Matrizes

Fernando Jorge

10 de Março, 2023

Sumário

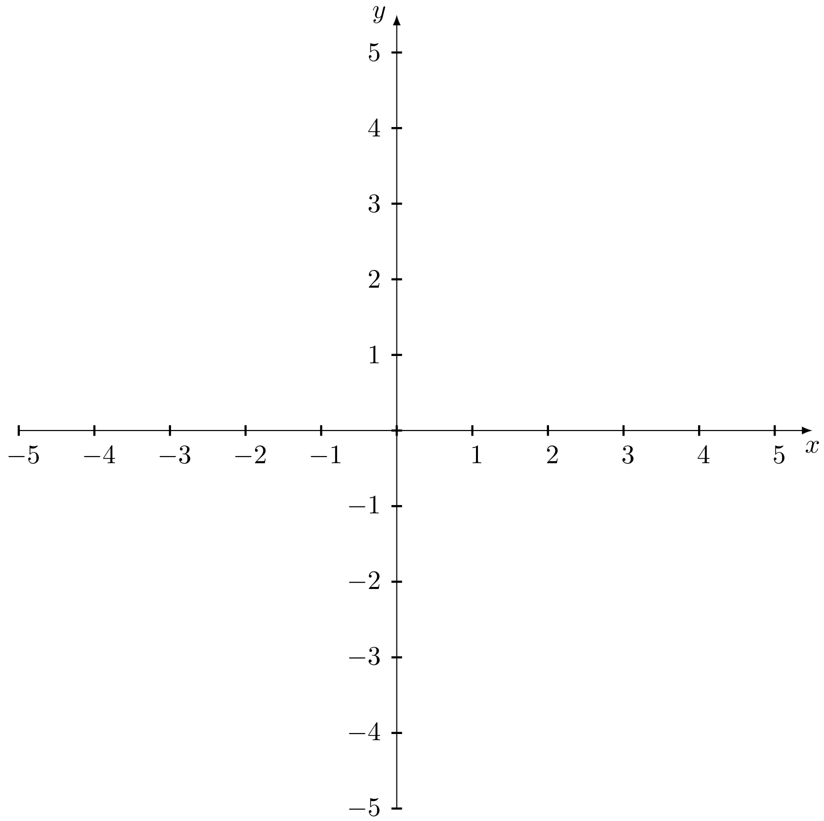
1 Introdução ao estudo das funções **2**
1.1 Sistemas de coordenadas 2
1.1.1 Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas 2
1.1.2 Exercícios Propostos 4
1.2 O conceito de função 5
1.2.1 A noção de função no cotidiano 5
1.2.2 Exercícios Propostos 6
1.2.3 Formalização do conceito de função 8

1 Introdução ao estudo das funções

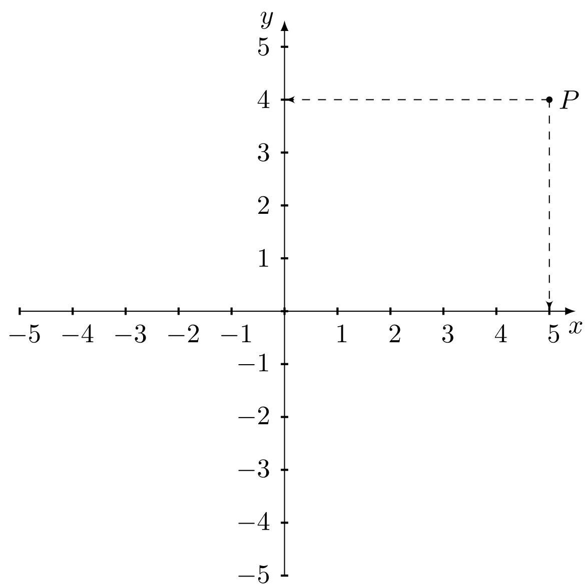
1.1 Sistemas de coordenadas

1.1.1 Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

O Sistema de coordenadas, mais conhecido como Plano Cartesiano, foi criado por René Descartes com o objetivo de localizar pontos. Ele é formado por dois eixos perpendiculares: um horizontal e outro vertical que se cruzam na origem das coordenadas. O eixo horizonal($0x$) é chamado de *abscissa* e o vertical($0y$) chamado de ordenada. Os eixos são enumerados compreendendo o conjunto dos números reais. Observe a seguir a representação do Plano Cartesiano:



Para determinar as coordenadas do ponto P da figura a seguir, traçamos por P as perpendiculares ao eixo x e ao eixo y, obtendo, nesses eixos, dois números chamados de **abscissa** e **ordenada** do ponto P, respectivamente.



No exemplo, as **coordenadas** do ponto P são 5 e 4. A **abscissa** é 5, e a **ordenada** é 4. Indicamos esse fato por $P(5, 4)$.

A representação $(5, 4)$ é chamada de "**par ordenado** de abscissa 5 e ordenada 4".

Proposition 1.1. Generalidades

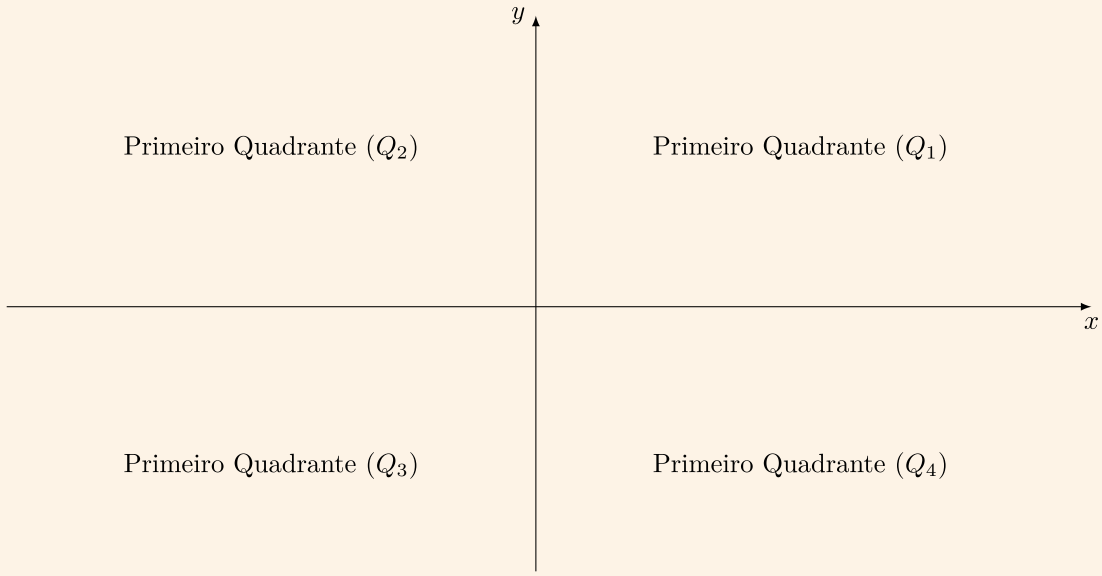
1. Dois pares ordenados de números reais são iguais se, e somente se, suas abscissas são iguais e suas ordenadas são iguais, isto é:

   $(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$

   Por exemplo:

   $(a, 8) = (7, y) \iff a = 7 \text{ e } y = 8$

2. Os eixos $0x$ e $0y$, chamados de **eixos coordenados**, separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que devem ser enumerados conforme a figura:



   $P(a, b) \in Q_1 \iff a > 0 \text{ e } b > 0$ $P(a, b) \in Q_2 \iff a < 0 \text{ e } b > 0$

   $P(a, b) \in Q_3 \iff a < 0 \text{ e } b < 0$ $P(a, b) \in Q_4 \iff a > 0 \text{ e } b < 0$

   Por exemplo:

   \# $(4, 2) \in Q_1$ \# $(-\frac{1}{2}, 9) \in Q_2$

   \# $(-3, -5) \in Q_3$ \# $(\frac{3}{2}, -1) \in Q_4$

   Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.

3. Todo ponto de abscissa nula (igual a zero) pertence ao eixo Oy, e todo ponto de ordenada nula (igual a zero) pertence ao eixo $0x$.

   Por exemplo:

   \# $(0, -2) \in 0y$ \# $(5, 0) \in 0x$

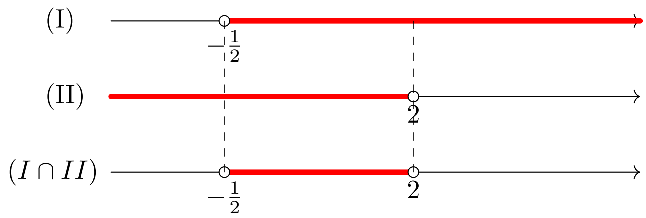
Exercício Resolvido. Obter os valores reais de m de modo que o ponto $P(2m+1, 3m-6)$ pertença ao quarto quadrante.

Resolução

O ponto P pertence ao quarto quadrante se, e somente se:

$$\begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ 3m - 6 < 0 \end{cases} => \begin{cases} m > -\frac{1}{2} & (I) \\ m < 2 & (II) \end{cases}$$

Efetuando a intersecção de (I) e (II), temos:



Portanto, concluímos que: $-\frac{1}{2} < m < 2$

1.1.2 Exercícios Propostos

$\boxed{1}$ Represente, no plano cartesiano, os seguintes pontos:

a) $A(4,2)$ b) $B(2,4)$ c) $C(-2,5)$ d) $D(5,-2)$ e) $E(-4,-1)$
f) $F(-1,4)$ g) $G(-6,0)$ h) $H(0,-6)$ i) $I(0,0)$

$\boxed{2}$ Para que valores reais de p o ponto $A(p-7, \frac{4}{5})$ pertence ao eixo das ordenadas?

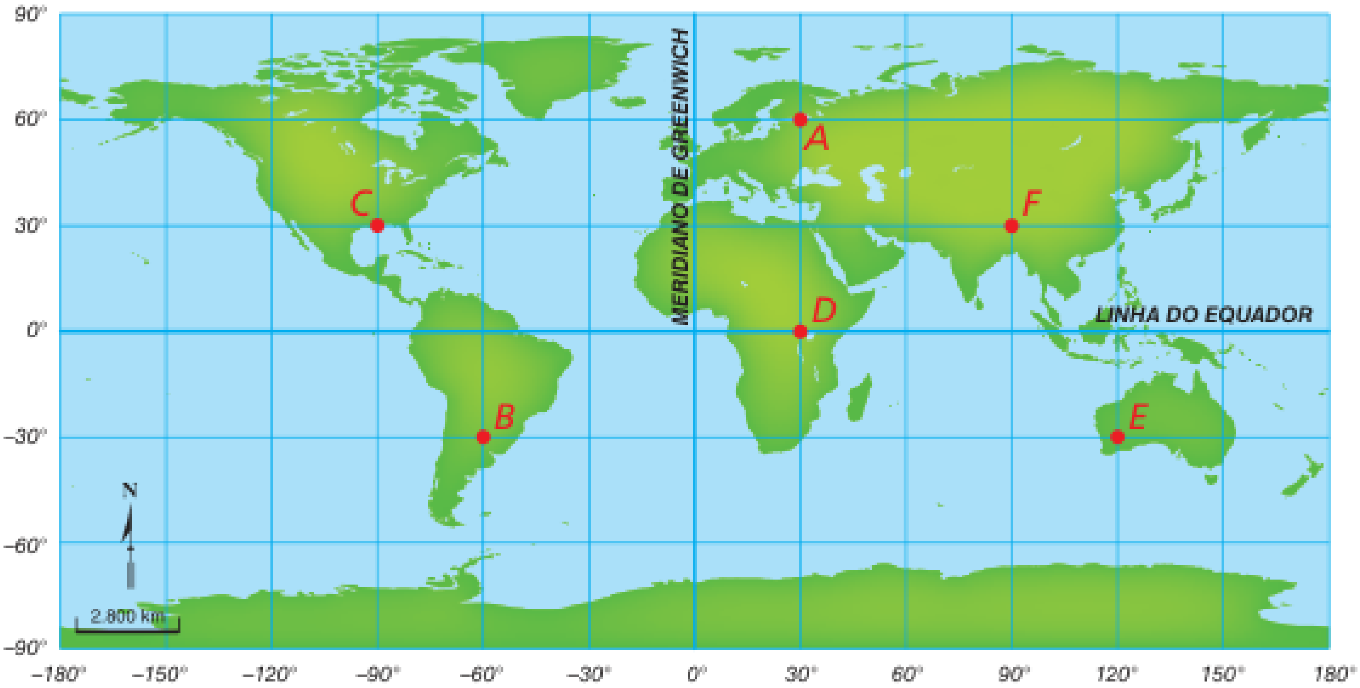
$\boxed{3}$ Para que valores reais de k o ponto $B(5k+15, 4k^2-36)$ pertence ao eixo das abscissas?

$\boxed{4}$ Para que valores reais de r o ponto $C(\frac{2}{3}, r-2)$ pertence ao 1° quadrante?

$\boxed{5}$ Determine os números reais a e b de modo que $(3a-2b, a+b) = (10, 11)$.

$\boxed{6}$ O mapa ao lado está na escala 1 : 10.000. Sabendo que o quadriculado é formado por quadradinhos de 1 cm de lado, calcule a distância real entre os pontos da região representada, que correspondem no mapa a A e B.

$\boxed{7}$ Um ponto P sobre a superfície da Terra é determinado por dois números chamados **latitude** e **longitude**. A latitude de P é a medida em grau do menor arco possível sobre um meridiano ligando o ponto P à linha do equador. A longitude de P é a medida em grau do menor arco possível sobre um paralelo terrestre ligando o ponto P ao meridiano de Greenwich, e como negativas a latitude ao sul do equador e a longitude a oeste do meridiano de Greenwich. Um ponto sobre o equador tem latitude 0° e um ponto sobre o meridiano de Greenwich tem longitude 0°. Indica-se o ponto P pelo par ordenado (x, y), sendo x a latitude e y a longitude.
O mapa abaixo é uma projeção plana da surpefície terrestre.



I Entre os pontos assinalados em vermelho no mapa, determine as coordenadas do ponto:

a) assinalado na região que corresponde à América do Sul.

b) assinalado na região que corresponde à África.

c) assinalado na região que corresponde à América do Norte.

d) assinalado na região que corresponde à China.

e) assinalado na região que corresponde à Europa.

f) assinalado na região que corresponde à Austrália.

II Em que continente está o ponto de latitude 60° norte e longitude 120° leste?

1.2 O conceito de função

1.2.1 A noção de função no cotidiano

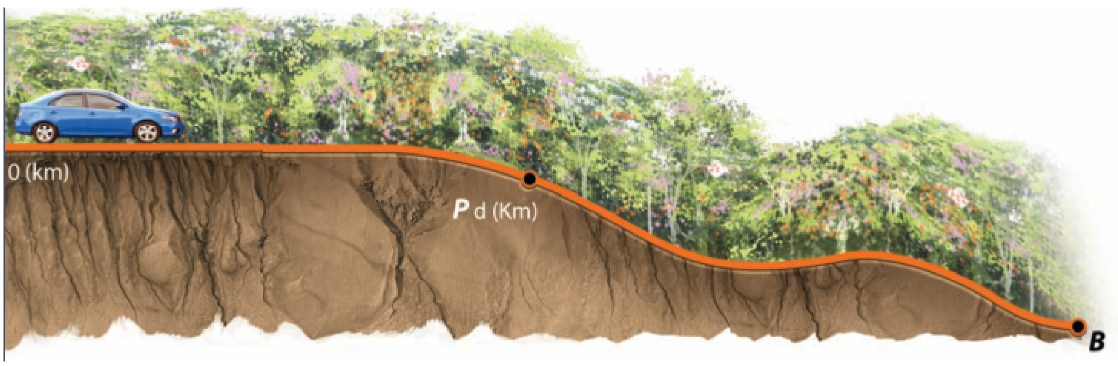
Usamos medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio, etc.

Toda carateristíca que pode ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**.

São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e razão.

A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto depende da variação das medidas de outras grandezas. Por exemplo: o crescimento de uma planta depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura; a pressão no mar depende da profundidade. Para estudar essas relações de dependência, podemos recorrer a equações matemáticas que relacionem as grandezas envolvidas.

Para exemplificar, vamos supor que um automóvel percorra um trecho AB de uma estrada à velocidade constante de 80 km/h.



Considerando A como ponto de partida, vamos associar a ele a marca 0 km. A cada ponto P do trecho AB, vamos associar a marca d de km, que indica a distância de A até P, medida ao longo da trajetória.

Que distância terá percorrido o automóvel após 2 horas da partida?

Como a velocidade do automóvel é constante, 80 km/h, a distância d percorrida por ele, em quilomêtro, após 2 horas, será:

$$d = 80 \cdot 2 \implies d = 160 \text{ km}$$

Raciocionando de maneira análoga, podemos construir a tabela abaixo, que expressa a distância d, percorrida pelo automóvel, após t horas de sua partida.

t (hora)	d (quilômetro)
1	80
2	160
3	240
4	320
⋮	⋮

Note que, a cada valor de t, associamos um único valor de d. Por isso, dizemos que a distância d é dada em **função** do tempo.

Dessa forma, podemos representar o problema através de uma expressão matemática, que no caso acima corresponde a:

$$d = 80t$$

Observe que a equação substitui a tabela e oferece o cálculo da distância percorrida em qualquer tempo após a partida, e vice-versa.

Da mesma maneira que relacionamos as grandezas d e t, podemos relacionar outras grandezas, de modo que a **cada valor** de uma seja associado **um único valor** da outra. Relações como essas são chamadas de funções.

Definition 1.1: Função

Dizemos que uma variável y é dada em **função** de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y.
A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de **lei de associação**, ou simplesmente lei entre x e y. Quando possível, essa lei é expressa por uma equação.

Exemplos.

1. Ao completar o tanque de seu carro em um posto de abastecimento, o motorista olhou para a bomba e observou que havia colocado 26 litros de gasolina e que o total a pagar era R$ 72.80.

   a) Determinar o valor que o motorista teria pago se colocasse apenas 20 litros de gasolina.

   b) Considerando o montante de gasolina despejada no tanque em cada instante do abastecimento, o preço a pagar é função desse montante? Por quê?

   c) Indicando por y o preço a pagar e por x os litros de gasolina, formular uma equação que relacione x e y.

   Resolução

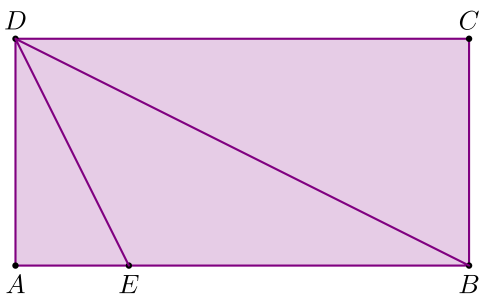
   a) O preço, em real, do litro de gasolina é o quociente de 72.80 por 26, que é 2.80. Logo, por 20 litros de gasolina, o motorista pagaria, em real, $20 \cdot 2.80$, ou seja, R$ 56.00.

   b) O preço a pagar é função do montante de gasolina, pois, para cada montante de gasolina despejado no tanque, associa-se um único preço.

   c) Como o preço do litro de gasolina é R$ 2.80, o preço y de x litros é dado por: $y = 2.80 \cdot x$

1.2.2 Exercícios Propostos

$\boxed{1}$ A figura $ABCD$ é um retângulo tal que: $BD = 6$ cm, $AD = 3$ cm, E é um ponto do lado $\overline{AB}$ e $AE = x$.



Determine a lei que expressa a área y do triângulo BDE em função de x.

$\boxed{2}$ Um metalúrgico recebe R$ 12.00 por hora trabalhada até o limite de 44 horas semanais, sendo acrescidos 30% no salário/hora a cada hora que exceder o limite.

a) Complete a tabela:

Horas semanais trabalhadas	Ganho pelas horas trabalhadas (R$)
20	
32	
44	
46	
50	

b) O ganho pelas horas trabalhadas é uma função do número de horas semanais trabalhadas? Por quê?

c) Indicando por y o ganho por x horas de trabalho semanal, com $x \leq 44$, elabore uma equação que expresse y em função de x.

d) Indicando por y o ganho por x horas de trabalho semanal, com $x > 44$, elabore uma equação que expresse y em função de x.

$\boxed{3}$ Um consumidor comprou um automóvel por R$ 20000.00, constatando que, ao final de cada ano de uso, o valor de mercado do veículo diminui para 90% do valor de um ano atrás. Veja na tabela a seguir os valores do automóvel até o final do 2° ano.

Tempo de uso do automóvel (ano)	Valor de mercado (R$)
0	20.000
1	0,9 · 20.000
2	0,9 · 0,9 · 20.000 = = $(0,9)^2$ · 20.000

a) Determine o valor do automóvel ao final de 3 anos de uso.

b) Determine o valor do automóvel ao final de x anos de uso.

c) Indicando por y o valor de mercado do automóvel com x anos de uso, obtenha uma equação que relacione y e x.

d) O valor de mercado do automóvel é dado em função do tempo de uso? Por quê?

$\boxed{4}$ Para encher uma piscina, que estava vazia, foi aberta uma torneira cuja vazão é de 26 litros por minuto.

a) Indicando por y o volume em litro de água despejada pela torneira em x minutos, obtenha uma equação que relacione x e y.

b) O volume de água despejada é função do tempo? Por quê?

$\boxed{5}$ Em um termômetro, a variação do comprimento da coluna de mercúrio é proporcional à variação da temperatura, obedecendo à razão $\frac{8}{5}$; por exemplo, o comprimentoda coluna de mercúrio aumenta 8mm para cada $5°C$ de aumento na temperatura; e diminui 8 mm para cada $5°C$ de diminuição na temperatura. Sabe-se que, à temperatura de $0°C$, o comprimento da coluna é 40 mm.

a) Construa uma tabela apresentando os valores, em grau Celsius ($°C$), e os respectivos comprimentos da coluna, em milímetro, com os registros da temperatura variando de $5°C$ em $5°C$ desde $-15°C$ até $15°C$.

b) O comprimento da coluna de mercúrio é dado em função da temperatura? Por quê?

c) Formule uma equação que relacione o comprimento do mercúrio com a temperatura.

1.2.3 Formalização do conceito de função

Relação

Definition 1.2: Relação entre conjuntos

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, chama-se **relação** de A em B qualquer conjunto de pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.

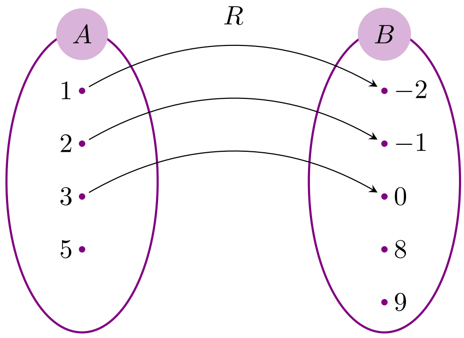
Exemplo. Sendo $A = \{1, 2, 3, 5\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 8, 9\}$ a relação R de A em B, que associa um elemento x de A ao elemento $x - 3$ de B, pode ser obtida pela tabela:

x	$\mathbf{x - 3}$
1	-2
2	-1
3	0
5	?

Observe que o elemento 5 de A não tem correspondente em B, pois $5 - 3 = 2$ e 2 não pertence a B. Assim a relação R é dada por:

$$R = \{(1, -2), (2, -1), (3, 0)\}$$

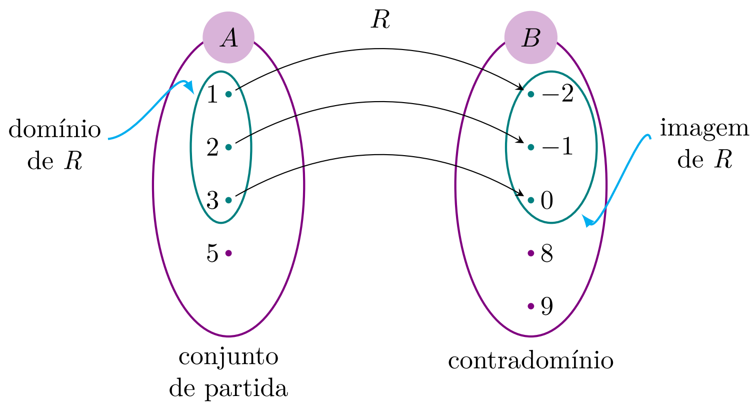
Outra forma de representar essa relação é pelo diagrama de flechas a seguir:



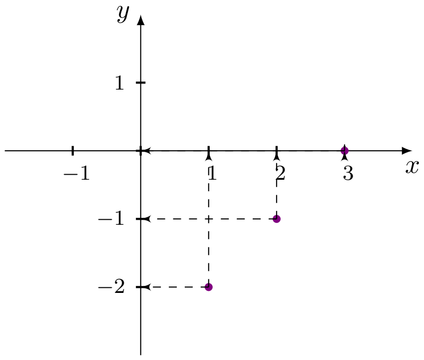
Para qualquer relação de A em B:

- o conjunto A é chamado de **conjunto de partida** da relação;
- o conjunto B é chamado de **contradomínio** da relação e é simbolizado por *CD(R)*;
- o conjunto formado pelos elementos de A que têm correspondentes em B, através de R, é chamado de **domínio** da relação e é simbolizado por *D(R)*;
- o conjunto formado pelos elementos de B que têm correspondentes em A, através de R, é chamado de **conjunto imagem** da relação e é simbolizado por $I_m(R)$.

Para o exemplo anterior, temos $D(R) = \{1, 2, 3\}$ e $I_m(R) = \{-2, -1, 0\}$.



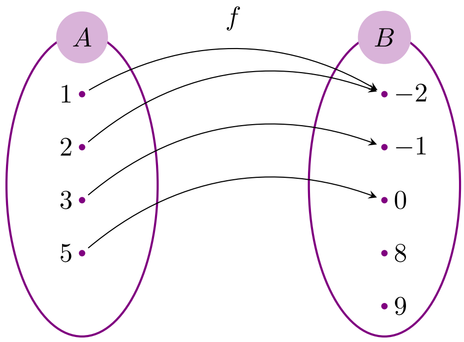
Também podemos representar essa relação por um gráfico cartesiano, que é formado pelos pontos determinados pelos pares ordenados da relação. Veja abaixo:



Com base na definição de relação, formalizamos, a seguir, o conceito de função.

Função

Vamos considerar uma relação f de A em B tal que **qualquer** elemento de A esteja associado, através de f, a um único elemento de B:



Essa propriedade caracteriza um tipo particular de relação, ao qual damos o nome de **função** de A em B. Assim, definimos:

Definition 1.3: Função

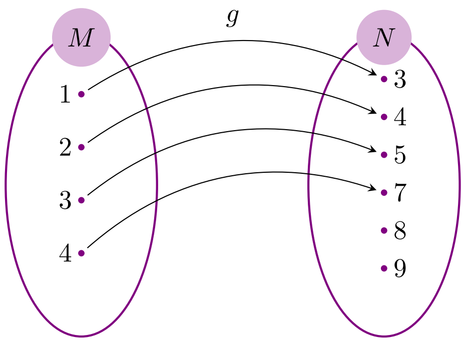
Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação f de A em B é **função** se, e somente se, qualquer elemento de A está associado, através de f, a um único elemento de B.
Adotaremos a notação $\mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para indicar que f é uma função de A em B.

Destacamos que, como uma função $f : A \to B$ é um tipo particular de relação, temos:

- o **domínio** da função é o próprio conjunto de partida, isto é, $D(f) = A$;
- o **contradomínio** da função é o conjunto $CD(f) = B$;
- o **conjunto imagem** da função é o conjunto $I_m(f) = \{y \in B \mid (x, y) \in f\}$.

Exemplos.

a) A relação g, abaixo, é uma função de M em N, pois qualquer elemento de M tem, através de g, um único correspondente em N.

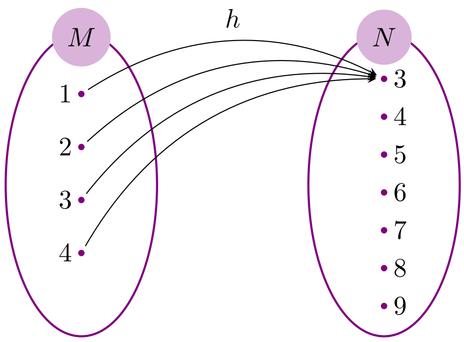


$$g : M \to N$$

O domínio $D(g)$, o contradomínio $CD(g)$ e o conjunto imagem $I_m(g)$ dessa função são dados por:

$$D(g) = M = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$CD(g) = N = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$
$$I_m(g) = \{3, 4, 5, 7\}$$

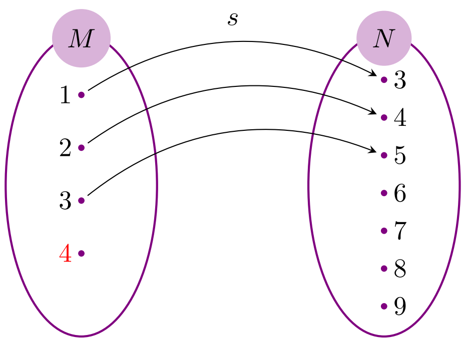
b) A relação h, abaixo, é uma função de M em N, pois qualquer elemento de M tem, através de h, um único corresponde em N.



$$h : M \to N$$

$$D(g) = M = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$CD(g) = N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$I_m(g) = \{3\}$$

c) A relação s, abaixo, não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 4) que não está associado, através de s, a algum elemento de N.



d) A relação t, abaixo, não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 1) que está associado, através de t, a mais de um elemento de N.