

Nudos, quandles y homología

Leandro Vendramin

Resumen Presentamos una introducción informal a la teoría combinatoria de nudos. Discutiremos el grupo fundamental de un nudo, invariantes por coloreo e invariantes dados por quandles y homología de quandles.

1. Introducción

Robert Graves¹ cuenta una leyenda griega en la que un oráculo anunció a los habitantes de Frigia que reconocerían a su futuro rey al verlo llegar en una carreta de bueyes. Tiempo después, el pueblo reconoció en un campesino de nombre Gordias a su nuevo rey. En agradecimiento, Gordias ofreció a Zeus su carro y el yugo, que había atado con un nudo tan complicado que nadie podría desatar. Se dijo que el que fuera capaz de desatar el nudo de Gordias conquistaría Asia. Siglos después, Alejandro Magno tuvo que enfrentarse al reto de desatar ese nudo y, sin vacilación, deshizo el nudo al cortar la cuerda con su espada. Según se dice, esa misma noche, Zeus, con una fuerte tormenta, mostró su aprobación a la solución encontrada por Alejandro Magno.



La teoría de nudos, en principio, intenta entender los nudos que podríamos encontrarnos en la vida real. El objetivo final de la teoría es obtener una clasificación

Leandro Vendramin
Vrije Universiteit Brussel, e-mail: Leandro.Vendramin@vub.be

¹ R. Graves, Los mitos griegos, Alianza Editorial, 1996.

completa de nudos a menos de deformaciones continuas. A simple vista, uno podría pensar entonces que la teoría de nudos es una divertida rama de la topología. Si bien esto es cierto, es necesario destacar que el estudio de los nudos se lleva a cabo gracias al uso de técnicas muy profundas que provienen de distintas ramas de la matemática como la geometría, el álgebra y el análisis. La teoría de nudos tiene además muchas aplicaciones en otras ciencias como la biología, la física y la criptografía.

Invitamos al lector a que tome un pedazo de cuerda y haga un nudo tal como el que vemos a la izquierda en la figura 1. Si pegamos los extremos de esa cuerda obtendremos una cuerda anudada que no tiene extremos tal como la que vemos a la derecha en la figura 1.



Figura 1: Nudos.

¿Puede desatarse ese nudo? Después de varios minutos de experimentación se hace más o menos evidente que ese nudo podrá deshacerse solamente si nos permitimos cortar la cuerda. Sin embargo, si aceptamos soluciones como la que encontró Alejandro Magno, entonces todo nudo puede desatarse y el problema de clasificar nudos –que resulta ser muy poco interesante– queda resuelto: todo nudo es trivial.

¿Qué pasa si no está permitido cortar cuerdas? ¿Cómo podríamos demostrar matemáticamente que un nudo no puede desatarse? Para responder esta pregunta, primero es necesario describir matemáticamente un nudo de forma tal que la definición permita modelar con cierta fidelidad el fenómeno real de anudar una cuerda. Necesitamos además que nuestra definición excluya patologías matemáticas desagradables tales como hacer desaparecer un nudo al tirar indefinidamente de los extremos de la cuerda. Por último, necesitamos una definición precisa y acertada de lo que significa que dos nudos sean *equivalentes*, es decir iguales aunque se vean distintos. Una vez que tengamos estas cosas, habremos formulado matemáticamente el problema de estudiar nudos, y entonces, tal como se hace en muchas ramas de la matemática, podremos concentrarnos en estudiar nudos mediante el uso de invariantes.

Agradecimientos

Estas notas corresponden a un minicurso dictado en el Encuentro Nacional de Álgebra, elENA VII, La Falda, Córdoba, Argentina, 2014. Agradezco a Agustín García, Jonathan Barmak, Edwin Clark, Marco Farinati, César Galindo, Juliana García Galofre, César Massri y Masahico Saito por los comentarios y las correcciones. Para terminar, quiero expresar mi agradecimiento a un anónimo y cuidadoso revisor; sus comentarios fueron de gran ayuda.

2. Nudos

Esta primera sección está dedicada a los conceptos básicos de la teoría de nudos y al teorema de Reidemeister, que nos permite traducir el problema topológico de distinguir nudos al lenguaje de la combinatoria.



Figura 2: Kurt Reidemeister (1893–1971)

Definición 1. Un nudo (en \mathbb{R}^3) es una función inyectiva y continua $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

En el conjunto de nudos definimos la relación de equivalencia dada por **isotopía**.

Definición 2. Diremos que los nudos dados por las funciones α y β son **equivalentes** si y sólo si existe una función continua $H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la función $H_t: z \mapsto H(z, t)$ es un nudo para todo $t \in [0, 1]$, $H_0 = \alpha$ y $H_1 = \beta$.

Los nudos pueden ser dotados de una orientación. Una **orientación** se define eligiendo una dirección para viajar alrededor del nudo. En este artículo trabajaremos principalmente con nudos orientados.

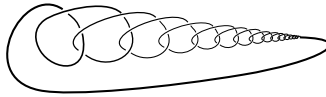


Figura 3: Un ejemplo de nudo salvaje.

Para evitar patologías desagradables, consideraremos únicamente nudos equivalentes a nudos dados por poligonales. Estos nudos se llaman **nudos mansos**. En la figura 3 mostramos un ejemplo de nudo salvaje (no manso). Para nosotros, un **nudo** siempre será un nudo manso. En la práctica, nuestros nudos poligonales tendrán tantos segmentos que será casi imposible diferenciar a nuestra curva de una curva suave. En relación con esta observación, mencionamos el siguiente teorema:

Teorema 3. *Un nudo parametrizado por longitud de arco y de clase C^1 es manso.*

Demostración. La prueba de este resultado es muy técnica pero sólo utiliza conceptos básicos de cálculo avanzado. Para una demostración completa referimos al apéndice I de [6].

Para simplificar la notación, seremos un poco imprecisos a la hora de hablar de nudos. Un nudo será una función inyectiva y continua $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, su imagen o una clase de equivalencia de tales funciones. Por más extraño que parezca, esto no causará confusión alguna.

Sea K un nudo. Consideremos la proyección de K en el plano dada por

$$\pi: (x, y, z) \mapsto (x, y, 0).$$

Un punto $p \in \pi(K)$ es un **punto múltiple** si $\pi^{-1}(p)$ contiene más de un punto de K . La **multiplicidad** de p se define como el cardinal del conjunto $\pi^{-1}(p) \cap K$. Una proyección de K en el plano se dice **genérica** si tiene las siguientes propiedades: 1) hay una cantidad finita de puntos de multiplicidad mayor a uno, 2) no hay puntos de multiplicidad mayor a dos, y 3) no hay puntos dobles donde uno de los puntos es un vértice. La figura 4 muestra algunos ejemplos de cruces no admitidos en una proyección genérica.

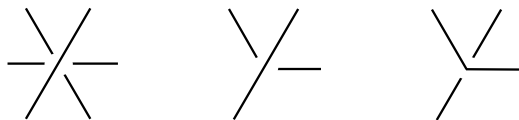


Figura 4: Cruces no admitidos en el diagrama de un nudo dado por una poligonal.

Un **diagrama** de K es una proyección genérica de K en el plano donde en cada **cruce** (punto de multiplicidad dos) se puede distinguir qué segmento pasa por arriba y qué segmento pasa por debajo. Para ilustrar esta situación, el segmento que pasa por debajo se dibuja cortado. Las componentes conexas del diagrama se llaman entonces **arcos**. Para diagramas de nudos orientados, agregaremos una flecha al diagrama que indique la orientación.

Cualquier nudo equivalente a S^1 será considerado como el **nudo trivial**. En la práctica, no siempre es fácil reconocer la trivialidad de un nudo. En la figura 5 vemos tres proyecciones distintas del nudo trivial. Una proyección aún más curiosa del nudo trivial puede verse en la figura 6.

En 1926 Reidemeister vislumbró una forma combinatoria de verificar si dos nudos son equivalentes. Básicamente, dos diagramas representarán al mismo nudo si y sólo si puede pasarse de un diagrama al otro mediante una sucesión finita de ciertas transformaciones, \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 y \mathcal{R}_3 , llamadas **movimientos de Reidemeister**. Hay tres de estos movimientos: el primero se muestra en la figura 7, el segundo en la figura 8 y el tercero en la figura 9.

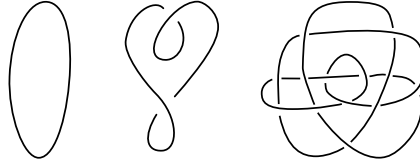


Figura 5: Tres proyecciones del nudo trivial.

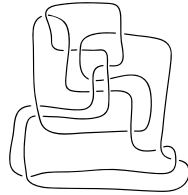


Figura 6: Una proyección del nudo trivial descubierta por Thistlethwaite.

Teorema 4 (Reidemeister). *Dos nudos son equivalentes si y sólo si sus diagramas están conectados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.*

Demostración. Para la demostración referimos a [3, 1.14].

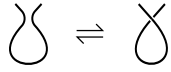


Figura 7: \mathcal{R}_1

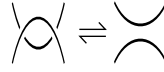


Figura 8: \mathcal{R}_2

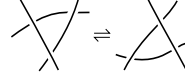


Figura 9: \mathcal{R}_3

El teorema de Reidemeister también puede utilizarse para nudos orientados si se consideran todas las configuraciones posibles para los diagramas de las figuras 7–9 con respecto a las posibles orientaciones. El teorema de Reidemeister es el núcleo de la teoría combinatoria de nudos, ya que nos permite, por ejemplo, pensar que un nudo es una clase de equivalencia de diagramas, donde dos diagramas son equivalentes si y sólo si están conectados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.

Ejemplo 5. El **nudo trébol** es quizá el nudo más famoso. Una representación paramétrica de la curva que da este nudo es

$$\begin{aligned} x &= \sin(t) + 2\sin(2t), \\ y &= \cos(t) - 2\cos(2t), \\ z &= -\sin(3t). \end{aligned}$$

El nudo trébol, tal como lo vemos a la izquierda en la figura 10, se denota por el símbolo 3_1 . Queda como ejercicio demostrar que los nudos de la figura 10 son equivalentes.

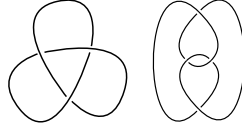


Figura 10: Dos proyecciones del nudo 3_1 .

Ejemplo 6. Otro nudo famoso es el nudo 4_1 o **nudo ocho**. Una representación paramétrica para la curva que da este nudo es

$$\begin{aligned}x &= (2 + \cos(2t)) \cos(3t), \\y &= (2 + \cos(2t)) \sin(3t), \\z &= \sin(4t),\end{aligned}$$

y una proyección puede verse en la figura 11.



Figura 11: El nudo 4_1 .

La **imagen especular** de un nudo se obtiene al aplicarle al nudo la transformación $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$. En la figura 12 vemos el nudo 3_1 y su imagen especular $m(3_1)$. En el ejemplo 59 demostraremos que los nudos 3_1 y $m(3_1)$ no son equivalentes.

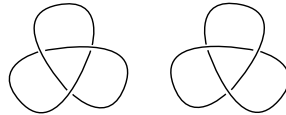


Figura 12: El nudo 3_1 (derecha) y su imagen especular $m(3_1)$ (izquierda).

Dos nudos orientados K y L serán equivalentes si existe una isotopía entre K y L compatible la orientación. Si K es un nudo orientado, el **reverso** $r(K)$ de K es K como conjunto pero con la orientación opuesta. Los operadores r y m son involuciones en el espacio de nudos y generan un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

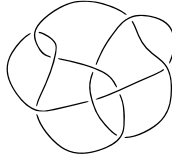


Figura 13: El nudo 9_{32} es totalmente asimétrico.

Ejemplo 7. El nudo 3_1 es equivalente al nudo $r(3_1)$.

Ejemplo 8. El nudo 4_1 es **totalmente simétrico**, es decir: los nudos 4_1 , $m(4_1)$, $r(4_1)$ y $rm(4_1)$ son todos equivalentes.

Ejemplo 9. El nudo 9_{32} de la figura 13 es **totalmente asimétrico**, es decir: los nudos 9_{32} , $m(9_{32})$, $r(9_{32})$ y $rm(9_{32})$ son todos no equivalentes.

3. Composición de nudos y nudos primos

Dados dos nudos orientados K y L podemos obtener un nuevo nudo con el siguiente procedimiento: Quitamos un pedacito de arco de cada una de las proyecciones de nuestros nudos y luego unimos los cuatro puntos finales obtenidos con dos nuevos arcos (es importante que hagamos esto sin agregar nuevos cruces) tal como muestra la figura 14.

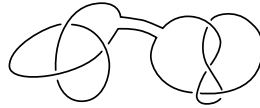


Figura 14: Composición de nudos.

Esta operación se denomina **composición** de nudos. La composición de los nudos K y L se denota por $K\#L$. No es difícil demostrar que la composición de nudos es una operación asociativa y conmutativa y que el nudo trivial es el neutro de esta operación. Para más información referimos a [1, §1.2]. Un nudo no trivial es **primo** si no puede descomponerse como la composición de otros nudos no triviales. Un nudo es **compuesto** si no es primo. El problema de determinar si un nudo dado es primo es extremadamente difícil. La figura 15 contiene las proyecciones de los primeros nudos primos (salvo reverso e imagen especular) donde cada nudo tiene a lo sumo siete cruces.

Ejemplo 10. Consideremos el nudo que se forma al componer dos nudos 3_1 . Este nudo se conoce como el **nudo de la abuela** (o *granny knot*, en inglés), se denota por $3_1\#3_1$, y se muestra a la izquierda en la figura 16.

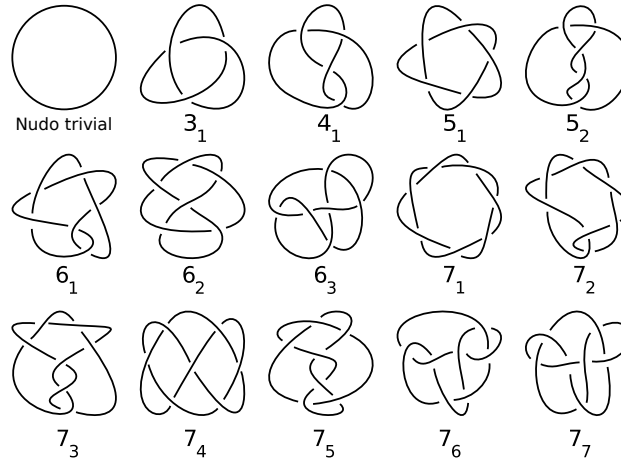


Figura 15: Algunos nudos primos.

Ejemplo 11. El nudo compuesto formado por 3_1 y su imagen especular $m(3_1)$ se conoce como el **nudo cuadrado** (o *square knot*, en inglés), se denota por $3_1 \# m(3_1)$, y se muestra a la derecha en la figura 16.

En los ejemplos 55 y 60 demostraremos que el nudo de la abuela y el nudo cuadrado no son equivalentes.

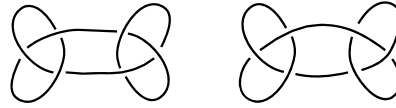


Figura 16: El nudo de la abuela (izquierda) y el nudo cuadrado (derecha) no son equivalentes.

Un teorema de H. Schubert establece que todo nudo puede expresarse en forma única como la composición de nudos primos [3, VII]. El género de un nudo y las superficies de Seifert permiten demostrar que el nudo trivial no puede escribirse como la composición de dos nudos no triviales, ver por ejemplo [1, §4.3]. Este resultado nos dice que no es posible hacer dos nudos consecutivos en un pedacito de cuerda de forma tal que estos nudos se cancelen mutuamente. Como la demostración de este resultado es bastante difícil, nos gustaría tener a mano una prueba más sencilla. Es por eso que formulamos el siguiente problema:

¿Existe algún invariante sencillo que permita demostrar que el nudo trivial no puede escribirse como la composición de dos nudos no triviales?

Puede construirse un invariante de nudos a partir de la cantidad de cruces que tienen los diagramas de un nudo. Para ser más precisos, definiremos el **número**

de cruces $c(K)$ de un nudo K como el menor número de cruces que aparece en cualquier diagrama del nudo K . La siguiente conjetura lleva abierta más de cien años y nos recuerda lo poco que sabemos del número $c(K)$, ver [1, §3.3] para más información.

Conjetura 12. $c(K\#L) = c(K) + c(L)$.

4. Coloraciones

Supongamos que queremos mostrar que un cierto nudo no es trivial. ¿Qué invariante sencillo podríamos obtener a partir de los tres movimientos de Reidemeister? Responderemos esta pregunta al introducir el **coloración con tres colores**. Fijemos un conjunto de tres colores, digamos {rojo, verde, azul}. Una proyección de un nudo es **coloreable con tres colores** si cada arco de la proyección puede colorearse con uno de los tres colores de tal forma que en cada cruce se ven los tres colores elegidos o únicamente uno de los tres.



Figura 17: Ralph Fox (1913–1973)

Todo nudo puede colorearse trivialmente con un solo color.

La cantidad de coloraciones con tres colores da un invariante de nudos. Este resultado es un caso particular del teorema 15 que veremos más adelante.

Ejemplo 13. Las figuras 18 y 19 nos muestran dos caras del mismo fenómeno: el nudo 3_1 tiene coloraciones no triviales con tres colores y el nudo 4_1 no. Vemos entonces que la coloración con tres colores nos permite distinguir el nudo 3_1 del nudo trivial y del nudo 4_1 . Sin embargo, no nos permite determinar si el nudo 4_1 es trivial.

Vamos a profundizar un poco en la idea de colorear con tres colores. Supongamos que nuestros colores son los elementos de $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ y que K es un nudo con n cruces. Si etiquetamos los arcos del nudo K con los elementos de \mathbb{Z}_3 vemos que la condición que define coloraciones por tres colores puede traducirse en términos de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales que tiene una ecuación

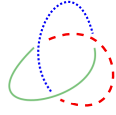


Figura 18: El nudo 3_1 coloreado con tres colores

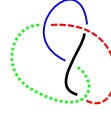


Figura 19: El nudo 4_1 puede colorearse con tres colores solamente de forma trivial.

por cada cruce del diagrama. Para ser más precisos, la ecuación que corresponde al cruce de la figura 20 es $a + b + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$. Observemos que esta ecuación puede reescribirse como

$$2a - b - c = 0, \quad (1)$$

donde el segmento que pasa por arriba está coloreado con el color a .

Cada coloración del nudo K será una solución del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (1). En particular, una coloración no trivial será una solución que involucre todos los elementos de \mathbb{Z}_3 .

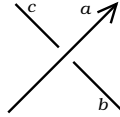


Figura 20: Un cruce como este se colorea con la ecuación $2a - b - c = 0$.

Ejemplo 14. Si etiquetamos con $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ los arcos del diagrama del nudo 3_1 que vemos en la figura 18, el sistema de ecuaciones que resuelve el problema de la coloración con tres colores es el siguiente:

$$\begin{cases} 2a - b - c = 0, \\ -a - b + 2c = 0, \\ -a + 2b - c = 0. \end{cases}$$

La cantidad de coloraciones con tres colores del nudo 3_1 es entonces la cantidad de vectores que tiene el núcleo de la **matriz de coloraciones** del nudo:

$$C(3_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 3}.$$

Como esta matriz tiene rango uno, el núcleo es un espacio vectorial (sobre \mathbb{Z}_3) de dimensión dos. Esto implica que el núcleo tiene nueve elementos, y por lo tan-

to el nudo 3_1 tiene nueve coloraciones con tres colores (de los cuales seis son no triviales).

En 1956 Fox definió una generalización de la coloración con tres colores. Sea $p > 2$ un número primo. Diremos que un nudo admite una **coloración de Fox con p colores** si cada arco puede etiquetarse con un elemento de $\mathbb{Z}_p = \{0, \dots, p-1\}$ de forma tal que en cada cruce como el que vemos en la figura 20 se cumple la ecuación

$$2a - b - c = 0,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$. Tal como se hizo en el ejemplo 14, estudiar coloraciones de Fox con p colores es equivalente a estudiar el núcleo de la matriz de coloraciones vista como matriz con coeficientes en \mathbb{Z}_p .

Teorema 15. *Sea $p > 2$ un número primo. La cantidad de coloraciones de Fox con p colores es un invariante de nudos.*

Demostración. Fijemos un diagrama y una coloración de Fox del diagrama. Como vemos en la figura 21, la cantidad de coloraciones no se altera al aplicar el primer movimiento de Reidemeister ya que $b = 2a - a = a$.

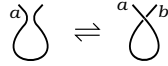


Figura 21: La coloración de Fox da un invariante por el primer movimiento de Reidemeister pues $b = 2a - a = a$.

La figura 22 nos muestra que la cantidad de coloraciones de Fox no se altera al aplicar el segundo movimiento de Reidemeister pues $c = 2a - (2a - b) = b$.

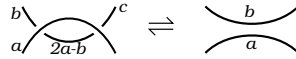


Figura 22: La coloración de Fox da un invariante por el segundo movimiento de Reidemeister pues $c = 2a - (2a - b) = b$.

La figura 23 prueba que la cantidad de coloraciones es invariante bajo el tercer movimiento de Reidemeister pues $d = 2a - (2b - c)$ y $d' = 2(2a - b) - (2a - c)$ implican que $d = d'$.

Hemos probado entonces que existe una biyección entre las coloraciones antes y después de aplicar los movimientos de Reidemeister. Luego, la cantidad de coloraciones de Fox es un invariante de nudos.

Ejemplo 16. Estudiemos algunas coloraciones del nudo 4_1 . Fijemos un número primo $p > 2$. Si los arcos del nudo 4_1 están etiquetados con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p$ tal como

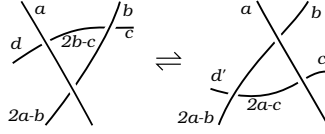


Figura 23: La coloración de Fox da un invariante bajo el tercer movimiento de Reidemeister pues $d = d'$.

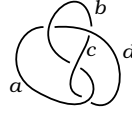


Figura 24: El nudo 4_1 .

vemos en la figura 24, el sistema de ecuaciones que resuelve el problema de la coloración de Fox con p colores es

$$\begin{cases} -a + 2b - d = 0, \\ -a - b + 2c = 0, \\ 2a - c - d = 0, \\ -b - c + 2d = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Como vimos en el ejemplo 13, la matriz asociada al sistema (2) es lo que denominamos la matriz de coloraciones del nudo 4_1 :

$$C(4_1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_p^{4 \times 4}.$$

Un cálculo elemental nos muestra que

$$\dim \ker C(4_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 3, \\ 2 & \text{si } p = 5. \end{cases}$$

Esto nos dice dos cosas: primero, que 4_1 no puede colorearse de forma no trivial con tres colores; y segundo, que 4_1 admite al menos una coloración de Fox no trivial con cinco colores. Luego, el nudo 4_1 no es equivalente al nudo trivial.

Ejercicio 17. Sean $p > 2$ un número primo y K un nudo con n cruces. Pruebe que la cantidad de coloraciones de Fox con p colores que tiene K es p^m para algún $m \leq n$.

Ejercicio 18. El cuadro 1 muestra cuáles de los nudos de la figura 15 admiten coloraciones de Fox no triviales para $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$. ¿Qué conclusiones puede obtener?

	3	5	7	11	13	17
3 ₁	✓					
4 ₁		✓				
5 ₁		✓				
5 ₂			✓			
6 ₁	✓					
6 ₂				✓		
6 ₃					✓	
7 ₁			✓			
7 ₂				✓		
7 ₃					✓	
7 ₄	✓	✓				
7 ₅						✓

Cuadro 1: Algunas coloraciones de Fox para los nudos de la figura 15.

5. El grupo fundamental de un nudo

En esta sección definiremos el grupo fundamental de un nudo y mostraremos que esta construcción da un buen invariante. Para una exposición detallada sobre las nociones básicas respecto del grupo fundamental de un nudo referimos a [6].

Definición 19. El grupo fundamental $\pi_1(K)$ del nudo K es el grupo $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$.

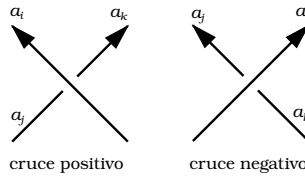


Figura 25: Una orientación da dos tipos de cruce. En ambos casos, la relación de Wirtinger es $a_i a_j a_i^{-1} = a_k$.

Veamos cómo calcular el grupo fundamental de un nudo. Supongamos que K es un nudo con n cruces. Etiquetamos los arcos con las variables a_1, a_2, a_3, \dots . Como se ve en la figura 25, el diagrama tendrá dos tipos de cruce: cruces positivos y cruces negativos. Por cada cruce χ del diagrama como el que vemos en la figura 25, consideramos la **relación de Wirtinger** $r_\chi = 1$, donde $r_\chi = a_i a_j a_i^{-1} a_k^{-1}$. El grupo fundamental de K es isomorfo al grupo dado por los generadores a_1, a_2, a_3, \dots y las relaciones de Wirtinger. Esta presentación del grupo fundamental se conoce como la **presentación de Wirtinger**.

Teorema 20 (Wirtinger). Sea K un nudo y supongamos que K tiene una proyección con n arcos y m cruces. Entonces

$$\pi_1(K) \simeq \langle a_1, a_2, \dots, a_n : r_1, r_2, \dots, r_m \rangle, \quad (3)$$

donde las relaciones r_1, \dots, r_m están dadas por las fórmulas de Wirtinger. La ecuación (3) simboliza el cociente grupo libre en a_1, \dots, a_n por el menor subgrupo normal que contiene a los elementos r_1, \dots, r_m .



Figura 26: Wilhelm Wirtinger (1865–1945)

Ejercicio 21. Pruebe que el grupo fundamental del nudo trivial es isomorfo a \mathbb{Z} .

En 1915 Dehn demostró que el grupo fundamental permite detectar la trivialidad de un nudo. Más precisamente, el teorema de Dehn establece que un nudo es trivial si y sólo si el grupo fundamental del nudo es isomorfo a \mathbb{Z} . Es importante remarcar que, en general, es muy difícil determinar si un grupo finitamente presentado es isomorfo al grupo trivial.



Figura 27: Max Dehn (1878–1952)

Ejemplo 22. Vamos a calcular el grupo fundamental del nudo 3_1 que vemos en la figura 28. Las relaciones de Wirtinger son

$$a_1 a_2 a_1^{-1} = a_3, \quad a_2 a_3 a_2^{-1} = a_1, \quad a_3 a_1 a_3^{-1} = a_2, \quad (4)$$

y entonces,

$$\pi_1(3_1) \simeq \langle a_1, a_2, a_3 : a_1 a_2 a_1^{-1} = a_3, a_2 a_3 a_2^{-1} = a_1, a_3 a_1 a_3^{-1} = a_2 \rangle.$$

Vamos a utilizar el grupo $\pi_1(3_1)$ para dar otra demostración de la no trivialidad de 3_1 . Como existe un morfismo de grupos $\pi_1(3_1) \rightarrow \mathbb{S}_3$ tal que

$$a_1 \mapsto (12), \quad a_2 \mapsto (23), \quad a_3 \mapsto (13),$$

y el grupo simétrico \mathbb{S}_3 es un grupo no abeliano, se sigue que $\pi_1(3_1)$ es un grupo no abeliano. En particular $\pi_1(3_1) \not\simeq \mathbb{Z}$ y entonces el nudo 3_1 no es equivalente al nudo trivial.

Ejercicio 23. Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Recordemos que el **grupo de trenzas** \mathbb{B}_n se define como el grupo dado por los generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ y las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{para todo } i \in \{1, \dots, n-2\}, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & \text{para todo par } i, j \text{ tal que } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Pruebe que $\pi_1(3_1) \simeq \mathbb{B}_3$.

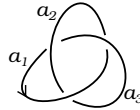


Figura 28: El grupo fundamental de 3_1 es isomorfo al grupo de trenzas \mathbb{B}_3 .

Tietze fue el primero en calcular el grupo fundamental del nudo 3_1 en 1908. Ese mismo año conjeturó que dos nudos son equivalentes si y sólo si sus complementos en \mathbb{R}^3 son homeomorfos. Muchos años después, en 1989, Gordon y Luecke probaron esta afirmación [7]. Como consecuencia del teorema de Gordon y Luecke puede probarse que dos nudos primos son equivalentes si y sólo si sus grupos fundamentales son isomorfos.

Ejemplo 24. Calculemos el grupo fundamental del nudo 4_1 de la figura 30. El diagrama tiene dos cruces positivos y dos negativos. Las relaciones de Wirtinger son:

$$a_4 = a_1 a_3 a_1^{-1}, \quad a_2 = a_3 a_1 a_3^{-1}, \quad a_1 = a_2^{-1} a_4 a_2, \quad a_3 = a_4^{-1} a_2 a_4.$$

Puede demostrarse que

$$\pi_1(4_1) \simeq \langle x, y \mid xyx^{-1}yx = yxy^{-1}xy \rangle.$$

Vamos a utilizar el grupo $\pi_1(4_1)$ para dar otra demostración de la no trivialidad del nudo 4_1 . Consideremos el morfismo $\pi_1(4_1) \rightarrow \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$ dado por



Figura 29: Heinrich Tietze (1880–1964)

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el grupo $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$ no es abeliano, se sigue que $\pi_1(4_1)$ no es abeliano. En particular $\pi_1(4_1) \not\cong \mathbb{Z}$ y entonces 4_1 no es el nudo trivial.

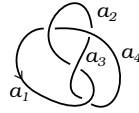


Figura 30: El grupo fundamental de 4_1 no es un grupo abeliano.

Ejemplo 25. Ahora vamos a utilizar $\pi_1(4_1)$ para demostrar que los nudos 3_1 y 4_1 no son equivalentes. Por lo visto en el ejemplo 22, si los grupos $\pi_1(4_1)$ y $\pi_1(3_1)$ fueran isomorfos, existiría un epimorfismo $\pi_1(4_1) \rightarrow \mathbb{S}_3$. Sin embargo, un cálculo directo muestra que ningún morfismo $\pi_1(4_1) \rightarrow \mathbb{S}_3$ es sobreyectivo.

Ejercicio 26. En la figura 16 vimos dos nudos compuestos: el nudo de la abuela y el nudo cuadrado. Pruebe que estos nudos tienen grupos fundamentales isomorfos.

Como veremos más adelante, el nudo de la abuela y el nudo cuadrado no son equivalentes. Luego, el grupo fundamental de un nudo es un buen invariante pero no es infalible, es decir: existen nudos no equivalentes con grupos fundamentales isomorfos.

6. Quandles

Sabemos que gracias a los movimientos de Reidemeister el problema de distinguir nudos puede formularse en términos de combinatoria. En esta sección vamos

a definir el quandle fundamental de un nudo y vamos a probar que es un invariante que generaliza al grupo fundamental y a los invariantes por coloraciones.

Los quandles son estructuras algebraicas que modelan la conjugación en un grupo. La primera aparición de cierta familia de quandles fue en 1943 cuando Mituhisa Takasaki introdujo los quandles involutivos –los llamó *keis*– con el fin de entender reflexiones. En 1959, los matemáticos ingleses John Conway y Gávil Wraith, después de un interesante intercambio de cartas e ideas, definieron los *wracks*. La idea de Conway y Wraith es que un *wrack* (hoy llamado simplemente *pecio* o *rack* en inglés) es esencialmente lo que queda de un grupo una vez que uno olvida la multiplicación y se preocupa únicamente por la conjugación. En 1982 Joyce introdujo los *quandles* con el fin de producir invariantes de nudos. Inspirado en la presentación de Wirtinger del grupo fundamental de un nudo, Joyce construyó el *quandle fundamental* de un nudo y probó que esta construcción da un buen invariante de nudos no orientados. Ese mismo año, y en forma independiente, Sergei Matveev también introdujo los quandles –los llamó *grupoides distributivos*– y probó un resultado similar al de Joyce. En 1988, para estudiar ciertos aspectos de la teoría de singularidades de curvas, el matemático alemán Egbert Brieskorn introdujo una estructura equivalente a la de Conway y Wraith: los *automorphic sets*.



Figura 31: Algunos de los fundadores de la teoría de quandles. De izquierda a derecha: John Conway, Gavin Wraith, David Joyce, Egbert Brieskorn.

Definición 27. Un *quandle* es un par (X, \triangleright) , donde X es un conjunto no vacío con una operación binaria $X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x \triangleright y$, tal que

$$\text{cada } \varphi_x: X \rightarrow X, y \mapsto x \triangleright y \text{ es biyectiva,} \quad (5)$$

$$x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z) \quad \text{para todo } x, y, z \in X, \quad (6)$$

$$x \triangleright x = x \quad \text{para todo } x \in X. \quad (7)$$

Utilizaremos la siguiente notación: $x \triangleright^{-1} y = \varphi_x^{-1}(y)$.

El artículo de Joyce utiliza una definición de quandle levemente distinta a la que damos en este artículo, ya que Joyce usa acciones a derecha y no acciones a izquierda.

Definición 28. Sean X e Y dos quandles. Una función $f: X \rightarrow Y$ es un *morfismo de quandles* si $f(x \triangleright x') = f(x) \triangleright f(x')$ para todo $x, x' \in X$.

Ejemplo 29. Sea X un conjunto no vacío. Entonces X es un quandle con $x \triangleright y = y$ para todo $x, y \in X$. Este quandle se denomina **quandle trivial** sobre X .

Ejemplo 30. Sean G un grupo y X una clase de conjugación de G . Entonces X es un quandle con $x \triangleright y = xyx^{-1}$ para todo $x, y \in X$. El quandle asociado a la clase de conjugación de g en G se llama **quandle de conjugación** asociado a (la clase de) g en G .

Ejercicio 31. Si X es un quandle de conjugación entonces

$$x \triangleright y = y \iff y \triangleright x = x \quad \text{para todo } x, y \in X. \quad (8)$$

Encuentre un quandle de tres elementos que no cumpla con la condición (8).

Ejercicio 32. Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Pruebe que \mathbb{Z}_n es un quandle con $x \triangleright y = 2x - y$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}_n$. Este quandle se denomina **quandle diedral** y se denota por d_n .

Ejemplo 33. Sea M un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo a izquierda. Definimos el **quandle de Alexander** sobre M como el quandle dado por

$$x \triangleright y = (1 - t)x + ty \quad \text{para todo } x, y \in M. \quad (9)$$

Demostremos que la acción (9) define una estructura de quandle sobre M . Es evidente que para cada $x \in M$ la función $\phi_x: y \mapsto (1 - t)x + ty$ es inversible y la inversa ϕ_x^{-1} está dada por $y \mapsto (1 - t^{-1})x + t^{-1}y$. Además $x \triangleright x = x$ para todo $x \in X$. Para demostrar la distributividad, tomamos $x, y, z \in M$ y calculamos

$$\begin{aligned} (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z) &= ((1 - t)x + ty) \triangleright ((1 - t)x + tz) \\ &= (1 - t)((1 - t)x + ty) + t((1 - t)x + tz) \\ &= (1 - t)x + t(1 - t)y + t^2z \\ &= (1 - t)x + t(y \triangleright z) \\ &= x \triangleright (y \triangleright z). \end{aligned}$$



Figura 32: James Alexander (1888–1971)

Veamos un caso particular de la construcción del quandle de Alexander.

Ejemplo 34. Sea \mathbb{F}_q el cuerpo de q elementos, donde q es una potencia de un número primo. Para cada $\alpha \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ definimos el **quandle de Alexander** de tipo (q, α) como el quandle sobre \mathbb{F}_q dado por $x \triangleright y = (1 - \alpha)x + \alpha y$ para todo $x, y \in \mathbb{F}_q$.

Ejercicio 35. Pruebe que el quandle de conjugación asociado a la clase de (123) en \mathbb{A}_4 es isomorfo a un quandle de Alexander.

Así como puede calcularse el grupo fundamental de un nudo gracias a la presentación de Wirtinger, es posible considerar el quandle fundamental de un nudo. Supongamos que K es un nudo con n arcos y m cruces. Como hicimos con las relaciones de Wirtinger, etiquetamos los arcos de la proyección con las variables a_1, a_2, a_3, \dots . En cada cruce χ como el que vemos en la figura 25 consideramos la relación

$$r_\chi : a_i \triangleright a_j = a_k. \quad (10)$$

Definición 36. El *quandle fundamental del nudo K* es el quandle

$$Q(K) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n : r_1, \dots, r_m \rangle,$$

donde las relaciones r_1, \dots, r_m están dadas por las fórmulas (10).

Ejemplo 37. El quandle fundamental del nudo 3_1 de la figura 28 es

$$Q(3_1) = \langle a_1, a_2, a_3 : a_1 \triangleright a_2 = a_3, a_2 \triangleright a_3 = a_1, a_3 \triangleright a_1 = a_2 \rangle. \quad (11)$$

Ejemplo 38. En el ejemplo 24 calculamos el grupo fundamental del nudo 4_1 . El quandle fundamental del nudo 4_1 de la figura 30 es

$$Q(4_1) = \langle a_1, \dots, a_4 : a_1 \triangleright a_3 = a_4, a_3 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_1 = a_4, a_4 \triangleright a_3 = a_2 \rangle. \quad (12)$$

Observemos que las dos primeras relaciones corresponden a cruces positivos y las dos últimas a cruces negativos.

No es difícil demostrar que el quandle fundamental de un nudo queda invariante por los movimientos de Reidemeister. La demostración es apenas más complicada que la del teorema 15. La diferencia está en que ahora habrá más diagramas de Reidemeister para verificar pues deben considerarse todas las configuraciones posibles con respecto a la orientación del nudo. Para el primer movimiento de Reidemeister deben verificarse los diagramas de la figura 33. Las posibles configuraciones que pueden aparecer en el segundo movimiento de Reidemeister se muestran en la figura 34.

Finalmente, para el tercer movimiento hay ocho posibles diagramas. Por ejemplo, la condición a verificar en la figura 35 es

$$a \triangleright^{-1} (b \triangleright c) = (a \triangleright^{-1} b) \triangleright (a \triangleright^{-1} c),$$

que es consecuencia de la definición 27.



Figura 33: Las configuraciones posibles en el primer movimiento de Reidemeister.

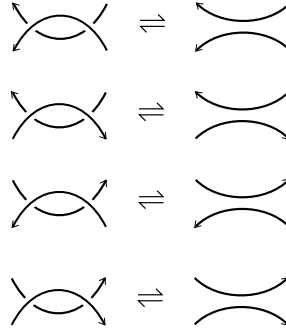


Figura 34: Las cuatro configuraciones posibles en el segundo movimiento de Reidemeister.

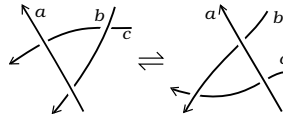


Figura 35: Una de las configuraciones posibles para el tercer movimiento de Reidemeister.

Teorema 39 (Matveev). Si K y L son dos nudos, entonces $Q(K) \simeq Q(L)$ si y sólo si $K = L$ o $L = rm(K)$.

Demostración. Para la demostración referimos a [9].

Sea X un quandle. El **grupo envolvente** de X es el grupo

$$G_X = F_X / \langle xy = (x \triangleright y)x, x, y \in X \rangle,$$

donde F_X es el grupo libre con base en los elementos de X .

Teorema 40 (Joyce). $G_{Q(K)} \simeq \pi_1(K)$ para todo nudo K .

Demostración. La demostración aparece en [8].

Es importante remarcar que el problema de determinar si dos grupos o dos quandles son isomorfos es, en general, muy difícil de resolver.

7. Ejemplos de quandle fundamentales

Consideremos el nudo 5_1 de la figura 36. Todos los cruces del diagrama son positivos y el quandle fundamental de 5_1 es

$$Q(5_1) = \langle a_1, \dots, a_5 : a_1 \triangleright a_3 = a_4, a_4 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_4 = a_5, \\ a_5 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_5 = a_1 \rangle. \quad (13)$$

Consideremos ahora el nudo 5_2 de la figura 37. Todos los cruces del diagrama son positivos y entonces el quandle fundamental $Q(5_2)$ es

$$Q(5_2) = \langle a_1, \dots, a_5 : a_1 \triangleright a_4 = a_5, a_4 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_3 = a_4, \\ a_5 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_5 = a_1 \rangle. \quad (14)$$

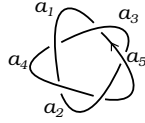


Figura 36: 5_1

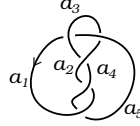


Figura 37: 5_2

El fundamental $Q(6_1)$ del nudo 6_1 de la figura 38 es

$$Q(6_1) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_1 \triangleright a_4 = a_3, a_3 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_5 = a_6, \\ a_5 \triangleright a_2 = a_3, a_4 \triangleright a_1 = a_6, a_6 \triangleright a_5 = a_4 \rangle, \quad (15)$$

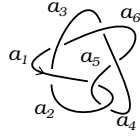
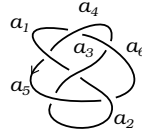
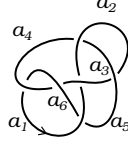
donde las ecuaciones $a_2 \triangleright a_5 = a_6$ y $a_5 \triangleright a_2 = a_3$ corresponden a los únicos cruces positivos. El quandle fundamental del nudo 6_2 tal como lo vemos en la figura 39 es

$$Q(6_2) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_1 \triangleright a_4 = a_5, a_5 \triangleright a_3 = a_2, a_2 \triangleright a_6 = a_5, \\ a_6 \triangleright a_3 = a_4, a_3 \triangleright a_1 = a_2, a_4 \triangleright a_6 = a_1 \rangle, \quad (16)$$

donde las ecuaciones $a_5 \triangleright a_3 = a_2$ y $a_2 \triangleright a_6 = a_5$ corresponden a los únicos cruces positivos del diagrama. Por último, el quandle fundamental del nudo 6_3 de la figura 40 es

$$Q(6_3) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_1 \triangleright a_5 = a_4, a_5 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_3 = a_4, \\ a_6 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_6 = a_1, a_4 \triangleright a_6 = a_5 \rangle, \quad (17)$$

donde las ecuaciones $a_2 \triangleright a_3 = a_4$, $a_6 \triangleright a_2 = a_3$ y $a_3 \triangleright a_6 = a_1$ corresponden a los únicos cruces positivos del diagrama.

**Figura 38:** 6_1 **Figura 39:** 6_2 **Figura 40:** 6_3

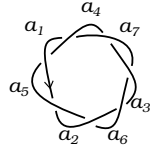
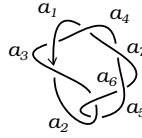
Presentemos los quandles fundamentales de los nudos de la figuras 41–45. Un cálculo directo muestra que

$$Q(7_1) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_4 = a_5, a_5 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_5 = a_6, \\ a_6 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_6 = a_7, a_7 \triangleright a_3 = a_4, a_4 \triangleright a_7 = a_1 \rangle, \quad (18)$$

donde todos los cruces involucrados son positivos. Similarmente,

$$Q(7_2) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_4 = a_3, a_3 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_6 = a_5, \\ a_5 \triangleright a_7 = a_6, a_7 \triangleright a_5 = a_4, a_4 \triangleright a_1 = a_7, a_6 \triangleright a_3 = a_2 \rangle, \quad (19)$$

donde todos los cruces son negativos.

**Figura 41:** 7_1 **Figura 42:** 7_2

Para el nudo 7_3 tenemos

$$Q(7_3) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_5 = a_6, a_5 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_4 = a_5, \\ a_6 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_6 = a_7, a_7 \triangleright a_3 = a_4, a_4 \triangleright a_7 = a_1 \rangle, \quad (20)$$

donde todos los cruces son positivos. Para el nudo 7_4 se tiene

$$Q(7_4) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_5 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_4 = a_5, a_4 \triangleright a_1 = a_7, \\ a_6 \triangleright a_3 = a_4, a_3 \triangleright a_6 = a_7, a_7 \triangleright a_2 = a_3, a_1 \triangleright a_5 = a_6 \rangle, \quad (21)$$

donde la ecuación $a_4 \triangleright a_1 = a_7$ corresponde al único cruce negativo que tiene el diagrama.

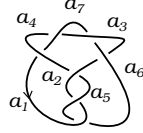


Figura 43: 7_3

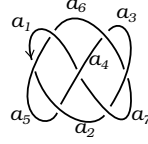


Figura 44: 7_4

Para el nudo 7_5 tenemos

$$Q(7_5) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_4 = a_3, a_5 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_6 = a_5, \\ a_7 \triangleright a_3 = a_2, a_3 \triangleright a_1 = a_7, a_4 \triangleright a_7 = a_6, a_6 \triangleright a_4 = a_5 \rangle, \quad (22)$$

donde la ecuación $a_6 \triangleright a_4 = a_5$ corresponde al único cruce negativo del diagrama. Para el nudo 7_6 tenemos

$$Q(7_6) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_6 \triangleright a_2 = a_1, a_4 \triangleright a_3 = a_2, a_2 \triangleright a_6 = a_5, \\ a_3 \triangleright a_1 = a_7, a_1 \triangleright a_2 = a_3, a_7 \triangleright a_4 = a_5, a_5 \triangleright a_6 = a_7 \rangle, \quad (23)$$

donde las relaciones $a_1 \triangleright a_2 = a_3$, $a_7 \triangleright a_4 = a_5$ y $a_5 \triangleright a_6 = a_7$ corresponden a los cruces positivos del diagrama.

Finalmente, el quandle fundamental del nudo 7_7 es

$$Q(7_7) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_4 = a_5, a_6 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_4 = a_3, \\ a_7 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_6 = a_7, a_5 \triangleright a_7 = a_1, a_4 \triangleright a_6 = a_5 \rangle, \quad (24)$$

donde las relaciones $a_6 \triangleright a_2 = a_1$, $a_2 \triangleright a_4 = a_3$ y $a_4 \triangleright a_6 = a_5$ son las que corresponden a los cruces negativos del diagrama.

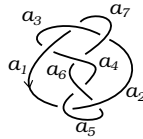


Figura 45: 7_5

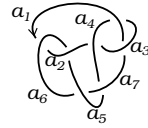


Figura 46: 7_6

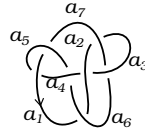


Figura 47: 7_7

Presentemos el quandle fundamental de la imagen especular del nudo 3_1 de la figura 48. El diagrama tiene tres cruces negativos y el quandle fundamental es

$$Q(m(3_1)) = \langle a_1, a_2, a_3 : a_3 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_1 = a_3, a_1 \triangleright a_3 = a_2 \rangle.$$

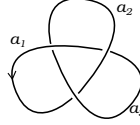


Figura 48: $m(3_1)$.

La figura 49 muestra el nudo de la abuela y la figura 50 el nudo cuadrado. Un cálculo sencillo muestra que el quandle fundamental del nudo de la abuela es

$$Q(3_1 \# 3_1) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_1 \triangleright a_5 = a_6, a_6 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_3 = a_4, \\ a_4 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_4 = a_5, a_5 \triangleright a_6 = a_1 \rangle,$$

donde todas las ecuaciones corresponden a cruces positivos, y que el quandle fundamental del nudo cuadrado es

$$Q(3_1 \# m(3_1)) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_5 \triangleright a_6 = a_1, a_1 \triangleright a_5 = a_6, \\ a_6 \triangleright a_1 = a_2, a_4 \triangleright a_3 = a_2, a_3 \triangleright a_5 = a_4, a_5 \triangleright a_4 = a_3 \rangle, \quad (25)$$

donde las tres primeras ecuaciones corresponden a los cruces positivos y las tres últimas a los cruces negativos.

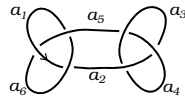


Figura 49: $3_1 \# 3_1$

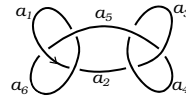


Figura 50: $3_1 \# m(3_1)$

8. Coloraciones generalizadas

Si etiquetamos los arcos de un nudo con los elementos de un quandle X de forma tal que en cada cruce se cumplan las relaciones que mencionamos en la sección 6, o equivalentemente, en la figura 51, la cantidad de formas en que pueden ponerse esas etiquetas quedará invariante después de aplicar movimientos de Reidemeister. Esto

nos permite “colorear” nudos de forma abstracta, donde ahora los “colores” son en realidad los elementos del quandle X .

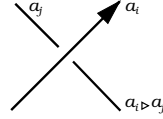


Figura 51: La regla para colorear con un quandle. Notar que $a_i \triangleright a_j = a_k$ si y sólo si $a_i \triangleright^{-1} a_k = a_j$.

Definición 41. Una **coloración** del nudo K con el quandle X es un morfismo de quandles $Q(K) \rightarrow X$.

Por lo dicho anteriormente, la cantidad de morfismos $Q(K) \rightarrow X$ es un invariante de nudos. Este invariante se denota por $\text{Col}_X(K)$. Observemos que siempre existirán al menos $|X|$ coloraciones del nudo K con el quandle X (las coloraciones triviales).

Ejemplo 42. La coloración con tres colores es en realidad el invariante asociado al quandle d_3 . La coloración de Fox con p colores es en realidad la coloración asociada al quandle d_p .

Ejemplo 43. Veamos que el nudo 4_1 puede colorearse de forma no trivial con un quandle de Alexander. Consideremos el cuerpo

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\},$$

y sea X el quandle de Alexander de tipo $(4, \alpha)$. Vimos en el ejemplo 16 que las coloraciones con X del diagrama de la figura 30 son las soluciones $(a, b, c, d) \in \mathbb{F}_4$ del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)a + \alpha c &= d, & (1 - \alpha)b + \alpha a &= d, \\ (1 - \alpha)c + \alpha a &= b, & (1 - \alpha)d + \alpha c &= b. \end{aligned} \tag{26}$$

Como $(a, b, c, d) = (0, 1, \alpha, \alpha + 1)$ es una solución de (26), el nudo 4_1 admite entonces al menos una coloración con X no trivial. Tenemos así otra demostración de la no trivialidad del nudo 4_1 .

Ejercicio 44. Pruebe que el quandle de conjugación asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ de $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$ es isomorfo al quandle de Alexander de tipo $(4, \alpha)$ visto en el ejemplo 43. De alguna forma, habíamos utilizado este quandle en el ejemplo 24.

Ejemplo 45. En la sección 7 presentamos el quandle fundamental $Q(5_1)$. Sea X el quandle de conjugación asociado a (12345) en \mathbb{A}_5 . Un cálculo sencillo muestra que la función $Q(5_1) \rightarrow X$ definida por

$$\begin{aligned} a_1 \mapsto (15432), \quad a_2 \mapsto (12453), \quad a_3 \mapsto (14352), \\ a_4 \mapsto (15324), \quad a_5 \mapsto (14523), \end{aligned}$$

es un morfismo de quandles. Esta función nos permite “colorear” el nudo 5_1 con los 5-ciclos del grupo alternado \mathbb{A}_5 .

Ejemplo 46. En la sección 7 mostramos las relaciones que definen el quandle fundamental del nudo 6_3 . Estas relaciones nos permiten demostrar, por ejemplo, que este nudo puede colorearse de forma no trivial con el quandle de Alexander de tipo $(7, 2)$. En efecto, si traducimos (17) a un sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} -a_1 + 2a_5 = a_4, \quad -a_5 + 2a_2 = a_1, \quad -a_2 + 2a_3 = a_4, \\ -a_6 + 2a_2 = a_3, \quad -a_3 + 2a_6 = a_1, \quad -a_4 + 2a_6 = a_5. \end{aligned} \quad (27)$$

Como $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 2, 0, 5, 3, 4)$ es una solución de (27), el nudo 6_3 puede colorearse de forma no trivial con el quandle de Alexander de tipo $(7, 2)$. Observemos que si X es el quandle de Alexander de tipo $(7, 2)$, entonces la función $Q(K) \rightarrow X$ dada por

$$a_1 \mapsto 1, \quad a_2 \mapsto 2, \quad a_3 \mapsto 0, \quad a_4 \mapsto 5, \quad a_5 \mapsto 3, \quad a_6 \mapsto 6$$

es un morfismo de quandles.

Ejercicio 47. Pruebe que el quandle de Alexander de tipo $(4, \alpha)$ definido sobre el cuerpo $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$ permite distinguir los siguientes pares de nudos: a) 3_1 y 6_1 ; b) 4_1 y 5_1 ; c) 6_2 y 7_2 ; d) 6_3 y 7_3 .

Ejercicio 48. Pruebe que con una clase de conjugación del grupo alternado \mathbb{A}_5 es posible distinguir los nudos 5_2 y 7_1 .

Ejercicio 49. Utilice los resultados de los ejercicios 18, 47 y 48 y demuestre que todos los nudos de la figura 15 son no triviales y distintos.

Sea A un grupo abeliano (escrito multiplicativamente), sea X un quandle, y sea $f: X \times X \rightarrow A$ una función. Sobre el conjunto $X \times A$ definimos la operación

$$(x, a) \triangleright (y, b) = (x \triangleright y, bf(x, y)) \quad \text{para todo } (x, a), (y, b) \in X \times A. \quad (28)$$

Es fácil demostrar que la operación (28) define una estructura de quandle sobre $X \times A$ si y sólo si:

$$f(x, x) = 1, \quad \text{para todo } x \in X, \quad (29)$$

$$f(x, z)f(x \triangleright y, x \triangleright z) = f(y, z)f(x, y \triangleright z) \quad \text{para todo } x, y, z \in X. \quad (30)$$

Como ejemplo, demostremos la distributividad. Sean $x, y, z \in X$ y $a, b, c \in A$. Un cálculo directo nos muestra que

$$\begin{aligned}(x, a) \triangleright ((y, b) \triangleright (c, z)) &= (x, a) \triangleright (y \triangleright z, cf(y, z)) \\ &= (x \triangleright (y \triangleright z), cf(y, z)f(x, y \triangleright z)),\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}((x, a) \triangleright (y, b)) \triangleright ((x, a) \triangleright (c, z)) \\ &= (x \triangleright y, bf(x, y)) \triangleright (x \triangleright z, cf(x, z)) \\ &= ((x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z), cf(x, z)f(x \triangleright y, x \triangleright z)).\end{aligned}$$

Como X es un quandle, tenemos entonces que la condición (30) es equivalente a la distributividad de la operación binaria en $X \times A$.

Definición 50. Una función $f : X \times X \rightarrow A$ que satisface las condiciones (29) y (30) se llama **2-cociclo del quandle** X con coeficientes en A .

Definición 51. El quandle sobre $X \times A$ obtenido con la operación (28) se llama **extensión abeliana** de X por el grupo abeliano A y el 2-cociclo f , y se denota por $X \times_f A$.

Ejemplo 52. Supongamos que

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$$

y sea X el quandle de Alexander de tipo $(4, \alpha)$. Sea $A = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma\}$ el grupo cíclico de orden dos. La función $f : X \times X \rightarrow A$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \text{ o } x = 1 \text{ o } y = 1, \\ \sigma & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es un 2-cociclo de X con coeficientes en el grupo abeliano A .

Ejemplo 53. Sea X el quandle de conjugación asociado a la clase de (1234) en \mathbb{S}_4 y sea $A = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ el grupo cíclico de orden cuatro (escrito multiplicativamente). La función $f : X \times X \rightarrow A$ dada por la tabla

f	(1234)	(1432)	(1342)	(1243)	(1324)	(1423)
(1234)	1	σ	σ^2	σ^2	σ	σ^3
(1432)	σ	1	σ^2	1	σ^3	σ^3
(1342)	σ^2	σ	1	σ	σ^2	σ^3
(1243)	σ^3	σ^2	σ	1	1	σ^3
(1324)	σ	σ	σ	σ	1	σ
(1423)	1	1	1	1	σ	1

es un 2-cociclo de X con coeficientes en A .

Definición 54. Un 2-cociclo $f : X \times X \rightarrow A$ es un **coborde** si existe una función $\gamma : X \rightarrow A$ tal que $f(x, y) = \gamma(x \triangleright y)\gamma(y)^{-1}$ para todo $x, y \in X$. Dos 2-cociclos f y g son **cohomólogos** (o equivalentes) si existe $\gamma : X \rightarrow A$ tal que

$$f(x, y) = \gamma(x \triangleright y) g(x, y) \gamma(y)^{-1}$$

para todo $x, y \in X$.

Cada 2-cociclo de un quandle X nos permite definir una extensión abeliana de X . Estos 2-cociclos son en realidad 2-cociclos en una teoría de cohomología de quandles [5]. Tal como pasa en la teoría de grupos, las clases de equivalencia de extensiones abelianas del quandle X por el grupo abeliano A están en correspondencia biyectiva con las clases de equivalencia de 2-cociclos de X con coeficientes en A . La teoría de extensiones abelianas de quandles tiene además aplicaciones a la teoría de nudos [4]. Para más información sobre la teorías de extensiones y (co)homologías de quandles referimos a [2].

Ejemplo 55. Recordemos el nudo de la abuela y el nudo cuadrado de la figura 16. En el ejercicio 26 vimos que estos nudos tienen grupos fundamentales isomorfos. Sin embargo, como veremos a continuación, estos nudos no son equivalentes. Sean X el quandle de conjugación asociado a la clase de (1234) en \mathbb{S}_4 y f el 2-cociclo de X que vimos en el ejemplo 53. Consideremos la extensión $X \times_f A$ dada por

$$(x, \sigma^i) \triangleright (y, \sigma^j) = (x \triangleright y, \sigma^j f(x, y)) \quad \text{para todo } x, y \in X, i, j \in \{0, \dots, 3\}.$$

La extensión abeliana $X \times_f A$ nos permite distinguir el nudo de la abuela del nudo cuadrado. Un cálculo nos muestra que para el nudo de la abuela se tiene

$$\text{Col}_{X \times_f A}(3_1 \# 3_1) = 24, \quad (31)$$

y que para el nudo cuadrado, en cambio, se tiene

$$\text{Col}_{X \times_f A}(3_1 \# m(3_1)) = 408. \quad (32)$$

Vimos en el ejercicio 26 que el nudo de la abuela es trivial si y sólo si el nudo cuadrado lo es. Esta observación y las fórmulas (31) y (32) implican que estos nudos son no triviales y distintos.

9. Invariantes por 2-cociclos

A fines del siglo XX, S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford y M. Saito anunciaron la construcción de un nuevo invariante de nudos: el invariante por 2-cociclos.

Fijemos un grupo abeliano A (escrito multiplicativamente) y un nudo K . Sean X un quandle finito, $\mathcal{C}: Q(K) \rightarrow X$ una coloración de K y $f: X \times X \rightarrow A$ un 2-cociclo de X con coeficientes en A . En cada cruce como el que vemos en la figura 25 se define el **peso de Boltzmann** $\omega_f(\mathcal{C}, \chi)$ (con respecto a la coloración \mathcal{C} , al 2-cociclo f y al cruce χ) como el elemento de A dado por la expresión

$$\omega_f(\mathcal{C}, \chi) = f(a_i, a_j)^{\text{signo}(\chi)}.$$

Definición 56. La *función de partición* $\Phi_{X,f}(K)$ del nudo K (asociada al quandle X y al 2-cociclo f) es la expresión

$$\Phi_{X,f}(K) = \sum_{\mathcal{C}} \prod_{\chi} \omega_f(\mathcal{C}, \chi), \quad (33)$$

donde el producto se toma sobre todos los cruces χ que tiene el diagrama del nudo K y la suma se toma sobre todas las coloraciones \mathcal{C} de K dados por el quandle X .

La fórmula (33) define un elemento de $\mathbb{Z}[A]$, el anillo de grupo de A .

Teorema 57. La función de partición $\Phi_{X,f}$ es un invariante de nudos.

Demostración. Tenemos que demostrar que el producto de los pesos de Boltzmann es invariante bajo las versiones orientadas de los movimientos de Reidemeister.

Consideremos el primer movimiento de Reidemeister. Tal como muestra la figura 33, hay dos orientaciones posibles para tener en cuenta. En ambos casos, si suponemos que estas cuerdas llevan la etiqueta $a \in X$, entonces en el único cruce χ que tiene el diagrama tendremos el valor $f(a, a)^{\text{signo}(\chi)}$. Como f es un 2-cociclo, $f(a, a) = 1$. Luego, el primer movimiento de Reidemeister deja invariante al producto de los pesos de Boltzmann.

Consideremos ahora el segundo movimiento. Aquí tenemos cuatro posibles diagramas orientados, similares a los que se ve en la figura 34. Si etiquetamos la cuerda que pasa por arriba con $a \in X$ y la cuerda entrante que pasa por debajo con $b \in X$ entonces, como para ambos diagramas tenemos un cruce positivo y uno negativo, el producto de los pesos de Boltzmann es $f(a, b)f(a, b)^{-1} = 1$. Luego, el segundo movimiento de Reidemeister también deja invariante al producto de los pesos de Boltzmann.

Para finalizar, tenemos que demostrar que el tercer movimiento de Reidemeister deja invariante al producto de los pesos de Boltzmann. Como vimos en la sección 6, hay ocho casos para verificar. Hagamos como ejemplo el caso que se corresponde con la figura 52 y dejemos el resto como ejercicio.

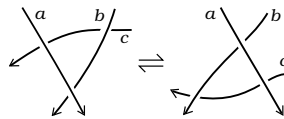


Figura 52: Otra de las configuraciones posibles para el tercer movimiento de Reidemeister.

Si calculamos el producto de los pesos de Boltzmann sobre los tres cruces que tienen los diagramas de la figura 52 vemos que este producto es invariante por el tercer movimiento de Reidemeister si y sólo si

$$f(a, b \triangleright c)f(b, c)f(a, b) = f(a, b)f(a \triangleright b, a \triangleright c)f(a, c).$$

Como A es un grupo abeliano, al cancelar $f(a, b)$ en ambos miembros, obtenemos el resultado deseado.

Los invariantes por quandles y 2-cociclos extienden a los invariantes dados por coloraciones con quandles: si f es un coborde entonces $\Phi_{X,f}(K) = \text{Col}_X(K)$ para todo nudo K . Esta afirmación puede generalizarse: si f y g son cohomólogos entonces $\Phi_{X,f} = \Phi_{X,g}$. Para las demostración referimos a la proposición 4.5 de [5].

Ejemplo 58. Sean X el quandle de Alexander de tipo $(4, \alpha)$ y f el 2-cociclo que vimos en el ejemplo 52. Calculamos $\Phi_{X,f}$ para los nudos de la figura 15:

$$\Phi_{X,f}(K) = \begin{cases} 4 + 12\sigma & \text{si } K \in \{3_1, 4_1, 7_2, 7_3\}, \\ 4 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 59. En este ejemplo vamos a distinguir el nudo 3_1 de su imagen especular $m(3_1)$, ver figura 12. Consideremos el quandle X y f el 2-cociclo de X que vimos en el ejemplo 53. Un cálculo directo muestra que

$$\Phi_{X,f}(3_1) = 6 + 24\sigma^3, \quad \Phi_{X,f}(m(3_1)) = 6 + 24\sigma.$$

Esto nos dice que los nudos 3_1 y $m(3_1)$ no son equivalentes.

Ejemplo 60. Vamos a dar otra prueba de que el nudo de la abuela no es equivalente al nudo cuadrado. Como hicimos en el ejemplo anterior, vamos a utilizar el quandle X y f el 2-cociclo de X que vimos en el ejemplo 53. El invariante dado por X y el 2-cociclo f para el nudo de la abuela es

$$\Phi_{X,f}(3_1 \# 3_1) = 6 + 48\sigma + 96\sigma^2,$$

mientras que para el nudo cuadrado es

$$\Phi_{X,f}(3_1 \# m(3_1)) = 102 + 24\sigma + 24\sigma^3.$$

Esto nos muestra que el nudo de la abuela no es equivalente al nudo cuadrado.

Referencias

1. C. C. Adams. *The knot book*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. An elementary introduction to the mathematical theory of knots, Revised reprint of the 1994 original.
2. N. Andruskiewitsch and M. Graña. From racks to pointed Hopf algebras. *Adv. Math.*, 178(2):177–243, 2003.
3. G. Burde, H. Zieschang, and M. Heusener. *Knots*, volume 5 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, Berlin, extended edition, 2014.
4. J. S. Carter, M. Elhamdadi, M. A. Nikiforou, and M. Saito. Extensions of quandles and cocycle knot invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 12(6):725–738, 2003.
5. J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, and M. Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(10):3947–3989, 2003.

6. R. H. Crowell and R. H. Fox. *Introduction to knot theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Reprint of the 1963 original, Graduate Texts in Mathematics, No. 57.
7. C. M. Gordon and J. Luecke. Knots are determined by their complements. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(2):371–415, 1989.
8. D. Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, 23(1):37–65, 1982.
9. S. V. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, 119(161)(1):78–88, 160, 1982.