881.

Alrededor del año 100 a. C. Menelao publicó un tratado en tres volúmenes donde aparecen por primera vez los triángulos esféricos y algunas de sus propiedades más importantes, permitiéndonos reconocer las similitudes y las diferencias que tienen los triángulos esféricos con los triángulos de la geometría clásica de Euclides. Podemos ver un triángulo esférico en la figura 3.12.

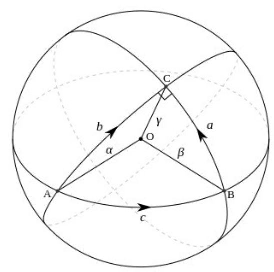


fig:esferico

Figura 3.12: Un triángulo esférico.

En el tercero de estos libros aparecen dos resultados que hoy conocemos como teoremas de Menelao. Estos teoremas no son sino dos versiones, una para la geometría plana y otra para la geometría esférica, de un mismo resultado sobre triángulos. En su versión relativa a la geometría plana, el teorema de Menelao afirma que si se tiene un triángulo como el que vemos en la figura 3.13, donde vemos una recta que corta al segmento AB en el punto E, al segmento CB en D y a la prolongación de la línea AB en el punto F, entonces

$$\frac{EA}{EC}\frac{DC}{DB}\frac{FB}{FA} = 1.$$

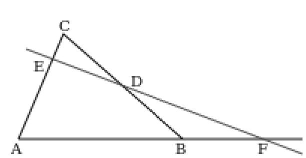


fig:Menelao

Figura 3.13: El teorema de Menelao.

Ejercicio 3.13. Demuestre el teorema de Menelao.

Si bien este resultado de Menelao tiene un análogo en geometría esférica, no toda la geometría clásica puede adaptarse al contexto esférico. De hecho, tal como demostró Menelao en el primer volumen, la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es siempre mayor a 180 grados.

Las cónicas de Apolonio

Las **cónicas** son aquellas curvas que se obtienen al cortar un cono circular con un plano, tal como vemos en la figura 3.14. Las cónicas son entonces hipérbolas, elipses o parábolas. Vemos una hipérbola en la figura 3.15.

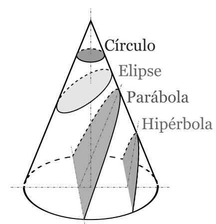


fig:conicas

Figura 3.14: Cónicas.

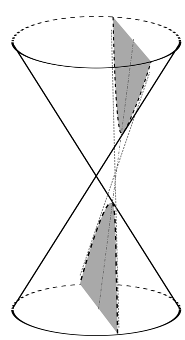


fig:hiperbola

Figura 3.15: Una hipérbola.

Hoy sabemos que podemos representar cónicas mediante ecuaciones. La expresión

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es la ecuación de una hipérbola, la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es la ecuación de una elipse y la expresión

$$y = ax^2$$

es la ecuación de una parábola.

Se cree que las cónicas fueron inventadas por Menecmo en épocas de Alejandro Magno. Originalmente Menecmo utilizó las cónicas para reformular (y en algún sentido resolver) el famoso problema de la duplicación del cubo. En nuestra notación, el problema de la duplicación del cubo puede reformularse como el problema de encontrar la intersección de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ con la hipérbola $xy = 1$, ya que esto implica encontrar un x tal que $x^3 = 2$. Los griegos aparentemente nunca discutieron sobre los instrumentos necesarios para dibujar cónicas, aunque sí aceptaron la solución propuesta por Menecmo. Las ideas de Menecmo sugieren la existencia de un instrumento que resulta ser una generalización del compás, este instrumento, en forma independiente, aparece en la matemática árabe del siglo XI.

El estudio profundo de las cónicas y sus propiedades fhe hecho por Apolonio, alrededor del año 200 a. C. Apolonio escribió ocho libros, de los que conocemos solamente los primeros cuatro en versión original y los tres restantes mediante traducciones árabes. En la introducción Apolinio escribe algo que nos permite deducir cómo es que la matemática se transmitía en aquella época. Los primeros cuatro libros sobre cónicas están dedicados a Eudemo. Por la introducción sabemos que Apolinio puso el segundo libro en manos de su hijo para que él entregara el volumen a Eudemo. Allí le pide que lo lea con cuidado y que divulgue los resultados allí contenidos a todo aquel que muestre interés. Pide además a Eudemo que le muestre el libro al geómetra Filónides si llegara a presentarse la oportunidad.

Según Apolonio, los primeros cuatro libros forman una introducción elemental, los restantes versan sobre tópicos más avanzados. Se estudian propiedades básicas de las cónicas en el primer libro. En el segundo, se estudian la hipérbola y sus asíntotas. En el tercero aparecen los focos de la elipse y de la hipérbola, no así el de la parábola, quizá porque Apolonio no lo consideró suficientemente interesante, y aparecen además propiedades relativas a los triángulos y a los cuadrados inscritos y circunscritos (muy posiblemente, estas propiedades sean las que utilizó Apolonio para estudiar el "problema de las tres rectas" y el "problema de las cuatro rectas", algo que aparecerá después en los trabajos de Pappus). Aparecen además ciertas propiedades métricas de las cónicas, propiedades que hoy suelen pertenecer a cursos de geometría proyectiva. Por último, en el cuarto libro se estudian intersecciones y contacto entre cónicas. En este volumen Apolonio demuestra que dos cónicas no pueden tener más de cuatro puntos en común. En el quinto libro se estudian las distancias máxima y mínima de un punto a los puntos de una cónica, resultados que le dieron fama a Apolonio como geómetra. El sexto libro es quizá menos importante que el anterior dado que el objetivo principal es el de ordenar y completar trabajos anteriores, tales como el tratado de Arquímedes sobre conoides y esferoides. En el libro siete se estudian máximos y mínimos de ciertas funciones de los diámetros de las cónicas.

Dado que no disponían del álgebra, los griegos no pudieron estudiar sistemáticamente curvas de grado superior. Sin embargo, sí fueron capaces de estudiar ciertas curvas particulares sin necesidad de utilizar ecuaciones que las definan. Un ejemplo notable es la cisoide de Diocles.

Algunas curvas algebraicas

Como los griegos no disponían del álgebra, no pudieron profundizar sus conocimientos sobre curvas, aunque sí pudieron estudiar algunas curvas algebraicas particulares. Una curva algebraica es una curva dada por los ceros de un polinomio de dos variables. Para una digresión histórica sobre la teoría de curvas algebraicas, referimos al primer capítulo del libro de Brieskorn y Knörrer [8].

Veamos algunos ejemplos de las curvas consideradas en la matemática griega. Diocles concibió la curva de hoy conocemos como *cisoide de Diocles* y observó que esta curva permite duplicar el cubo. Podemos ver una representación gráfica de esta curva en la figura 3.16. En nuestra notación, esta curva está representada por la ecuación

$$y^2(1+x) = (1-x)^3.$$

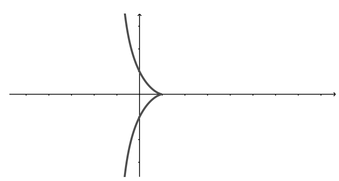


fig:cisoide

Figura 3.16: La cisoide de Diocles.

Los matemáticos griegos conocían algunas superficies. Una de las superficies que estudiaron es el toro, que es una superficie de revolución tal como la que podemos ver en la figura 3.17.

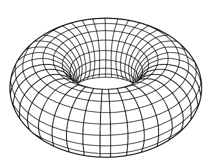


fig:toro

Figura 3.17: El toro.

Perseo estudió las curvas que se obtienen al cortar el toro con planos paralelos al eje de rotación, estas curvas se conocen como *curvas espíricas*. La ecuación de estas curvas está dada por

$$(x^2+y^2)^2 = dx^2+ey^2+f.$$

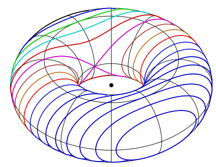


fig:spiric

Figura 3.18: Las curvas espíricas.

Algunas de estas curvas fueron redescubiertas en el siglo XVII gracias a la geometría analítica de Descartes. Un ejemplos notable el de la *lemniscata de Bernoulli*, descubierta en 1694 por Jakov Bernoulli. La ecuación de esta curva es

$$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$$

y podemos ver una representación gráfica en la figura 3.19.

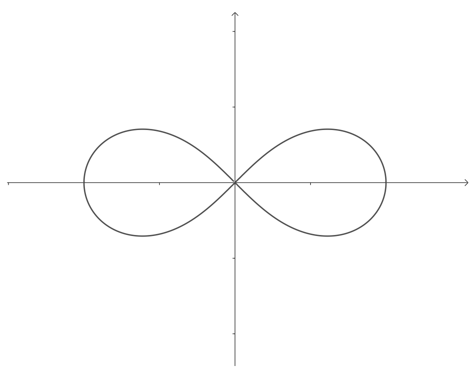


fig:lemniscata

Figura 3.19: La Lemniscata de Bernourlli.

Otro ejemplo es el de los *óvalos de Cassini*, que vemos en la figura 3.20, y que el astrónomo propuso para reemplazar a las elipses de Kepler que describen las órbitas planetarias. La lemniscata es un ejemplo de óvalo de Cassini.

Otra familia de curvas estudiadas por la matemática griega es la de los epiciclos de Ptolomeo. Estas curvas también tienen sus orígenes en la astronomía, ya que eran los candidatos naturales a describir las órbitas planetarias. Un ejemplo de estas curvas es el de la *cardioide* de ecuación

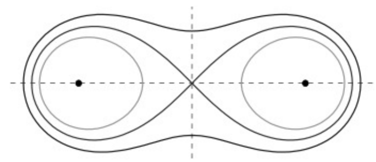


fig:Cassini

Figura 3.20: Los óvalos de Cassini.

$$(x^2+y^2-1)^2 = 4((x-1)^2+y^2)$$

que vemos en la figura 3.21.

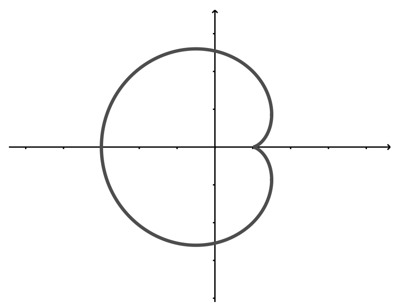
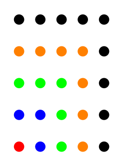


fig:cardioide

Figura 3.21: La cardioide.

Capítulo 4
Números y aritmética

Para los griegos los números tenían propiedades místicas. De hecho, le dieron mucha importancia –quizá demasiada– a los números poligonales. El ejemplo más famoso de número poligonal es el de los cuadrados. El 25 es un cuadrado pues se representa con el siguiente objeto geométrico:

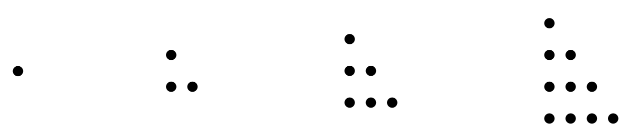


Al observar los colores que usamos en los puntos que forman nuestro cuadrado, vemos además que podemos escribir al 25 como $25 = 1+3+5+7+9$. Esta observación es un hecho general: la suma de los primeros impares consecutivos siempre será un cuadrado. Nuestra notación nos permite traducir esta observación en la identidad

$$1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2,$$

que fácilmente puede demostrarse por inducción.

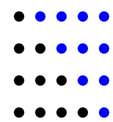
Similarmente podemos considerar números triangulares: 1, 3, 6, 10...



Observermos que para calcular el n-ésimo núnero triangular T_n lo que hacemos es sumar los primeros n números:

$$T_n = 1+2+3+\cdots+n.$$

El siguiente gráfico nos permite deducir otra expresión para la fórmula general que tendrá un número triangular:



Como el número triangular T_4 verifica la ecuación $2T_4 = 4 \times 5$, entonces $T_4 = \frac{4\times 5}{2}$. En general, este mismo argumento nos permite demostrar que

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejercicio 4.1. Calcule T_{100}.

Uno de los resultados más interesantes sobre números poligonales es el teorema de Lagrange. Este teorema tiene sus orígenes en los trabajos del matemático griego Diofanto. Esto motivó a que en 1621 el francés Bachet mientras trabajaba en una traducción de uno de los libros de Diofanto, conjeturara (o afirmara) que todo número puede escribirse como suma de a lo sumo cuatro cuadrados. La primera demostración de este teorema fue dada por Lagrange en 1770.

Teorema 4.2 (Lagrange). *Todo número entero positivo es suma de (a lo sumo) cuatro cuadrados.*

Demostración. Como todo entero es producto de números primos, la identidad

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)&(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)\\ &= (a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)^2\\ &\qquad +(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2\\ &\qquad +(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2\\ &\qquad +(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2\end{aligned} \tag{4.1}$$

eq:Euler

implica que solamente necesitamos demostrar el teorema para los números primos. El caso $p=2$ es trivial pues $2 = 1^2+1^2+0^2+0^2$. Tenemos que demostrar entonces el teorema para todo primo impar p.

Afirmación. Existen $a,b \in \{0,\dots,\frac{p-1}{2}\}$ tales que $a^2+b^2+1 \equiv 0$ mód p.

Para demostrar la afirmación consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned}A &= \{a^2 : a = 0,1,\dots,(p-1)/2\},\\ B &= \{-b^2-1 : b = 0,1,\dots,(p-1)/2\}.\end{aligned}$$

Como los elementos de A son todos distintos módulo p y los elementos de B son también todos distintos módulo p, tenemos que $|A| = |B| = (p+1)/2$. En consecuencia, $A \cap B = \emptyset$. Existen entonces $a \in A$ y $b \in B$ tales que $0 \le a,b \le (p-1)/2$ y $a^2 = -1-b^2$ mód p.

Gracias a la afirmación anterior, sabemos que existe un entero $n \geq 1$ tal que $a^2+b^2+1 = np$. Entonces

$$p \leq np = a^2+b^2+1 = a^2+b^2+1^2+0^2.$$

es suma de cuatro cuadrados. Sea m el menor entero positivo tal que mp es suma de cuatro cuadrados, digamos

$$mp = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

Entonces $1 \leq m \leq n < p$. En efecto, si $n \geq p$, como a y b son $\leq (p-1)/2$, entonces $(p+1)^2 \leq 2$, una contradicción.

Queremos demostrar que $m = 1$. Supongamos entonces que $1 < m < p$. Si m es par, el número

$$\frac{m}{2}p = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3-x_4}{2}\right)^2$$

es suma de cuatro cuadrados, una contradicción a la minimalidad de m.

Sean ahora $y_1,\dots,y_4$ tales que $x_i \equiv y_i$ mód m y $-m/2 < y_i \leq m/2$ para todo $i \in \{1,\dots,4\}$. Como

$$y_1^2+\cdots+y_4^2 \equiv x_1^2+\cdots x_4^2 = mp \equiv 0 \text{ mód } m,$$

existe un entero $r \geq 1$ tal que $mr = y_1^2+\cdots+y_4^2$.

Afirmación. $r \in \{1,\dots,m-1\}$.

Si $r = 0$, entonces $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$. Luego m divide a cada x_i y entonces m^2 divide a cada x_i^2. En consecuencia,

$$m^2 \mid x_1^2+\cdots+x_4^2 = mp,$$

una contradicción pues $m \nmid p$. Como entonces $r \geq 1$,

$$mr = y_1^2+\cdots+y_4^2 \leq 4\left(\frac{m}{2}\right)^2 = m^2$$

y luego $r \leq m$. Para ver que $r \neq m$ basta observar que si $r = m$, entonces

$$m^2 = y_1^2+\cdots+y_4^2 \leq (m/2)^2+(m/2)^2+(m/2)^2+(m/2)^2 = m^2,$$

y luego cada y_j tomará el máximo valor posible, es decir $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = m/2$. En particular, m es un número par, una contradicción.

La identidad de Euler nos permite escribir

$$m^2rp = (mp)(mr) = (x_1^2+\cdots+x_4^2)(y_1^2+\cdots+y_4^2) = z_1^2+\cdots+z_4^2.$$

Como $x_i \equiv y_i$ mód m para todo $i \in \{1,\dots,4\}$, entonces $z_i \equiv 0$ mód m para todo $i \in \{1,\dots,4\}$. Para cada $i \in \{1,\dots,4\}$ sea $w_i = z_i/m \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$rp = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2,$$

una contradicción a la minimalidad de m. $\square$

La identidad (4.1) fue descubierta por Euler; figura en una carta que le escribió a Goldbach el 4 de mayo de 1748. Puede demostrarse la identidad (4.1) con a un cálculo directo. La identidad fue redescubierta por Hamilton en 1843 en sus trabajos sobre cuaterniones. Una manera sencilla y elegante de demostrar esta identidad se basa en que el determinante es una multiplicación multiplicativa y que vale además la siguiente fórmula:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1. \end{pmatrix}.$$

Alrededor de 1840 Graves y Cayley descubieron independientemente una identidad similar que involucra suma de ocho cuadrados.

Ejercicio 4.3. Demuestre que todo número $n > 169$ puede escribirse como suma de exactamente cinco cuadrados.

En 1828 Jacobi dio una fórmula sorprendente que permite calcular con exactitud la cantidad $r_4(n)$ de representaciones del entero n como suma de cuatro cuadrados:

$$r_4(n) = 8(2 + (-1)^n) \sum_{\substack{d \mid n \\ 2 \nmid d}} d.$$

No todo número puede representarse como suma de tres cuadrados. Los primeros numeros que pueden representarse como suma de exactamente cuatro cuadrados son

$$7, 15, 23, 28, 31, 39, 47, 55, 60, 63, 71 \dots$$

La sucesión de tales números lleva el código `A004215`. En 1798 Legendre demostró el siguiente resultado:

Teorema 4.4 (Legendre). *Un entero positivo n puede representarse como suma de tres cuadrados si y sólo si no es de la forma $n = 4^a(8b+7)$.*

No vamos a demostrar el teorema de Legendre. Sin embargo, conviene destacar que el teorema de Legendre puede utilizarse para demostrar el teorema de Lagrange: Si n es un entero positivo, escribimos $n = 4^\alpha m$, donde m es un entero no divisible por 4. Si $m \equiv k$ mód 8 para algún $k \in \{1,2,3,5,6\}$, entonces m es suma de tres cuadrados y el resultado queda demostrado. En caso contrario, $m-1$ es también suma de tres cuadrados y luego m es suma de cuatro cuadrados.

El teorema de Legendre también permite además demostrar fácilmente el siguiente teorema de Gauss:

Teorema 4.5 (Gauss). *Todo entero positivo es suma de tres números triangulares.*

Demostración. Por el teorema de Legendre, todo entero de la forma $8n+3$ puede expresarse como suma de tres cuadrados, digamos $8n+3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Como los cuadrados módulo ocho son 0, 1 y 4, cada a_i es un número impar. Como

$$8n+3 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 = 4(x(x+1) + y(y+1) + z(z+1)) + 3,$$

entonces tenemos que

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + \frac{z(z+1)}{2}. \qquad \square$$

Este teorema aparece en los diarios de Gauss con fecha del 10 de julio de 1796 y su demostración fue publicada en *Disquisitiones Arithmeticae*. Este teorema de Gauss y el teorema de Lagrange sobre suma de cuatro cuadrados son casos particulares de un resultado más general, conjeturado por Fermat en 1638 y demostrado por Cauchy en 1813. Puede demostrarse que los números $(m+2)$-poligonales se definen mediante la fórmula

$$p_m(k) = \frac{mk(k-1)}{2} + k.$$

En el caso $m = 1$ la fórmula da números triangulares pues

$$p_1(k) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

En cambio, si $m = 2$, la fórmula da los números cuadrados pues

$$p_2(k) = k(k-1) + k = k^2$$

Ejercicio 4.6. Demuestre que los números pentagonales son de la forma $\dfrac{3k^2-k}{3}$.

Cauchy demostró en 1813 que para todo $m \geq 3$ todo entero positivo puede expresarse como una suma de $m+2$ números $(m+2)$-poligonales. Una demostración breve y sencilla del teorema de Cauchy fue descubierta por Nathanson en 1987 [39].

Otro resultado interesante sobre números poligonales es teorema de Euler sobre números pentagonales. En 1750 Euler demostró que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(x^{(3k^2-k)/2} + x^{(3k^2+k)/2}\right).$$

El teorema de Lagrange sobre cuatro cuadrados y esta fórmula de Euler son ahora parte de la teoría de funciones theta que desarrolló Jacobi en 1830.

El problema de Waring

El teorema de Lagrange admite varias direcciones generalizaciones posibles. En 1770 Waring afirmó en sus *Meditationes Algebraicæ* que todo número es suma de ≤ 4 cuadrados, ≤ 9 cubos, ≤ 19 potencias cuartas, y, en general, $\leq g(k)$ potencias k-ésimas, donde $g(k)$ depende únicamente de k y no del número que se está representando. Waring no tenía una demostración sino que hizo esas afirmaciones únicamente basado en limitada evidencia numérica.

Si existe $s \in \mathbb{N}$ tal que todo número es suma de $\leq s$ potencias k-ésimas, entonces también valdrá que todo número es suma de $\leq t$ potencias k-ésimas para todo $t \geq s$. Tiene sentido entonces definir $g(k)$ como el menor $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_1^k + \cdots + x_s^k = n$$

admite solución en los enteros positivos para todo $n \in \mathbb{N}$. El siguiente resultado fue demostrado en 1772 por Johannes Euler, hijo del famoso matemático:

Teorema 4.7 (Euler). $g(k) \geq 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$.

Demostración. Primero observemos que para escribir al entero $n = 2^k \lfloor (3/2)^k \rfloor - 1$ como suma de potencias k-ésimas, necesitamos al menos $2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$ sumandos. En efecto, si $q = \lfloor (3/2)^k \rfloor$, entonces

$$n = 2^k q - 1 \leq 2^k (3/2)^k - 1 < 3^k.$$

Si $n = x_1^k + \cdots + x_{g(k)}^k$, entonces $x_j \in \{0,1,2\}$ para todo $j \in \{1,\dots,g(k)\}$ y además

$$n = 2^k q - 1 = \underbrace{(2^k + \cdots + 2^k)}_{q\text{-veces}} - 1 = \underbrace{(2^k + \cdots + 2^k)}_{(q-1)\text{-veces}} + 2^k - 1.$$

Como además

$$2^k - 1 = \underbrace{1^k + \cdots + 1^k}_{(2^k-1)\text{-veces}},$$

se tiene la cota que buscamos. □

La constante

$$I(k) = 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$$

tiene interés en el estudio del problema de Waring. En 1853 Bretschneider conjeturó que $g(k) = I(k)$ para todo $k \geq 2$.

Ejercicio 4.8. Demuestre que $g(2) = 4$.

Entre 1909 y 1912 Wieferich y Kempner demostraron que $g(3) = I(3) = 9$. La primera demostración de este resultado fue de Wieferich, pero contenía algunos errores que posteriormente fueron reparados por Kempner. En 1940 Pillai demostró que $g(6) = I(6) = 73$ y en 1964 Jing–Jung Chen demostró que $g(5) = I(5) = 37$.

El caso de los bicuadrados es bastante más difícil: entre 1986 y 1992 Balasubramanian, Deshouillers y Dress demostraron que $g(4) = I(4) = 19$. Entre 1936 y 1990 varios matemáticos contribuyeron a calcular el valor exacto de $g(k)$ para $7 \leq k \leq 471000000$. En todos estos casos, $g(k) = I(k)$. Veamos algunos de estos valores:

$$g(7) = I(7) = 143, \qquad g(8) = I(8) = 279, \qquad g(9) = I(9) = 548.$$

Otros valores de $g(k)$ pueden encontrarse en la sucesión `A002804`.

En general es muy difícil calcular con exactitud el valor de $g(k)$. Nos contentaremos con mostrar algunas cotas en ciertos casos particulares, que en realidad es lo único que se necesita si se quiere demostrar algún caso particular del problema de Waring.

Teorema 4.9 (Liouville). $g(4) \leq 53$.

Demostración. Es fácil demostrar que

$$6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i + x_j)^4 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^4 \tag{4.2}$$

eq:Lucas

Dado $n \in \mathbb{N}$ escribimos $n = 6q + r$ con $0 \leq r \leq 5$. Por el teorema de Lagrange podemos escribir a q como suma de cuatro cuadrados:

$$n = 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + r = 6x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_4^2 + r.$$

La identidad (4.2) nos dice que todo número de la forma $6y^2$ es suma de doce potencias cuartas, y entonces $n - r$ es suma de 48 potencias cuartas. Como $0 \leq r \leq 5$, vemos que r es suma de ≤ 5 potencias cuartas, se concluye que para escribir al entero n vamos a necesitamos $\leq 48 + 5 = 53$ potencias cuartas. $\square$

La identidad (4.2) fue descubierta por Lucas en 1876, la identidad usada por Liouville para demostrar que $g(4) \leq 53$ es un poco más complicada y es la identidad que se obtiene de (4.2) con $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3 + y_4$, $x_4 = y_3 - y_4$.

No es difícil convencerse de que las identidades como la que vimos en (4.2) son importantes para atacar el problema de Waring. Se hace necesario tener una mejor notación. Escribiremos entonces

$$(x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_m)^k = \sum (x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^k$$

donde la suma se toma sobre todas las posibles elecciones de $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ para $2 \leq j \leq m$. Por ejemplo:

$$(x_1 \pm x_2)^4 = (x_1 + x_2)^4 + (x_1 - x_2)^4.$$

La identidad (4.2) que usamos para demostrar que $g(4) \leq 53$ puede escribirse entonces abreviadamente como

$$6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2 = \sum_{i<j}(x_i \pm x_j)^4,$$

donde además resultará de utilidad recordar que la suma involucrada tiene además ocho términos.

El problema de Waring comenzó a acercarse a una solución definitiva cuando en 1908 Hurwitz observó que la existencia de una identidad polinomial de la forma

$$p(x_1^2+\cdots+x_4^2)^k = \sum_{i=1}^{N} p_i(a_{1i}x_1+a_{2i}x_2+a_{3i}x_3+a_{4i}x_4)^{2k}$$

donde $p, p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{N}$ y $(a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{N\times 4}$, permite demostrar que

$$g(2k) \leq g(k)(p_1+\cdots+p_N)+p-1,$$

de donde evidentemente se obtiene que si $g(k)$ es finito, también lo será $g(2k)$.

Teorema 4.10 (Hurwitz). $g(8) \leq 44793$.

Demostración. Vamos a utilizar la identidad polinomial

$$\begin{aligned} 5040(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^4 = \sum_{1\leq i\leq 4} 6x_i^8 &+ \sum_{1\leq i<j\leq 4} 60(x_i \pm x_j)^8 \\ &+ \sum_{1\leq i<j<k\leq 4} (2x_i \pm x_j \pm x_k)^8 \\ &+ \sum_{1\leq i<j<k<l\leq 4} 6(x_i \pm x_j \pm x_k \pm x_l)^8. \end{aligned} \tag{4.3}$$

eq:Hurwitz

Observemos que la primera suma del miembro derecho tiene cuatro términos, la segunda tiene doce términos, la tercera tiene 48 términos y la cuarta tiene ocho términos. La identidad (4.3) nos dice entonces que todo número de la forma $5040q^4$ es suma de

$$6\times 4+12\times 60+48+8\times 6 = 840$$

potencias octavas. Como además demostramos que todo número es suma de $g(4) \leq 53$ potencias cuartas, tenemos que todo $n \geq 5040$ puede escribirse como suma de $840\times g(4) \leq 840\times 53 = 44520$ potencias cuartas. Por otro lado, si $n < 5040$, entonces siempre podremos escribir a n como suma de ≤ 273 potencias octavas (pues $3^8 = 6561 > 5039$). Luego $g(8) \leq 840g(4)+273 \leq 44793$. □

En 1909 Hilbert demostró que aquellas identidades propuestas por Hurwitz siempre existen. Con eso logró entonces obtener una demostración completa al problema de Waring. Muchos matemáticos simplificaron la complicada demostración original de Hilbert: Haursdoff, Stridsberg, Hurwitz, Remak y Frobenius. En la demostración de Hilbert no aparecen cotas explícitas para $g(k)$. En 1953 Rieger usó las ideas de Hilbert y logró demostrar que

$$g(k) \leq (2k+1)^{260(k+3)^{3k+8}}.$$

Hoy en día la demostración que dio Hilbert en 1909 no es sino apenas una curiosidad. Es cierto que después de hacer algunas modificaciones a los argumentos de Hilbert tales como las que hizo Rieger uno puede obtener cotas para $g(k)$, pero mucho mejores cotas pueden obtenerse gracias a métodos analíticos. Un método analítico muy poderoso con el que puede resolverse el problema de Waring fue divisado por Hardy y Littlewood en 1920 y se conoce como el *método del círculo* de Hardy–Litlewood.

Números perfectos

Otros números que tuvieron cierto interés en épocas pasadas fueron los números perfectos. Un entero positivo se dice **perfecto** si es igual a la suma de sus divisores propios positivos. Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} 6 &= 1+2+3, \\ 28 &= 1+2+4+7+14, \\ 496 &= 1+2+4+8+16+31+62+124+248. \end{aligned}$$

Otros ejemplos de números perfectos aparecen en la sucesión `A000396`.

En el libro IX Euclides demostró que si p es un número primo tal que 2^p-1 es primo, entonces $n=2^{p-1}(2^p-1)$ es un número perfecto.

Ejercicio 4.11. Demuestre el teorema de Euclides sobre números perfectos.

En el siglo XVIII Euler demostró el recíproco del resultado de Euclides: cada número perfecto par n es de la forma $n=2^{p-1}(2^p-1)$ donde p y 2^p-1 son números primos.

Ejercicio 4.12. Demuestre el teorema de Euler sobre números perfectos.

Ejercicio 4.13. Demuestre que un número perfecto par es siempre un número triangular.

Ejercicio 4.14. Demuestre que un número perfecto par es siempre un número binomial.

Hasta el siglo XV se conocían muy pocos números perfectos. En 1603 el matemático italiano Pietro Cataldi encontró los siguientes números perfectos:

$$2^{16}(2^{17}-1)=8589869056, \quad 2^{18}(2^{19}-1)=137438691328.$$

Al momento se conocen únicamente 51 números perfectos. El mayor de los perfectos conocidos hasta el momento[1] es un número de 49724095 dígitos:

[1] Septiembre de 2019

$$2^{82589932}(2^{82589933}-1)$$

y fue encontrado en diciembre de 2018.

No se sabe si existen finitos números perfectos y no se conocen números perfectos impares. En 2012, Ochem y Rao demostraron que no existen números perfectos impares de orden $< 10^{1500}$.

Números primos

Como bien señala Weil en [51], el amor del hombre por los números es quizá aún más antiguo que la teoría de números.

Los griegos consideraban a los números primos como números que no admiten representaciones rectangulares. Los primeros números primos son

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79 \dots$$

La sucesión de números primos es `A000040`.

El teorema fundamental de la aritmética afirma que todo número puede escribirse como producto de números primos y esa escritura es esencialmente única. Este resultado no aparece explícitamente en los libros de Euclides, aunque hay muchos resultados del libro VII que son casi equivalentes. Tampoco aparece en *Essai sur la Théorie des Nombres*, famoso tratado escrito por Legendre de 1798 sobre teoría de números. La primera aparición precisa junto con una demostración rigurosa figura en el famoso *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss de 1801.

Euclides demostró en la proposición 20 del libro IX que existen infinitos números primos.

> Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.

La demostración es bien conocida y no la reproduciremos aquí. Sí mencionaremos, en cambio, que la demostración de Euclides revela que la existencia de una sucesión de enteros positivos coprimos dos a dos, implicará la infinitud de los números primos. En efecto, si $a_1, a_2, \dots$ es una sucesión de enteros coprimos dos a dos y para cada j se toma un primo p_j que divide al elemento a_j, entonces los p_j serán todos distintos.

Recordemos que los números de Fermat son los enteros de la forma

$$F_n = s^{2^n} + 1.$$

En un una carta que Goldbach le escribió a Euler en julio de 1730, se demuestra que los números de Fermat son coprimos dos a dos. Este resultado da entonces una demostración alternativa de la infinitud de los números primos.

Teorema 4.15. *(Goldbach) Los numeros de Fermat son coprimos dos a dos.*

Demostración. Se demuestra fácilmente por inducción que $F_n - 2 = F_0F_1 \cdots F_{n-1}$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $m < n$, entonces F_m divide a $F_n - 2$. Si p es un número primo tal que $p \mid F_n$ y $p \mid F_m$, entonces $p \mid F_n - 2$ y luego $p \mid 2$, una contradicción pues F_m es un número impar. □

Veamos otra demostración muy breve y elegante, aparentemente encontrada por Hermite:

> Para cada $n \geq 0$ sea q_n el menor número primo que divide a $n! + 1$. Como $q_n > n$, se concluye que el conjunto $\{q_n : n \geq 1\}$ contiene infinitos elementos.

Esta demostración es particularmente interesante. Calculemos algunos términos de la sucesión (q_n):

$$2, 2, 3, 7, 5, 11, 7, 71, 61, 19 \ldots$$

Es la sucesión `A051301`.

Ejercicio 4.16. Demuestre que todo número primo pertenece a la sucesión (q_n).

Existen muchas otras demostraciones de la infinitud de los números primos. Euler dio varias demostraciones distintas de este hecho. Demostró la infinitud de los primos al observar, por ejemplo, que el producto

$$\prod_p \frac{p}{p-1}$$

es infinito. La "demostración" de Euler es más o menos así: sea

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Calculamos

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$$

y restamos para obtener

$$\frac{x}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Hacemos ahora algo similar: dividimos por tres y restamos par obtener:

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (n:6)=1}} \frac{1}{n},$$

donde la suma se toma sobre todos los enteros positivos coprimos con seis. Al continuar con este procedimiento, Euler obtiene la expresión

$$\prod_p \frac{p}{p-1} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdots)}{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots)} x = 1$$

y concluye entonces que, como x es infinito (pues la serie armónica diverge), el producto $\prod p/(p-1)$ también debe ser infinito. En conclusión, existen infinitos números primos. La demostración de Euler carece del rigor necesario, aunque hay que mencionar que los problemas que presenta pueden arreglarse. De hecho, entre 1875 y 1876 Kronecker arregló esta demostración de Euler y la expuso en sus clases sobre la teoría de los números primos.

En 1737 Euler dio una demostración alternativa de la infinitud de los números primos. Lo hizo al demostrar que la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots=\sum_p \frac{1}{p},$$

donde la suma se toma sobre todos los números primos, diverge. La falta de rigor en la demostración original de Euler puede arreglarse fácilmente. Daremos la demostración de este resultado encontrada por Clarkson en 1966:

Teorema 4.17 (Euler). *La serie* $\sum_p \frac{1}{p}$ *diverge.*

Demostración. Supongamos que la serie fuera convergente. Existe entonces un entero positivo k tal que

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_m} < \frac{1}{2}.$$

Sea $Q = p_1 \cdots p_k$. Para cada $n \geq 1$ consideramos el número $1+nQ$. Como ningún primo p_j con $j \in \{1,\dots,k\}$ divide a $1+nQ$, los factores primos de $1+nQ$ están todos en el conjunto $\{p_{k+1}, p_{k+2}\dots\}$. Para cada $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+nQ} \leq \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{1}{p_m}\right)^t$$

pues la suma del miembro derecho contiene a todos los términos que aparecen en la suma del miembro izquierdo. Como además

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+nQ} \leq \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{1}{p_m}\right)^t < \sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t < \infty,$$

obtenemos la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+nQ} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+Q)} = \frac{1}{1+Q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

una contradicción, pues sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. □

Hasta el momento, los siete mayores números primos conocidos son primos de Mersenne. Desde 1997 todos los primos de Mersenne descubiertos se hicieron dentro del proyecto GIMPS. Este proyecto de cálculo distribuido fue creado por George Woltman en 1996 y tiene como objetivo buscar números primos de Mersenne.

GIMPS es uno de los primeros proyectos de cálculo distribuido y es notablemente exitoso: de los 50 primos de Mersenne conocidos, los últimos 17 encontrados fueron dentro de este proyecto. El mayor primo de Mersenne conocido hasta el momento es

$$2^{82589933}-1$$

y tiene 24862048 dígitos; fue descubierto en diciembre de 2018. Este número es además el mayor número primo que se conoce.

Hoy en día los números primos son importantes no solo en matemática pura sino en la criptografía. Muchos de los algoritmos de encriptación utilizados se basan en el uso de números primos.

Desde mucho tiempo atrás existe un profundo interés en conocer cómo se distribuyen los números primos. Basados en una tabla de primos $\leq 10^6$ similar a la que vemos en la tabla 4.1.

Cuadro 4.1: Algunos valores para $\pi(x)$.

tab:pi

x	$\pi(x)$	$x/\log x$	$\pi(x)/(x/\log x)$
10	4	4,3	0,93
10^2	25	21,5	1,15
10^3	168	144,9	1,16
10^4	1229	1086	1,11
10^5	9592	8686	1,10
10^6	78498	72464	1,08

Gauss y Legendre conjeturaron independientemente el teorema del número primo. La fórmula de Legendre para aproximar a la cantidad $\pi(x)$ de primos $\leq x$ es la siguiente:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

que quiere decir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{(x/\log x)} = 1.$$

La fórmula de Gauss es equivalente, aunque bastante mejor que la de Legendre:

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Por ejemplo:

$$\pi(10^7) = 664579, \quad \pi(10^7) - \frac{10^7}{\log(10^7)} = 44158, \quad \pi(10^7) - \mathrm{Li}(10^7) = 339.$$

Veamos otro ejemplo, aún más sorprendente:

$$\pi(10^{10}) = 455052511,$$
$$\pi(10^{10}) - \frac{10^{10}}{\log(10^{10})} = 20758029,$$
$$\pi(10^{10}) - \mathrm{Li}(10^{10}) = 3104.$$

Durante muchos años los matemáticos intentaron en vano demostrar estos resultados sobre la distribución de los números primos. En 1859, Riemann atacó el problema con métodos analíticos y encontró una sorprendente conexión entre los números primos y la función de variable compleja

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} 1/n^s.$$

Esta función hoy se conoce como la **función zeta de Riemann** y es de fundamental importancia en la matemática moderna. De hecho, uno de los problemas más importantes de la matemática, que se conoce como la hipótesis de Riemann, es una conjetura sobre la distribución de los ceros de la función $\zeta(s)$.

El teorema del número primo fue demostrado independiente por de la Valle Poussin y por Hadamard en 1896; en ambos casos, la demostración se basa en el estudio de propiedades analíticias de la función de variable compleja $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} 1/n^s$. En 1949, Selberg e Erdös encontraron, independientemente, una demostración elemental del teorema del número primo. Esta demostración elemental generó mucho revuelo en la comunidad matemática y muchas discusiones entre Erdös y Selberg, ya que ambos, de alguna forma, consideraban merecer el crédito de haber encontrado una demostración elemental del teorema del número primo. Cabe aclarar que cuando nos referimos a una demostración elemental, nos referimos a una demostración que solamente utiliza técnicas básicas, aunque en general sean demostraciones muy difíciles de entender. Es importante recordar lo siguiente: demostración elemental no quiere significa sencilla y fácil de entender.

Uno de los resultados más importantes de la teoría de números durante el siglo XIX es el siguiente teorema, demostrado por Dirichet entre 1837 y 1839: Si k y l son enteros coprimos, entonces existen infinitos números primos congruentes a l módulo k. Este resultado fue enunciado en forma explícita por Euler en 1785 en el caso $l = 1$ y por Legendre en 1798 en el caso general. La segunda edición del libro de Legendre sobre teoría de números, publicada en 1808, incluye una demostración incorrecta de este resultado sobre números primos. El error está en creerse que un cierto lema es fácil de demostrar, tal como afirmaba Legendre. Dirichlet fue uno de los primeros en observar que aquel lema no era, en realidad, fácil de demostrar. En 1858 Dupré demostró que aquel lema de Legendre era en realidad falso.

Existe además una versión del teorema del número primo para progresiones aritméticas: la cantidad de primos $p \leq x$ congruentes a l módulo k es asintóticamente igual a

$$\frac{1}{\phi(k)}\pi(x).$$

En la teoría de los números primos podemos encontranos con muchos resultados que son consecuencia de propiedades matemáticas muy profundas, y simultáneamente podemos también encontrarnos que resultados que difícilmente puedan interpretarse como algo más que una curiosidad. En la correspondencia entre Euler y Goldbach podemos encontrarnos con el siguiente hecho notable: El polinomio

$$x^2 - x + 41$$

da un número primo para todo $x \in \{0, \dots, 40\}$. Similarmente, el polinomio

$$x^2 - 79x + 1601$$

da un número primo para todo $x \in \{0, \dots, 79\}$. En 1752 Goldbach demostró, aunque con algunas deficiencias fácilmente reparables, el siguiente resultado:

Teorema 4.18 (Goldbach). *No existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado $n \geq 1$ tal que $f(n)$ es primo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ no constante tal que $f(n)$ es un número primo para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $x_0 \in \mathbb{N}$. Como $f(x_0) \notin \{-1, 0, 1\}$, existe entonces un primo p tal que p divide a $f(x_0)$. Como

$$f(x_0 + mp) \equiv f(x_0) \equiv 0 \text{ mód } p$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$, se tiene entonces que $f(x_0 + mp) \in \{-p, p\}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, una contradicción. $\square$

Entre las curiosidades matemáticas que involucran números primos tenemos, por supuesto, las fórmulas explícitas.

Ejercicio 4.19. Demuestre que un entero p es primo si y sólo si $(p-1)! \equiv -1$ mód p.

El resultado del ejercicio anterior se conoce como el teorema de Wilson. Aparentemente, el resultado era conocido por el matemático árabe Alhazen, alrededor del año 1000. Waring conocía el enunciado, y también Wilson, su estudiante. Sin embargo, ninguno de los dos pudo demostrarlo. La primera demostración es de 1771 y fue encontrada por Lagrange. Es posible de Leibniz conociera este resultado, pero nunca lo publicó.

Ejercicio 4.20. Demuestre que la función

$$n \mapsto \left\lfloor \frac{n! \text{ mód } (n+1)}{n} \right\rfloor (n-1) + 2.$$

genera todos los números primos.

Estos dos ejercicios nos muestran que existen fórmulas para encontrar números primos, pero son absolutamente ineficientes y no pueden usarse en aplicaciones serias. En esta misma dirección, mencionaremos un resultado demostrado por Mills en 1946:

Teorema 4.21 (Mills). *Existe un número real A tal que $\lfloor A^{3^n} \rfloor$ es un número primo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para la demostración necesitamos utilizar el siguiente resultado demostrado por Ingham en 1937: Si p_n denota al n-ésimo número primo, existe una constante K tal que

$$p_{n+1} - p_n \leq K p_n^{5/8}.$$

Afirmación. Si $N > K^8$, entonces existe un primo p tal que $N^3 < p < (N+1)^3 - 1$.

Para demostrar esta afirmación, sea p_n el mayor número primo mayor que N^3. Como $N > K^8$, entonces $N^{1/8} > K$ y luego

$$N^3 < p_{n+1} < p_n + K p_n^{5/8} < N^3 + K N^{15/8} < N^3 + N^2 < (N+1)^3 - 1.$$

Sea P_0 un número primo tal que $P_0 > K^8$. La afirmación anterior nos permite construir una sucesión $P_0, P_1, P_2 \dots$ de primos tales que

$$P_n^3 < P_{n+1} < (P_n + 1)^3 - 1.$$

Sean

$$u_n = P_n^{3^{-n}}, \quad v_n = (P_n + 1)^{3^{-n}}.$$

Vamos a demostrar que la sucesión $u_1, u_2 \dots$ converge. Para eso veremos que es monótona y acotada. Primero observamos que, como

$$u_{n+1} = P_{n+1}^{3^{-n-1}} > P_n^{3^{-n}} = u_n,$$

la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite pues es monótona y acotada. Sea $A = \lim_{n \to \infty} u_n$. Como además

$$\begin{aligned} v_n &= (P_n + 1)^{3^{-n}} > P_n^{3^{-n}} = u_n, \\ v_{n+1} &= (P_{n+1} + 1)^{3^{-n-1}} < (P_n + 1)^{3^{-n}} = v_n, \end{aligned}$$

se tiene que $u_n < A < v_n$ para todo n. Luego $P_n < A^{3^n} < P_n + 1$ para todo n y el teorema queda demostrado al tomar parte entera pues $\lfloor A^{3^n} \rfloor = P_n$. □

El resultado anterior no tiene aplicaciones prácticas. No se conoce el valor real de la constante A del teorema; de hecho, ni siquiera se sabe si A es un número racional. Sin embargo, si se asume la veracidad de la hipótesis de Riemann, puede demostrarse que A es aproximadamente igual a

$$1{,}306377883863080690468614492\dots$$

Tampoco se conocen los primos que produce la función de Mills. Si se asume la veracidad de la hipótesis de Riemann puede demostrarse que los primeros primos producidos por la función de Mills son

$$2, 11, 1361, 2521008887, 16022236204009818131831320183\dots$$

Estos números son los elementos de la sucesión `A051254`.

Es natural preguntarse si puede demostrarse algún resultado similar al de Mills pero sin apelar al profundo teorema de Ingham.

Ejercicio 4.22. Si existen constantes $\beta < 1$, A y c tales que para cualesquiera dos primos consecutivos $p_{n-1} < p_n$ tales que $A < p_{n-1}$ se tiene que $p_n - p_{n-1} < cp_{n-1}^{\beta}$, entonces para todo $\alpha > \frac{1}{1-\beta}$ existe un número real θ tal que

$$\lfloor \theta^{\alpha^n} \rfloor$$

es primo para todo $n \in \mathbb{N}$.

En 1845 Bertrand conjeturó que dado $n \geq 1$ siempre existe un número primo p tal que $n < p < 2n$. Si bien Bertrand pudo comprobar que la conjetura era cierta para todo $n \leq 3 \times 10^6$, no pudo demostrarlo para todo n. La conjetura fue demostrada completamente por Chebyshev en 1852. Ramanujan encontró una demostración más sencilla que la encontrada por Chebyshev en 1919. En 1932 Erdös dio una demostración incluso más sencilla y completamente elemental que utiliza solamente propiedades de los números combinatorios.

En 1951 Wright demostró que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que si $g_0 = \alpha$ y $g_{n+1} = 2^{g_n}$, entonces $\lfloor g_n \rfloor$ es siempre un número primo. La demostración de este resultado puede consultarse en [52]; es similar a la demostración que hicimos del teorema de Mills, aunque el teorema de Ingham será reemplazado por el teorema de Bertrand–Chebyshev.

La conjetura de Goldbach

La **conjetura de Goldbach** afirma que todo entero par mayor que dos puede expresarse como suma de dos primos. Por ejemplo:

$$10 = 3 + 7, \quad 18 = 5 + 13, \quad 20 = 7 + 13, \quad 90 = 43 + 47.$$

Una versión de esta conjetura aparece en una carta del 7 de junio de 1742 que Goldbach le escribió a Euler. Aparentemente esta conjetura era conocida desde tiempo antes; en los trabajos póstumos de Descartes puede encontrarse una afirmación similar a la conjetura de Goldbach: no está demostrado pero todo número puede escribirse como suma de uno, dos o tres números primos.

A pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos, la conjetura permanece abierta.

Gracias a cálculos computacionales se sabe que la conjetura es verdadera para números menores que 4×10^{17}. En 1937 Vinogradov demostró que todo número impar suficientemente grande es suma de tres números primos. En 1948 Rényi demostró que existe un entero M tal que cada número impar n suficientemente grande es suma de un primo y otro número que tiene a lo sumo M factores primos. Si alguien pudiera demostrar que $M = 1$, se tendría entonces la veracidad de la conjetura de Goldbach. En 1966 Jing-Run demostró que $M \leq 2$.

Recientemente pudo demostrarse una versión débil de la conjetura de Goldbach: Todo número impar mayor que cinco puede expresarse como suma de tres números primos. Esta conjetura es la **conjetura débil de Goldbach**. Es fácil demostrar que la veracidad de la conjetura de Goldbach implicaría la veracidad de la versión débil de la conjetura. La conjetura débil apareció publicada sin demostración por primera vez en 1770 en el tratado *Meditationes algebraicae*, escrito por el matemático inglés Edward Waring. Fue demostrada por el matemático peruano Harald Helfgott en 2013.

La infinitud de los primos gemelos

Dos números primos p y q son números **primos gemelos** si $|p-q| = 2$. Los primeros ejemplos son

$$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),(29,31),(41,43),\dots$$

La sucesión de primos gemelos es `A077800`. En 2009 se demostró que los números

$$65516468355 \times 2^{333333}+1, \quad 65516468355 \times 2^{333333}-1,$$

son primos gemelos; cada uno de estos números tiene 100355 dígitos. Hasta ahora no se descubrieron primos gemelos mayores. Este par de primos se encontró dentro del proyecto de cálculo distribuido PrimeGrid, desarrollado por Rytis Slatkevičius. Se tardó más de dos años en encontrar este par de primos y en esta tarea colaboraron 18661 personas. Según el reporte oficial, una única computadora de escritorio hubiera tardado cerca de dos siglos en encontrar estos números.

Ejercicio 4.23. Utilice el teorema de Wilson y demuestre que los enteros n y $n+2$ son primos gemelos si y sólo si

$$4((n-1)!+1) \equiv -n \text{ mód } n(n+1).$$

Desde hace mucho tiempo se conjetura que existen infinitos primos gemelos.

En 1919 Brun demostró que la serie

$$\sum \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\cdots,$$

donde la suma se toma sobre todos los primos p tales que $p+2$ es también un número primo, es convergente. En 1994, mediante el cálculo de los primos gemelos menores que 10^{14} el matemático estadounidense Thomas Nicely determinó que la serie converge a

$$1,9021605777\ldots,$$

número que hoy se conoce como la **constante de Brun**. Fue durante este cálculo que Nicely descubrió un problema en los procesadores Pentium, hoy conocido como el "Pentium FDIV bug". La prestigiosa revista Science publicó un artículo en 1995 que describe la importancia de los problemas de teoría de números para descubrir problemas como el que encontró Nicely. Después del incidente Intel, acabó cooperando con Nicely para testear los nuevos microprocesadores.

En 2013 Zhang demostró que existe un entero N tal que existen infinitos pares de primos cuya diferencia es N; el entero N es aproximadamente igual a 70×10^6. Este trabajo tuvo gran repercusión, ya que no se conocían resultados de este tipo desde tiempos de Euclides. Después de la publicación del trabajo de Zhang, Terence Tao propuso trabajar en conjunto dentro un proyecto Polymath para intentar optimizar la cota de setenta millones encontrada por Zhang. En 2014 un grupo de matemáticos logró reducir la cota a 246. Tao y Maynard, independientemente, lograron reducir estas cotas notablemente si ciertas conjeturas de la teoría de números fueran verdaderas.

Is massively collaborative mathematics possible?

En 2009 el matemático inglés Tim Gowers anunció en su blog que llevaría acabo un experimento que hasta ese momento no existía en matemática. Inspirado en muchos de los proyectos abiertos que existen en internet, sugirió que se trabajara en conjunto para intentar resolver algún problema muy difícil de la matemática. El blog de Gowers es: `https://gowers.wordpress.com/`

Gowers eligió un problema que fuera acorde para ser atacado con esta idea colaborativa. El experimento fue un éxito: pocas semanas después del anuncio del experimento, la comunidad matemática supo que el problema que se había elegido estaba esencialmente resuelto. Proyectos como este son conocidos como **proyectos Polymath**. Un proyecto Polymat es entonces un cierto tipo de colaboración entre matemáticos con la objetivo de resolver algún problema difícil.

En general, los trabajos realizados bajo esta modalidad se firman con el seudónimo D. H. J. Polymath. Sin embargo, el cuarto proyecto Polymath fue firmado por Tao, Croot y Helfgott, porque los editores de la revista *Mathematics of Computation* pidieron que en la versión final del trabajo figuraran los nombres reales de los autores.

Capítulo 5
Ecuaciones diofánticas

Una **ecuación diofántica** es una ecuación algebraica cuyos coeficientes son números enteros y donde solamente interesan las soluciones enteras o quizá las soluciones racionales. El nombre estas ecuaciones se debe al notable matemático Diofanto.

Ejemplo 5.1. Comencemos con uno de los casos más sencillos de ecuaciones diofánticas lineales. Sabemos que la ecuación

$$ax + by = c$$

tiene solución en los enteros si y sólo si c es un múltiplo del máximo común divisor entre a y b.

Escribir el máximo común divisor d entre a y b como $d = ra + sb$ para enteros r y s se denomina comunmente la *identidad de Bézout*. Este resultado se conoce desde mucho tiempo antes, por lo menos desde 1624, ya que aparece en un trabajo de Bachet de Méziriac. Bézout demostró esa identidad para polinomios en 1779.

Como sabemos, el cálculo del máximo común divisor entre dos enteros puede hacerse mediante el *algorithmo de división* (o el algoritmo de Euclides). Este algoritmo es quizá el más antiguo que se conoce, y aparece formulado para enteros en las proposiciones 1 y 2 del libro VII y para longitud de segmentos en la proposiciones 2 y 3 del libro X de los Elementos. Hay mucha evidencia que sugiere que el algoritmo de división no fue descubierto por Euclides sino que era ya conocido por los pitagóricos y por Eudoxo. El algoritmo fue redescubierto independiente en India y China y eso se hizo precisamente para resolver ecuaciones diofánticas.

Recordemos cómo funciona el algoritmo de división. Si queremos calcular el máximo común divisor entre 840 y 611 hacemos el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
840 &= 1 \times 611 + 229,\\
611 &= 2 \times 229 + 153,\\
229 &= 1 \times 153 + 76,\\
153 &= 2 \times 76 + 1.
\end{aligned}$$

Esto nos permite escribir las siguientes fracciones:

$$\frac{840}{611} = 1 + \frac{229}{611} = 1 + \frac{1}{\frac{611}{229}}, \qquad \frac{611}{229} = 2 + \frac{153}{229} = 2 + \frac{1}{\frac{229}{153}},$$
$$\frac{229}{153} = 1 + \frac{76}{153} = 1 + \frac{1}{\frac{153}{76}}, \qquad \frac{153}{76} = 2 + \frac{1}{76}.$$

La fracción continua que representa al racional $840/611$ es entonces:

$$\frac{840}{611} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{76}}}}.$$

Ejercicio 5.2. Resuelva $840 + 611y = 76$.

Ejercicio 5.3. Demuestre que la ecuación $8x + 18y = 1$ no tiene soluciones enteras.

Ejemplo 5.4. La ecuación $x^2 - 2y^2 = 0$ no tiene soluciones en los enteros pues vimos que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Ejemplo 5.5. Sea p un número primo. De acuerdo con Hurwitz, Euler fue el primero en observar que la ecuación

$$x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$$

no tiene soluciones enteras no triviales. Supongamos que existe una solución (x,y,z). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que no todos estos números son divisibles por p. De la ecuación vemos que $p \mid x^3$, lo que implica que $p \mid x$. Si escribimos $x = pa$ y reemplazamos, la ecuación se transforma en

$$p^3a^3 + py^3 + p^2z^3 = (pa)^3 + py^3 + p^2z^3 = 0.$$

Al cancelar un p, nos queda $p^2a^3 + y^3 + pz^3 = 0$. Luego $p \mid y^3$ y en consecuencia $p \mid y$. Si escribimos $y = pb$ y reemplazamos,

$$p^2a^3 + p^3b^3 + pz^3 = 0.$$

Al cancelar una p, obtenemos $pa^3 + p^2b + z^3$. De aquí vemos que $p \mid z^3$ y luego $p \mid z$, una contradicción.

Ejemplo 5.6. En 1769 Euler conjeturó que la ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$, o más generalmente

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_{k-1}^k = x_k^k, \quad k \geq 4,$$

no tiene soluciones enteras.

Mediante un cálculo computacional más o menos directo, en 1966, Larden y Parkin encontraron un contraejemplo para la conjetura de Euler en el caso $k = 5$:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Sin embargo, no pudieron encontrar contraejemplos para el caso $k = 4$. Más de doscientos años después de aquella conjetura de Euler, en 1988, el matemático estadounidense Noam Elkies encontró una infinidad de soluciones para la ecuación de Euler en el caso $k = 4$. Una de esas soluciones es

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

No se sabe si la conjetura de Euler es verdadera si $k \geq 6$.

Ejemplo 5.7. En 1946 Erdös y Straus conjeturaron que para cada entero $n \geq 2$ existen $x, y, z \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Ejercicio 5.8. Demuestre que solo es necesario demostrar la conjetura para los números primos

Ejercicio 5.9. Demuestre que la conjetura es verdadera para los primos p tales que $p \equiv 3 \bmod 4$.

Para $n = 5$ la conjetura es verdadera pues

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

Más generalmente, si $n = 3m + 2$, siempre se tiene al menos una solución pues

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)/3} + \frac{1}{n(n+1)/3}.$$

Gracias al uso de computadoras se sabe que la conjetura es verdadera para todo $n \leq 10^{17}$. La cantidad de soluciones para cada n puede verse en la sucesión `A073101`. Al observar esta sucesión vemos que incluso si n es grande, la cantidad de soluciones es un número relativamente pequeño. Al día de hoy la conjetura está aún abierta. En 2013, Elsholtz y Tao obtuvieron un avance importante en la conjetura de Erdös–Straus al lograr dar cotas para la cantidad promedio de soluciones del problema.

El ejemplo anterior involucra aquellas fracciones conocidas como **fracciones egipcias**. Una fracción egipcia es una suma finita de fracciones unitarias. Todo racional positivo puede representarse por una fracción egipcia; por esta razón los egipcios las utilizaban en las aplicaciones prácticas. A partir del estudio de algunos papiros, los historiadores descubrieron algunos de los métodos con los que los egipcios podían realizar cálculos con estas fracciones. Según Heródoto los egipcios son los padres de la geometría, aunque tenían una matemática muy inferior a la matemática de los babilónicos.

Este es un buen momento para hacer una pequeña digresión sobre la matemática egipcia. Mucho de lo que sabemos de la matemática egipcia, se lo debemos a antiguos papiros. Dos de los más famosos y más antiguos son el Papiro de Ahmes, también conocido como el papiro matemático Rhind, y el Papiro de Moscú, ambos del siglo XIX a. C. Estos dos papiros están formados por una colección de problemas y recetas –con ejemplos numéricos concretos– que permiten resolverlos; y se creen fueron escritos para usarse como manuales de texto. Los papiros contienen gráficos de sólidos geométricos, aunque estos dibujos se ven desde arriba o desde algún costado, ya que los egipcios no conocían la perspectiva. Entre los problemas incluidos en los papiros hay cálculo de áreas de rectángulos, trapecios y triángulos. Aparece además la fórmula

$$\frac{(a+c)}{2}\frac{(b+d)}{2}.$$

que aproxima el área de un cuadrilátero de lados a, b, c y d. Es interesante observar que esta fórmula también puede usarse para calcular área de triángulos si alguno de los lados es igual a cero (como los egipcios no conocían el número cero, simplemente sabían que para usar esta fórmula en triángulos había que omitir uno de los lados). Según puede verse en los papiros, para calcular el área de un círculo de diámetro d usaban la fórmula aproximada

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2. \tag{5.1}$$

eq:egipcio_circle

No sabemos con exactitud cómo es que los egipcios consiguieron tal buena aproximación, se cree que fue mediante la técnica de suscribir algún polígono dentro del círculo. Los papiros incluyen además cálculos exactos o aproximados de algunos volúmenes cúbicos o cilíndricos. Las pirámides egipcias sugieren que los egipcios sabían calcular los volúmenes de esos sólidos geométricos, aunque no disponemos de evidencia concreta. En 1910 el matemático alemán Dehn observó que el cálculo del volumen de una pirámide requiere algún proceso de paso al límite, técnica que los egipcios no disponían. En el Papiro de Moscú se explica que el volumen de una pirámide truncada de base cuadrada puede calcularse con la fórmula

$$\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2),$$

donde a es el lado de la base, b es el lado del techo y h es la altura de la pirámide.

Ejemplo 5.10. Euler en 1770 demostró que $(5,3)$ es la única solución entera de la ecuación $y^3 = x^2+2$. Esta ecuación ya había sido considerada por Diofanto en uno de sus libros, junto con la solución $(5,3)$. Fermat afirmó que $(5,3)$ era la única solución entera de la ecuación, aunque aquella demostración nunca fue publicada.

Para atacar este problema Euler consideró el conjunto

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a+b\sqrt{-2} : a,b \in \mathbb{Z}\}.$$

Al factorizar $y^3 = (x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2})$ obvervó que si los elementos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ fueran como los números enteros, entonces los números $x+\sqrt{-2}$ y $x-\sqrt{-3}$ también serían cubos. En particular, como

$$x+\sqrt{-2} = (a+b\sqrt{-2})^3,$$

para ciertos $a,b \in \mathbb{Z}$, tendríamos entonces

$$x+\sqrt{-2} = a^3 - 6ab^2 + (2a^2b - 2b^3)\sqrt{-2}.$$

Esta igualdad implica entonces que $x = a^3 - 6ab^2$ y que $1 = b(3a^2 - 2b^2)$. De aquí se obtiene inmediatamente que $b \in \{-1,1\}$ y que $3a^2 - 2b^2 \in \{-1,1\}$. En consecuencia, $(5,3)$ es la única solución de la ecuación $y^3 = x^2 + 2$. La demostración de Euler no es del todo correcta, ya que nunca demostró por qué es posible considerar a los elementos del conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ como números que son casi como los enteros.

El argumento de Euler del ejercicio anterior es esencialmente correcto, pero hay cosas que requieren una justificación rigurosa. Más aún, si esta ingeniosa técnica de Euler no es utilizada con cuidado, nos llevará inevitablemente a conclusiones incorrectas. Si consideramos, por ejemplo, que los elementos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ son también números como los números enteros, podríamos "demostrar" entonces que la ecuación $y^2 = x^2 - 5$ no tiene soluciones enteras, algo claramente falso pues $(x,y) = (3,2)$ es una solución.

Los "enteros" de la forma $a+b\sqrt{n}$, donde n es algún entero libre de cuadrados, que mencionamos anteriormente son casos particulares de algo que hoy conocemos bajo el nombre de *enteros algebraicos*. La teoría de estos números fue ampliamente desarrollada entre 1840 y 1850 gracias al trabajo de Dirichlet, Kummer, Eisenstein, Hermite, Kronecker, etcétera. Estos enteros juegan un papel fundamental en la resolución de ciertas ecuaciones diofánticas, y en particular en la ecuación diofántica más famosa: aquella que da lugar el teorema de Fermat.

El teorema de Fermat

Ya sabemos que construir ternas pitagóricas es encontrar soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Esta ecuación puede generalizarse en varias direcciones, una de estas generalizaciones nos lleva al famoso *teorema de Fermat*.

Si bien Fermat hizo muchas contribuciones a la matemática, esta sección se refiere a un resultado "conjeturado" por Fermat en 1637 y demostrado por Wiles en 1995. El teorema afirma que no existen soluciones enteras no triviales de la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

para $n \geq 3$.

El resultado fue escrito por Fermat en los márgenes de una copia de un libro de Diofanto, acompañado por una frase que decía que, en esos márgenes, no había espacio suficiente que pudieran contener la maravillosa demostración que él había encontrado. Durante mucho tiempo muchos matemáticos de gran nombre intentaron en vano demostrar que no existen soluciones no triviales. La lista de nombres es larga: Euler, Legendre, Gauss, Abel, Cauchy, Dirichlet, Lamé, Kummer, Frobenius, Furtwangler, Dickson, etcétera.

Fermat lo demostró en el caso $n = 4$ y para esto utilizó un precursor del principio de inducción conocido como “el método del descenso”. En realidad, Fermat demostró algo un poquito más general. Para demostrar este resultado de Fermat necesitamos primero demostrar el siguiente lema:

lem:cuadrados

Lema 5.11. *Si u y v son enteros coprimos tales que uv es un cuadrado, entonces u y v son también cuadrados.*

Demostración. Escribimos $u = p^{\alpha}m$ donde p es un primo que divide a u y m no es divisible por p. Como $uv = p^{\alpha}t$ para algún entero t no divisible por p y uv es un cuadrado, el exponente α es un número par. Como este razonamiento puede hacerse para cualquier primo que divide a u, se concluye que u es un cuadrado. Análogamente se demuestra que v es también un cuadrado. $\square$

Ahora sí estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado:

Teorema 5.12. *La ecuación $x^4 + y^4 = z^2$ no tiene soluciones enteras positivas.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto. Sean entonces x, y, z enteros positivos tales que $x^4 + y^4 = z^2$, donde entre todas estas posibles ternas nos quedamos con aquella donde z es mínimo entero positivo posible. Como entonces x^2, y^2, z forman una terna pitagórica primitiva, podemos suponer sin perder generalidad que x^2 es impar e y^2 es par, recordemos el ejercicio 1.15. Por el teorema 1.16 sabemos que entonces

$$x^2 = m^2 - n^2, \quad y^2 = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

para ciertos enteros positivos coprimos m, n tales que $m \not\equiv n$ mód 2. La primera fórmula nos dice además que x, n, m es también una terna pitagórica primitiva, y en consecuencia, como x es impar, podemos escribir

$$x = r^2 - s^2, \quad n = 2rs, \quad m = r^2 + s^2$$

para ciertos enteros positivos coprimos r, s tales que $r \not\equiv s$ mód 2. La tercera ecuación es $m = r^2 + s^2$ y nos dice que entonces los enteros r, s y m serán coprimos dos a dos (pues recordemos que r y s son coprimos). Como

$$y^2 = 2mn = 4mrs$$

y los enteros r, s y m son coprimos dos a dos, el lema anterior nos permite demostrar que existen $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que $r = a^2$, $s = b^2$, $m = c^2$. Como $m = r^2 + s^2$,

$$c^2 = a^4 + b^4,$$

donde $c \leq c^4 = m^2 < m^2 + n^2 = z$, una contradicción a la minimalidad de z. $\square$

Ejercicio 5.13. Demuestre que la ecuación $x^4 + y^4 = z^4$ no tiene soluciones enteras positivas.

Ejercicio 5.14. Demuestre que debe demostrarse la afirmación hecha por Fermat solamente en el caso en que el exponente sea un primo impar.

En 1770 Euler dio una demostración incorrecta para el caso $n = 3$. La demostración dada por Euler asume que los números de la forma

$$a + b\sqrt{-3}$$

con a y b enteros, se portan tal como se portan los enteros, cosa que en realidad no es cierta, ya que los elementos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ no admiten factorización única como producto de primos (en $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$). La demostración del caso $n = 3$ puede repararse y eso se hace utilizando ciertas técnicas que aparecen en los trabajos de Euler. Por esa razón, no está del todo mal afirmar que Euler fue el que logró demostrar el caso $n = 3$.

Después de esos primeros resultados no hubo grandes avances sino hasta que apareció Sophie Germain. Ella observó que los primos p tales que $2p+1$ es también un número primo eran relevantes para desarrollar una estrategia que permitiera atacar el problema de Fermat. Hizo varias contribuciones en esta dirección que luego fueron extendidas por Legendre. Para más información sobre los trabajos de Germain sobre el teorema de Fermat referimos a los artículos [18, 33].

Los números primos p tales que $2p+1$ es también un número primo hoy son conocidos como los **primos de Germain**. Los primeros primos de Germain son

$$2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191, 233, 239, 251 \ldots$$

y podemos verlos en la sucesión `A005384`. Hoy en día estos números primos tienen aplicaciones en criprografía. Se conjetura que existen infinitos primos de Germain; el mayor primo de Germain conocido es

$$2618163402417 \times 2^{1290000} - 1,$$

un número de 388342 dígitos. Este primo fue encontrado en febrero de 2016 gracias a un proyecto de cálculo distribuido del que hablaremos en el capítulo sobre números primos.

En 1832 Dirichet, en un intento por atacar el caso $n = 7$, publicó una demostración del caso $n = 14$. El caso $n = 7$ fue finalmente demostrado por Lamé en 1839 con métodos completamente distintos a los de Dirichlet. La dificultad de la demostración encontrada por Lamé contribuyó a alimentar la creencia de que nuevas ideas iban a ser necesarias para lograr atacar el problema de Fermat para exponentes arbitrarios.

En 1847 Lamé anunció haber demostrado el problema de Fermat con total generalidad. Su demostración se basaba en poder factorizar $x^n + y^n$ en factores lineales sobre los números complejos,

$$x^n + y^n = (x+y)(x+\zeta y)(x+\zeta^2 y)\cdots(x+\zeta^{n-1}y),$$

donde ζ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, para luego realizar. Según Lamé, la idea basada en aquella factorización viene de Liouville. Sin embargo, fue Liouville uno de los primeros en observar que para que el argumento de Lamé funcionara correctamente era necesario disponer de resultados de factorización única como producto de primos, cosa que para él en general no siempre existiría. Durante las semanas siguientes muchos matemáticos intentaron demostrar aquella unicidad. Wantzel, por ejemplo, afirmó haber demostrado tal unicidad al mencionar que el resultado era cierto para $n \in \{2,3,4\}$ y que uno fácilmente podría utilizar el mismo argumento para tratar cualquier $n > 4$. Obviamente Wantzel estaba equivocado, recordemos que el error cometido por Euler en el caso $n = 3$ era exactamente suponer una factorización única donde no existe. Poco tiempo después Kummer envió una carta en donde demostraba que la factorización única no siempre es posible: mostró que

$$(4+\sqrt{-5}) \times (4-\sqrt{-5}) = 3 \times 7 = 21$$

permite factorizar al número 21 como producto de “primos” de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ en, al menos, dos formas distintas. Paralelamente Kummer introdujo entonces una nueva teoría para reemplazar los problemas encontrados por culpa de aquella falta de unicidad en la factorización como producto de primos. Esa nueva teoría dio origen a una cierta clase de números primos, los **primos regulares**.

Para esos primos Kummer Kummer resolvió el problema de Fermat. Los primeros primos regulares impares son

$$3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,41,43,47,53,61,71,73\dots$$

y aparecen en la sucesión `A007703`. No se sabe si hay infinitos primos regulares. En 1915 Jensen demostró que hay infinitos primos irregulares (es decir, no regulares). En 1965 Siegel conjeturó que hay infinitos primos regulares y que representan aproximadamente el 60 % del total de los primos.

A mediados del siglo XX la matemática comenzó a transitar ciertos caminos que unos cincuenta años más tarde permitirían resolver con total generalidad el problema de Fermat. En 1983 Faltings demostró que para cada n existen a lo sumo finitas soluciones de la ecuación $x^n + y^n = z^n$, obtuvo esto como consecuencia de haber demostrado una conjetura hecha por Mordell en 1922 sobre la existencia de puntos racionales en curvas. En 1986 Frey observó que la existencia de una terna (a,b,c) de enteros positivos tales que $a^n + b^n = c^n$ podría implicar un fenómeno muy particular, conocido como *no modularidad*, para la curva

$$y^2 = x(x-\alpha)(x-\beta),$$

donde α y β son ciertos enteros que dependen de a y b. Ese fenómeno de no modularidad construido a partir de posibles contraejemplos fue luego demostrado por Ribet en 1990. La no modularidad es, en realidad, imposible, resultado demostrado por Wiles en 1995. Este resultado da entonces una solución completa del problema de Fermat. La demostración es extremadamente difícil y utiliza técnicas sofisticadas pertenecientes a distintas áreas de la matemática.

La ecuación de Pell

En este capítulo veremos un poco de historia sobre una ecuación diofántica muy famosa, la ecuación de Pell:

$$x^2 - Ny^2 = 1. \tag{5.2}$$

eq:Pell

Nos interesan las soluciones enteras, es decir soluciones $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hay soluciones triviales, son $(x,y) = (1,0)$ y $(x,y) = (-1,0)$. Una solución (x,y) de la ecuación (5.2) se dirá positiva si $x > 0$ e $y > 0$. Nos concentraremos entonces en la existencia de soluciones positivas de la ecuación de Pell.

Ejercicio 5.15. Demuestre que si N es un cuadrado, la ecuación (5.2) solo tiene soluciones triviales.

Curiosamente, el matemático inglés Pell nada tiene que ver con esta ecuación. Este error se le atribuye a Euler, que creyó que un cierto método que permite resolver (5.2) era de Pell cuando en realidad había sido descubierto por el matemático inglés Brouncker. La historia de la ecuación de Pell es muy rica e interesante. Aquí veremos solamente algunos puntos importantes y algunos resultados básicos. El lector interesado en más detalles puede consultar el libro de Weil [51] o el segundo volumen del tratado de Dickson [21].

Podemos encontrarnos a la ecuación de Pell o ecuaciones similares en India y Grecia, donde se logró conseguir aproximaciones racionales para ciertas raíces cuadradas gracias a soluciones de la ecuación de Pell. Cerca del año 400 a.C., el matemático indio Baudhāyana consigue aproximar al número $\sqrt{2}$ con las fracciones $17/12$ y $577/408$. Observemos que

$$17^2 - 2 \times 12^2 = 1, \quad 577^2 - 2 \times 408^2 = 1.$$

Siglos después Arquímedes observó que el irracional $\sqrt{3}$ puede aproximarse con los racionales $265/153$ y $1351/780$. Observar que

$$265^2 - 3 \times 153^2 = -2, \quad 1351^2 - 3 \times 780^2 = 1.$$

Veremos que esta conexión entre la aproximación de irracionales y la ecuación de Pell resultará de fundamental importancia a la hora de entender cómo pueden construirse soluciones de esta famosa ecuación.

Se cree que Fermat tenía una demostración de que la ecuación de Pell siempre tiene solución en los enteros positivos; de hecho, en una carta desafió a otros matemáticos a que intentaran al menos resolver las ecuaciones de Pell con $N = 61$ y $N = 109$. Euler se interesó en la ecuación de Pell al preguntarse qué relaciones podían existir entre distintos números poligonales. Entre 1766 y 1769 Lagrange trabajó con esta ecuación y fue el primero en demostrar que la ecuación de Pell tiene soluciones no triviales siempre que N no sea un cuadrado perfecto.

Ejemplo 5.16. Los números que son simultáneamente cuadrados y triangulares se corresponden con soluciones de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$. En efecto, si n es triangular y es además un cuadrado, podemos escribir

$$\frac{k(k+1)}{2} = l^2$$

para $k, l \in \mathbb{N}$, y esta última fórmula es equivalente a $(2k+1)^2 - 2(2l)^2 = 1$.

Fermat sabía que la ecuación $x^2 - 61y^2 = 1$ es particularmente difícil de resolver. La solución (x, y) con el menor positivo entero positivo y es

$$(x, y) = (1766319049, 226153980).$$

Ejercicio 5.17. Demuestre que si (x, y) es una solución de la ecuación de Pell, entonces $(x^2 + Ny^2, 2xy)$ es también una solución de la ecuación de Pell.

Ejercicio 5.18. Demuestre que si la ecuación de Pell tiene al menos una solución no trivial, entonces tendrá infinitas soluciones.

Veamos cómo fue que los matemáticos indios pudieron resolver esta ecuación. En el año 628 Brahmagupta resolvió la ecuación de Pell para muchos N pero no para todos. En el siglo IX Jayadeva mejoró el método de Brahmagupta y concibió el “método cíclico”. Este método fue perfeccionado en el siglo XII por Bhaskara II.

El “método cíclico” funciona de la siguiente manera. Diremos que (a, b, N) es una **terna de Pell** si $a^2 - Nb^2 = 1$. La identidad de Brahmagupta,

$$(x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2, \tag{5.3}$$

eq:brahmagupta

entonces, nos permite combinar las ternas (x_1, y_1, k_1) y (x_2, y_2, k_2) en una nueva terna $(x_1x_2 + Ny_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1, k_1k_2)$ para todo N. En particular, si (a, b, k) es una terna de Pell, podemos combinarla con cualquier $(m, 1, m^2 - N)$ para obtener la ternas de Pell de la forma $(am + Nb, a + bm, k(m^2 - N))$.

Ejercicio 5.19. Demuestre la identidad (5.3) de Brahmagupta.

Sea (a, b) una solución de $x^2 - Ny^2 = k$, donde a y b son coprimos y k es algún número entero cualquiera. Elegiremos este k de forma que sea fácil conseguir a y b. Lo que dijimos antes implica que

$$\left(\frac{am+Nb}{k}\right)^2 - N\left(\frac{a+bm}{k}\right)^2 = \frac{m^2-N}{k} \tag{5.4}$$

eq:Pell_inductive

para todo $m \in \mathbb{N}$. Si elegimos m para que $\frac{a+bm}{k}$ sea un entero y que minimice la expresión $m^2 - N$, tenemos una nueva solución a otra ecuación de Pell. Podemos entonces repetir este procedimiento tantas veces como sea necesario hasta obtener una ecuación de Pell de la forma $a^2 - Nb^2 = 1$. ¡Resolvimos entonces la ecuación original!

Ejercicio 5.20. Encuentre soluciones para $x^2 - 14^2 = 1$ con el método cíclico.

Otro método que permite resolver la ecuación de Pell es el método de Lagrange, que fue reformulado por Euler en términos de fracciones continuas. Veamos cómo funciona el método por fracciones continuas en el caso

$$x^2 - 14y^2 = 1. \tag{5.5}$$

eq:Pell14

Primero calculamos la fracción continua que representa a $\sqrt{14}$, que será periódica con período igual a cuatro:

$$\sqrt{14} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3+\sqrt{14}}}}}.$$

El método explica cómo proceder en caso de que el período sea par o impar. En nuestro caso, debemos trucar esta aproximación al final del primer período. Obtenemos así una buena aproximación racional para $\sqrt{14}$,

$$\sqrt{14} \sim 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{15}{4}.$$

Esta fracción nos da además la solución $(x_1, y_1) = (15, 4)$ de la ecuación (5.5). Podemos conseguir otras soluciones al calcular

$$x_n + y_n\sqrt{14} = (x_1 + y_1\sqrt{14})^n.$$

Es interesante observar que la fórmula anterior nos permite definir recursivamente soluciones de la ecuación de Pell:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_1 x_k + N y_1 y_k, \\ y_{k+1} &= x_1 y_k + N y_1 x_k. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.21. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si (r,s) es una solución de la ecuación de Pell y el par (u,v) está dado por la fórmula

$$u + v\sqrt{N} = (r + s\sqrt{N})^n,$$

entonces (u,v) es solución de la ecuación de Pell.

Vimos en el capítulo sobre números irracionales que Dirichlet demostró que si α es un número irracional, existen infinitos números racionales p/q tales que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Este resultado le permitió a Dirichlet en 1842 obtener una demostración alternativa de aquel resultado demostrado por Lagrange, que nos dice que la ecuación de Pell siempre admite una solución no trivial.

Para demostrar esto, primero comenzaremos con un lema que utiliza una versión infinita del *principio del palomar*: si infinitos elementos se distribuyen en un número finito de cajas, entonces alguna caja contendrá infinitos elementos.

Lema 5.22. *Sea N un entero que no es un cuadrado. Existe entonces un entero k con $|k| < 2\sqrt{N} + 1$ tal que la ecuación*

$$x^2 - Ny^2 = k$$

admite infinitas soluciones enteras.

Demostración. Como $\alpha = \sqrt{N}$ es un número irracional, el teorema de Dirichlet nos permite encontrar una cantidad infinita de racionales p/q tales que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Como entonces

$$\frac{p}{q} < \alpha + \frac{1}{q^2} < \alpha + 1,$$

tenemos

$$|p^2 - Nq^2| = q^2 \left|\sqrt{N} - \frac{p}{q}\right| \left|\sqrt{N} + \frac{p}{q}\right| < q^2 \frac{1}{q^2} \left|\sqrt{N} + \frac{p}{q}\right| < 2\sqrt{N} + 1.$$

En particular, esto nos dice que la expresión $|p^2 - Nq^2|$ solamente tomará una cantidad finita de valores, y estos valores serán enteros k tales que

$$-2\sqrt{N} - 1 < k < 2\sqrt{N} + 1.$$

Estamos en condiciones entonces de utilizar la variante del principio del palomar que mencionamos anteriormente: tenemos infinitos racionales p/q y finitos k tales que $|p^2 - Nq^2| = k$. En consecuencia, existirá algún k tal que infinitas fracciones p/q satisfacen $|p^2 - Nq^2| = k$. □

Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]$ de números de la forma $u + v\sqrt{N}$ donde u y v son números enteros. Para cada $\alpha = u + v\sqrt{N} \in \mathbb{Z}[\sqrt{N}]$ definimos su norma como $N(\alpha) = u^2 - Nv^2$.

xca:Pell **Ejercicio 5.23.** Demuestre que si $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{N}]$ y $N(\alpha) = 1$, entonces $\alpha^{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{N}]$. Más generalmente, si $\alpha = u + v\sqrt{N}$, entonces

$$\alpha^{-1} = \frac{u - v\sqrt{N}}{N(\alpha)}.$$

Ejercicio 5.24. Demuestre si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{N}]$, entonces $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

Los ejercicios anteriores resultarán de gran utilidad a la hora de resolver la ecuación de Pell. Nos permiten, además, entender conceptualmente la identidad de Brahmagupta (5.3).

Teorema 5.25 (Lagrange). *Sea N un entero que no es un cuadrado. La ecuación $x^2 - Ny^2 = 1$ admite al menos una solución positiva.*

Demostración. Gracias al lema anterior sabemos que existe k tal que la ecuación $x^2 - Ny^2 = k$ tiene infinitas soluciones. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos soluciones distintas de esta ecuación. Podemos suponer sin perder generalidad que $x_1 \equiv x_2 \mod |k|$ y que $y_1 \equiv y_2 \mod |k|$ (pues existen k^2 posibilidades para elegir x e y módulo $|k|$ y existen infinitas soluciones). Para cada $i \in \{1, 2\}$ sea

$$\alpha_i = x_i + \sqrt{N} y_i.$$

Sea $\beta = \alpha_1 \alpha_2^{-1}$. Calculamos

$$u^2 - Nv^2 = N(\beta) = N(\alpha_1 \alpha_2^{-1}) = N(\alpha_1) N(\alpha_2)^{-1} = 1$$

y observamos que si podemos demostrar que $u, v \in \mathbb{Z}$, entonces (u, v) será una solución de la ecuación de Pell. Veamos que efectivamente $u, v \in \mathbb{Z}$. Calculamos

$$\beta = (x_1 + y_1\sqrt{N}) \frac{x_2 - y_2\sqrt{N}}{k} = \frac{x_1x_2 - Ny_1y_2}{k} + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{k}\sqrt{N},$$

y vemos entonces que

$$u = \frac{x_1x_2 - Ny_1y_2}{k}, \quad v = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{k}\sqrt{N}.$$

Como sabemos que $x_1 \equiv x_2 \mod |k|$ e $y_1 \equiv y_2 \mod |k|$, tenemos que

$$x_1x_2 - Ny_1y_2 \equiv x_1^2 - Ny_1^2 \equiv 0 \mod |k|, \quad x_1y_2 - x_2y_1 \equiv 0 \mod |k|.$$

Veamos que la solución que encontramos es no trivial: si $(u,v) = (1,0)$, entonces $1 = \beta = \alpha_1\alpha_2^{-1}$ y luego $\alpha_1 = \alpha_2$, una contradicción. □

Lo que vimos sobre la ecuación de Pell nos permite entonces demostrar el siguiente resultado, obtenido por Lagrange. Ya vimos que la ecuación de Pell

$$x^2 - Ny^2 = 1$$

siempre admite al menos una solución no trivial. Definimos entonces a la **solución fundamental** de la ecuación de Pell como aquella solución (r,s) donde s es el menor entero positivo posible, es decir que vale $0 < s < v$ para toda solución (u,v) de enteros positivos de la ecuación de Pell.

Teorema 5.26 (Lagrange). *Si (r,s) es la solución fundamental de la ecuación de Pell, entonces toda solución de la ecuación de Pell puede escribirse como (a,b), donde*

$$a + b\sqrt{N} = (r + s\sqrt{N})^k$$

para algún entero positivo k.

Demostración. Si suponemos que el resultado no es cierto, existirá un entero positivo k tal que

$$(r + s\sqrt{N})^k < a + b\sqrt{N} < (r + s\sqrt{N})^{k+1}.$$

Como $N(r + s\sqrt{N}) = r^2 - Ns^2 = 1$, el ejercicio 5.23 nos dice que

$$(r + s\sqrt{N})^{-k} = (r - s\sqrt{N})^k,$$

y esto nos permite reescribir la desigualdad anterior como

$$1 < (a + b\sqrt{N})(r + s\sqrt{N})^{-k} < r + s\sqrt{N}.$$

Sea $\alpha = u + v\sqrt{N} = (a + b\sqrt{N})(r + s\sqrt{N})^{-k}$. Entonces (u,v) es una solución de la ecuación de Pell pues

$$\begin{aligned} u^2 - Nv^2 &= N(u + v\sqrt{N}) \\ &= N(a + b\sqrt{N})N(r + s\sqrt{N})^{-k} \\ &= (a^2 - b^2\sqrt{N})(r^2 - s^2\sqrt{N})^{-k} = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\alpha^{-1} = u - v\sqrt{N}$, entonces $0 < u - v\sqrt{N} < 1$. Como además $1 < u + v\sqrt{N}$, tenemos entonces que u y v son ambos positivos pues

$$\begin{aligned} 2u &= (u + v\sqrt{N}) + (u - v\sqrt{N}) > 1 + 0 > 0, \\ 2v\sqrt{N} &= (u + v\sqrt{N}) - (u - v\sqrt{N}) > 1 + (-1) = 0. \end{aligned}$$

Por la minimalidad de (r,s), tenemos que $u \geq r$, pero entonces $u < r$ pues

$$u + s\sqrt{N} \leq u + v\sqrt{N} < r + s\sqrt{N}.$$

Esto implica que $v < r$ pues

$$v^2 = \frac{u^2-1}{N}, \quad s^2 = \frac{r^2-1}{N},$$

una contradicción. $\square$

Terminaremos la sección con una historia muy interesante que involucra a Arquímedes. Un bibliotecario de nombre Lessing encontró, en agosto 1773, en una biblioteca de Wolfenbüttel, Alemania, un manuscrito que contenía una carta dirigida a Eratóstenes. El manuscrito, escrito en forma de poema, plantea el problema de calcular el número de reses del mitológico rebaño de Sol, citado en la Odisea, sabiendo que está sujeto a un conjunto de restricciones. El problema involucra resolver un caso particular de la ecuación de Pell. El enunciado, según Wikipedia, es más o menos así:

> El dios sol tenía un rebaño formado por un cierto número de toros blancos, negros, moteados y amarillos, así como vacas de los mismos colores. De tal forma que: El número de toros blancos es la mitad y la tercera parte de los negros más los amarillos. El número de toros negros es igual a la cuarta más la quinta parte de los moteados más los amarillos. El número de toros moteados es igual a la sexta más la séptima parte de los blancos más los amarillos. El número de vacas blancas es igual a un tercio más un cuarto de la suma de los toros negros y las vacas negras. El número de vacas negras es igual a la cuarta parte más la quinta aparte de la suma de los toros moteados más las vacas moteadas. El número de vacas moteadas es igual a la quinta más la sexta parte de la suma de los toros amarillos más las vacas amarillas. El número de vacas amarillas es igual a la sexta más la séptima parte de la suma de los toros blancos más las vacas blancas. La suma de los toros blancos y negros es un número cuadrado. La suma de los toros moteados y amarillos es un número triangular.

Las últimas dos oraciones hacen que el problema sea particularmente difícil e involucre a la ecuación de Pell. Hoy en día este problema se conoce como el *problema del ganado de Arquímedes* y requiere resolver la ecuación

$$x^2 - 410286423278424y^2 = 1.$$

La primera solución al problema fue encontrada por Amthor en 1880. Amthor no pudo calcular con exactitud estos números sino apenas conocer algunos de sus dígitos. Estos números fueron encontrados en 1965 gracias al uso de computadoras. Para más información sobre este interesante problema referimos a los artículos [5, 34, 43, 49, 50].

Inducción matemática

El método de Bhaskara nos sugiere cierta conexión con la inducción matemática que comunmente utilizamos en algunas demostraciones. Y ya que mencionamos la inducción matemática, este parece ser un buen momento para hacer algunos comentarios sobre las demostraciones por inducción.

Nos basaremos en el artículo [15].

Las demostraciones por inducción aparecen independiente en trabajos de Pascal, Fermat y Maurolycus, aunque no siempre presente de la forma en la que hoy la conocemos. Por ejemplo, en los trabajos de Fermat aparece bajo una técnica que hoy conocemos como "método del descenso". Un proceso similar al descenso de Fermat había sido usado por Campanus en su demostración de la irracionalidad del número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en su edición de los elementos de Euclides del año 1260. Ninguno de los matemáticos que utilzaron técnicas de demostración similares a la inducción consideraron necesario asignarle un nombre especial. Wallis es uno de los primeros matemáticos en utilizar oraciones como "proceder por inducción", aunque usaba una inducción incompleta. Por ejemplo, en su libro de 1656, para demostrar que

$$\frac{1+4+9+\cdots+n^2}{(n+1)n^2} > \frac{1}{3}$$

calcula los primeros seis casos y afirma que esos casos son suficiententes para entender qué pasa para otros valores de n. Jakob Bernoulli intenta en 1686 mejorar la técnica de Wallis y considera necesario agregar el argumento que permite pasar del caso n al caso $n+1$. Bernoulli no consideró necesario asignarle un nombre especial a este procedimiento. En un libro póstumo publicado en 1713 demuestra el teorema del binomio por inducción y lo hace con las mejoras que introdujo anteriormente. Durante muchos de los años siguientes los matemáticos utilizaron las técnicas de inducción de Wallis y de Bernoulli indistintamente. A principios del siglo XVII varios diccionarios hablan de la inducción en matemática y mencionan el teorema del binomio como un ejemplo de aplicación. En un diccionario matemático publicado en 1814 Barlow da una definición formal del proceso de inducción:

> Induction is a term used by mathematicians to denote those of any law, or form, is inferred cases in which the generality from observing it to have obtained in several cases. Such inductions, however, are very deceptive, and ought to be admitted with the greatest caution.

En 1830, el matemático inglés Peacock considera la inducción tal como fue concebida por Bernoulli y la llama "inducción demostrativa". A partir de ese momento la comunidad matemática poco a poco comienza a aceptar la noción de inducción dada Bernoulli y olvida la inducción incompleta de Wallis. En 1838, De Morgan publicó un artículo sobre la inducción y la denominó "inducción matemática". Muchos autores de libros de texto popularizaron estos nombres. El famoso tratado sobre álgebra de Chrystal, por ejemplo, utiliza "inducción matemática". Con el tiempo, esta terminología ganó terreno y poco a poco la comunidad olvidó el nombre sugerido por Peacock.

Capítulo 6
El infinito

Según dicen Rey Pastor y Babini en [42], las consideraciones de índole infinitesimal son casi tan antiguas como la matemática, ya que podremos encontrar rastros del uso de los métodos infinitesimales en todas las etapas de la evolución matemática. A lo largo de este capítulo, entonces, intentaremos mostrar algunas de las distintas manifestaciones que hace el infinito en el pensamiento matemático.

Ya vimos que los griegos no estaban del todo cómodos con la idea del infinito y que vieron necesario evitarlo y lograron establecer ciertas bases que les permitieran tratar el infinito de forma más o menos rigurosa. Vimos que el descubrimiento de los irracionales generó graves problemas en el pensamiento matemático de aquella época.

Por Aristóteles conocemos las paradojas de Zenón, aproximadamente del año 450 a. C. Estas paradojas son argumentos contra algunas ideas pitagóricas, ya que muestran que la concepción de los cuerpos como suma de puntos, o del tiempo como suma de instantes, lleva a contradicciones.

Una de las paradojas, la de Aquiles y la tortuga, nos muestra que el veloz corredor nunca alcanzará a la lenta tortuga, sin importar qué tan escasa sea la distancia que los separe, ya que cuando el corredor haya recorrido aquella distancia y llegue donde estaba la tortuga, esta habrá ya avanzado un poco. Y cuando el corredor llegue allí, la tortuga habrá avanzado incluso un poco más, y cuando el corredor... y así sucesivamente.

Otra de las paradojas de Zenón, la paradoja de la dicotomía, nos muestra que para que alguien pueda caminar desde un lugar a otro, deberá recorrer primero la mitad de la distancia entre estos dos lugares, pero antes de recorrer la mitad de esta distancia deberá recorrer un cuarto de esta distancia, pero antes deberá recorrer una octava parte de esta distancia... y así sucesivamente.

La tercera de las paradojas, conocida como la paradoja de la flecha, se nos presenta una flecha en vuelo y se nos hace observar que en cada instante de tiempo no se produce movimiento alguno. Si todo está inmóvil en cada instante y el tiempo está compuesto de instantes, entonces el movimiento es imposible.

Sin entrar en detalles vemos claramente que el manejo poco cuidadoso del infinito es algo muy peligroso. Quizá estos argumentos de Zenón hicieron entonces que algunos de los matemáticos griegos posteriores intentaran evitar toda manipulación más o menos inocente que involucrara el infinito.

En 1906 se encontró un tratado de Arquímedes donde podemos ver cómo es que Arquímedes logró descubrir muchos de sus teoremas. El método muestra que muchos de los profundos resultados de Arquímedes fueron encontrados gracias al uso de argumentos dudosamente rigurosos que involucraban al infinito; las demostraciones rigurosas de aquellos resultados venían después. El método de Arquímedes es más o menos similar a esa idea que hoy conocemos como el princpio de Cavallieri.

Eudoxo fue uno de los matemáticos griegos que trabajó para que pudiera comprenderse y utilizarse correctamente la idea del infinito. Su teoría de las proporciones, aproximadamente del año 350 a.C. y explicada en el libro V de los Elementos de Euclides, permite tratar, gracias al uso de números racionales, como números a cantidades geométricas tales como longitudes de segmentos. Como vimos, los griegos no aceptaban números irracionales pero sí aceptaban cantidades geométricas irracionales. Sorprendentemente, la idea de Eudoxo puede usarse para definir números irracionales pero la matemática tardó unos dos mil años en desarrollar rigurosamente a los números reales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ quedará determinado por dos conjuntos de números racionales positivos, $\{r \in \mathbb{Q}_{>0} : r^2 < 2\}$ y $\{r \in \mathbb{Q}_{>0} : r^2 > 2\}$. Dedekind definió entonces en 1872 al número $\sqrt{2}$ como este par de conjuntos. Como nos dice Stillwell, la idea de las cortaduras de Dedekind es una "vuelta de tuerca" de aquella idea de Eudoxo.

Más tarde Eudoxo concibió una generalización de su teoría de las proporciones, hoy conocida como el método exhaustivo. En el libro XII de los Elementos de Euclides nos encontramos con aproximaciones por polígonos para el círculo y aproximaciones para una pirámide.

Arquímedes llevó el método de exhaustivo de Eudoxo hacia el máximo nivel de madurez y logró calcular volumen y área de la esfera y el área debajo de un segmento parabólico. Para el área debajo de la parábola la idea de Arquímedes se basa en la construcción de una sucesión infinita de triángulos cuya suma de áreas es igual a

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{4}{3}.$$

Este es además el primer ejemplo del cálculo de la suma de una serie infinita. Arquímedes, sin embargo, no usó series infinitas, aunque las series aparezcan de alguna forma en el libro IX de Euclides en su teorema sobre números perfectos.

El método de Arquímedes no funciona siempre. Por ejemplo, no puede usarse para calcular el área debajo de la curva $\frac{1}{x}$. Hoy sabemos que esto se debe a que la función $\log(x)$ no puede expresarse mediante funciones elementales.

Si bien las series infinitas aparecieron en Grecia, hay que mencionar que en aquellos tiempos se pretendía trabajar con sumas finitas arbitrarias

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

y no con sumas infinitas como

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

En la matemática griega aparecen algunas sumas infinitas tales como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

en los trabajos de Zenón y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$$

en el cálculo de Arquímedes del área bajo un segmento parabólico. Ambas expresiones son casos particulares de la fórmula para la serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r},$$

válida para todo r tal que $|r| < 1$.

En 1350 aparece por primera vez una serie infinita no geométrica, donde Suiseth considera la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2,$$

Esta fórmula fue encontrada independientemente y demostrada geométricamente por Oresme, también en 1350. Ese mismo año Oresme demostró que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge. La demostración de Oresme es precisamente esa bonita demostración que hoy vemos en nuestros cursos de cálculo:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ & > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

En el siglo XVI el matemático portugués Tomas calculó con exactitud la suma de algunas series convergentes tales como

$$1 + \frac{7}{4}\frac{1}{2} + \frac{11}{8}\frac{1}{4} + \frac{19}{16}\frac{1}{8} + \cdots = \frac{5}{2}, \qquad 1 + \frac{4}{2}\frac{1}{2} + \frac{7}{6}\frac{1}{4} + \frac{13}{12}\frac{1}{8} + \cdots = \frac{20}{9}.$$

Aproximó además otras series convergentes. Mostró, por ejemplo, que la suma

$$1+\frac{2}{1}\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\frac{1}{8}+\cdots$$

es un número acotado entre 2 y 4. El valor real de esta suma puede calcularse y es igual a $2+\log 2=2,693\ldots$

Unos años más tarde comenzaron a considerarse series de potencias. Mercator encontró en 1668 la fórmula

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Obtuvo esa fórmula al integrar término a término la expresión

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

El cálculo. . .

Para Newton, el cálculo es el álgebra de los polinomios infinitos. Para Leibniz, el álgebra de los infinitesimales. De hecho, la derivada

$$\frac{dy}{dx}$$

es el cociente entre el infinitesimal dy y el infinitesimal dx y la integral

$$\int f(x)dx$$

es la suma de los infinitesimales $f(x)dx$.

El cálculo fue extremadamente exitoso ya que permitió reemplazar complicados cálculos que involucran el método exhaustivo por cálculos de rutina más o menos sencillos.

La idea de integración aparece al intentar aproximar el área debajo de las curvas $y=x^k$ por rectángulos. Los árabes, cerca del año 1000, lograron calcular la suma

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$$

para $k\in\{1,2,3,4\}$ y con esto pudieron calcular el volumen de un cierto sólido de revolución. Cavalieri extendió estos resultados hasta $k=9$ en el año 1635 y con esto logró calcular

$$\int_0^a x^k dx=\frac{a^{k+1}}{k+1}$$

para todo $k\in\{1,\ldots,9\}$, resultado que lo indujo a conjeturar que la fórmula era válida para todo entero positivo k. Fermat, Descartes y Rooberval demostraron aquella conjetura de Cavalieri alrededor de 1630. Fermat incluso observó que aquella fórmula era válida incluso si k era un número racional. Cavalieri introdujo lo que hoy llamamos el *principio de Cavalieri*, que suele verse en nuestros cursos de cálculo. La idea de este principio es similar a la idea de Arquímedes encontrada recién en

1906. Curiosamente, Torricelli, contemporáneo de Cavalieri, especulaba que la idea detrás del principio de Cavalieri, era ya conocida por los griegos. Con esta idea, en 1644, calculó el área de una parábola esencialmente de la misma forma en que lo había hecho Arquímedes. Demostró en 1643 que la superficie de revolución obtenida al rotar $y = 1/x$ alrededor del eje x, con $x > 1$, tiene volumen finito y superficie infinita. dibujito

La diferenciación vino después, aunque hoy en día, en los cursos de cálculo suele verse antes, ya que se considera más fácil de entender que la integración. Arquímedes calculó la recta tangete de la espiral que vemos en la figura… espiral pero este es el único ejemplo de un cálculo de esos que hoy expresaríamos como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

cálculo introducido por Fermat en 1629, y publicados muchoh tiempo después, en 1679, en el caso en que $f(x)$ es un polinomio y utilizado para encontrar extremos y tangentes de las curvas definidas por polinomios. Stillwell nos muestra con un ejemplo cómo hacía Fermat para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2$ es igual a $2x$. Primero debe considerarse la cuerda que une los puntos (x, x^2) y $(x+E, (x+E)^2)$, donde E es una cantidad no determinada, un "elemento infinitesimal" que cuando sea necesario será igual a cero. Se calcula entonces

$$\frac{(x+E)^2 - x^2}{E} = \frac{2xE + E^2}{E} = 2x + E.$$

En aquellos tiempos aquel argumento generó mucha controversia, ya que se asumía que $2x + E = 2x$ y simultáneamente $E \neq 0$. Hoy sabemos que lo que pasa es que

$$\lim_{E \to 0} (2x + E) = 2x,$$

algo que en aquellos tiempos no se sabía. El método funcionaba perfectamente para polinomios de una variable y pudo adaptarse para curvas dadas por la ecuación $p(x,y) = 0$, donde $p(x,y)$ es un polinomio de dos variables.

Nos toca hablar del cálculo de Newton y Leibniz. Inevitablemente entonces nos encontraremos con series infinitas.

En 1593 Vieta publicó la primera expresión convergente de un producto infinito que involucra al número π:

$$\frac{2}{\pi} = \cos(\pi/4)\cos(\pi/8)\cos(\pi/16)\cdots \tag{6.1}$$ eq:Vieta

Vieta parte de la expresión del perímetro p de un polígono regular de 2^{n-1} lados. Gracias a la fórmula

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2), \tag{6.2}$$ eq:sin(2x)

observa que

$$\frac{4}{p} = \cos(\pi/4)\cos(\pi/8)\cos(\pi/16)\cdots\cos(\pi/2^{n-1}).$$

Al pasar del polígono a la circunferencia, se obtiene la fórmula que buscamos. Euler generalizó esta expresión al observar que la fórmula (6.2) implica que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2^n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

algo que a su vez implica que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots$$

Al evaluar esta última fórmula en $x = \pi/4$ obtenemos la fórmula (6.1).

Ejercicio 6.1. Demuestre que la fórmula (6.1) puede reescribirse como aquella fórmula que vimos en la página 27:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

Wallis escribió en 1655 un libro de texto donde intentó sistematizar el cálculo de áreas y volúmenes. Demostró, por ejemplo, que

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

para p un entero positivo, al observar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^p + 1^p + \cdots + n^p}{n^p + n^p + \cdots + n^p} = \frac{1}{p+1}.$$

Calculó además

$$\int_0^1 x^{m/n} dx$$

con nuevas técnicas. Su forma de trabajar con los infinitesimales era algo ambigua y este no era el único problema que nuestro rigor matemático encontraría en el trabajo de Wallis. Su uso de la inducción era algo deficiente, ya que Wallis se contentaba con mostrar que una cierta propiedad era válida en los primeros casos. Otra de las fórmulas demostradas por Wallis es la siguiente:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\cdots \tag{6.3}$$

eq:Wallis

En el libro de Wallis aparece una consecuencia de la fórmula (6.3) encontrada por Brouncker:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}} \tag{6.4}$$

eq:Brouncker

Euler observó que a partir de la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots, \tag{6.5}$$

eq:Leibniz

que vimos en la página 28 podemos obtener la fracción continua (6.4). Primero observemos que vale la siguiente fórmula

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1^2}{a_2 - a_1}}.$$

Esta misma fórmula implicará entonces que vale la siguiente fórmula

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1^2}{a_2 - a_1 + \cfrac{a_2^2}{a_3 - a_2}}}$$

Al continuar con este procedimiento obtendremos una expresión que nos permitirá reemplazar a nuestra suma alternada por una fracción continua.

Teorema 6.2 (Leibniz).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Demostración. Partimos de la fórmula

$$\frac{1-t^n}{1-t} = 1 + t + \cdots + t^{n-1},$$

que puede escribirse como

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \cdots + t^{n-1} + \frac{t^n}{1-t}.$$

Esta fórmula en el caso $t = -x^2$ nos dice que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Integramos esta igualdad entre 0 y 1 y obtenemos

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+T_n,$$

donde

$$T_n=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx.$$

Para terminar la demostración debemos ver que $\lim\limits_{n\to\infty}|T_n|=0$. Para eso primero observamos que, como $0\le x\le 1$, entonces

$$\frac{x^{2n}}{1+x^2}\le x^{2n}.$$

Al integrar esta última desigualdad, tenemos

$$|T_n|=\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\le\int_0^1 x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1},$$

y entonces $|T_n|\to 0$ si $n\to\infty$. □

El cálculo de Newton dependía principalmente de la manipulación de series infinitas. Si entendemos al cálculo como el álgebra de las series infinitas, entonces Newton es sin duda uno de sus fundadores. Mercator demostró en 1668 que

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Newton descubrió esa misma fórmula independientemente en 1665 junto con expresiones similares para $\arctan x$, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Para realizar estos cálculos primero expresaba la función como una serie para luego integrar esta serie término a término. Veamos un ejemplo:

$$\begin{aligned}\arctan x&=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}\\&=\int_0^x(1-t^2+t^4-t^6+\cdots)dt\\&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\end{aligned}$$

Gracias a ser capaz de invertir series infinitas, Newton también logró encontrar la expresión

$$\log(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

Este procedimiento fue correctamente justificado por De Moivre en 1698. En 1669 Newton encontró una fórmula aún más sorprendente: ...

Leibniz publicó el primer trabajo sobre el cálculo en 1684. Los trabajos de Newton fueron inicialmente rechazados para su publicación... Disputa entre Newton y

Leibniz. No queremos meternos en este asunto y referiremos a ... para el lector interesado en conocer más sobre aquella pelea.

Según Stillwell no hay duda: ambos descubrieron el cálculo en forma independiente. La notación utilizada por Leibniz era amejor que aquella de Newton y eso hizo que... Leibniz introdujo la notación que hoy en día utilizamos para derivadas y para integrales y encontró las reglas para calcular la derivada de una suma, un producto y un cociente de funciones. Demostró además lo que hoy conocemos como el teorema fundamental del cálculo, que Leibniz escribía como

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

Newton ya conocía este resultado. Más aún, al menos de forma geométrica, este resultado era también conocido por Barrow, uno de los profesores de Newton.

Leibniz prefería expresiones cerradas para las series infinitas y para evaluar la integral de una función $f(x)$ necesitaba una función cuya derivada fuera la función $f(x)$.

Johann Bernoulli hizo aportes significativos al cálculo de Newton y Leibniz. En 1696 publicó el primer libro de texto sobre el tema, aunque el libro fue publicado bajo el nombre de su estudiante L'Hopital, se cree que para agradecerle la ayuda económica que L'Hopital le había brindado. Bernoulli y Leibniz conocían la diferenciación parcial pero mantuvieron ese resultado en secreto por unos veinte años, ya que lo consideraban un arma secreta que les permitía atacar problemas sobre curvas. Encontró la expresión

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$$

Los métodos poco rigurosos que involucran la manipulación de series hoy pertenecen a la teoría de funciones generatrices. Este concepto fue introducido por De Moivre en 1730 (1728 bernoulli) y fue utilizado para encontrar una fórmula cerrada para la sucesión de Fibonacci. Recordemos que la sucesión de Fibonacci se define recursivamente mediante

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Sin preocuparnos por la convergencia, consideremos la serie infinita

$$f(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots$$

Como $xf(x) = F_0 x + F_1 x^2 + \cdots$ y además $x^2 f(x) = F_0 x^2 + F_1 x^3 + \cdots$, podemos escribir

$$f(x)(1 - x - x^2) = F_0 + F_1 x - F_0 x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + \cdots$$

Pero como los coeficientes de la serie que vemos en el miembro de la derecha son todos cero salvo el primero, nos queda que

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Al observar que

$$1-x-x^2 = (-1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

podemos obtener una fórmula cerrada para en n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Ejercicio 6.3. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ejercicio 6.4. Utilice la fórmula

$$\frac{1}{1+\dfrac{F_n}{F_{n+1}}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

para encontrar una fracción continua para el número $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Capítulo 7
Números complejos

Para repasar algunos aspectos históricos sobre los números complejos nos basaremos en el artículo [26]. En un libro escrito por Herón alrededor del año 75 nos encontramos con un cálculo que involucra el número $\sqrt{81-144}$. Para "resolver" este cálculo Herón hace lo siguiente:

$$\sqrt{144-81} = \sqrt{63} \sim 7\frac{15}{16}.$$

Observemos que la aproximación racional para $\sqrt{63}$ es bastante buena. No sabemos, sin embargo, si el problema de signo que vemos en la raíz es culpa de Herón o de la persona a cargo de copiar el libro. En cualquier caso, esta parece ser la primera aparición del problema que presenta intentar calcular la raíz cuadrada de un número negativo.

En los libros de Diofanto podemos encontrarnos con el siguiente problema. Se quiere construir un triángulo rectángulo de área igual a 7 y perímetro igual a 12. Se quiere resolver entonces

$$\frac{1}{2}xy = 7, \quad x^2+y^2 = (12-x-y)^2.$$

Diofanto no resuelve el problema pero observa que tendrá solución solamente si $(172/2)^2 \geq 24\times 336$. Un cálculo sencillo nos muestra que

$$x = \frac{43\pm\sqrt{-167}}{12},$$

por lo que queda más o menos claro que Diofanto vio al menos una parte del problema.

Muchos años después, alrededor del año 1100, nos encontramos con menciones explícitas del problema o la imposibilidad de calcular raíces cuadradas de números negativos.

En un libro publicado en 1494 el matemático italiano Luca Pacioli observó que la ecuación $x^2+c=bx$ puede resolverse solamente si $\frac{1}{4}b^2 \geq c$, algo que deja en claro la imposibilidad de calcular raíces cuadradas de números negativos. Más o menos por la misma época, en 1484, el matemático francés Chuquet también observó esta imposibilidad en un manuscrito que nunca fue publicado.

En su famoso *Ars Magna* de 1545 Cardano utilizó por primera vez cálculos con raíces cuadradas de números negativos. Cardano quería resolver el problema

$$x+y=10, \quad xy=40$$

y para ese propósito hizo manipulaciones algebraicas formales y observó que

$$x=5+\sqrt{-15}, \quad y=5-\sqrt{-15}$$

dan una solución al problema. Intentó entonces verificar que el par $x=5+\sqrt{15}$, $y=5-\sqrt{15}$ es también una solución y se encontró con que $xy\neq 40$. Como bien remarca Green en su artículo, es conveniente enfatizar que Cardano hizo esto con una notación algebraica mucho más precaria que la nuestra, por lo que muchos de sus cálculos involucraban complicados argumentos geométricos.

Curiosamente, los números complejos aparecieron con más fuerza al intentar resolver ecuaciones cúbicas, un problema de gran importancia para los matemáticos en épocas de Cardano. De hecho, Cardano encontró un método para resolver

$$x^3+ax=b$$

donde a y b son números positivos, que ilustraremos a continuación.

Ejemplo 7.1. Nos interesa resolver $x^3+9x=24$. Para eso, escribimos $x=u-v$, donde $uv=9/3=3$. Al reemplazar obtenemos $u^3-v^3=24$ y luego

$$u^6-24u^3-27=0.$$

De aquí obtenemos $u^3=12+\sqrt{171}$, $v^3=12-\sqrt{171}$. En consecuencia,

$$x=u-v=\sqrt[3]{12+\sqrt{171}}-\sqrt[3]{12-\sqrt{171}}.$$

Ejercicio 7.2. Resuelva $x^3+6x=20$.

Es interesante mencionar además que Cardano, ya que igual que sus contemporáneos, no aceptaba números negativos, consideraba que las ecuaciones $x^3=ax+b$ y $x^3+ax=b$ eran esencialmente distintas, y entonces, para resolverlas, se requerían métodos distintos.

Ejemplo 7.3. Nos interesa resolver $x^3=15x+4$. Para eso, escribimos $x=u+v$, donde $uv=15/3=5$. Tal como hicimos en el ejemplo anterior podremos calcular

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

El ejemplo anterior nos muestra un fenómeno particularmente interesante: Incluso si intentamos resolver una ecuación cúbica con tres raíces reales, nos aparecen números complejos. Aparentemente Cardano sabía que $x = 4$ era solución de la ecuación $x^3 = 15x + 4$ y no entendía cómo las soluciones complejas dadas por su método podían transformarse en esa solución real tan evidente. Hoy en día entendemos perfectamente el problema y podrá resolverse solamente si podemos operar con números complejos.

Bombelli fue el primer matemático en considerar seriamente a los números complejos. Esto le permitió ordenar y presentar el trabajo de Cardano de forma clara y precisa. La ecuación

$$x^3 = 15x + 4$$

tiene una solución real $x = 4$ que podemos obtener por inspección. Las fórmulas de Cardano nos dicen que

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Mediante el álgebra de los números complejos podemos demostrar que

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}, \quad \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1},$$

lo que implica que $x = 4$ tal como esperábamos.

Bombelli fue precisamente el primero en observar lo mencionado en el párrafo anterior y fue además el primer matemático capaz de observar que al intentar resolver ecuaciones cúbicas mediante el método de Cardano involucraría números de la forma $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$. Hoy sabemos que este par de números se conocen como números complejos *conjugados*, pero esa terminología apareció en 1821 en los trabajos de Cauchy. Las observaciones sobre el método de Cardano y la utlización de números complejos, hechas posiblemente entre 1557 y 1560, aparecieron en el libro *Algebra*, publicado en 1572.

Ejercicio 7.4. Demuestre que

$$\sqrt[3]{18 + 26\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{18 - 26\sqrt{-1}} = 6.$$

En el libro de Bombelli nos encontramos además con el siguiente ejemplo, que dejamos como ejercicio:

Ejercicio 7.5. Resuelva $x^3 = 7x + 6$.

Ya mencionamos que Cardano no disponía de nuestra notación algebraica. Para dar un ejemplo, no disponía del uso de los paréntesis para fijar los órdenes en los que pueden hacerse operaciones algebraicas, algo que sí tenía Bombelli. El símbolo $\sqrt{-1}$ fue introducido mucho tiempo después por el matemático holandés Girard en 1629. Green remarca que otra de delicadas las diferencias de la notación era el uso de potencias n-ésimas, ya que para Cardano x^2 y x^3 representaban cuadrados y cubos de lado x, respectivamente. Evidentemente aquella manera de interpretar potencias resulta mucho más difícil para manipular que la interpretación abstracta que utilizamos en estos días.

Decartes fue el primero en considerar las partes real e imaginaria de los números complejos. Aquí conviene mencionar que el nombre de los números complejos fue concebido por Gauss en 1832.

En 1673 Wallis fue el primero en intentar encontrar una interpretación geométrica para los complejos. No logró su objetivo pero curiosamente estuvo muy cerca de lograr encontrar la interpretación que hoy todos conocemos. ¡No nos olvidemos que en aquella época incluso hasta los números negativos eran a veces un dolor de cabeza!

Leibniz también contribuyó a la teoría de los números complejos. En 1676 sorprendió a la comunidad matemática al demostrar que

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$$

y factorízó linealmente al polinopmio x^4+a^4. Observó que la suma de dos complejos conjugados siempre da como resultado un número real y logró demostrar la validez de las fórmulas de Cardano para encontrar raíces de una ecuación cúbica. Sin embargo, Leibniz no fue capaz de encontrar una interpretación geométrica para los números complejos.

En 1714 el matemático inglés Cotes demostró que

$$\log(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)=i\phi,$$

fórmula que implica

$$\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi=e^{i\phi},$$

famosa fórmula que se le atribuye a Euler, así como también la conocida fórmula incorrectamente atribuida a de Moivre:

$$(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)^n=\cos(n\phi)+i\operatorname{sen}(n\phi). \tag{7.1}$$ eq:deMoivre

Ya vimos que muchos descubrimientos matemáticos llevan el nombre incorrecto. La fórmula 7.1 no es una excepción, ya que este matemático nunca escribió aquella fórmula sino que encontró una fórmula bastante similar: alrededor de 1730 dio una fórmula para calcular $(\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)^{1/n}$. De hecho, Euler en 1748 fue el primero en enunciar y demostrar la fórmula (7.1). Euler también encontró las fórmulas

$$\operatorname{sen}\phi=\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i},\quad \cos\phi=\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2},$$

y fue el primero en utilizar el símbolo i para denotar a $\sqrt{-1}$ en 1777, aunque apareció impreso por primera vez en 1794. El uso de este símbolo fue popularizado por Gauss.

Ejercicio 7.6. En 1770 Euler "demostró" que $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{6}$. ¿Cuál es el problema con esa fórmula de Euler?

En 1702 Johnan Bernoulli escribió un trabajo sobre integración y utilizó los números complejos para escribir

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1/2}{1+zi} + \frac{1/2}{1-zi}$$

y calculó $\arctan z$.

Ejercicio 7.7. Demuestre que $i^i \in \mathbb{R}$.

El resultado del ejercicio anterior fue encontrado por Euler en 1746.

La interpretación geométrica que hoy tenemos para los números complejos fue descubierta en 1797 por un matemático amateur noruego de apellido Wessel. Esto también fue hecho en forma independiente por el matemático suizo Argand en 1806. Se cree que Gauss también descubrió en forma independiente esta interpretación para los números complejos alrededor del año 1800.

Hoy en día nadie duda de la importancia de los números complejos. De hecho, el *teorema fundamental del álgebra* es precisamente ese resultado que afirma que todo polinomio posee al menos una raíz compleja. El teorema puede enunciarse en forma equivalente de la siguiente manera: todo polinomio de $\mathbb{C}[X]$ puede factorizarse linealmente en $\mathbb{C}[X]$. Por ejemplo

$$X^4 + 1 = (X-1)(X+1)(X+i)(X-i).$$

Con la intención de convencernos de que él era el primer matemático que presentaba una demostración rigurosa del teorema fundamental del álgebra, Gauss afirmo que d'Alambert había intentado en vano demostrar el teorema 1747. Hoy sabemos que aquella supuesta demostración rigurosa de Gauss también tenía algunos defectos, pero el rigor en matemática siempre tiene sentido dentro de un determinado contexto, y esto no debe olvidarse. Curiosamente, hoy nos resultaría más o menos fácil tapar los agujeros que tiene la demostración de d'Alambert, y esto que debe hacerse utilizando teoremas y técnicas básicas del análisis matemático, algo que no sucede con la demostración dada por Gauss, que también contiene algunos problemas que no son tan fácilmente reparables. Ambas pruebas se basan en propiedades geométricas de los números complejos y requieren el uso de argumentos de continuidad. Ya vimos que interpretar a un número complejo $x+iy$ como el punto (x,y) del plano complejo es una idea que tardó mucho tiempo en materializarse. Esta es una de las razones por la que la prueba de d'Alambert no resulta del todo clara y para comenzar a repararla es necesario hacer uso del plano de Argand. Los argumentos de continuidad necesarios en ambas demostraciones tampoco estaban del todo claros ni para d'Alambert ni para Gauss, aunque Gauss en 1799 fue capaz de reconocer ciertas dificultades en relación a la continuidad. Por esa razón, dio en 1816 una demostración alternativa, bastante algebraica, del teorema fundamental del álgebra donde se minimiza el rol de la continuidad. Básicamente, lo que esa segunda demostración encontrada por Gauss utiliza del análisis matemático es un caso particular del teorema que hoy se le atribuye a Bolzano: una función polinomial $p(x)$ toma todos los valores entre $p(a)$ y $p(b)$ si x se mueve entre a y b. Bolzano en 1817 hizo explícita la necesidad del concepto de continuidad para demostrar el teorema fundamental del álgebra y dio una demostración, no del todo satisfactoria, de su famoso teorema. La demostración de Bolzano estaba bien encaminada, pero el problema que tenía era medio inevitable ya que en aquel momento no existía una buena definición de los números reales. En 1874 Weiestrass estableció y demostró las propiedades básicas de las funciones continuas y con esas ideas claramente establecidas fue capaz de completar aquella segunda prueba de Gauss para el teorema fundamental del álgebra y la demostración original de d'Alambert.

Cuaterniones y otros sistemas numéricos

Veamos brevemente cómo podemos demostrar la identidad

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)&\\ =(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)^2&\\ +(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2&\\ +(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2&\\ +(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2.&\end{aligned}$$

que vimos en el capítulo sobre números poligonales, mediante el uso de los cuaterniones. Recordemos que usamos esa fórmula en la demostración del teorema de Lagrange, que afirma que todo número es suma de cuatro cuadrados.

Un **cuaternión** es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix} \tag{7.2}$$

donde α y β son números complejos.

Si para $j\in\{1,2\}$ consideramos los cuaterniones

$$q_j=\begin{pmatrix}\alpha_j & \beta_j\\ -\overline{\beta_j} & \overline{\alpha_j}\end{pmatrix},$$

y calculamos el determinante $\det(q_1q_2)=\det(q_1)\det(q_2)$, entonces obtememos

$$(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)=|\alpha_1\alpha_2-\beta_1\overline{\beta_2}|^2+|\alpha_1\beta_2+\beta_1\overline{\alpha_2}|^2. \tag{7.3}$$

eq:Gauss

Se sabe que esta identidad era conocida por Gauss y que posiblemente fue descubierta en 1820, mucho antes del descubrimiento de los cuaterniones.

Ejercicio 7.8. Demuestre que con

$$\alpha_1=a_1+d_1\sqrt{-1},\quad \alpha_2=a_2+d_2\sqrt{-1},\quad \beta_1=b_1+c_1\sqrt{-1},\quad \beta_2=b_2+c_2\sqrt{-1},$$

la identidad (7.3) se traduce en la identidad de Euler.

En 1835 Hamilton definió un número complejo como un par ordenado (a,b) de números reales y dio reglas para sumar y multiplicar números complejos. Hamilton reconoció la importancia de tener bien definidas una suma y una multiplicación, aunque es evidente que encontrar una buena multiplicación es realmente la parte difícil del problema, la suma se hará coordenada a coordenada.

Hamilton, Peacock, De Morgan y Graves intentaron extender el concepto de número. Todos tenían en mente las inclusiones

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

y ciertas condiciones que los sistemas numéricos debían verificar: asociatividad, conmutatividad, propiedades distributivas, etcétera. Estas condiciones se materializaron con la definición de cuerpo dada por Dedekind en 1871, noción que había sido dada independientemente por Galois en 1830. Hamilton, en cambio, tenía en mente una propiedad extra: la existencia de una norma multiplicativa, es decir una función $x \mapsto |x|$ tal que $|x| \geq 0$ si $x \neq 0$ y $|xy| = |x||y|$ para todo x, y. Desde 1830 hasta 1843 Hamilton intentó en vano encontrar un buena forma de multiplicar ternas, algo que sabemos no puede existir en virtud del teorema de Legendre sobre la suma de tres cuadrados: no existe una identidad de la forma

$$(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2) = x^2+y^2+z^2$$

pues, por ejemplo, como el número 15 no es suma de tres cuadrados, basta considerar las ternas $(a,b,c) = (1,1,1)$ y $(d,e,f) = (0,1,2)$. Hamilton nunca estudió teoría de números y no conocía ni el teorema de Legendre ni la fórmula de Euler que se utiliza para demostrar que todo número es suma de cuatro cuadrados, no sabemos qué hubiera pasado si hubiera tenido acceso a estos resultados. El caso es que aquellos experimentos llevaron a Hamilton a encontrar, en octubre de 1843, la regla fundamental que define a los cuaterniones. Un cuaternión es un número de la forma

$$a+bi+cj+dk,$$

donde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ y la multiplicación de cuaterniones se basa en las fórmulas

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

La clave detrás de los cuaterniones está en observar (y aceptar) que el producto de cuaterniones no es conmutativo.

La representación matricial para los cuaterniones que dimos al principio de la sección fue encontrada por Cayley en 1858.

En 1843 Graves le escribió a Hamilton y le comunicó que había descubierto a los octoniones, un sistema numérico que involucraba 8-uplas y cuyo producto no solo no era conmutativo sino tampoco asociativo. En 1845 Cayley también descubrió independientemente a los octoniones. En 1914 Dickson describió a los octoniones como pares ordenados (a,b) de cuaterniones con el producto dado por

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2 - \overline{b_2}b_1, b_1a_1 + b_1\overline{a_2}),$$

donde

$$\overline{a+bi+cj+dk} = a-bi-cj-dk$$

denota el conjugado del número $a+bi+cj+dk$. Es interesante observar que la misma fórmula permite obtener a los complejos a partir de los reales y a los cuaterniones a partir de los números complejos.

Naturalmente estos descubrimientos tentaron a muchos matemáticos a buscar n-uplas de números reales que junto con la suma usual de $\mathbb{R}^n$, una multiplicación distributiva y una norma multiplicativa, dieran lugar a nuevos sistemas numéricos. En 1884 Weiestrass demostró que los números complejos resultan ser el único sistema numérico con multiplicación conmutativa. En 1878 Frobenius demostró que los únicos sistemas numéricos cuya multplicación es asociativa son los números reales, los complejos o los cuaterniones. En 1898 Hurwitz demostró que si se tiene una identidad de la forma

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) = c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2,$$

donde las c_i son funciones bilineales en las a_j y las b_k, entonces $n \in \{1,2,4,8\}$. El teorema de Hurwitz tiene una linda aplicación:

> Sea V un espacio vectorial real con producto interno con $\dim V \geq 3$. Supongamos que existe una función $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto v \times w$, bilineal y tal que $v \times w$ es ortogonal al espacio generado por v y w, y además
>
> $$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2,$$
>
> donde $\|v\|^2 = \langle v, \rangle$. Entonces $n \in \{3,7\}$.

La demostración de este resultado es bastante sencilla si disponemos del teorema de Hurwitz, y por eso la exponemos a continuación. Consideremos el espacio vectorial $W = V \oplus \mathbb{R}$ con el producto escalar dado por

$$\langle (v_1,r_1),(v_2,r_2)\rangle = \langle v_1,v_2\rangle + r_1r_2.$$

Primero observemos que

$$\begin{aligned}&\langle v_1 \times v_2 + r_1v_2 + r_2v_1, v_1 \times v_2 + r_1v_2 + r_2v_1\rangle \\ &\qquad = \|v_1 \times v_2\|^2 + r_1^2\|v_2\|^2 + 2r_1r_2\langle v_1,v_2\rangle + r_2^2\|v_1\|^2.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}(\|v_1\|^2 + r_1^2)&(\|v_2\|^2 + r_2) \\ &= \|v_1\|^2\|v_2\|^2 + r_2^2\|v_1\|^2 + r_1^2\|v_2\|^2 + r_1^2r_2^2 \\ &= \|v_1 \times v_2 + r_1v_1 + r_2v_2\|^2 - 2r_1r_2\langle v_1,v_2\rangle + \langle v_1,v_2\rangle^2 + r_1^2r_2^2 \\ &= \|v_1 \times v_2 + r_1v_1 + r_2v_2\|^2 + (\langle v_1,v_2\rangle - r_1r_2)^2 \\ &= z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2,\end{aligned}$$

donde las z_k son funciones bilineales en (v_1, r_1) y (v_2, r_2). El teorema de Hurwitz implica entonces que $n+1 \in \{4, 8\}$ y luego $n \in \{3, 7\}$.

En caso en que el espacio vectorial V sea de dimensión tres, el resultado nos da el producto vectorial usual. Si, en cambio, $\dim V = 7$, consideramos el espacio vectorial

$$W = \{(v, k, w) : v, w \in V, k \in \mathbb{R}\}$$

con el producto interno dado por

$$\langle (v_1, k_1, w_1), (v_2, k_2, w_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + k_1 k_2 + \langle w_1, w_2 \rangle.$$

Queda como ejercicio demostrar que entonces la operación

$$\begin{aligned}(v_1, k_1, w_1) \times (v_2, k_2, w_2) \\ &= (k_1 w_2 - k_2 w_1 + v_1 \times v_2 - w_1 \times w_2, \\ &\quad - \langle v_1, w_2 \rangle + \langle v_2, w_1 \rangle, k_2 v_1 - k_1 v_2 - v_1 \times w_2 - w_1 \times v_2)\end{aligned}$$

cumple las propiedades del resultado que enunciamos como aplicación del teorema de Hurwitz.

Para más información acerca de la historia detrás de expresiones similares a la fórmula de Euler referimos a [19, 20]. Existen identidades que involucran sumar 16 cuadrados pero, como sabemos por el teorema de Hurwitz, debe abandonarse la condición de bilinealidad; una de estas identidades es la identidad de Pfister.

Capítulo 8
Ecuaciones algebraicas

En este capítulo nos concentraremos en algunos aspectos, elegidos más o menos caprichosamente, sobre la teoría de ecuaciones algebraicas. Empezaremos con las ecuaciones lineales. En la antigua matemática china nos encontraremos con un método para resolver sistemas ecuaciones lineales que hoy con nuestra notación escribimos como

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

eq:sistema_lineal

Sorprendentemente, en el famoso libro $\boxed{?}$, nos encontraremos con un método esencialmente igual al que hoy conocemos como el *método de eliminación de Gauss*, que nos permite reescribir el sistema (8.1) como

$$\begin{aligned}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1,\\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2,\\
&\vdots\\
a'_{nn}x_n &= b'_n.
\end{aligned}$$

para poder despejar x_n de la n-ésima ecuación, después despejar x_{n-1} de la ecuación $(n-1)$-ésima, y así sucesivamente hasta despejar x_1 de la primera ecuación.

En el siglo XII se descubrió que este método podía adaptarse para resolver algunos sistemas polinomiales en dos o más variables.

Ejemplo 8.1. Supongamos que nos interesa resolver el sistema polinomial

$$\begin{aligned}
x^2 + xy + y^2 &= 1\\
4x^2 + 3xy + 2y^2 &= 3.
\end{aligned}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por dos y restamos. . .

La ecuación cuadrática

Cerca del año 2000 a. C. los babilónicos sabían cómo resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y &= p, \\ xy &= q \end{aligned}$$

que podemos reescribir como $x^2+q=px$. Las soluciones son

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{(p/2)^2 - q}, \quad y = \frac{p}{2} - \sqrt{(p/2)^2 - q},$$

siempre que ambos sean números positivos[1]. Veamos un ejemplo concreto que nos muestre cómo funciona aquel método concebido en tiempos de los babilónicos. Es interesante remarcar que el método tal como lo presentaban los babilónicos era apenas ilustrado con números, pues en aquellos tiempos no existía el álgebra, y no había indicaciones que explicaran por qué aquel procedimiento funcionaba correctamente.

Ejemplo 8.2. Queremos resolver el sistema

$$\begin{aligned} x+y &= 13/2, \\ xy &= 15/2. \end{aligned}$$

El método para resolver este sistema es el siguiente. Primero formamos el número $(x+y)/2 = 13/4$ y después calculamos el número

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 169/16.$$

Como entonces

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 49/16,$$

calculamos

$$\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = 7/4.$$

Esto permite resolver la ecuación ya que

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \qquad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

En efecto, un simple cálculo con fracciones nos muestra que la solución es

$$(x,y) = (5, 3/2).$$

[1] Recordemos que los babilónicos no admitían números negativos.

Este ejemplo fue tomado del libro [7] de Boyer sobre historia de la matemática y está basado en el contenido de una tabla de barro babilónica que se conserva en Yale. Debemos mencionar que los babilónicos escribían sus números en base sesenta, así que el sistema de ecuaciones que resolvimos bien podríamos haberlo presentado como

$$\begin{aligned} x+y &= 6|30, \\ xy &= 7|30, \end{aligned}$$

donde el símbolo 6|30 denota al número $6+30\cdot 60^{-1} = 13/2$ y el símbolo 7|30 al número $7+30\cdot 60^{-1} = 15/2$. Obviamente esta no es la notación que usaban los babilónicos.

Brahmagupta dio un método para resolver la ecuación cuadrático. Como no disponía del álgebra, se vio obligado a explicar aquel método con palabras. El método muestra que

$$x = \frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2s}$$

es la solución de la ecuación cuadrática

$$ax^2+bx = c.$$

Dio además otra fórmula para las raíces:

$$x = \frac{\sqrt{ac+(b/2)^2}-(b/2}{a}.$$

Hoy en día, nuestra habilidad para manipular expresiones algebraicas nos permite demostrar muy fácilmente que las dos expresiones encontradas por Brahmagupta son equivalentes.

Heath observó que la proposición 28 del libro VI de Euclides también propone un método para resolver la ecuación cuadrática y ese método es demostrado rigurosamente.

La palabra “álgebra” viene del árabe. La introdujo el matemático Al-Juarismi en el año 830 en un libro sobre la teoría de ecuaciones. En este libro mostró cómo resolver ecuaciones de grado dos en una variable, algo que era conocido ya por los babilonios. Si bien el matemático Brahmagupta llegó mucho más lejos en sus estudios sobre algebraicos (en la notación y en la introducción de los números negarivos, por ejemplo), el trabajo de Al-Juarismi tuvo mucha repercusión.

Las ecuaciones de grado superior

La solución de la ecuación cúbica, siglo XVI, fue quizá el avance más importante que vio la matemática en occidente después de los resultados obtenidos por la matemática griega. Sobre cómo fue que se llegó a resolver la ecuación cúbica sabemos poco, y gran parte de lo que sabemos viene de la voz de Cardano. Debemos recordar que durante la primera mitad del siglo XVI muchos matemáticos mantenían sus descubrimientos en secreto para resaltar sobre sus adversarios en los torneos y disputas donde se planteaban problemas científicos.

Aparentemente Scipione del Ferro, profesor en Bolonia, fue el primero en resolver la ecuación cúbica de la forma $x^3 + px = q$, según Tartaglia esto sucedió en 1506 y según Cardano, en 1515. No sabemos qué método utilizó del Ferro.

A principio de siglo aparecieron varios problemas matemáticos donde la solución requería resolver una ecuación cúbica. En este contexto fue que Tartaglia, según su propia versión, encontró una regla para resolver la cúbica en 1534, independientemente del trabajo de del Ferro. En 1535 se produjo un desafío entre Fior, un discípulo de del Ferro, y Tartaglia. Según sabemos, Tartaglia resolvió en unas dos horas los treinta problemas planteados por Fior, mientras que Fior no pudo resolver ninguno de los problemas planteados por Tartaglia. Cardano, profesor en Milán, supo entonces acerca de Tartaglia y su notable reputación y, en particular, intentó aprender el método con el que Tartaglia podía resolver la ecuación cúbica. Tartaglia se resistió durante un tiempo, hasta que en 1539 cedió ante los pedidos de Cardano: le comunicó su forma de resolver la cúbica y le hizo jurar que no publicaría el método para resolver la cúbica antes de que Tartaglia lo hiciera en un libro en el que estaba trabajando desde hacía algún tiempo. En 1545 Cardano traicionó su juramento y publicó una edición de *Ars Magna* que incluye aquellos secretos que Tartaglia le había contado. Esto desata una gran pelea entre ambos que incluso involucra a otros matemáticos de la época. Cardano en su libro agradece cierta inspiración obtenida a partir de los trabajos de Tartaglia y la colaboración de Ferrari, que tiempo atrás había sido su estudiante.

Como podemos imaginarnos, para evitar números negativos, Cardano también se vio obligado a estudiar varios casos distintos de la ecuación cúbica. Veamos uno en particular para entender cómo funciona el método. Nos interesa resolver la ecuación cúbica

$$x^2 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Vamos a realizar la sustitución $x = y - a/3$ y vamos a elegir a para transformar nuestra ecuación cúbica en una ecuación de la forma

$$y^3 = py + q.$$

Si ahora $y = u + v$, entonces

$$y^3 = (u+v)^3 = (u^3 + v^3) + 3uv(u+v).$$

Si $y^3 = py + q$, entonces

$$\begin{aligned} 3uv &= p, \\ u^3 + v^3 &= q. \end{aligned}$$

Después de eliminar la variable v nos quedamos con la ecuación

$$u^3 + \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q,$$

que es una ecuación cuadrática en u^3, con raíces

$$\frac{q}{2} \pm \sqrt{(q/2)^2 - (p/3)^3}.$$

Ejercicio 8.3. Resuelva la ecuación $y^3 = 6y + 6$.

Un estudiante de Cardano de apellido Ferrari fue el que logró resolver la ecuación de grado cuatro de la forma

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

mediante el uso de expresiones similares a las que Cardano encontró para resolver la ecuación cúbica. Son expresiones que involucran raíces cuadradas y cúbicas de funciones racionales en los coeficientes.

El descubrimiento de Ferrari hizo que la comunidad matemática intentara resolver la ecuación de grado cinco mediante el uso de fórmulas similares, aunque prácticamente nada interesante fue posible obtenerse. Quizá uno de los mejores resultados fue el que obtuvo Bring en 1786 al lograr reducir la ecuación general de grado cinco a una expresión de la forma

$$x^5 - x - A = 0.$$

Como el resultado de Bring fue publicado en una revista bastante desconocida, los matemáticos tardaron unos cincuenta años en encontrar aquel resultado. Quizá hoy reconozcamos esto como un golpe de suerte ya que, de otra forma, el resultado de Bring posiblemente hubiera sido interpretado como una fuerte indicación de que la ecuación de grado cinco también iba a poder resolverse mediante el uso de expresiones que involucraran raíces de funciones racionales en los coeficientes.

En 1799 Ruffini demostró, aunque su demostración no era correcta, que no era posible resolver la ecuación general de grado cinco mediante el uso de fórmulas que involucraran raíces de funciones racionales de los coeficientes. Sí, la demostración presentada por Ruffini tenía algunos problemas y es por eso que el crédito de aquel sorprendente resultado se lo quedó Abel en 1826. En 1831 Galois llevó estas ideas muy lejos y logró demostrar que si en general no puede resolverse mediante radicales. En el camino, concibió una importantísima rama de la matemática: la teoría de grupos.

Es importante destacar que no significa que la ecuación general de grado cinco no pueda resolverse. Lo que Ruffini, Abel y Galois demostraron es que nunca vamos a poder encontrar expresiones por radicales para la solución, es decir que no existen fórmulas para la solución en términos de raíces de funciones racionales de los coeficientes. ¡Hay otras formas de resolver esta ecuación! En 1858 Hermite resolvió la ecuación general de grado cinco mediante el uso de funciones trascendentes, similar a lo que Viéta había hecho con la ecuación cúbica y las funciones trigonométricas.

Es conveniente hacer aquí una pequeña digresión y contar que Decartes hizo algunos aportes a la teoría de ecuaciones polinomiales de una variable. De hecho, a él debemos la notación

$$x^3, x^4, x^5, \ldots$$

para representar las potencias de la variable x. Es curioso que Decartes utilizara esta notación solamente a partir de las potencias cúbicas y siguiera utilizando xx para representar al cuadrado de la variable x.

Capítulo 9
Teoría de grupos

¿Qué son los grupos? ¿Cómo y dónde aparecen?

El pequeño teorema de Fermat afirma que si p es un número primo y $a \in \mathbb{Z}$ es coprimo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. No sabemos bien cuál fue la demostración que encontró Fermat, pero Weil sugiere que fue la siguiente. Primero se demuestra el resultado el en caso en que $a = 2$ de la siguiente forma: el teorema del binomio nos permite escribir

$$2^p = (1+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = 1 + 1 + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{p-1}$$

y luego solamente debemos observar que, como los números binomiales $\binom{p}{k}$ son todos divisibles por p si $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, entonces

$$2^p - 2 = \binom{p}{1} + \cdots + \binom{p}{p-1}$$

es también divisible por p. Ahora debemos utilizar el resultado ya probado en el caso $a = 2$ y demostrar el caso $a = 3$ ya que gracias al teorema del binomio podemos escribir

$$3^p = (2+1)^p = 3 + pm$$

para algún m. Más generalmente, si sabemos que el resultado es válido para un cierto a, entonces, nuevamente gracias al teorema del binomio, podemos escribir

$$(a+1)^p = (a+1) + pm,$$

para algún entero m, y demostrar que el resultado es también válido para $a+1$.

Para ver que el primo p siempre divide a los binomiales $\binom{p}{k}$ con $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ simplemente hay que utilizar la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Fermat no conocía esta fórmula, pero sí sabía que vale la fórmula

$$n\binom{n+m-1}{m-1} = m\binom{n+m-1}{m}$$

y que esta fórmula alcanza para demostrar lo que se necesita.

Ejercicio 9.1. Enuncie y demuestre el teorema multinomial. Una demostración probabilística puede verse en [31].

Otra forma de demostrar el pequeño teorema de Fermat es la siguiente: Un argumento similar al anterior pero donde el teorema del binomio es reemplazado por el teorema multinomial, nos permitirá escribir

$$(1+1+\cdots+1)^p = 1^p + 1^p + \cdots + 1^p + pm$$

para algún entero m. De aquí el teorema de Fermat se seguirá inmediatamente.

En 1758 Euler generalizó el resultado de Fermat de la siguiente forma: si $a \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$, donde

$$\varphi(n) = \#\{k : 1 \leq k \leq n-1 \text{ y además } (k,n) = 1\}$$

es la función de Euler. Por ejemplo, $\varphi(5) = 4$ y $\varphi(8) = 4$.

Ejercicio 9.2. Demuestre el teorema de Euler.

Los elementos del conjunto $\{1,2,\ldots,n-1\}$ que son coprimos con n forman una estructura algebraica de cardinal $\varphi(n)$ que es cerrada por la multiplicación módulo n. Veamos un ejemplo concreto en el caso $n = 5$. La tabla de multiplicación viene dada por

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	1	1	4	2
4	4	3	2	1

Esta tabla tiene propiedades muy interesantes: a) es cerrada por multiplicación, b) la multiplicación es asociativa, c) existe un elemento neutro, y por último d) cada elemento admite un inverso multiplicativo:

$$1^{-1} = 1, \quad 2^{-1} = 3, \quad 3^{-1} = 2, \quad 4^{-1} = 4.$$

En lenguaje moderno, simplemente diremos que el conjunto de enteros módulo 5 forma un grupo con la multiplicación.

Ejercicio 9.3. Construya la tabla de multiplicación de enteros impares módulo 8.

La teoría de grupos no fue concebida originalmente como una generalización de la aritmética módulo n sino como herramienta fundamental para resolver el problema de encontrar soluciones de ecuaciones. El problema era intentar resolver la ecuación

$$a_5X^5 + a_4X^4 + \cdots + a_1X + a_0 = 0$$

mediante fórmulas que involucraran radicales.

Lagrange entendió que era importante estudiar el grupo generado por las permutaciones de las raíces. Así surgieron los primeros grupos de permutaciones. El trabajo de Lagrange motivó los trabajos de Ruffini, Abel y Galois. Euler y Gauss sin saberlo habían considerado grupos conmutativos al estudiar propiedades de los enteros módulo n.

La palabra *grupo* fue concebida por Galois. Para él, un *grupo* era un conjunto de permutaciones cerrado por multiplicación. Expliquemos qué es un *grupo de permutaciones*. Hagamos un caso sencillo, el de las funciones $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ que son biyectivas. El conjunto $\mathbb{S}_3$ de funciones biyectivas $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ forma un grupo con la composición de funciones. Podemos escribir a los elementos de $\mathbb{S}_3$ como

$$\mathbb{S}_3 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

El símbolo (12) representa a la función tal que $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$ y $3 \mapsto 3$. Similarmente, (123) es la función tal que $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$ y $3 \mapsto 1$.

Un *subgrupo* de un grupo de permutaciones es subconjunto de permutaciones cerrado por multiplicación y que contiene a la identidad. Como ejemplo, vamos a calcular los subgrupos de $\mathbb{S}_3$.

exa:S3 **Ejemplo 9.4.** Sabemos que

$$\mathbb{S}_3 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

Si S es un subgrupo, entonces $\mathrm{id} \in S$. Dejamso como ejercicio verificar que los únicos subgrupos de $\mathbb{S}_3$ son

$$\{\mathrm{id}\}, \{\mathrm{id}, (12)\}, \{\mathrm{id}, (13)\}, \{\mathrm{id}, (23)\}, \{\mathrm{id}, (!23), (132)\}, \mathbb{S}_3.$$

En el ejemplo anterior muestra un fenómeno interesante. Tenemos un grupo con seis elementos y si S es un subgrupo entonces $|S|$ divide a seis. Esto no es un accidente: el teorema de Lagrange afirma que si H es un subgrupo de un grupo finito G, entonces $|H|$ divide a $|G|$.

Los primeros estudios sistemáticos sobre grupos de permutaciones se deben a Cauchy, que publicó varios trabajos entre 1815 y 1844 donde aparecen muchos resultados que hoy vemos en cursos de teoría de grupos. Por ejemplo, Cauchy calculó los subgrupos de $\mathbb{S}_3$ que vimos en el ejemplo 9.4.

Los grupos abstractos fueron concebidos por Cayley en 1954, que parece se inspiró en los trabajos abstractos de Boole. Si bien la idea de Cayley resultó fundamental, no tuvo impacto en aquel momento. Cayley volvió a trabajar con grupos abstractos varios años más tarde, en 1878, esta vez con mucho éxito. Otra definición abstracta de grupo también apareció en en 1858, en las clases de Dedekind sobre teoría de Galois. Para conectar la definición abstracta de grupo con los grupos de permutaciones concretos con los que se trabajaba, Cayley demostró que si G es un grupo finito, entonces G es esencialmente un subgrupo de algún $\mathbb{S}_n$.

En 1882 Von Dyck estudió grupos abstractos (no necesariamente finitos) y muchas de sus propiedades. En 1883 publicó trabajos donde estudió aplicaciones de la teoría de grupos en otras áreas de la matemática: geometría, teoría de números, simetrías y geometría, grupos de permutaciones. Pueden entenderse estos trabajos como el primer anuncio acerca de la importancia que iban a tener los grupos en el desarrollo de la matemática.

Resultados sobre grupos concretos son en realidad resultados generales (el teorema de Lagrange es un claro ejemplo de este fenómeno). Hay otro ejemplo que es digno de mencionar. En 1872 Sylow publicó una serie de teoremas sobre grupos de permutaciones, hoy los conocemos como los *teoremas de Sylow*. En 1887 Frobenius observó que, como todo grupo abstracto es un grupo de permutaciones, los teoremas de Sylow también valen para grupos abstractos. Sin embargo, fue más lejos. Publicó una demostración de los teoremas de Sylow para grupos abstractos, aunque en principio no fuera necesario. La abstracción juega acá un papel importante, esas ideas resultaron fundamentales para el desarrollo de la teoría de grupos.

No podemos hacer un estudio exhaustivo de la historia de la teoría de los grupos finitos, pero sí debemos mencionar algunos resultados muy importantes dentro del desarrollo de la matemática del siglo XX. Mencionamos que la noción de resolubilidad es aquella que nos permite estudiar soluciones por radicales de ecuaciones. De hecho, sabemos que en general no podremos encontrar una fórmula para resolver la ecuación de grado 5 por radicales pues el grupo $\mathbb{S}_5$ no es resoluble. En … Burnside demostró que todo grupo de orden $p^a q^b$ es resoluble y conjeturó que todo grupo de orden impar es resoluble. Esto fue demostrado en … por Feit y Thompson. La demostración es muy difícil y ocupa un volumen completo del Pacific Journal of Mathematics. Este teorema es uno de los pasos fundamentales hacia una clasificación de los grupos simples finitos. Recientemente este teorema fue verificado formalmente por… en Coq…

La clasificación de grupos simples finitos

Sin duda uno de los resultados más profundos de la matemática moderna es la clasificación de los grupos simples finitos. Repasaremos un poco de la historia básica de este notable teorema. El lector interesado en obtener información más detallada puede consultar los artículos de Solomon [45, 46].

La noción de subgrupo normal fue introducida por Galois en 1832, noción cuya importancia fue reconocida por Jordan en su tratado sobre grupos de 1870. Este libro posee una modesta lista con infinitos grupos simples. En un trabajo publicado en 1892, Hölder remarcó que sería de gran interés disponer de la clasificación de grupos simples, ya que estos grupos funcionan como pilares básicos de la teoría de grupos.

Eso hizo que poco tiempo después Cole determinara todos los grupos simples de tamaño ≤ 600, y en particular demostrara que $\mathbf{SL}_2(2)$, el grupo de matrices de 2×2 con determinante igual a uno y coeficientes en el cuerpo de dos elementos, es un grupo simple. En 1900 Miller y Ling, casi sin herramientas, apenas utilizando los teoremas de Sylow y el famoso principio del palomar, extendieron estos trabajos y lograron construir todos los grupos simples de orden ≤ 2001.

Los grupos simples más fáciles de describir son los cíclicos con un número primo de elementos. Por ejemplo

$$\mathbb{Z}/2 = \{0,1\}, \quad \mathbb{Z}/3 = \{0,1,2\}, \quad \mathbb{Z}/5 = \{0,1,2,3,4\} \ldots$$

Están también los grupos simples alternados (no abelianos). El menor de estos grupos suele denotarse $\mathbb{A}_5$, tiene orden 60 y fue descubierto por Galois en sus trabajos sobre la resolubilidad por radicales. Tenemos además grupos simples finitos análogos a grupos geométricos que aparecen en la teoría de Lie. Algunos de estos grupos eran ya conocidos por Galois y por Jordan.

Gran parte de los análogos finitos de grupos de Lie fueron descubiertos en el siglo XX, primero por Dickson en algunos casos particulares y luego por Chevalley, Steinberg, Suzuki y Ree en forma más sistemática.

Hay además cinco grupos “esporádicos” descubiertos por Mathieu en 1861 y 1873 que resultan ser los grupos de las simetrías de ciertas configuraciones finitas que ahora nos resultaría un poco complicado explicar. Los grupos de Mathieu no pertenecen a la familia de análogos finitos de los grupos que aparecen en geometría y teoría de Lie.

Tenemos entonces, digámoslo vagamente, una lista de grupos simples finitos: a) los grupos cíclicos de orden primo, b) los grupos alternados de grado ≥ 5, c) los grupos de tipo Lie, y por último d) los grupos de Mathieu.

En 1955 Brauer y Fowler demostraron un teorema que permitió a los investigadores pensar en un posible plan de acción para clasificar grupos simples. El método se basaría en clasificar grupos simples sabiendo de antemano algo sobre sus involuciones. En 1963 Feit y Thompson demostraron que todo grupo simple no abeliano tiene orden par, un resultado que había sido conjeturado por Burnside en 1906. La demostración un volumen completo de la revista *Pacific Journal of Mathematics* de casi trescientas páginas. A partir de estos resultados y de las técnicas desarrolladas por Feit y Thompson, y gracias a un trabajo bastante más experimental que el que se vio en otras etapas de la matemática, fue posible construir nuevos grupos simples, grupos que en general hoy llevan el nombre de sus descubridores: Janko, Highman, Sims, MacLaughlin, Suzuki, Conway, Held, Fischer, Lyons, O’Nan, Rudavalis. En muchos casos, para demostrar la existencia de tales grupos fue necesario recurrir a complicados cálculos computacionales. En algún momento los especialistas en teoría de grupos encontraron evidencia de la existencia de un nuevo grupo simple, esta vez mostruosamente grande, de orden

$$2^{46} \times 3^{20} \times 5^9 \times 7^6 \times 11^2 \times 13^3 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71.$$

Es fácil entender por qué a este grupo se lo conoce como “el monstruo” o el “gigante amistoso”. Este grupo tiene orden

$$808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000,$$

es decir, el grupo tiene aproximadamente 8×10^{53} elementos.

A diferencia de lo que había pasado con los grupos mencionados en el párrafo anterior, semejante cantidad de elementos hacía imposible siquiera pensar en utilizar una computadora para demostrar la existencia. En 1982 Griess demostró la existencia del monstruo al observar que podía verse como el grupo de simetrías de un cierto espacio de dimensión 196883.

El enunciado del teorema de la clasificación de grupos simples estaba ahí y solo era necesario agregar 26 excepciones a las familias que mencionamos anteriormente. Entre estas excepciones está el monstruo. En 1972 Gorenstein propuso un programa para demostrar esta clasificación.

Para algunos, la clasificación estaba completa en 1974. No para toda la comunidad matemática, sin embargo. En 1976, por ejemplo, Brauer mencionó que muchos matemáticos creen que tener completa la clasificación depende únicamente del tiempo y pone énfasis en que quizá se necesiten unos cinco años en completar los detalles que falten, aunque luego sean necesarios muchos años más para poder ordenar y escribir prolija y precisamente cada uno de los pasos necesarios de aquella demostración.

Gracias a los trabajos de varios matemáticos tales como Aschbacher, Mason y Griess, donde casos difíciles eran tratados exitosamente, Gorenstein declaró en 1981 que la clasificación de los grupos simples estaba completa. Los trabajos de Aschbacher y Griess fueron sometidos a referato y luego publicados, pero no así el de Mason, que ocupaba unas ochocientas páginas. En 1989, Aschbacher observó que aquel trabajo estaba incompleto y que quedaban allí varios casos sin resolverse. En 1992 Aschbacher anunció que había logrado completar con éxito los detalles faltantes en el trabajo de Mason, aunque esto tampoco fue publicado. En 1996 Aschbacher y Smith comenzaron a trabajar en la demostración estos resultados, esto fue publicado en dos volúmenes en 2004. Gracias de este resultado, la comunidad matemática aceptó finalmente la clasificación de los grupos simples.

Las primeras constribuciones a la clasificación de grupos simples son los trabajos de Galois de 1830, el tratado de Jordan de 1870 y un teorema de Burnside de 1899 donde se clasifica una familia infinita de grupos simples. El último resultado necesario para la clasificación de grupos simples fue el que publicaron Aschbacher y Smith en 2004. Hoy en día, la comunidad matemática considera que el teorema de clasificación de los grupos simples es un hecho demostrado, aunque no haya quizá nadie que conozca todos los pasos de la demostración, que involucra el trabajo de cientos de matemáticos a lo largo de más de cien años y más de diez mil páginas de revistas científicas.

Formalización

hablar de Coq o equivalentes y mencionar qué teoremas fueron demostrados y cuáles son los objetivos

La abstracción en la matemática

Las digresiones que hicimos sobre teoría de grupos ilustran la importancia de la abstracción en la matemática. Veamos otro ejemplo. La igualdad $(-1)(-1) = 1$ se conoce desde la antigüedad. Sin embargo, en cierto momento la gente empezó a cuestionarse ese tipo de identidades. En 1830 Peacock tuvo una idea muy avanzada: consideró dos tipos de manipulación algebraica y una forma de conectar esos distintos tipo de manipulación. La idea de Peacock es la siguiente: Tenemos a) el álgebra aritmética (la que todos conocemos, la que vale para números positivos), b) el álgebra simbólica y c) el *principio de permanencia de formas equivalentes*, que establece que las leyes del álgebra simbólica son las del álgebra aritmética. Veamos cómo funciona esa idea en un ejemplo concreto. La fórmula

$$a-(b-c) = a-b+c$$

es una ley aritmética, vale si $b > c$ y $a > b-c$. De acá se deduce que $(-a)(-b) = ab$ sin restricciones. Para eso, primero observamos que

$$(a-b)(c-d) = ac+bd-ad-bc$$

es una ley aritmética, vale si $a > b$ y $c > d$. Esa ley aritmética se transforma en una ley del álgebra simbólica gracias al *principio de permanencia de formas equivalentes*. Por eso, ahora tenemos la validez de la identidad

$$(a-b)(c-d) = ac+bd-ad-bc$$

sin restricción. Evaluamos entonces esta ley simbólica en $a = 0$ y $c = 0$ para obtener la identidad

$$(-b)(-d) = bd.$$

Es importante remarcar que en los trabajos de Peacock, las reglas aritméticas no estaban explícitamente establecidas: eso vino mucho después, con los axiomas que definen a los anillos y a los cuerpos.

Hoy vemos en cursos de álgebra definiciones axiomáticas de anillos y cuerpos. La primera definición abstracta de anillo es de 1914, se debe a Fraenkel y es básicamente la misma que usamos ahora.

Todos sabemos la importancia que tiene el álgebra lineal dentro de la matemática moderna. Muchos resultados del álgebra lineal ya se conocían en 1880, aunque en forma desordenada y algo caótica. El problema: no se conocían los espacios vectoriales. Fue Peano que los introdujo en 1888, un trabajo que en su momento fue ignorado.

Hoy en día los cursos de álgebra lineal comienzan con la resolución de sistemas lineales. Alrededor del año 200 a. C. en China se resolvían sistemas lineales de 3×3 usando únicamente números y no incógnitas, idea precursora de la teoría de matrices. El estudio moderno de los sistemas lineales comenzó mucho después, con Leibniz en 1693. Curiosamente, en aquel momento, el estudio estaba basado en los determinantes. Sí, en la historia de la matemática primero aparecen los determinantes y tiempo después las matrices. En 1750 Cramer publicó fórmulas para resolver sistemas lineales mediante el uso de determinantes. Se escribieron varios tratados sobre determinantes. Los primeros fueron escritos por Maclaurin y Vandermonde en 1772. En 1815 Cauchy estableció las bases de la teoría de determinantes más o menos como la conocemos hoy. Por ejemplo, demostró que

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

La definición abstracta o axiomática de determinante apareció alrededor de 1860 y se debe a Weierstrass y Kronecker. En aquellos tiempos los determinantes estaban muy de moda. En el siglo XX dejaron de considerarse esenciales, ya que no eran necesarios para demostrar resultados del álgebra lineal.

Las matrices, como dijimos, concretamente, aparecieron después. Vimos que el germen de la idea aparece en el año 200 a. C. También la idea aparece implícitamente en los trabajos de Gauss. De hecho, en 1811 Gauss presentó tu método de eliminación, lo hizo para calcular la órbita de un asteroide. Sin embargo, el método tampoco usaba matrices. Entre 1850 y 1858 Cayley estudió sistemáticamente las matrices rectangulares. La terminología se debe a Sylvester (1850). Cayley demostró en 1858 el resultado que hoy conocemos como teorema de Cayley–Hamilton, lo hizo para matrices de 2×2 y 3×3. Hamilton lo hizo para $n = 4$.

Apéndice A
Un artículo de Luis Santaló

En 1961 Luis Santaló escribió "La matemática en la Argentina", un artículo publicado en la *Revista de la Universidad de Buenos Aires*, V Época, Año VI, Núm. 2, 1961. Dado que es un artículo difícil de encontrar y contiene valiosa información sobre el desarrollo de la matemática en la Argentina, lo transcribimos a continuación.

La matemática en la Argentina

por L. A. Santaló

En los pueblos nuevos, tal como ocurrió en los que ahora son viejos cuando lo fueron, la matemática se desarrolla primero como técnica. Únicamente más tarde, en una segunda etapa, cuyo momento de aparición depende de un conjunto de circunstancias diversas, la matemática se convierte en ciencia.

Al decir que la matemática se desarrolla como técnica, entendemos que lo hace como instrumento para satisfacer ciertas necesidades inmediatas. En tiempos de paz, se necesita construir caminos, acondicionar puertos y levantar edificios y se enseñan y estudian las matemáticas que se precisan para ello. En tiempos de guerra, se necesita fortificar plazas estratégicas o calcular trayectorias balísticas y se cultivan las matemáticas útiles para estos fines. Sea en paz o en guerra, si se quiere desarrollar la navegación marítima, es preciso iniciar los estudios matemáticos correspondientes.

Durante este período los llamados matemáticos son únicamente "técnicos" o "conocedores" de la matemática. Han aprendido su simbolismo y la manera de aplicar a cada problema la fórmula correspondiente, pero todavía no toman parte activa en la creación matemática. Las bibliotecas se componen de manuales, tablas o textos, únicos libros utilizados; no existen, por no haber sentido la necesidad de ello, las revistas en que aparecen los últimos progresos y las nuevas investigaciones.

De repente, casi siempre por obra de una sola persona, ayudada por un ambiente ya devenido propicio, empieza la matemática como ciencia. Se inicia la investigación. Empiezan los cursos de matemática pura. Aparecen en las bibliotecas las colecciones de revistas especializadas. Se inicia la publicación de revistas propias, respondiendo al afán de dar a conocer los resultados nuevos obtenidos. Los matemáticos pasan a ser científicos que toman parte activa en la construcción del edificio matemático.

No vamos a ocuparnos en esta exposición, de la historia de la matemática en la Argentina durante el período pre-científico. El lector interesado puede verla en las monografías de C. C. Dassen, *Las matemáticas en la Argentina* (Buenos Aires, 1924), N. Besio Moreno, *Sinopsis histórica de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires de la enseñanza de la matemática y de la física en la Argentina* (Buenos Aires, 1915), y en el estudio más amplio de J. Babini, *Historia de la ciencia argentina* (Buenos Aires, 1949). Observaremos únicamente que la visión de los creadores de los sucesivos centros de enseñanza de la matemática y ciencias afines (Belgrano, Rivadavia, Sarmiento, Gutierrez) superaba el medio ambiente, quedando siempre sus intenciones de ilustración superior limitadas a los preámbulos de los decretos, ya que la realidad no permitía a dichos centros más que una vida efímera y un nivel justo para las necesidades mínimas del momento. Sin embargo, es gracias a los sucesivos esfuerzos de estas iniciativas que el ambiente, en un principio ausente, fue creándose lentamente.

El período 1917–1940

La matemática como ciencia empieza en la Argentina en 1917, con la llegada al país del profesor español Julio Rey Pastor, contratado por la universidad de Buenos Aires. Según gráficas palabras de Babini (*loc. cit.*, pág. 147):

> En la Argentina, convertir la matemática de una doncella de la ingeniería en una escuela de artesanía, con un ambiente de maestros y discípulos, ha sido la obra de estas últimas décadas que se inició con el arribo en 1917 del eminente maestro español Julio Rey Pastor.

Ayudado en parte por el ambiente, ya en elevada etapa de desarrollo como lo prueba el hecho mismo de su contratación y el entusiasta grupo de alumnos que siguieron sus primeros cursos, pero debido en otra parte a su proverbial energía, espíritu de lucha para afrontar las dificultades en vez de orillarlas o acomodarse ante ellas y a su entusiasmo contagioso por la investigación, la obra de Rey Pastor fue rápida, extensa y perdurable. Prácticamente toda la matemática argentina –como la española– durante más de veinte años llevó el sello, más o menos profundo, de Rey Pastor. Los temas estudiados fueron los que él inició y las ramas que dejó de lado, a pesar del amplio campo que siempre abarcó, quedaron prácticamente desconocidas[1].

[1] Un análisis detallado de la obra de Rey Pastor se encuentra en los trabajos de E. Terradas, *Julio Rey Pastor, hombre e investigador*, y F. Toranzos, *Rey Pastor y la enseñanza de la matemática en la Argentina*, en las Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral, vol. 5, 1945, dedicado a Rey Pastor al cumplirse 25 años de su actuación en la Argentina.

A su llegada, Rey Pastor organiza y dirige el instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires. Como hechos fundamentales, inspirados por Rey Pastor, que pueden servir de referencia para seguir la evolución de la matemática argentina citaremos:

(a) Creación del Doctorado en Ciencias Exactas; con ello, si bien las materias básicas siguen comunes con los estudios de ingeniería, empiezan a dictarse cursos superiores, la matemática moderna se introduce en el país y salen los primeros egresados como especialistas en matemática.
(b) En 1928, con el apoyo de las autoridades de la Facultad (decanato de Enrique Butty), se forma una importante biblioteca matemática; llegan por primera vez al país, para el Instituto de Matemáticas, colecciones fundamentales de revistas, indispensables para cualquier trabajo de investigación (*Journal de Crelle*, *Journal de Liouivlle*, *Mathematische Annalen*, *Annals of Mathematics*, *Transactions of the American Mathematical Society*, *Jahrbuch über die Dortschritte der Mathematik*, y muchas otras).
(c) Entre 1929 y 1933 aparece el *Boletín del Seminario Matemático Argentino* como publicación de la Facultad de Ciencias donde hay que buscar los primeros trabajos de investigación en un nivel superior.
(d) En 1936 se crea la Unión Matemática Argentina, entidad que junto con su *Revista* ha seguido hasta nuestros días y de la cual hablaremos más adelante.

Los cursos de Rey Pastor, sus seminarios y su siembra de temas de investigación fructifican rápidamente y en la década 1920–30 empiezan a aparecer las primeras contribuciones originales argentinas en el campo de la matemática, las cuales siguen con intensidad creciente entre 1930 y 1940. A ello contribuye también, desde su cátedra en la Facultad de Ciencias Físico–matemáticas de La Plata el italiano Hugo Broggi, principalmente en los temas que constituyen su especialidad: teoría de probabilidades y matemática actuarial.

El deseo de publicar los resultados obtenidos motiva la creación de revistas diversas. Aparte del *Boletín del Seminario Matemático Argentino* ya mencionado, comienzan las *Contribuciones* de la Facultad de Ciencias Físico–matemáticas de La Plata y aparece en 1924, por un breve período, la *Revista de Matemáticas* como órgano de una primera Sociedad Matemática Argentina, también de corta duración. Dentro de un marco mucho más amplio, algunos trabajos de matemáticas se publican en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina* y también algunas monografías aisladas aparecen como *Publicaciones del Círculo Matemático del Instituto Nacional del Profesorado Secundario* de Buenos Aires.

Repasando los volúmenes de esas publicaciones se encuentran los trabajos y nombres de los primeros "pioneers" de la investigación matemática argentina: J. Babini, J. Blaquier, E. de Cesare, A. Durañona y Vedia, A. González Domínguez, F. La Menza, A. Sagastume Berra, E. Samatan, F. Toranzos, A. Valeiras, J. C. Vignaux. Los temas tratados son en general de análisis infinitesimal o algebraico: series divergentes, criterios de sumación, relaciones entre series integrales, generalizaciones de una a más variables, aparte de algunas contribuciones en el campo de la geometría.

Predomina, sin que ello tenga forma exclusiva, la tendencia a la generalización y al cálculo algorítmico.

En 1928 la matemática argentina sale de los límites del país y se hace presente en el Congreso Internacional de Matemáticos de Bolonia, con trabajos de Babini, Blaquier y La Menza (publicados en las Actas del Congreso).

El período de 1940 a nuestros días

La labor tesonera y entusiasta de todos los matemáticos mencionados, la mayoría de los cuales pasa a desempeñar en plena juventud cátedras universitarias, rinde profundamente sus frutos, iniciándose una segunda etapa, la de 1940–60 en la cual aparecen nuevos valores, se amplía el campo de las especialidades cultivadas, los trabajos salen del ámbito nacional para ser publicados en revistas extranjeras de primera clase y son citados en las publicaciones de otros matemáticos foráneos.

El Instituto de Matemáticas de Buenos Aires, manteniéndose el foco central, deja de ser el exclusivo en investigación matemática. Se crean nuevos centros en el interior, no sin dificultades que a veces retrasan o anulan su desarrollo, pero que otras son superadas, afirmándose con el tiempo con mayor vitalidad. Se llega así al estado actual, cuyo panorama vamos a describir pasando revista de los principales centros que pueden considerarse en actividad.

El Departamento de Matemáticas de Buenos Aires. La obra de Rey Pastor se afianza y prolonga gracias a la obra de su discípulo y continuador Alberto González Domínguez. El Seminario del Instituto de Matemáticas es el verdadero semillero por donde se van divulgando nuevas teorías: análisis general y teorías de la integral (Rey Pastor), funciones analíticas y teoría matemática de circuitos (González Domínguez). Se investiga sobre estos temas. Se forman alumnos.

Entre 1945–48 frecuenta estos seminarios un alumno de ingeniería, cuya vocación y aptitud por la matemática se muestra evidente y es alentada por Rey Pastor y González Domínguez. Es el mendocino Alberto P. Calderón, que en 1949 se va a Chicago con una beca, para progresar rápidamente hasta conquistar el cargo de profesor titular que actualmente ocupa en la misma universidad. Se cumplen las esperanzas que expresara Dassen 1923, en el informe antes citado; de que "a su hora, aparezcan las lumbreras llamadas a dar lustre y originalidad a la ciencia matemática argentina". La obra de Calderón es ya imperecedera. El mundo hispano–parlante tiene ya, por primera vez, un representantes en las altas esferas de la ciencia matemática.

En 1950, al aparecer la teoría de distribuciones de L. Schwartz, ella encuentra en González Domínguez un entusiasta propulsor. Desde entonces el Instituto de Matemáticas de Buenos Aires es un foco de "distribucionistas", tanto en su puro aspecto matemático, como en sus aplicaciones a la física matemática y en especial a la electrodinámica cuántica. Hay que mencionar, a este respecto, los trabajos de R. Scarfiello, alumno y colaborador de González Domínguez.

En 1955, al iniciarse la nueva época para la Universidad, el Instituto de Matemáticas desaparece para integrarse con el Departamento de Matemáticas. Las nuevas autoridades, el interventor J. Babibi primero y el decano R. García después, ofrecen amplia ayuda al departamento consiguiendo fondos para poner al día su biblioteca, creando cargos con dedicación exclusiva o semi-exclusiva para su personal docente de todas las categorías; se incorporan al Departamento nuevos profesores.

Todo ello significó un rápido incremento de los estudios matemáticos: se extendieron los campos, aumentó el número de alumnos, mejoró el ambiente para el trabajo original. La incorporación de Mischa Cotlar se deja sentir rápidamente. Si bien ya había pertenecido al Instituto anteriormente en calidad de investigador y había influido con sus primeras tendencias hacia teorías abstractas (teoría de la medida, teoría ergódica), desde 1957 se dedica al campo de las integrales singulares que encuentra ambiente propicio por la tradición analista de la escuela y permite rápidamente la formación de jóvenes de seguro porvenir (Panzone, Merlo).

Otras direcciones son también cultivadas en el departamento. La historia y la filosofía de la ciencia, por J. Babini; las probabilidades y sus ramificaciones actuales en la investigación operativa por R. Carranza, la topología algebraica por Gutiérrez Burzaco; la lógica matemática por G. Klimovsky; las ecuaciones diferenciales no lineales por E. O. Roxin; la geometría diferencial por L. Santaló; el análisis y topología general por O. Varsavsky (hasta 1959). En 1958 empieza la publicación en rotaprint de la serie “Cursos y Seminarios de Matemática”, gracias al esfuerzo de Cora Sadosky, profesora de álgebra, los cuales rápidamente adquieren un alto prestigio, llegando de todas partes pedidos de canje o adquisición.

Teniendo en cuenta la importancia del cálculo numérico y de la matemática aplicada en muchos aspectos de la ciencia actual, el Departamento prestó especial atención a su cultivo y desarrollo. Contó para ello con Manuel Sadosky, hábil especialista y excelente organizador. Se fue formando un equipo de calculistas y creando ambiente para los estudios teórico-prácticos del cálculo numérico. En 1960 se funda la Sociedad Argentina de Cálculo. En mayo de 1961 se inaugura una computadora electrónica, marca Mercury de la casa Ferranti, comprada gracias a un subsidio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, para que funcione en el nuevo edificio de la Facultad de Ciencias Exactas y depende del Instituto del Cálculo de la misma. El Instituto contará con P. M. Zadunaisky, especialista reconocido, contratado al efecto.

Una computadora electrónica tiene una capacidad de trabajo extraordinaria. Por ello se ha puesto a disposición de las distintas Universidades e Institutos del país para que presenten sus problemas. Se han organizado, con la idea de repetirlos periódicamente, cursillos rápidos para enseñar los métodos de preparar los problemas para la máquina. Así, cada institución interesada podrá tener un equipo propio de especialistas dedicados a preparar los problemas (trazado de “programas”), que luego la computadora resolverá en pocos minutos.

La Unión Matemática Argentina. Aunque no constituye un centro de investigación matemática, todo balance de la matemática argentina de los últimos decenios debe mencionar el papel importante desempeñado por la Unión Matemática Argentina (U. M. A.), asociación que agrupa prácticamente a todos los matemáticos argentinos. Se fundó en 1937 y tiene en su haber:

(a) La publicación de la *Revista de la Unión Matemática Argentina*, que más tarde (1945) fue también el órgano de la Asociación Física Argentina (A. F. A) y actualmente (desde 1951) es la Revista conjunta de ambas instituciones. Actualmente está próxima la terminación del volumen XIX. La *Revista* no tuvo nunca subvención oficial, hasta 1959 en que empezó a recibir, y desde entonces anualmente, una subvención del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.
(b) Patrocinó varias Jornadas Matemáticas en distintos lugares del país (Buenos Aires, La Plata, San Luis, Rosario, Córdoba, Bahía Blanca) y reuniones de matemáticos, a algunas de las cuales concurrieron matemáticos calificados de países vecinos.
(c) En 1960, en ocasión del sesquicentenario de la Revolución de Mayo, la U. M. A. fue encargada por la Comisión Nacional al efecto de organizar las Sesiones Matemáticas Argentinas, que tuvieron lugar en el mes de septiembre en Buenos Aires y La Plata.
(d) Es miembro del patronato de la *Mathematical Reviews*.
(e) Tiene un convenio de reciprocidad por la cual sus miembros pueden serlo de la American Mathematical Society de manera automática, con sólo el abono de la cuota, reducida a la mitad de la ordinaria.
(f) Está adherida a la Unión Internacional de Matemáticos.

El Departamento de Matemáticas de La Plata. Depende de la Facultad de Ciencias Físico-matemáticas de la Universidad de La Plata. Aunque en esta Facultad tienen peso predominante los estudios de ingeniería, la existencia de un doctorado en ciencias matemáticas favoreció los estudios de matemática pura. Aparte del campo del análisis (Durañona, Trejo), mecánica celeste (R. Cesco) y geometría (de Cesare), una característica notable de la escuela platense fueron los estudios de álgebra moderna llevados a cabo por Sagastume. Durante varios años, Sagastume fue el único que se dedicó en la Argentina al álgebra moderna, publicando trabajos y dirigiendo tesis en dicho campo.

Exponentes de la joven escuela platense han sido Ricabarra, Zarantonello y Turrin, este último fallecido prematuramente. Ricabarra, después de trabajar varios años con Cotlar, se dedica al problema de Suslin, publicando en 1959 la importante contribución al mismo, en forma de libro titulado *Conjuntos ordenados y ramificados*. Actualmente orienta sus seminarios en La Plata hacia la topología diferencial. Zarantonello se perfeccionó en los Estados Unidos con G. Birkhoff, publicando con el mismo el libro *Jets, wakes and cavities* (1957), de gran importancia para la fundamentación rigurosa de muchos puntos de la mecánica de fluidos. El clima obligó a Zarantonello a abandonar las humedades del litoral bonaerense, trasladándose a Mendoza donde se encuentra actualmente, esforzándose para crear un ambiente de investigación en su especialidad.

En el presente, el Departamento de Matemáticas de La Plata, además de Ricabarra, cuenta con G. Fernández para la geometría diferencial, C. Trejo para probabilidades y análisis superior, J. Bosch para la topología algebraica y L. Bruschi, brillante discípulo de Monteiro, Zarantonello y Cotlar, que ha probado ya su capacidad para la investigación original. Como órgano de publicación, el Departamento cuenta con la *Revista* de la Facultad de Ciencias Físico-matemáticas, en la cual aparecen trabajos de matemáticas, si bien no de manera exclusiva, pues es común a todos los departamentos de la facultad.

La matemática en Tucumán. La Universidad de Tucumán ha mostrado desde 1940 especial interés por la matemática. En esta fecha se contrató al italiano A. Terracini, que junto con el físico F. Cernuschi funda la *Revista de Matemáticas y Física teórica* cuyo volumen XIII acaba de aparecer (1961). Terracini regresó a Italia en 1947, pero el departamento de matemática quedó en las ya expertas manos de F. E. Herrera, quien desde entonces lo ha mantenido en estado activo y, sobre todo en su especialidad (análisis matemático, series de Fourier), en un nivel elevado.

Herrera ha procurado activar las distintas especialidades, aconsejando a la Universidad la contratación de profesores extranjeros y así, desde 1947, pasan por Tucumán los matemáticos alemanes A. Lammel, W. Dahmköhler, L. Koschmieder y el japonés M. Itoh. Lamentablemente, a veces el ambiente y otras el cambio de rumbo de las autoridades universitarias, hicieron que todos ellos permanecieran en Tucumán por poco tiempo (dos, tres o cuatro años). Sin embargo, su paso no fue, ni mucho menos, inútil. En el departamento de matemáticas se nota en múltiples detalles la influencia del mismo. Hay biblioteca y ambiente para la investigación. Algunos jóvenes, en especial R. Luccioni, han probado ya su capacidad y vocación para la misma.

El Instituto de Matemáticas de Rosario. En 1939 se crea en Rosario el Instituto de Matemáticas, dependiente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral. Ya con anterioridad, el decano Cortés Pla, secundado por un grupo de entusiastas profesores (C. Dieulefait, F. Gaspar, J. Olguin, S. Rubinstein) había conseguido dotarlo de una excelente biblioteca. Se contrata a Beppo Levi como director y a L. Santaló como investigador principal. La labor desarrollada por el Instituto puede verse en sus dos series de publicaciones: las *Publicaciones del Instituto de Matemáticas* desde 1939 hasta 1946 y las *Mathematicae Notae* iniciadas en 1941 y que continúan en la actualidad.

No puede decirse que el Instituto haya logrado formar una escuela de investigaciones, tal vez debido a estar unida a una Facultad de ingeniería, sin un doctorado u otra carrera análoga más específicamente matemática, pero no hay duda de que a su alrededor se ha formado el grupo de bien capacitados profesores (E. Gaspar, E. O. Ferrari, J. Olguin) que hoy tienen a su cargo las matemáticas de la Facultad. En sus seminarios se formó P. E. Zadunaisky, especialista en cálculo numérico, hoy en Harvard, pero ya contratado por el Instituto del Cálculo de Buenos Aires, como ya dijimos anteriormente.

Gracias al apoyo de las autoridades de la Facultad y al canje con sus publicaciones, la biblioteca del Instituto es de las mejores del país. Si bien en el presente, con la jubilación de Beppo Levio, la actividad del Instituto aparece disminuida, las bases están creadas y el ímpetu es latente para que aparezca, en cualquier momento, un nuevo y más definitivo florecimiento.

Las matemáticas en la zona de Cuyo. La Universidad Nacional de Cuyo inicia los estudios de matemática llevando a los españoles M. Balanzat a San Luis (1940), E. Corominas a Mendoza (1940) y P. Pi Calleja a San Juan (1941). En San Juan, probablemente por formar parte de una Facultad de Ingeniería, es donde tienen más arraigo. La obra iniciada por Pi Calleja y continuada, desde 1950, por el portugués A. Monteiro encuentra brillantes adeptos en A. Diego y L. Bruschi, actualmente en Bahía Blanca el primero y en La Plata la segunda y, principalmente, en O. R. Villamayor, que después de perfeccionarse durante dos años en los Estados Unidos en álgebra homológica, en cuyo campo produce importantes contribuciones, dirige actualmente el Instituto de Matemáticas de Bahía Blanca.

En 1954 se crea en Mendoza el Instituto de Matemáticas dependiente del D. I. C. (Departamento de Investigaciones Científicas de la Universidad de Cuyo), consiguiendo reunir por breve tiempo un grupo importante de matemáticos: Cotlar, Monteiro, Zarantonello, Villamayor, Ricabarra, Voelker, Klimovsky, Varsavsky, Bosch. Se inicia la publicación de la *Revista Matemática Cuyana*. Lamentablemente el Instituto tiene poca duración. Por causas diversas, en 1957, sus componentes se dispersan y queda únicamente Zarantonello. La Universidad decide entonces concentrar sus estudios de matemática superior en San Luis, sede de la Facultad de Ciencias. Allí se traslada la biblioteca, ya cuantiosa, y se contrata a los alemanes Voelker y Dahmköler en cuya obra, recién empezada, hay que cifrar halagüeñas esperanzas.

El Departamento de Matemáticas de Bahía Blanca. Desde el momento de su fundación (1956) la Universidad Nacional del Sur demostró interés por los estudios de matemática pura. Con buen acierto contrató a Monteiro, cuya habilidad insuperable para formar escuela estaba bien probada por su actuación anterior en Lisboa, Río de Janeiro y San Juan. Efectivamente, contraponiendo a la falta de ambiente y a la carencia de biblioteca, su capacidad, entusiasmo y tenacidad sin igual, consigue en menos de un lustro formar una escuela original que promete desarrollarse con bríos al soplo de las brisas de las más nuevas tendencias de la matemática moderna. Acompañan a Monteiro varios colaboradores: Villamayor, siempre dedicado al álgebra moderna y en especial al álgebra homológica; el portugués Ruy Gomes, analista distinguido, y A. Diego, joven alumno de Monteiro dedicado a la lógica matemática. Por otra parte, es frecuente que el Instituto cuente con profesores visitantes extranjeros, gracias a la ayuda financiera de la universidad y muchas veces del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

El afianzamiento de una escuela de investigadores no es cosa fácil. La tradición y los años de vida son factores importantes para ello. Esperemos que los vaivenes, tan frecuentes en nuestras universidades, no sean en la de Bahía Blanca lo suficientemente acentuados como para destruir esta obra, ya que es un ejemplo de cómo la capacidad, dedicación y vocación pueden salvar etapas y formar, en pocos años, un centro comparable o superior a otros con mucha más vieja tradición.

El Centro Regional de Matemáticas de Buenos Aires. En 1959 se creó el Centro Regional de Matemáticas para América Latina, mediante un convenio entre la UNESCO y la Universidad de Buenos Aires. La UNESCO se compromete a enviar al Centro diez becarios de distintos países latinoamericanos, cada dos años. La Universidad de Buenos Aires debe proporcionarles alojamiento y asistencia médica. Por otra parte, la Universidad de Buenos Aires permite a sus profesores con dedicación exclusiva que dediquen al Centro la atención necesaria. Esto hace que el Centro funcione en estrecha unión con la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Los cursos y seminarios son comunes a ambas instituciones. La dirección del Centro está a cargo de A. González Domínguez, que a su vez es el jefe del Departamento de Matemáticas de la Facultad. Profesores extranjeros, enviados por la UNESCO en concepto de ayuda técnica, dictan anualmente uno o dos cursos cuatrimestrales en el Centro. Con ayuda del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, el Centro y la Facultad invitan todos los años a A. Calderón para que desarrolle un seminario entre los meses de septiembre a diciembre.

Los becarios del centro llegan en general con preparación muy diferente. Esto hace que a unos se les aconseje seguir cursos regulares antes de dirigirlos hacia temas más específicos, mientras que otros pueden polarizar de inmediato su atención hacia temas concretos de investigación. Este año termina el primer grupo de becarios que han procedido de Ecuador, Paraguay, Perú, Uruguay y Venezuela. Los resultados obtenidos, en cada caso dentro de su nivel inicial, han sido satisfactorios.

Hemos pasado revista de los centros matemáticos de la Argentina en los cuales la investigación, sea en forma activa o como anhelo latente, es la principal preocupación. No hemos detallado la producción conseguida. Ello sería fácil resumiendo las críticas publicadas en el *Mathematical Reviews* o en el *Zentralblatt für Mathematik* de los trabajos publicados por los matemáticos mencionados y otros que podemos haber olvidado. Si lo mismo se hiciera para los años anteriores a 1940, sustituyendo dichas revistas por la más antigua y ya desaparecida *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, se vería de manera objetiva confirmada nuestra afirmación, por otra parte evidente: la producción matemática original empieza en 1920, sigue lentamente hasta 1940, para aumentar luego con mayor pendiente hasta nuestros días. Si a la cantidad de los trabajos se le agrega el peso de la calidad, lo que puede hacerse también de manera objetiva por el tenor de los comentarios en las revistas citadas o por la repercusión que los trabajos han tenido para otras publicaciones, el brusco cambio de pendiente que se opera entre 1940 y 1950 es todavía más notorio.

Estamos, pues, en punto ascendente, de máxima pendiente respecto del pasado. Responsabilidad de los matemáticos es hacer que este impulso ascendente, que inició Rey Pastor, siga sin alto ni decadencia. Las principales dificultades, que como las de toda empresa fueron las iniciales, ya están vencidas. Pero no hay que descuidarse; el ritmo del progreso debe ser cada día mayor si no se quiere retroceder respecto de los centros que en el mundo van a la vanguardia del mismo. La multiplicidad de éstos, y la protección con que cuentan en muchos países, imprimen al progreso general un ritmo febril. Cuidemos, sin embargo, que ello no alimente un suicida complejo de inferioridad. Y repitamos que las grandes cosas son siempre la unión de otras más pequeñas: no esperemos, con las manos cruzadas, la llegada de una inspiración genial que revolucione de golpe toda la ciencia. Quienes adoptan esta posición, la más *cómoda* por otra parte, es muy probable que no hagan nunca nada. Alentemos, por el contrario, las pequeñas producciones originales, puesto que ellas pueden ser el germen de otras mayores y, en todo caso, nunca lo pequeño ha impedido que el capaz y predestinado llegue a los descubrimientos geniales.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U. B. A.

Referencias

1. A. G. Ağargün and C. R. Fletcher. al-Fārisī and the fundamental theorem of arithmetic. *Historia Math.*, 21(2):162–173, 1994.
2. A. G. Ağargün and E. M. Özkan. A historical survey of the fundamental theorem of arithmetic. *Historia Math.*, 28(3):207–214, 2001.
3. G. A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris. *Padé approximants*, volume 59 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996.
4. P. Beckmann. *A history of π (pi)*. The Golem Press, Boulder, Colo., second edition, 1971.
5. A. H. Bell. The Çattle Problem."By Archimedies 251 B. C. *Amer. Math. Monthly*, 2(5):140–141, 1895.
6. E. T. Bell. *Men of mathematics*. Simon & Schuster, New York, 1965. Paperback of the 1937 edition [MR3728303].
7. C. B. Boyer. *A history of mathematics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1991. With a foreword by Isaac Asimov, Revised and with a preface by Uta C. Merzbach.
8. E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986. Translated from the German original by John Stillwell, [2012] reprint of the 1986 edition.
9. F. Cajori. History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *Amer. Math. Monthly*, 20(7):205–210, 1913.
10. F. Cajori. History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *Amer. Math. Monthly*, 20(6):173–182, 1913.
11. F. Cajori. History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *Amer. Math. Monthly*, 20(4):107–117, 1913.
12. F. Cajori. History of the Exponential and Logarithmic Concepts:. *Amer. Math. Monthly*, 20(3):75–84, 1913.
13. F. Cajori. History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *Amer. Math. Monthly*, 20(2):35–47, 1913.
14. F. Cajori. History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *Amer. Math. Monthly*, 20(1):5–14, 1913.
15. F. Cajori. Origin of the Name "Mathematical Induction". *Amer. Math. Monthly*, 25(5):197–201, 1918.
16. J. L. Coolidge. The story of the binomial theorem. *Amer. Math. Monthly*, 56:147–157, 1949.
17. J. L. Coolidge. The number *e*. *Amer. Math. Monthly*, 57:591–602, 1950.
18. A. Del Centina. Unpublished manuscripts of Sophie Germain and a revaluation of her work on Fermat's last theorem. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 62(4):349–392, 2008.
19. L. E. Dickson. On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem. *Ann. of Math. (2)*, 20(3):155–171, 1919.

20. L. E. Dickson. “On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem” [MR1502549]. Addenda. *Ann. of Math. (2)*, 20(4):297, 1919.
21. L. E. Dickson. *History of the theory of numbers. Vol. II: Diophantine analysis*. Chelsea Publishing Co., New York, 1966.
22. Euclid. *Euclid's Elements*. Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002. All thirteen books complete in one volume, The Thomas L. Heath translation, Edited by Dana Densmore.
23. Euclides. *Elementos: Libros I-VII. Edición de María Luisa Puertas Castaño*. Biblioteca Clásica Gredos. Gredos, 1982.
24. Euclides. *Elementos: Libros VIII-XIII. Edición de María Luisa Puertas Castaño*. Biblioteca Clásica Gredos. Gredos, 1982.
25. C. Goldstein. On a seventeenth-century version of the “fundamental theorem of arithmetic”. *Historia Math.*, 19(2):177–187, 1992.
26. D. R. Green. The historical development of complex numbers. *Math. Gaz.*, 60(412):99–107, 1976.
27. T. Hayashi. A note on Bhāskara I's rational approximation to sine. *Historia Sci.*, (42):45–48, 1991.
28. T. Heath. *A history of Greek mathematics. Vol. I*. Dover Publications, Inc., New York, 1981. From Thales to Euclid, Corrected reprint of the 1921 original.
29. T. Heath. *A history of Greek mathematics. Vol. II*. Dover Publications, Inc., New York, 1981. From Aristarchus to Diophantus, Corrected reprint of the 1921 original.
30. T. L. Heath. *A manual of Greek mathematics*. Dover Publications, Inc., New York, 1963.
31. K. K. Kataria. A probabilistic proof of the multinomial theorem. *Amer. Math. Monthly*, 123(1):94–96, 2016.
32. W. Knorr. Problems in the interpretation of Greek number theory: Euclid and the “fundamental theorem of arithmetic”. *Stud. Hist. Philos. Sci.*, 7(4):353–368, 1976.
33. R. Laubenbacher and D. Pengelley. “Voici ce que j'ai trouvé:” Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's last theorem. *Historia Math.*, 37(4):641–692, 2010.
34. H. W. Lenstra, Jr. Solving the Pell equation. *Notices Amer. Math. Soc.*, 49(2):182–192, 2002.
35. D. R. Lloyd. How old are the Platonic solids? *BSHM Bull.*, 27(3):131–140, 2012.
36. E. Loomis. *The Pythagorean proposition: its demonstrations analyzed and classified, and bibliography of sources for data of the four kinds of proofs*. Classics in mathematics education. National Council of Teachers of Mathematics, 1968.
37. D. F. Mansfield and N. J. Wildberger. Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. *Historia Math.*, 44(4):395–419, 2017.
38. R. L. McCabe. Theodorus' irrationality proofs. *Math. Mag.*, 49(4):201–203, 1976.
39. M. B. Nathanson. A short proof of Cauchy's polygonal number theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99(1):22–24, 1987.
40. L. M. Osen. *Women in mathematics*. The MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1974.
41. J. Rey Pastor and J. Babini. *Historia de la Matemática, Volumen 1*. Colección hombre y sociedad. Gedisa, Editorial, S.A., 2000.
42. J. Rey Pastor and J. Babini. *Historia de la Matemática, Volumen 2*. Colección hombre y sociedad. Gedisa, Editorial, S.A., 2000.
43. P. Schreiber. A note on the cattle problem of Archimedes. *Historia Math.*, 20(3):304–306, 1993.
44. S. A. Shirali. The Bhaskara-Aryabhata approximation to the sine function. *Math. Mag.*, 84(2):98–107, 2011.
45. R. Solomon. A brief history of the classification of the finite simple groups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 38(3):315–352, 2001.
46. R. Solomon. Afterword to the article “A brief history of the classification of the finite simple groups”. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 55(4):453–457, 2018.
47. J. Stillwell. *Mathematics and its history*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2010.
48. V. S. Varadarajan. Euler and his work on infinite series. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 44(4):515–539, 2007.

49. I. Vardi. Archimedes' cattle problem. *Amer. Math. Monthly*, 105(4):305–319, 1998.
50. W. C. Waterhouse. On the cattle problem of Archimedes. *Historia Math.*, 22(2):186–187, 1995.
51. A. Weil. *Number theory*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1984. An approach through history, From Hammurapi to Legendre.
52. E. M. Wright. A prime-representing function. *Amer. Math. Monthly*, 58:616–618, 1951.

Índice alfabético