

Análise Combinatória

Fernando Jorge

Escola Estadual Professor Lima Castro

12 de setembro de 2023

Sumário

1. Princípio Fundamental da Contagem

2. Fatorial

3. Tipos de Agrupamento

4. Permutação

O que é análise combinatória?

A análise combinatória é um ramo da matemática que procura elaborar métodos que nos permitam encontrar o número de possibilidades que um evento pode ocorrer, sem a obrigatoriedade de descrevermos todos os eventos possíveis.

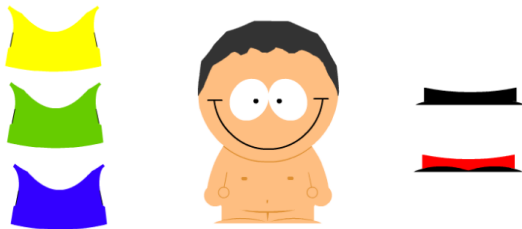
É importante conhecermos tais métodos, pois nem sempre temos condições de descrever todas as formas sob as quais uma situação pode ocorrer, principalmente em situações onde a resposta é um número muito elevado.

Princípio Fundamental da Contagem

Se um experimento E pode apresentar n resultados distintos e um experimento F pode apresentar k resultados distintos, então o número de resultados distintos que o experimento composto de E e F pode apresentar, nessa ordem, é dado pelo produto $n \cdot k$

Princípio Fundamental da Contagem

João foi convidado para festa de sua amiga Maria. Muito vaidoso, abriu o seu guarda-roupa e experimentou todas as roupas que possuía: 3 camisetinhas e 2 bermudas.



De quantas formas João pode se arrumar?

Princípio Fundamental da Contagem

Um restaurante oferece no cardápio 2 entradas distintas, 3 tipos de pratos principais e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato principal e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

Princípio Fundamental da Contagem

Cuidado com o uso do PFC para eventos dependentes!

O diretor de uma empresa precisa escolher para o setor de compras um coordenador e um vice dentre 5 funcionários (A, B, C, D, E) . De quantas formas pode se dar essa escolha?

Fatorial

Sendo n um número natural, define-se fatorial de n , e indica-se:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- \vdots
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Fatorial

Podemos escrever os fatoriais em função de fatoriais menores:

- $5! = 5 \cdot 4!$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3!$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!$

Fatorial

Veja os exemplos

- $\frac{10!}{8!}$
- $\frac{50! - 49!}{49!}$
- $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 210$

Tipos de Agrupamento

Um agrupamento de elementos é qualquer conjunto, ordenado ou não, formados por esses elementos. São classificados dois tipos fundamentais de agrupamentos: ARRANJO e COMBINAÇÃO.

Arranjo

ARRANJOS são Agrupamentos em que se *considera a ordem dos elementos*, ou seja, resultados com mesmos elementos mas em ordens diferentes são considerados distintos. Veja a seguinte situação:

“O professor de Matemática precisa escolher 3 alunos dentre 10 para participarem de uma comissão ocupando os cargos de presidente, vice-presidente e secretário”

Considere a notação (Presidente, Vice-presidente, Secretário)

Note que o resultado $(A1, A2, A3)$ é diferente do resultado $(A2, A1, A3)$.

COMBINAÇÃO

COMBINAÇÕES são agrupamentos em que NÃO se considera a ordem dos elementos, ou seja, resultados com mesmos elementos, ainda que em ordens diferentes, são considerados iguais. Veja a seguinte situação:

“O professor de Matemática precisa escolher 3 alunos dentre 10 para participarem de uma visita técnica”.

Note que o resultado $(A1, A2, A3)$ é igual ao resultado $(A2, A1, A3)$.

Permutação Simples

Uma permutação simples dos elementos de um conjunto F é qualquer sequência de elementos distintos formado por todos os elementos de F . A permutação é um caso específico de Arranjo. Veja a situação:

“De quantas maneiras pode-se organizar 6 livros distintos em uma prateleira?”

Pelo PFC, temos: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ maneiras

Generalização:

Permutação Simples de n elementos: $P_n = n!$

Permutação Simples

De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?

Permutação Simples

Quantas palavras distintas podemos formar com a palavra PERNAMBUCO? Quantas começam com a sílaba PER?

Permutação com Elementos Repetidos

De quantas maneiras pode-se organizar 6 livros em uma prateleira sendo que 3 deles são iguais?



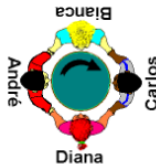
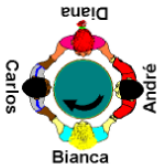
Permutação com Elementos Repetidos

Fórmula:

$$P_n^{k_1, k_2, k_3, \dots, k_p} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_p!}$$

Permutação Circular

De quantas maneiras podemos dispor quatro pessoas ao redor de uma mesa circular?



Permutação Circular

Fórmula:

$$P_{c(n)} = \frac{n!}{n}$$

Arranjo

Como já vimos anteriormente, arranjos são agrupamentos em que se **considera a ordem dos elementos**.

Muito comum em questões de criação de senhas, números, telefones, placas de carro, competições, disputas, situações em que houver hierarquia.

Fórmula:

$$A_p^n = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Dica: Questões de Arranjos podem ser resolvidos utilizando PFC.

Arranjo

Veja algumas exemplos:

- $A_{5,2} =$
- $A_{10,4} =$
- $A_{8,1} =$
- $A_{7,5} =$

Arranjo

Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, ..., 9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abri-lo?

Arranjo

Em uma escola está sendo realizado um torneio de futebol de salão, no qual dez times estão participando. Quantos jogos podem ser realizados entre os times participantes em turno e retorno?

Combinação

Como já vimos anteriormente, combinações são agrupamentos em que **não considera-se a ordem dos elementos**.

Muito comum em questões de criação de grupos, comissões e agrupamentos em que não há distinção pela ordem dos elementos escolhidos.

Fórmula:

$$C_p^n = C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Dica: Questões de Combinações não podem ser resolvidos utilizando PFC.

Combinação

Veja alguns exemplos:

- $C_{5,2} =$
- $C_{10,4} =$
- $C_{8,1} =$
- $C_{7,5} =$

Combinação

Uma prova consta de 5 questões das quais o aluno deve resolver 2. De quantas formas ele poderá escolher as 2 questões?

Combinação

Os 32 times que jogarão a Copa do Mundo 2014 no Brasil estão agrupados em oito grupos de quatro seleções cada. As quatro seleções de cada grupo se enfrentarão uma única vez entre si, formando a primeira etapa da copa. Calcule a quantidade de jogos que cada grupo terá.