Lecture Notes | 2023

Matrizes

Fernando Jorge

Introduction

This is the lecture notes scribed by me. If you find any mistakes in the notes please email me at sohamc@cmi.ac.in.

The whole course is taken by Prof. Upendra Kulkarni, online. If you want the lecture videos then you can find them in this link. Sir mainly followed Prof. Pramath Sastry's Notes (https://www.cmi.ac.in/~pramath/teaching.html#ANA2). You can find all the assignments problems in the following drive link. Through out the course the book we followed is Principles of Mathematical Analysis by Walter Rudin.

Contents

Chapter 1

Introdução

Observe abaixo a tabela da expectativa de vida no Brasil em 2008, segundo as regiões brasileiras (numeradas de 1 a 5) e gêneros (1 e 2).

	(1) Norte	(2) Nordeste	(3) Sudeste	(4) Sul	(5) Centro-Oeste
(1) Homens	69,1	66,5	70,4	71,6	70,6
(2) Mulheres	74,9	73,8	78,5	78,5	77,5

Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 9 nov. 2009.

Figure 1.1: expectativa de vida brasileira em 2008

Note que podemos encontrar a expectativa de vida de uma mulher residente na região Sul bastando olhar o cruzamento da linha 2 com a coluna 4, onde encontramos o valor de 78,5 anos.

Em matemática, as tabelas como essa são chamadas de **matrizes**, sobre as quais definiremos a relação de igualdade e algumas operações.

1.1 Definição

Definition 1.1.1: Matriz

Chama-se **matriz do tipo** $m \times n$ (lemos “m por n”) toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas.

Note:-

Essa tabela deve ser representada entre parênteses () ou entre colchetes [].

Example 1.1.1

a) $\begin{bmatrix} -6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2, pois tem 3 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×3, pois tem 1 linha e 3 colunas.

1.2 Representação genérica

Indicamos por a_{ij} o elemento posicionado na linha i e na coluna j de uma matriz A.

Example 1.2.1

Na matriz:

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- o elemento 6 está na linha 1 e na coluna 1; por isso, ele é indicado por a_{11}, ou seja, $a_{11} = 6$;
- o elemento 7 está na linha 1 e na coluna 2; por isso, ele é indicado por a_{12}, ou seja, $a_{12} = 7$;
- analogamente, temos $a_{21} = -4$, $a_{22} = 0$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = -1$.

Definition 1.2.1: Matriz Genérica

Representamos genericamente uma matriz A do tipo $m \times n$ da seguinte maneira:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como essa representação é muita extensa, vamos convencionar uma forma abreviada. Essa matriz pode ser representada simplesmente por $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ou, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao tipo de matriz, por $A = (a_{ij})$.

Question 1

Representar explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 4}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$.

Solution: Primeiro, representamos genericamente a matriz A, do tipo 2×4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

A seguir, calculamos o valor de cada elemento a_{ij}, pela lei $a_{ij} = 2i + j$:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $\quad$ $a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ $\quad$ $a_{14} = 2 \cdot 1 + 4 = 6$

$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ $\quad$ $a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ $\quad$ $a_{24} = 2 \cdot 2 + 4 = 8$

Concluindo, temos a matriz: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

1.3 Matrizes Especiais

1.3.1 Matriz Quadrada

Definition 1.3.1: Matriz Quadrada

É toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Note:-

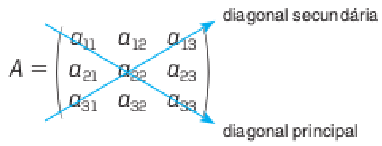
O número de linhas ou de colunas de uma matriz quadrada é chamado de **ordem** da matriz.

Example 1.3.1

a) $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

b) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

Numa matriz A de ordem n, os elementos a_{ij}, tais que $i = j$ formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos a_{ij}, tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**. Por exemplo:



1.3.2 Matriz Identidade

Definition 1.3.2: Matriz Identidade

É a matriz quadrada cujos elementos da **diagonal principal** são iguais a 1 e os demais iguais a 0.

Indicamos por I_n a matriz identidade de ordem n.

Example 1.3.2

a) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.3.3 Matriz Nula

Definition 1.3.3: Matriz Nula

É a matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Example 1.3.3

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.3.4 Transposta de uma Matriz

Definition 1.3.4: Transposta de uma Matriz

Transposta de uma matriz A é a matriz A^t tal que os números que a formam são obtidos através da troca de posição entre linhas e colunas da matriz A.