
Matrizes

Fernando Jorge

10 de Março, 2023

Sumário

1	Introdução	2
2	Definição	2
3	Representação genérica	2
4	Matrizes Especiais	3
4.1	Matriz Quadrada	3
4.2	Matriz Identidade	3
4.3	Matriz Nula	3
4.4	Transposta de uma Matriz	4
4.5	Igualdade de Matrizes	4
4.6	Exercícios Propostos	4
5	Operações entre Matrizes	5
5.1	Adição de matrizes	5
5.2	Subtração de Matrizes	5
5.3	Multiplicação de um número real por uma Matriz	6
5.4	Exercícios Propostos	6
5.5	Multiplicação de Matrizes	6
5.6	Exercícios Propostos	7
5.7	Matrizes Inversas	8
5.8	Exercícios Propostos	8

1 Introdução

	(1) Norte	(2) Nordeste	(3) Sudeste	(4) Sul	(5) Centro-Oeste
(1) Homens	69,1	66,5	70,4	71,6	70,6
(2) Mulheres	74,9	73,8	78,5	78,5	77,5

Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>>. Acesso em: 9 nov. 2009.

Figura 1: expectativa de vida brasileira em 2008

Note que podemos encontrar a expectativa de vida de uma mulher residente na região Sul bastando olhar o cruzamento da linha 2 com a coluna 4, onde encontramos o valor de 78,5 anos.

Em matemática, as tabelas como essa são chamadas de **matrizes**, sobre as quais definiremos a relação de igualdade e algumas operações.

2 Definição

Definition 2.1: Matriz

Chama-se **matriz do tipo** $m \times n$ (lemos “m por n”) toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas.

Essa tabela deve ser representada entre parênteses $()$ ou entre colchetes $[]$.

Exemplos.

- a) $\begin{bmatrix} -6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2 , pois tem 3 linhas e 2 colunas.
- b) $[3 \quad \sqrt{2} \quad -5]$ é uma matriz do tipo 1×3 , pois tem 1 linha e 3 colunas.

3 Representação genérica

Indicamos por a_{ij} o elemento posicionado na linha i e na coluna j de uma matriz A .
Na matriz:

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- o elemento 6 está na linha 1 e na coluna 1; por isso, ele é indicado por a_{11} , ou seja, $a_{11} = 6$;
- o elemento 7 está na linha 1 e na coluna 2; por isso, ele é indicado por a_{12} , ou seja, $a_{12} = 7$;
- analogamente, temos $a_{21} = -4$, $a_{22} = 0$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = -1$.

Definition 3.1: Matriz Genérica

Representamos genericamente uma matriz A do tipo $m \times n$ da seguinte maneira:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como essa representação é muito extensa, vamos convencionar uma forma abreviada. Essa matriz pode ser representada simplesmente por $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao tipo de matriz, por $A = (a_{ij})$.

Exercício Resolvido. Representar explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$.

Primeiro, representamos genericamente a matriz A , do tipo 2×4 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

A seguir, calculamos o valor de cada elemento a_{ij} , pela lei $a_{ij} = 2i + j$:

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$a_{14} = 2 \cdot 1 + 4 = 6$$

$$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$$

$$a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$a_{24} = 2 \cdot 2 + 4 = 8$$

Concluindo, temos a matriz: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

4 Matrizes Especiais

4.1 Matriz Quadrada

Definition 4.1: Matriz Quadrada

É toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

O número de linhas ou de colunas de uma matriz quadrada é chamado de **ordem** da matriz.

Exemplos.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3. b) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

Numa matriz A de ordem n , os elementos a_{ij} , tais que $i = j$ formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos a_{ij} , tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

4.2 Matriz Identidade

Definition 4.2: Matriz Identidade

É a matriz quadrada cujos elementos da **diagonal principal** são iguais a 1 e os demais iguais a 0.

Indicamos por I_n a matriz identidade de ordem n .

Exemplos.

a) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.3 Matriz Nula

Definition 4.3: Matriz Nula

É a matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplos.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4.4 Transposta de uma Matriz

Definition 4.4: Transposta de uma Matriz

Transposta de uma matriz A é a matriz A^t tal que os números que a formam são obtidos através da troca de posição entre linhas e colunas da matriz A .

Exemplos.

a) A transposta de $A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ é a matriz $A_{2 \times 3}^t = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

b) A transposta de $B_{1 \times 4} = [2 \quad 0 \quad -5 \quad 8]$ é a matriz $B_{4 \times 1}^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Nome que a transposta de uma matriz $m \times n$ é uma matriz do tipo $n \times m$.

4.5 Igualdade de Matrizes

Definition 4.5: Igualdade de Matrizes

Duas Matrizes do mesmo tipo são iguais quando todos os elementos correspondentes são iguais.

Exercício Resolvido. Determinar o número real x tal que: $\begin{bmatrix} 6 & x^2 - 5 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Resolução

As matrizes são do mesmo tipo (2×2). Logo, elas serão iguais se, e somente se, os elementos correspondentes forem iguais, isto é:

$$\begin{cases} 6 = 6 \\ x^2 - 5 = 11 \\ 0 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = 16 \\ x = 4 \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = 4 \end{cases}$$

Como o número 4 é a única solução comum às duas equações do sistema, concluímos que as matrizes são iguais se, e somente se, $x = 4$.

4.6 Exercícios Propostos

- [1] Uma rede comercial é formada por cinco lojas, numeradas de 1 a 5. A tabela abaixo mostra o faturamento, em real, de cada loja nos quatro primeiros dias de janeiro:

1950	2030	1800	1950
1500	1820	1740	1680
3010	2800	2700	3050
2500	2420	2300	2680
1800	2020	2040	1950

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j .

- Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2?
- Qual foi o faturamento dessa rede de lojas no dia 3?
- Qual foi o faturamento da loja 1 nos quatro dias?

- [2] Represente explicitamente cada uma das matrizes:

- $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i + 2j$
- $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $b_{ij} = i^2 + 3j$
- $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $c_{ij} = 2i$
- $D = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $\begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ i + j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

3] Sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2, determine o número real x tal que:

$$\begin{bmatrix} x^2 - 15 & 0 \\ 0 & x - 3 \end{bmatrix} = I_2$$

4] Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, determine as matrizes:

- a) A^t
- b) $(A^t)^t$

5] Obtenha os valores reais de x e y de modo que a matriz abaixo seja nula.

$$\begin{bmatrix} 3x + y - 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5x - y - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5 Operações entre Matrizes

5.1 Adição de matrizes

Definition 5.1: Adição de Matrizes

A **soma** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B , é a matriz em que cada elemento é a soma de seus correspondentes em A e B .

Indicamos essa soma por: $A + B$.

Exemplo.

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Proposition 5.1. Adição de Matrizes

1. Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
2. Comutativa: $A + B = B + A$
3. Elemento Neutro: $A + 0 = 0 + A = A$. Onde 0 é a **matriz nula**.
4. Elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0$. Onde $-A$ é a **matriz oposta** de A .

Exemplo. Dado $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$, sua **matriz oposta** é $-A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$, pois:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2 Subtração de Matrizes

Definition 5.2: Subtração de Matrizes

A **diferença** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B , nessa ordem, é a soma de A com a oposta de B .

Indicamos essa diferença por $A - B$.

Exemplo. Sendo $A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, temos:

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Para simplificar esse procedimento, podemos subtrair os elementos correspondentes em A e B :

$$A - B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-2 & 6-4 \\ 4-(-3) & 0-5 \\ -4-1 & -1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3 Multiplicação de um número real por uma Matriz

Definition 5.3: Multiplicação de um número real por uma Matriz

O **produto** de um número real k por uma matriz A é a matriz em que cada elemento é o produto de seu correspondente em A pelo número k .

Indicamos esse produto por $k \cdot A$ ou kA .

Exemplo.

$$6 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 6 \\ 0 & 6\sqrt{2} & -12 \end{bmatrix}$$

5.4 Exercícios Propostos

[1] Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$ determine:

- $A + B$
- $2A - B$
- $3A - \frac{1}{2} \cdot C^t$

[2] Determine a matriz X tal que:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix} + X = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

[3] Determine as matrizes X e Y tais que:

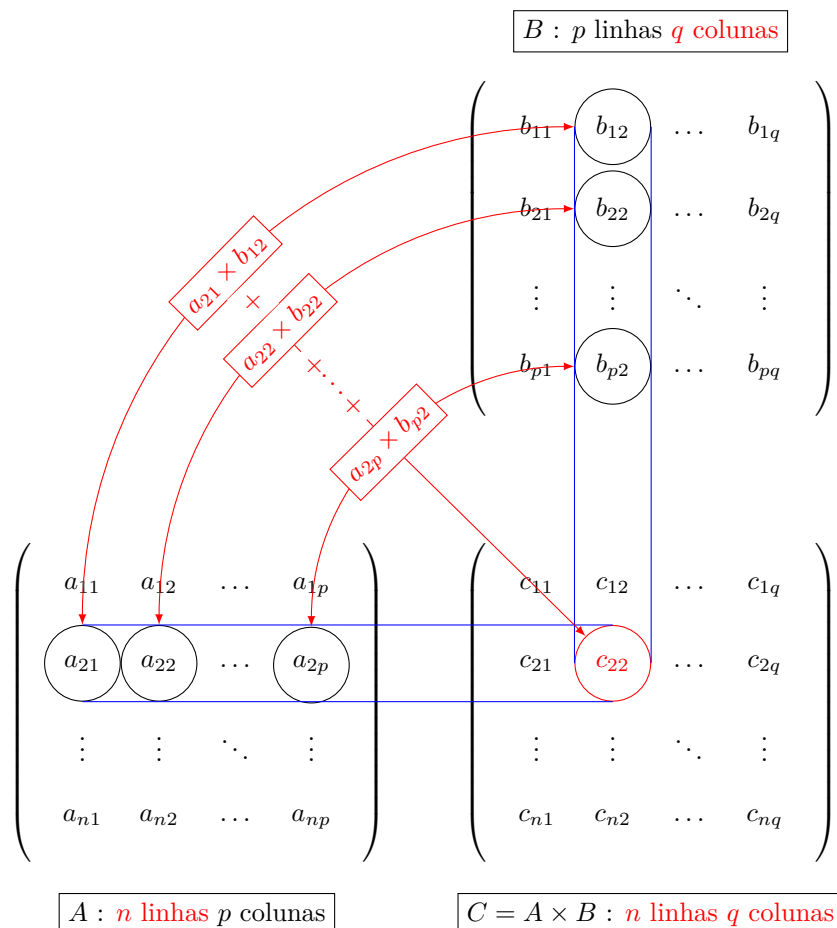
$$X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } X - Y = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

5.5 Multiplicação de Matrizes

Definition 5.4: Multiplicação de Matrizes

O **produto** da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ pela matriz $B = (b_{ij})_{n \times p}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$ tal que cada elemento c_{ij} é o produto da linha i de A pela coluna j de B .

Esse produto é indicado por $A \cdot B$ ou AB . O esquema a seguir ajuda a visualizar essa definição:



Exemplos.

$$\begin{aligned} 1. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix} \\ 2. \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 5 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 20 & 9 \\ 8 & 10 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nota:-

1. Se A e B são matrizes, existe o produto AB se, e somente se, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B . Veja abaixo:

a) Existe o produto $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 5}$

b) Não existe o produto $A_{2 \times 3} \cdot B_{4 \times 2}$

2. A matriz C , tal que $C = AB$, possui o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B , isto é:

$$A_{m \times k} \cdot B_{k \times n} = C_{m \times n}$$

Por exemplo:

a) $A_{3 \times 5} \cdot B_{5 \times 8} = C_{3 \times 8}$

b) $A_{1 \times 4} \cdot B_{4 \times 1} = C_{1 \times 1}$

Proposition 5.2. Propriedades da multiplicação de matrizes

1. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$, em que $A_{m \times n}$, $B_{n \times k}$ e $C_{k \times p}$.
2. Distributiva: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, em que $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ e $C_{k \times m}$.
3. Elemento neutro: $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A = A$
4. Transposta do produto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, em que $A_{m \times n}$ e $B_{n \times k}$.

Exercício Resolvido.

1. Determinar a matriz X tal que: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix}$

Resolução

Primeiro, vamos determinar o tipo da matriz X :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot X_{m \times n} = \begin{bmatrix} 4 & -9 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Para que seja possível multiplicar as matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas de X ; portanto, $m = 2$. O número de colunas da matriz X deve ser igual ao número de colunas da matriz produto; portanto, $n = 1$.

Assim, a matriz X é do tipo 2×1 .

Sendo $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a + 3b \\ a - 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ a - 4b = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ -2a + 8b = 18 \end{cases} \Rightarrow 0a + 11b = 22 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -1$$

Assim, concluímos: $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

5.6 Exercícios Propostos

[1] Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$, determine, se possível:

a) $A \cdot B$

b) $A \cdot C$

c) $B \cdot C$

d) A^2

e) B^2

[2] Sendo as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, determine:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) $A \cdot I_3$

d) $I_2 \cdot A$

e) $B \cdot C$

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$