Fernando Jorge
Email: linguacavalcante@gmail.com
Curso: PROFMAT - Geometria Plana MA-13
Professor: Dr. José Carlos Almeida de Lima

Atividade - #
Matrícula: 2021105189
Semestre: 2021.2
Data: 07 de Setembro de 2021

Capítulo 1

Conceitos Geométricos Básicos

1.1 Introdução

Problema 1.1.3
Sejam A, B, C e D pontos de uma reta r, tais que $D \in \overrightarrow{AC} \backslash AC$, $B \in \overrightarrow{DC} \backslash CD$ e $\overline{AC} = \overline{BD}$. Prove que $\overline{AB} = \overline{CD}$

Solução: Sejam A, B, C e D pontos na reta r de forma que $D \in \overrightarrow{AC}$ e $D \notin \overline{AC}$. Assim como $B \in \overrightarrow{DC}$ e $B \notin \overline{CD}$ e $\overline{AC} = \overline{BD}$, mostrada na figura 1.1:

Figura 1.1: Problema 1.1.3

Podemos observar da figura acima que:

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$.

Do enunciado temos que $\overline{AB} = \overline{CD}$. Assim, realizando as substituições, temos:

$\overline{AB} + \cancel{\overline{BC}} = \cancel{\overline{BC}} + \overline{CD}$.

$\overline{AB} = \overline{CD}$.

Problema 1.1.5
Marque no plano, com o auxílio de uma régua e compasso, três pontos A, B e C tais que $\overline{AB} = 5cm$, $\overline{AC} = 6cm$ e $\overline{BC} = 4cm$.

Solução: Ao construirmos os três segmentos de retas, com suas respectivas medidas, encontraremos duas soluções, o qual veremos a seguir os passos:

1: Iniciamos o problema desenhando três segmentos de retas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ num plano qualquer, com comprimento respectivamente iguais a $5cm$, $6cm$ e $4cm$. Após isso marcamos o ponto A em qualquer lugar do plano.

2: Chamaremos de c_{ab} e c_{ac} as circunferências que possuem como centro o ponto A e raios respectivamentes iguais a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, as desenhando-as. Dessa forma, os pontos B e C estão localizados nas linhas que delimitam as circunferências.

3: A seguir, marcaremos um ponto B em qualquer lugar da circunferência c_{ab} e construiremos o segmento de reta $\overline{AB}$ e observamos que é a medida do raio de c_{ab}, medindo $5cm$.

4: Em seguida, traçamos a terceira circunferência c_{bc} de centro no ponto B e raio igual a $\overline{BC}$. Dessa forma, haverá dois pontos de intersseção entre a circunferência c_{bc} e a circunferência c_{ac}, denominados ponto C e ponto C_1.

5: A partir daí, observamos que o segmento $\overline{BC}$ é o raio da circunferência c_{bc} e possui $4cm$. Observamos também que o segmento $\overline{AC}$ é o raio da circunferência c_{ac} e possui $6cm$. Dessa forma, foi construído problema, o qual está evidenciado na figura 1.2. Como bônus, conseguimos perceber a outra solução, utilizando o ponto C_1.

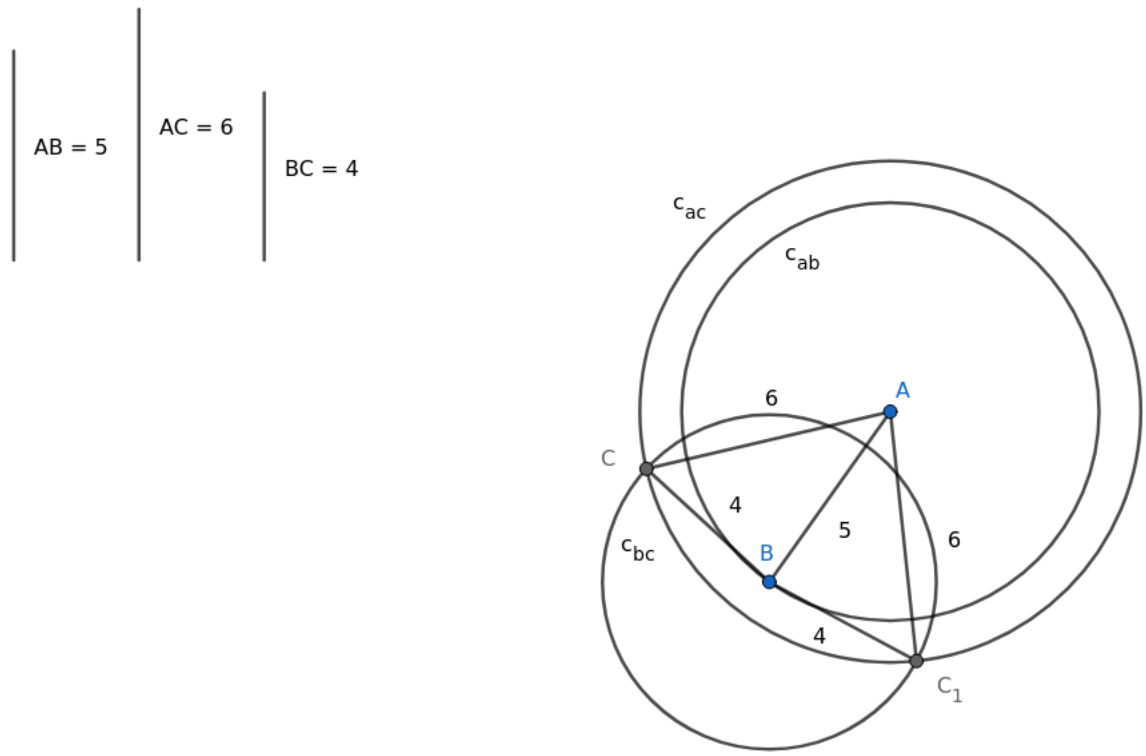

Figura 1.2: Problema 1.1.5

1.2 Ângulos

Problema 1.2.1
Se a interseção de duas regiões convexas de um plano não for o conjunto vazio, prove que ela também é uma região convexa.

Solução: Se as regiões X e Y são convexas e a interseção entre elas não é vazio, então:

Se X é convexo, então $\forall A, B \in X \Longrightarrow \overline{AB} \subset X$, onde A e B são pontos quaisquer da região X.
Se Y é convexo, então $\forall A, B \in Y \Longrightarrow \overline{AB} \subset Y$, onde A e B são pontos quaisquer da região Y.

Como $\overline{AB} \subset X$ e $\overline{AB} \subset Y$, então $\overline{AB} \subset X \cap Y$. E portanto, $X \cap Y$ é convexo.

Problema 1.2.7
Cinco semirretas, de mesma origem O, formam cinco ângulos que cobrem todo o plano e têm medidas em graus proporcionais aos números 2, 3, 4, 5 e 6. Calcule a medida do maior de tais ângulos.

Solução: Como os ângulos entre as semirretas cobrem todo o plano e tomando os ângulos entre elas por $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$, temos:

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} = 360°$$

Colocando os fatores de proporcionalidades, encontramos a seguinte equação:

$$\frac{\hat{a}}{2} = \frac{\hat{b}}{3} = \frac{\hat{c}}{4} = \frac{\hat{d}}{5} = \frac{\hat{e}}{6} = k$$

onde k é o fator de proporcionalidade. Substituindo as equações de proporcionalidades na primeira equação, obtemos:

$$2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 360°$$

$$k = 18°.$$

Dessa forma, o maior ângulo entre eles é aquele que tem fator de proporcionalidade 6. Resolvendo sua equação encontramos:

$$\hat{e} = 6k = 6 \cdot 18° = 188°.$$

Problema 1.2.11
Três semirretas de mesma origem O forma três ângulos que cobrem todo o plano. Mostre que ao menos um desses ângulos mede pelo menos 120° e ao menos um mede no máximo 120°.

Solução: Como os ângulos entre as semirretas cobrem todo o plano e tomando o ângulo entre elas por α, β e γ, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 360°.$$

Supondo $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, teremos:

$$\alpha+\alpha \leq \alpha+\beta \leq \alpha+\gamma \implies 2\alpha \leq \alpha+\beta \leq \alpha+\gamma \implies 2\alpha+\gamma \leq \alpha+\beta+\gamma \leq \alpha+2\gamma \implies 2\alpha+\gamma \leq 360° \leq \alpha+2\gamma.$$

A partir daí obtemos duas inequações:

$$2\alpha + \gamma \leq 360° \implies \gamma = 360° - 2\alpha.$$

$$\alpha + 2\gamma \geq 360^{\circ} \implies \alpha \geq 360^{\circ} - 2\gamma.$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos:

$$\alpha \geq 360^{\circ} - 2 \cdot (360^{\circ} - 2\alpha)\,.$$

$$\alpha \geq 120^{\circ}.$$

Substituindo $\alpha naequação1, encontramos : \gamma \leq 120^{\circ}$. c

Assim, provamos que de α obtemos ao menos um ângulo maior ou igual a 120° e de γ ao menos um ângulo menor ou igual a 120°.

1.3 Polígonos

Problema 1.3.3
Três polígonos convexos têm números de lados iguais a três naturais consecutivos. Sabendo que a soma dos números de diagonais dos polígonos é de 133, calcule o número de lados do polígono com maior número de diagonais.

Solução: Sabendo que o número de lados dos polígonos são consecutivos e que a soma das diagonais equivale a 133, teremos

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

$$D_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot (n-2)}{2}.$$

$$D_{n+2} = \frac{(n+2) \cdot (n-1)}{2}.$$

$$D_n + D_{n+1} + D_{n+2} = 133.$$

Onde D_n é o número de diagonais do polígono P_n e assim sucessivamente. Substituindo as três equações acima na equação da soma de diagonais, teremos:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} + \frac{(n+1) \cdot (n-2)}{2} + \frac{(n+2) \cdot (n-1)}{2} = 133.$$

$$n^2 - n - 90 = 0 \implies n = 10 \; ou \; \cancel{n = -9}.$$

Como o número de lados deve ser maior que 0, temos que $n = 10$, sendo descartado $n = 9$. Para finalizar, o maior polígono é $P_{n+2} = n + 2 = 10 + 2 = 12$

Capítulo 2

Congruência de Triângulos

2.1 Os casos LAL, ALA, e LLL

2.2 Aplicações de Congruência

Problema 2.2.1
Construa com régua e compasso as bissetrizes internas do triângulo ABC da figura 2.1

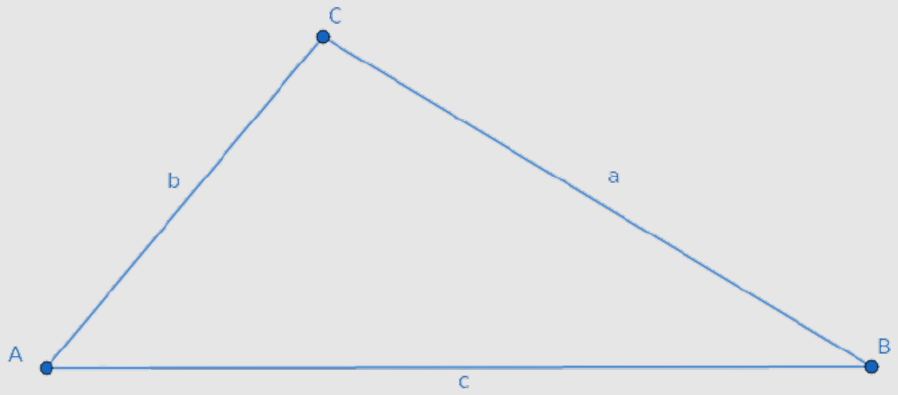

Figura 2.1: bissetrizes internas de um triângulo

Solução: Para construirmos uma bissetriz interna do ângulo ($\hat{A}$) seguiremos os passos a seguir:

1: Construir um círculo de raio qualquer com centro no ponto A.

2: Marcar os dois pontos *(D, E)* de intersecção entre a circunferência e os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

3: Com o mesmo raio, traçar outras duas circunferências com centro nos pontos *(E, F)*.

4: Marcar o ponto F que intersecta as duas circunferências descritas no item 3.

5: Finalizar construindo a semireta que inicia no ponto A e passa pelo ponto P, sendo denominada de bissetriz interna do ângulo ($\hat{a}$).

De forma análoga, construímos as outras duas bissetrizes internas, resultando na figura 2.2.

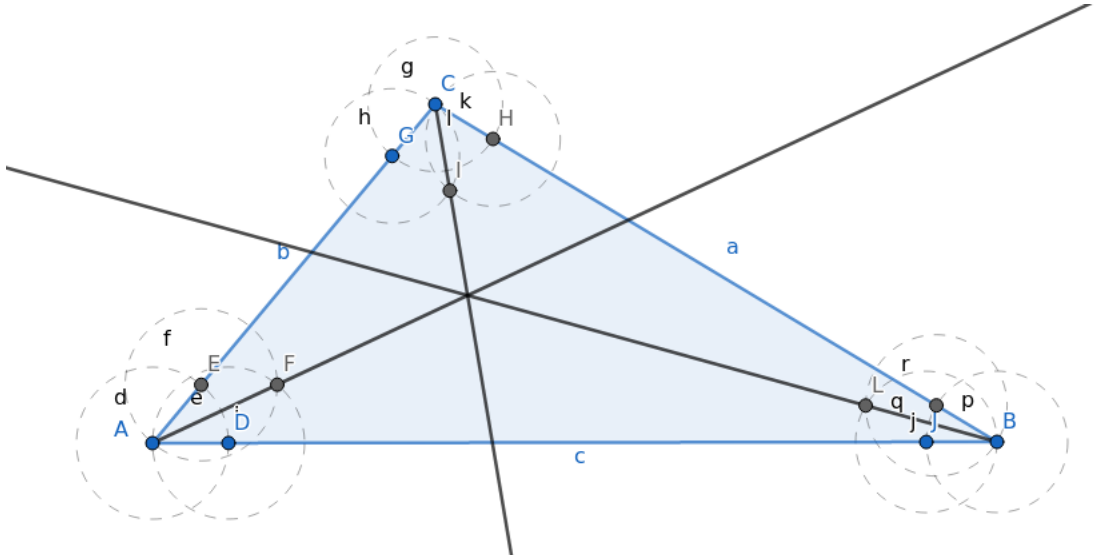

Figura 2.2: Problema 2.2.1

Problema 2.2.2
Construa com régua e compasso as medianas do triângulo ABC da figura 2.3

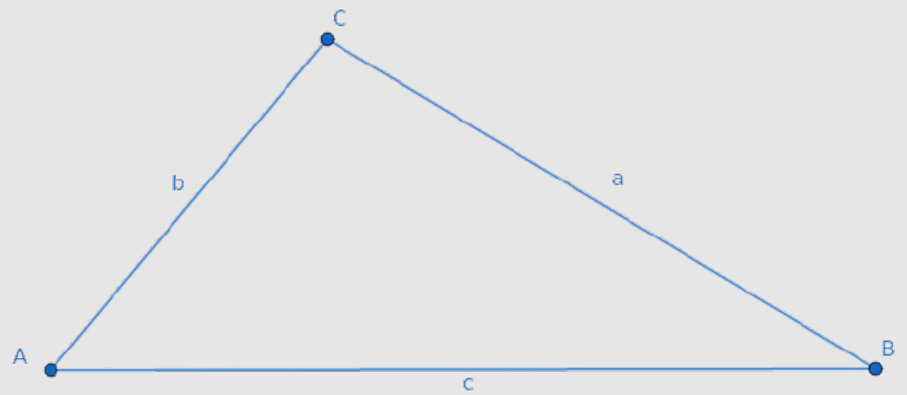

Figura 2.3: medianas de um triângulo

Solução: Para construirmos a mediana que parte do vértice A e é relativa ao segmento $\overline{BC}$ devemos seguir os passos abaixo:

1: Construir a circunferência de raio maior que a média da medida do segmento $\overline{BC}$ com centro em B.

2: Traçar a circunferência com mesma medida de raio do item 1, com centro em C.

3: Marcar os pontos (D, E) de intersecção entre as circunferências do item 1 e 2.

4: Desenhar a mediatriz que passa pelos pontos *(D, E)*.

5: Marcar o ponto médio M do segmento $\overline{BC}$, que é o ponto de intersecção entre a mediatriz do item 3 e o segmento de reta $\overline{BC}$.

6: Desenhar o segmento de reta que parte do ponto A e termina no ponto M, denominada mediana de A relativa a $\overline{BC}$.

De forma análoga, construímos as outras duas medianas, mostradas na figura 2.4.

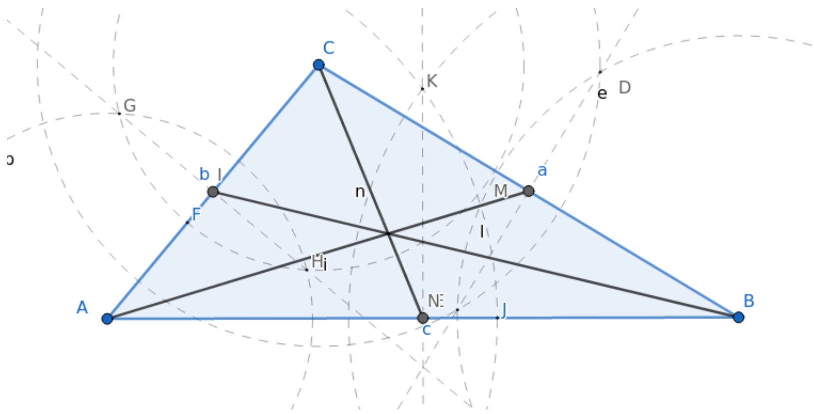

Figura 2.4: Problema 2.2.2

> **Problema 2.2.6**
> Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecendo os comprimentos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e m_a da mediana relativa a BC.

Solução: Para construirmos o triângulo devemos seguir os passos abaixo:

1: Devemos desenhar os três segmentos de retas com comprimentos iguais a *c, b e* m_a.

2: Marcamos o ponto A em qualquer lugar do plano e em seguida traçamos a circunferência de raio m_a e centro no ponto A.

3: Marcamos o ponto M em qualquer lugar da circunferência do item 2.

4: Em seguida, construímos outra circunferência de raio m_a e centro no ponto M.

5: Desenhamos a reta que passa pelo ponto A e o ponto M, esta reta conterá o segmento $\overline{BC}$.

6: Marcamos o ponto A_1, que é o ponto de intersecção entre a reta do item 5 e a circunferência do item 4.

7: Traçamos duas circunferências de raio igual a c de centros em A e A_1, o qual chamaremos respectivamente de c_{ab} e c_{1ab}.

8: Analogamente, traçamos duas circunferências de raio igual a b de centros em A e A_1, o qual chamaremos respectivamente de c_{ac} e c_{1ac}.

9: Agora marcamos os pontos de intersecção B e B_1 entre as circunferências c_{ab} e c_{1ac}, respectivamentes do lado esquerdo e do lado direito do ponto M.

10: Dessa forma, encontramos o segmento $\overline{AB}$ do triângulo procurado.

11: Analogamente, encontraremos o segmento $\overline{AC}$ refazendo os os itens *8, 9 e 10* para as circunferências c_{ac} e c_{1ab}.

12: Por fim, traçamos o segmento de reta $\overline{BC}$, o qual possui como ponto médio M, finalizando o triângulo ABC.

Podemos verificar a construção final na figura 2.5.

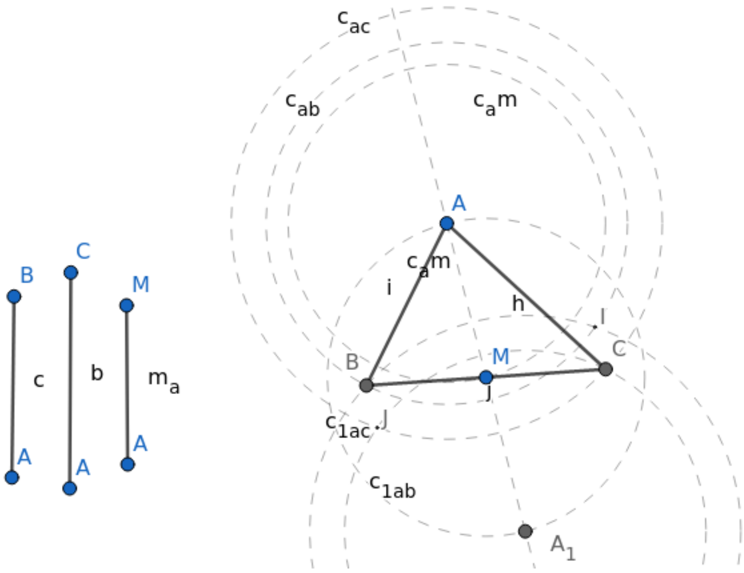

Figura 2.5: Problema 2.2.6

> **Problema 2.2.8**
> * Se ABC é um triângulo isósceles de base BC, prove que a bissetriz, a mediana e a altura relativas a BC coincidem.

Dado um triângulo ABC com base em $\overline{BC}$, traçaremos a bissetriz relativa ao lado BC, evidenciada na figura 2.6.

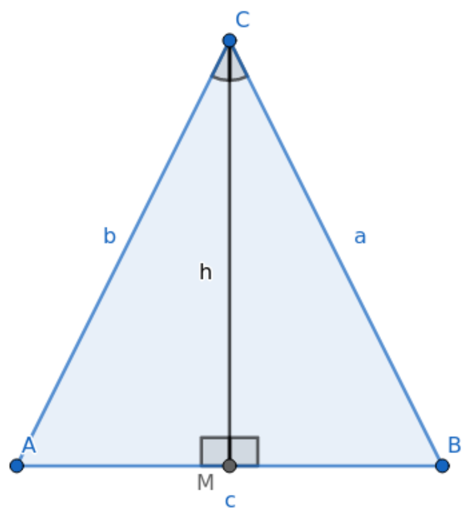

Figura 2.6: Triângulo isósceles ABC

Podemos observar da figura acima, que o triângulo ABC isósceles, foi dividido em dois triângulos ACM e BCM.
Observamos também que pelo caso LAL, os triângulos ACM e BCM são congruentes, pois:

Dessa forma, verificamos que o ponto M é ponto médio do segmento AB, pois $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$ e portanto, $\overline{CM}$ é também mediana relativa a $\overline{AB}$.

Observamos também que o $\angle AMB$ é raso, possuindo então 180° e concluímos:

$$\angle AMC + \angle BMC = \angle AMB.$$

$$\angle AMC + \angle BMC = 180°.$$

E como $\angle AMC \equiv \angle BMC$, temos:

$$\angle AMC = \angle BMC = 90°.$$

E portanto, o segmento $\overline{CM}$ é altura relativa a base $\overline{BC}$, pois os ângulos da base formam ângulos retos. Assim, o segmento de reta $\overline{AM}$ é bissetriz, mediana e altura relativa ao lado BC.

Problema 2.2.10

* Seja Γ um círculo de centro O e AB uma corda de Γ. Se M é um ponto sobre AB, prove que

$$OM \perp AM \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{BM}.$$

Solução: Nesse problema, podemos observar que haverá dois casos, mostrados a seguir:

Caso 1: M é ponto médio de AB.

Observando a figura 2.7, podemos traçar os segmentos de retas $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ e verificar que estes segmentos correspondem ao raio do círculo. Assim o ΔOAB é isósceles com base AB. Como M é ponto médio de AB, o segumento OM é mediana relativa a AB. Portanto o segmento de reta OM é perpendicular a base AB, tendo sua prova vista no **??**

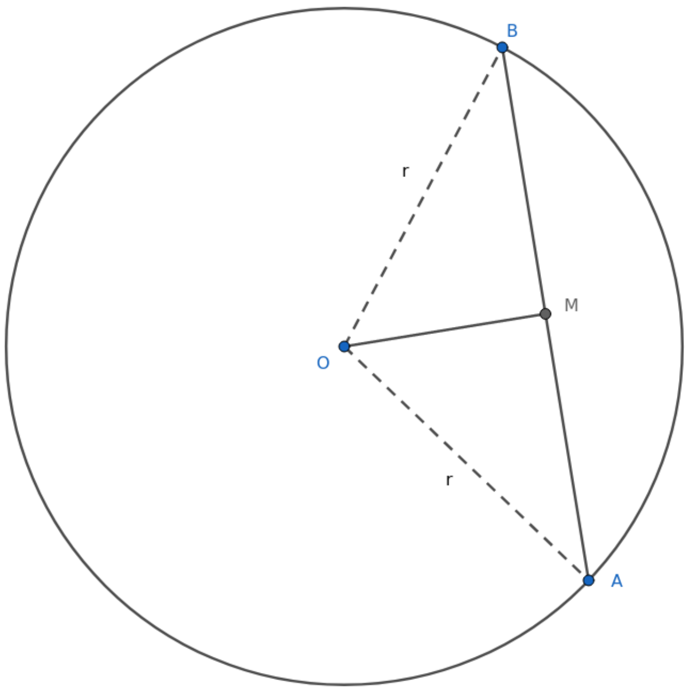

Figura 2.7: Problema 2.2.10 - Caso 1

Caso 2: M não é ponto médio de AB.

Observando a figura 2.8, podemos traçar os segmentos de retas $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ e verificar que estes segmentos correspondem ao raio do círculo. Assim o ΔOAB é isósceles com base AB. Como observamos no Problem 2.2.8, a altura relativa a base do triângulo isósceles é também mediana. Logo, para que o segmento de reta $\overline{OM}$ seja altura do triângulo, é preciso que M seja ponto médio de AB, o que neste caso não é, e assim $\overline{OM}$ não é altura do triângulo relativa a base AB.

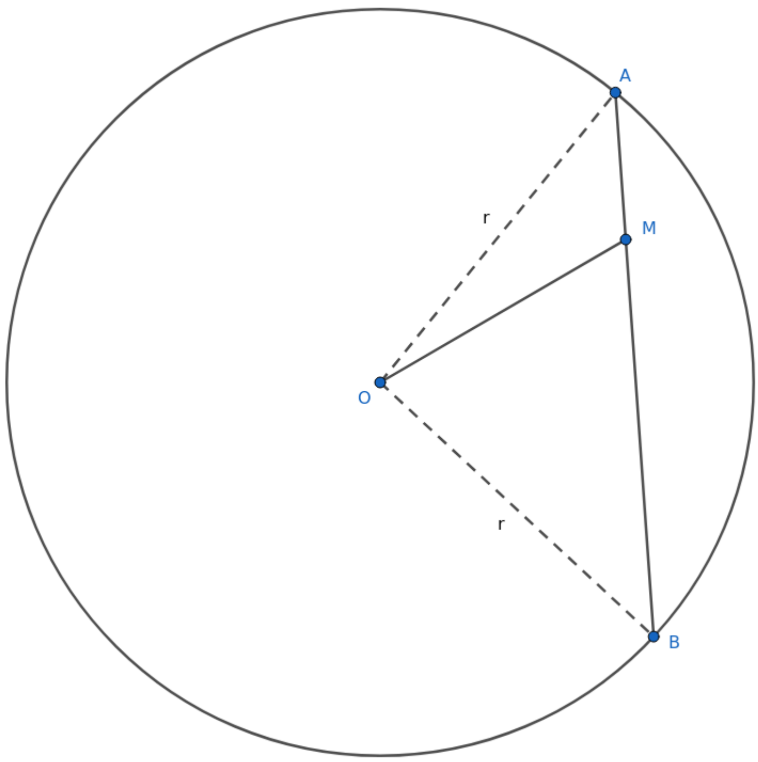

Figura 2.8: Problema 2.2.10 - Caso 2

Assim, observando os dois casos, verificamos que:

$$OM \perp AM \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{BM}.$$

2.3 Paralelismo

Problema 2.3.2
* ABC é um triângulo isósceles de base BC e $D \in AB$, $E \in AC$ são pontos tais que $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Sendo F o pontos de interseção dos segmentos CD e BE, mostre que $\overline{BF} = \overline{CF}$.

Solução: Desenhando o esboço da figura 2.9 e observando que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, podemos verificar utilizando o teorema de tales que o $\angle ADE = \angle ABC$ e o $\angle AED = \angle ACB$. Além do mais como o Triângulo ABC é isósceles com base BC, temos que $\angle ABC = \angle ACB$, e portanto, $\angle ADE = \angle ABC = \angle AED = \angle ACB$.

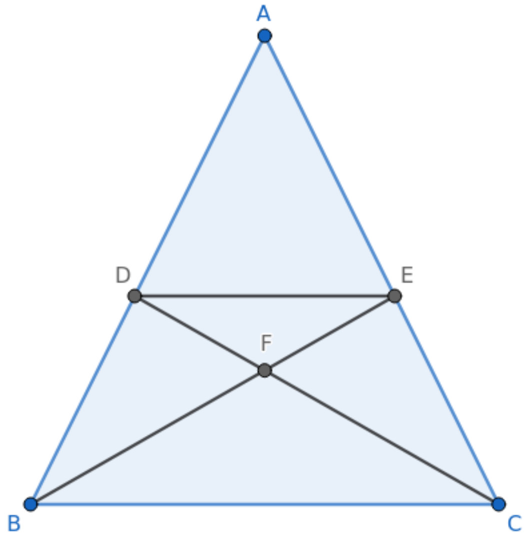

Figura 2.9: Problema 2.3.2

Observamos também que pelo caso LAL_o, os triângulos ABE e ACD são congruentes, pois:

$$\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{AC} & \text{pois } ABC \text{ é isósceles} \\ \angle A & \text{é comum a ambos} \\ \angle ADE \equiv \angle AED & \text{pelo Teorema de Tales} \end{cases} \xrightarrow{LLA_o} \Delta ABE \equiv \Delta ACD$$

Sendo assim, temos que $\angle DBF \equiv \angle ECF$ e os segmentos $\overline{AD} \equiv \overline{AE}$. De $\overline{AD} \equiv \overline{AE}$ é fácil perceber que $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{CE}$. Dessa forma, podemos verificar que os triângulos BDF e CEF são congruentes, pelo caso LAA_o, como verificasse a seguir:

$$\begin{cases} \angle DBF\ equiv \angle ECF & \text{pela congruência dos triângulos } ABE \text{ e } ACD \\ \angle BFD \equiv \angle CFE & \text{opostos pelo vértice} \\ \overline{BD} \equiv \overline{CE} & \text{vista acima} \end{cases} \xrightarrow{LLA_o} \Delta BDF \equiv \Delta CEF$$

e portanto, $\overline{BF} = \overline{CF}$.

Problema 2.3.6
Na figura abaixo, prove que $r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (os ângulos são denominados **correspondentes**).

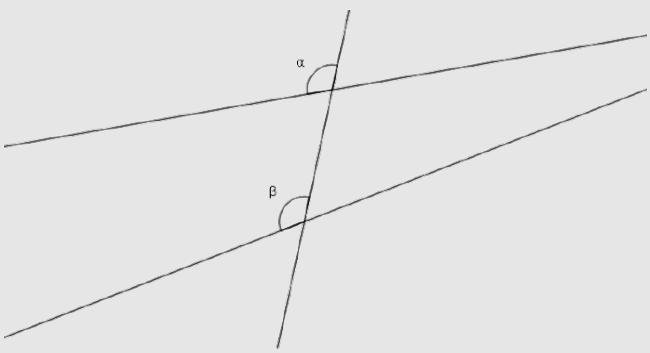

Figura 2.10: Problema 2.3.6

Solução: Vamos supor inicialmente que as retas não sejam paralelas e que $\alpha = \beta$, assim existirá um ponto C de interseção entre elas, formando o triângulo ABC e posteriormente adicionamos o ponto médio (M) do segmento BC, formando os segmentos de reta AM, B_1M, AB_1 e B_1C, como mostra a figura 2.11.

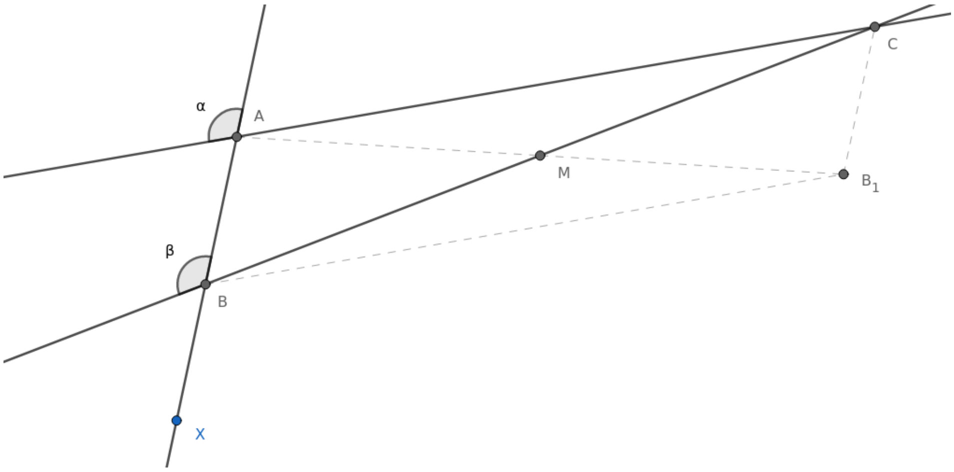

Figura 2.11: Problema 2.3.6

Podemos observar da figura acima que β é o ângulo externo do triângulo ABM e α é ângulo interno do triângulo citado, pois $\alpha = \angle BAM$ (opostos pelo vértice). Assim, pelo teorema do ângulo externo, temos que $\beta > \alpha$, o que é um contradição pela hipótese e dessa forma, $r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Problema 2.3.11

* Dado um n-ágono convexo, faça os seguintes itens:

(a) Prove que o polígono pode ser particionado em $n-2$ triângulos, utilizando-se para tanto $n-3$ diagonais que só se intersectam em vértices do mesmo.

(b) Conclua que a soma dos ângulos internos do polígono é $180°(n-2)$.

(c) Conclua que a soma de seus ângulos externos (um por vértice) do polígono é $360°$.

Solução:

(a) Seja P um polígono convexo com n vértices. Tomando um vértice qualquer A_1 por exemplo, temos que partindo de A_1, podemos formar $n-1$ segmentos, dos quais, os segmentos A_1, A_2, A_2A_3 e A_nA_1 são lados de P. Os $n-3$ segmentos restantes são diagonais de P.
Seja agora T o número de triângulos de P, partindo de A_1. Por Indução em n, temos que para $n = 4$, são formados $4 - 2 = 2$ triângulos.
Suponha que para n=k a proposição seja verdadeira. Iremos verificar para $n = k + 1$.
De $T_{(n)} = n - 2$, para $n = k$, então $T_{(k)} = k - 2$. Note que:

$$T_{(4)} = 2$$

$$T_{(5)} = T_{(4)} + 1$$

$$\vdots$$

$$T_{(k)} = T_{(k-1)} + 1$$

$$T_{(k+1)} = T_{(k)} + 1$$

$$T_{(4)} + \cdots + T_{(k+1)} = 2 + T_{(4)} + \cdots + T_{(k)} + (-3) \cdot 1$$

$$T_{(k+1)} = 2 + k - 3$$

$$T_{(k+1)} = k - 2$$

$$T_{(k+1)} = (k + 1) - 2$$

Logo, P pode ser particionado em $n - 2$ triângulos, utilizando $n - 3$ diagonais.

(b) Do item *(a)* temos que P pode ser particionado em $n - 2$ triângulos. Podemos notar também que o ângulo $\hat{A}_n$ é composto pela soma de todos os ângulos dos triângulos particionados que tem $\hat{A}_n$ como vértice. Dessa forma concluímos que a soma dos ângulos interno de um polígono qualquer é igual a soma dos ângulos internos dos triângulos particionados $(n-2)$ e como a soma dos ângulos internos do triângulo é $180°$, resulta que:

$$P_{(n)} = (n - 2) \cdot 180°$$

(c) Seja a_n o ângulo externo de A_n (ângulo interno de P) e $S_{(n)} = a_1 + a +_2 + \cdots + a_n$, temos que:

$$a_1 + A_1 = 180°$$

$$a_2 + A_2 = 180°$$

$$\vdots$$

$$a_n + A_n = 180°$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + A_1 + A_2 \cdots + A_n = 180° \cdot n$$

$$S_{(n)} = 180° \cdot n - (n - 2) \cdot 180°$$

$$S_{(n)} = 180° \cdot (n - n - 2)$$

$$S_{(n)} = 180° \cdot 2$$

$$S_{(n)} = 360°$$

Problema 2.3.14
Em um triângulo ABC, sabemos que Â é igual à oitava parte da medida do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes internas dos vértices B e C. Calcule a medida do ângulo $\angle A$.

Solução: Podemos ver um esboço do problema na figura 2.12 a seguir:

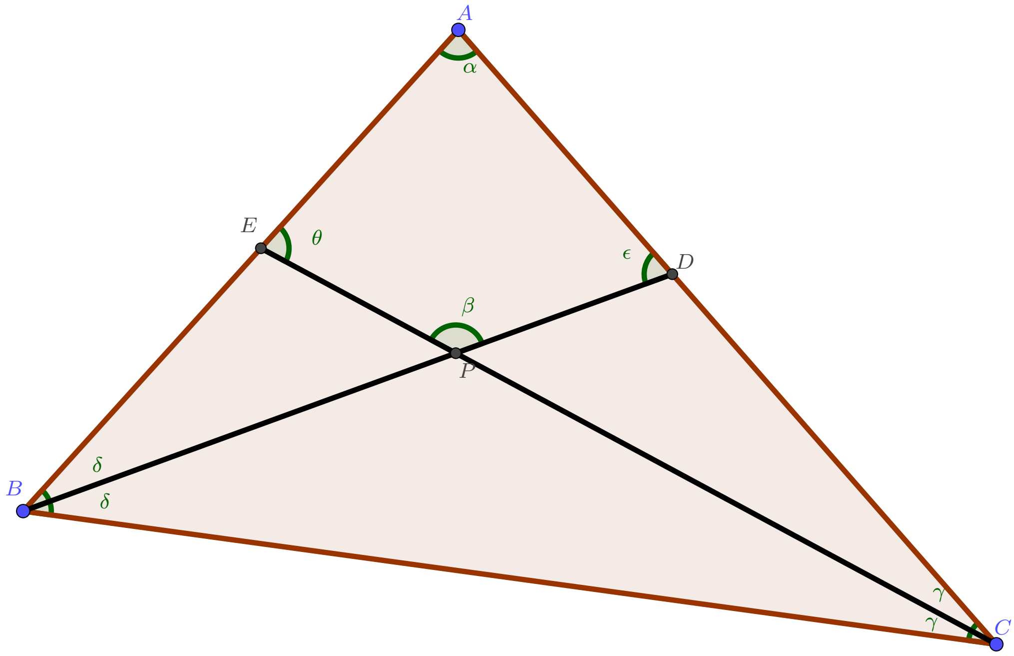

Figura 2.12: Problema 2.3.14

Podemos observar da figura acima e do enunciado do problema, que $\beta = 8\alpha$, onde α é o ângulo Â e β é o maior ângulo entre as bissetriz internas e δ e γ são os ângulos das bissetrizes. Como $\angle BPC = \beta$, pois são ângulos opostos pelo vértice, temos que nos triângulos BPC, ABC, ABD, ACE e no quadrilátero $ADPE$, temos:

$$\alpha + \delta + \epsilon = 180^\circ$$

$$\alpha + \gamma + \theta = 180^\circ$$

$$\delta + \gamma + 8\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha + 2\gamma + 2\delta = 180^\circ$$

$$\epsilon + \theta + \alpha + 8 = 360^\circ$$

De 1, 2 e 5, encontramos:

$$7\alpha - \delta - \gamma = 0$$

Resolvendo o sistema de equações entre:

$$\delta + \gamma + 8\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha + 2\gamma + 2\delta = 180^\circ$$

$$7\alpha - \delta - \gamma = 0$$

Encontramos $\alpha = 12^\circ$

Problema 2.3.18
$ABCDEF$ é um hexágono tal que as diagonais AD, BE e CF passam todas por um mesmo ponto M, que as divide ao meio. Prove que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360°$.

Solução: Podemos observar da figura 2.13 que:

$\hat{A} = \angle MAB + \angle MAF$

$\hat{B} = \angle MBA + \angle MBC$

$\hat{C} = \angle MCB + \angle MCD$

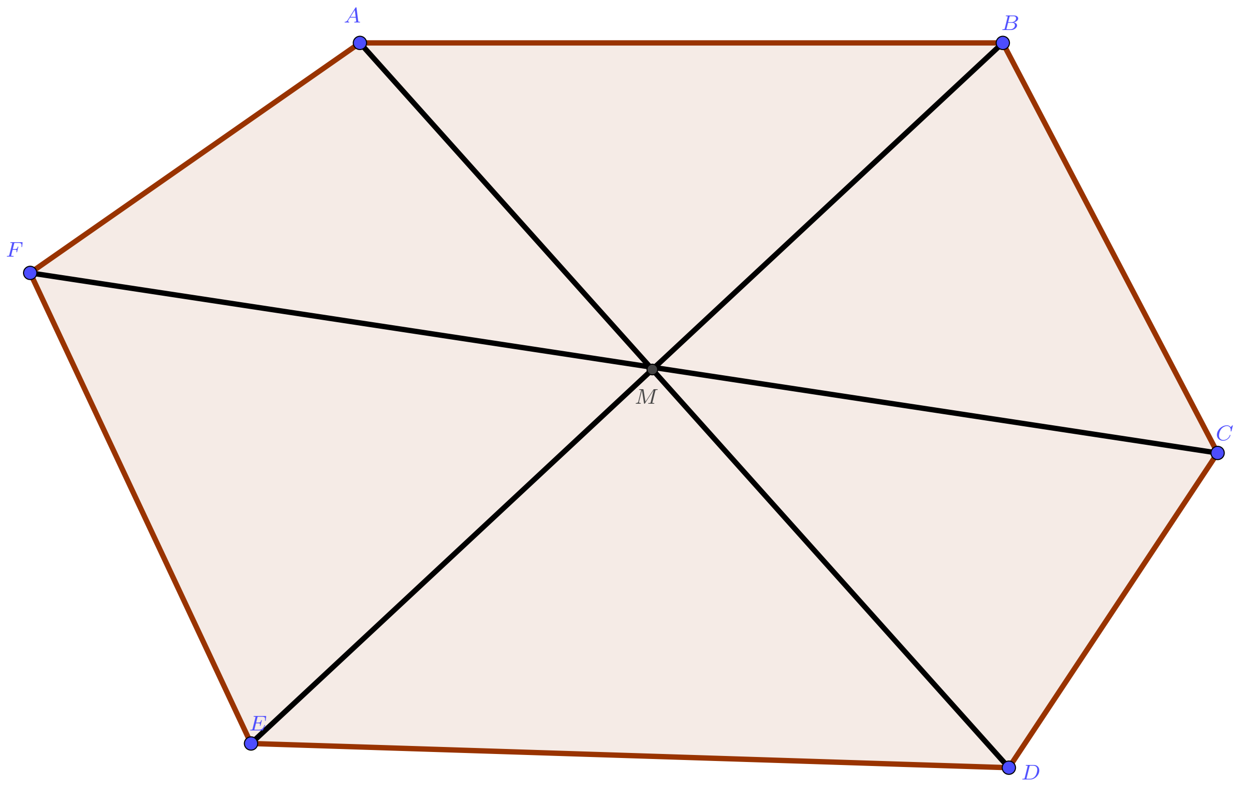

Figura 2.13: Problema 2.3.18

Também podemos observar do enunciado que as diagonais são dividas ao meio, logo:

$\overline{AM} = \overline{MD}$

$\overline{BM} = \overline{ME}$

$\overline{CM} = \overline{MF}$

É possível verificarmos que o triângulo ABM é congruente ao triângulo EDM pelo caso LAL.

$$\begin{cases} \angle AMB \equiv \angle EMD & \text{opostos pelo vértice} \\ AM \equiv MD & \text{M é ponto médio de } AD \\ BM \equiv ME & \text{M é ponto médio de } BE \end{cases} \xRightarrow{LAL} \Delta ABM \equiv \Delta EDM$$

Analogamente, temos que $\Delta BCM \equiv \Delta EFM$ e $\Delta AFM \equiv CDM$. E a partir disso, temos $\hat{C} = \angle MCB + \angle MCD = \angle MCB + \angle MFA$. Com isso temos um quadrilátero $ABCF$ em que a soma dos ângulos corresponde a $360°$, visto na equação abaixo:

$$\hat{A} + \hat{B} + \angle MCB + \angle MFA = 360°.$$

Como $\hat{C} = \angle MCB + \angle MFA$,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360°.$$

Problema 2.3.19
* Dados, no plano, uma reta r e um ponto A, prove que há exatamente uma reta s tal que $r \perp s$ e $A \in s$.

Solução: Temos dois casos a considerar:

1: $A \in r$
Suponha que existe uma reta $s_1 \neq s$ tal que $A \in s_1$ e $r \perp s_1$. Da hipótese, temos que $r \perp s$ e $A \in s$, logo A, ponto de interseção de r e s, divide o plano em quatro quadrantes, com $90°$ cada. Ora, mas se $s_1 \neq s$, então s_1 faz um ângulo $0 < \theta < 90°$ com r, logo s_1 não é perpendicular a r. Logo, para $A \in r$, existe uma única reta s tal que $r \perp s$ e $A \in s$.

2: $A \notin r$
Suponha agora que existam duas retas s e t, tal que $s \neq t$ e $A \in s$, $A \in t$, $s \perp r$ e $t \perp r$. Sejam B e C os pontos de interseção das retas s e t com r, logo temos um triângulo de vértices A, B e C. Mas como $s \perp r$, então $\hat{B} = 90°$ e de $t \perp r$, $\hat{C} = 90°$. Logo, ABC possui mais de 180^circ, o que é um absurdo. Dessa forma, não existe reta $t \neq s$ tal que $A \in t$ e $t \perp r$.

2.4 A desigualdade triangular

Problema 2.4.5
Se a, b e c são comprimentos dos lados de um triângulo, prove que $|b - c| < a$.

Solução: Seja o triângulo ABC de lados a, b e c. Iremos traçar o $\overline{BD} = c$ que está contido na reta que possui o segmento BC, como mostra a figura 2.4:

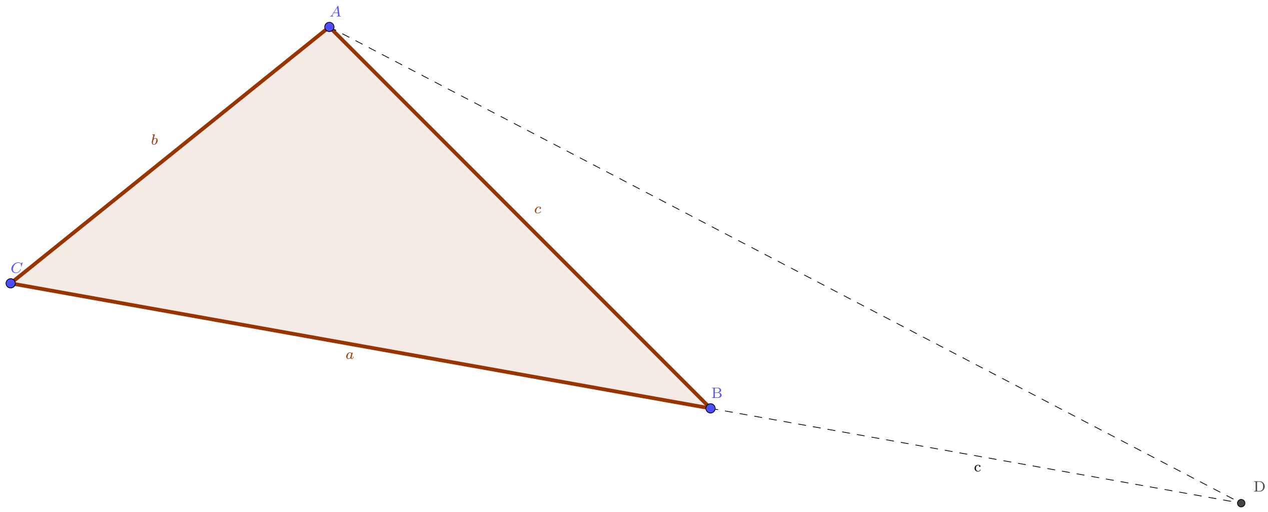

Figura 2.14: Problema 2.4.5

Podemos notar que o triângulo ABD é isósceles com base AD, logo $\angle BAD = \angle BDA$. Como $\angle DAB < \angle DAC$, temos que:

$$b < a + c.$$

$$b - c < a.$$

E como $b - c$ é um segmento de reta, e portanto $b - c > 0$, temos que:

$$|b - c| < a.$$

Problema 2.4.7
Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, prove que o ponto P do plano para o qual a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ é mínima e é o ponto de concurso das diagonais de $ABCD$.

Solução: Vejamos o esboço da figura 2.15

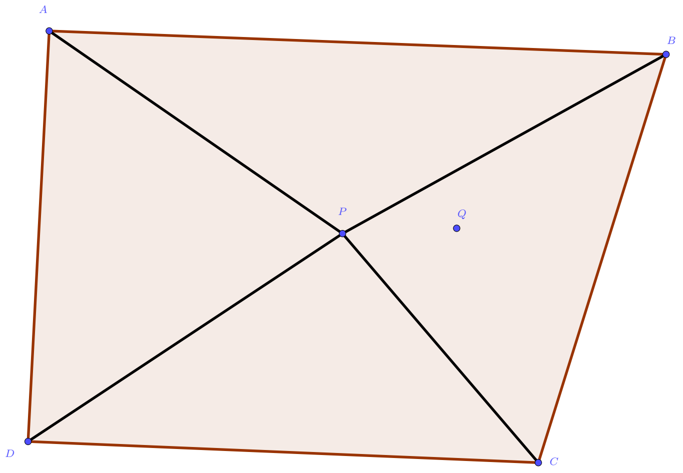

Figura 2.15: Problema 2.4.7

Temos que pela desigualdade triangular no triângulo ACP e no triângulo BDP que:

$\overline{AC} < \overline{PA} + \overline{PC}$.

$\overline{BD} < \overline{PB} + \overline{PD}$.

Somando as desigualdes, temos:

$\overline{AC} + \overline{BD} < \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$.

Agora vamos supor que exista um ponto Q no qual $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD}$ é mínimo. Dessa forma temos dois casos:

1: $Q \in ABCD$ e $Q \notin AC$ e $Q \notin BD$

$$\overline{QB} + \overline{QD} > \overline{DB} = \overline{PB} + \overline{PD}.$$
$$\overline{QA} + \overline{QC} > \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{PC}.$$
$$\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD} > \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}.$$

2: $Q \in AC$ e $Q \notin BD$

$$\overline{QA} + \overline{QC} > \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{PC}.$$
$$\overline{QB} + \overline{QD} > \overline{BD} = \overline{PB} + \overline{PD}.$$
$$\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} + \overline{QD} > \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}.$$

Assim, $\overline{PA} + \overline{PA} + \overline{PC} + \overline{PD}$ é mínimo.

2.5 Quadriláteros notáveis

Problema 2.5.3
Uma reta r passa pelo baricentro G de um triângulo ABC e deixa o vértice A de um lado e os vértices B e C do outro. Prove que a soma das distâncias de B e C à reta r é igual à distância de A a r.

Solução:

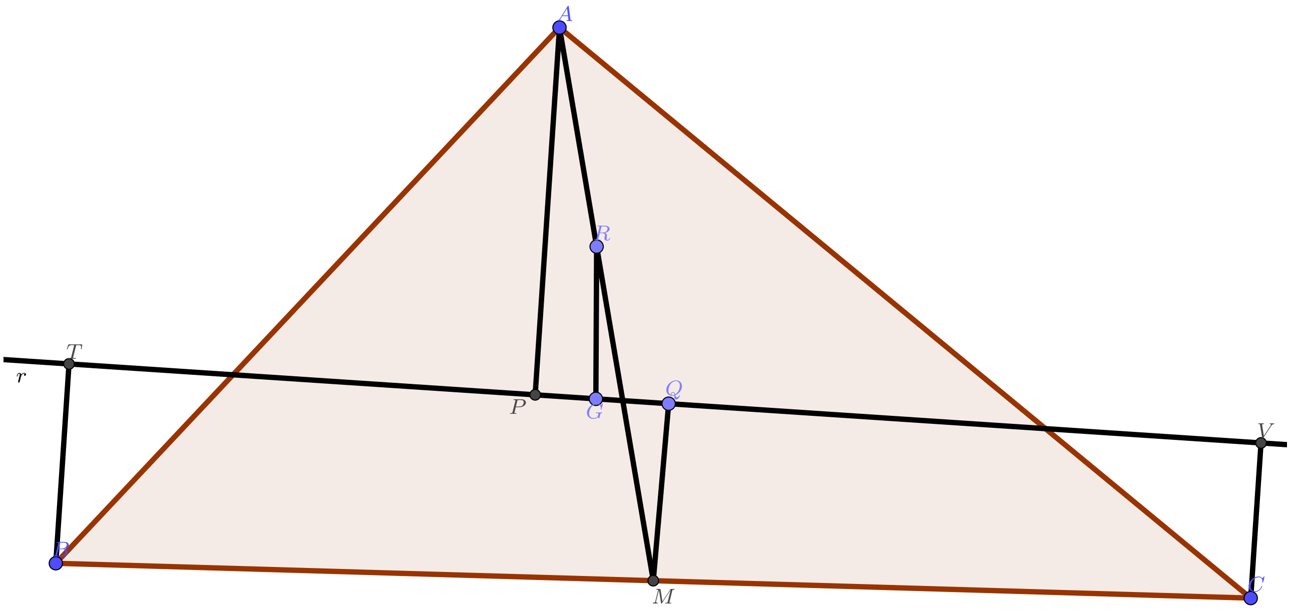

Figura 2.16: Problema 2.5.3

Sejam M o ponto médio de $\overline{BC}$, P e Q os pés das perpendiculares baixadas de A e M à reta r. Marcando os pontos R e S tais que R é o ponto médio de $\overline{AG}$ e S o pé da perpendicular baixada de R à reta r. Marcamos também os pontos T e V que são os pés das perpendiculares baixadas de B e C respectivamente em relação a reta r. Temos que $\overline{AM}$ é mediana, G é baricentro e R o ponto médio de $\overline{AG}$, então $\overline{AR} = \overline{RG} = \overline{GM}$. $S\hat{G}R = M\hat{G}Q$ (OPV) e $G\hat{S}R = M\hat{Q}G = 90°$, logo pelo caso LAA_o, temos $\Delta RGS \equiv \Delta GQM$, portanto, $\overline{RS} = \overline{QM}$.

Em APG, $\overline{RS} = \frac{1}{2}\overline{AP}$.

Queremos mostrar que $\overline{AP} = \overline{BT} + \overline{CV}$.

No trapézio $BCVT$, $\overline{MQ} \parallel \overline{BT} \parallel \overline{CV}$. Como M é ponto médio de $\overline{BC}$, pelo teorema da base média para trapézios, temos $\overline{QM} = \frac{\overline{BT}+\overline{CV}}{2}$.

Como $\overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{AP}$, temos:

$$\frac{1}{2}\overline{AP} = \frac{1}{2}\left(\overline{BT} + \overline{CV}\right) \implies \overline{AP} = \overline{BT} + \overline{CV}.$$

Problema 2.5.5
Prove que, em todo triângulo, a soma dos comprimentos das medianas é menor que $\frac{3}{2}$ do perímetro e maior que $\frac{3}{4}$ do perímetro do triângulo.

Solução:

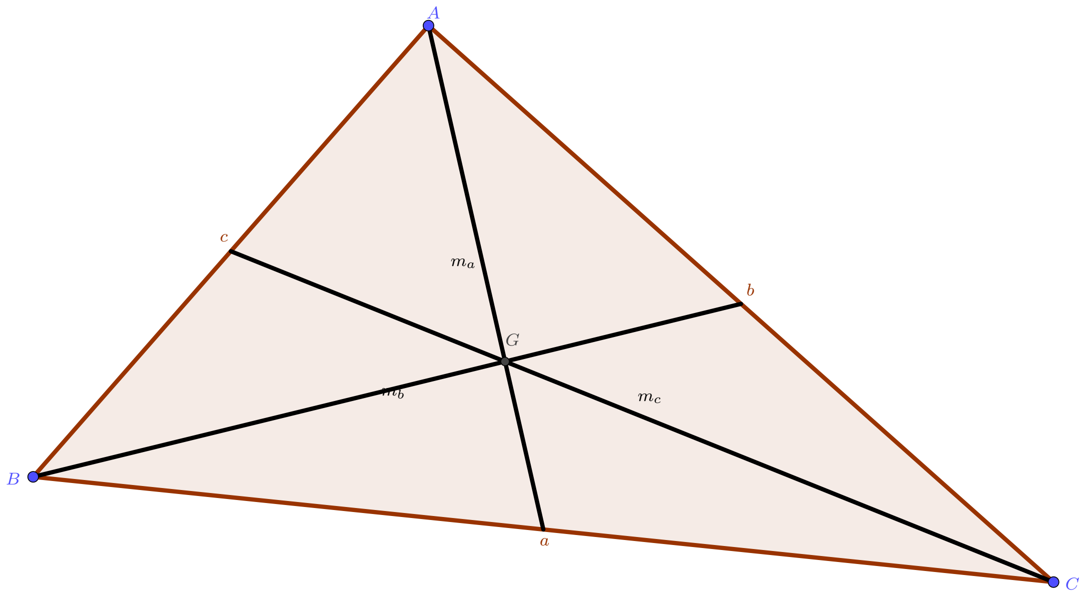

Figura 2.17: Problema 2.5.5

Sejam $m_a = \overline{AM_a}$, $m_b = \overline{BM_b}$, $m_c = \overline{CM_c}$ e $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Queremos mostrar que:

$$m_a + m_b + m_c < \frac{3}{2}(a + b + c).$$

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c).$$

Sabemos que se G é um ponto situado no interior de ABC, então:

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} < a + b + c.$$

Pelo fato de G ser o baricentro do triângulo ABC, temos que:

$$\overline{GA} = \frac{2}{3}m_a.$$

$$\overline{GB} = \frac{2}{3}m_b.$$

$$\overline{GC} = \frac{2}{3}m_c.$$

Daí,

$$\frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c) < a + b + c.$$

Multiplicando por $\frac{3}{2}$, obtemos a primeira parte:

$$m_a + m_b + m_c < \frac{3}{2}(a + b + c).$$

Para a próxima inequação, aplicando a desigualdade triangular aos triângulos M_aGM_b, M_bGM_c e M_cGM_c, temos respectivamente:

$$\overline{GM_a} + \overline{GM_b} > \overline{M_aM_b}.$$

Pelo fato de G ser o baricentro, segue que $\overline{GM_a} = \frac{1}{3}M_a$, $\overline{GM_b} = \frac{1}{3}m_b$ e pelo teorema da base média, vem $\overline{M_aM_b} = \frac{c}{2}$. Substituindo na inequação acima, temos:

$$\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b > \frac{c}{2} \implies \frac{2}{3}\left(m_a + m_b\right) > c.$$

Analogamente, temos:

No triângulo M_bGM_c,

$$\frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c > \frac{a}{2}.$$

$$\frac{2}{3}\left(m_b + m_c\right) > a.$$

No triângulo M_cGM_a,

$$\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_c > \frac{b}{2}.$$

$$\frac{2}{3}\left(m_b + m_c\right) > b.$$

Somando membro a membro as desigualdades, obtemos:

$$\frac{2}{3}\left(2m_a + 2m_b + 2m_c\right) > a + b + c.$$

$$\frac{4}{3}\left(m_a + m_b + m_c\right) > a + b + c.$$

Multiplicando por $\frac{3}{4}$, concluímos que:

$$\left(m_a + m_b + m_c\right) > \frac{3}{4}a + b + c.$$
