

---

---

# Matrizes

Fernando Jorge

10 de Março, 2023

---

---

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Definição</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Representação genérica</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Matrizes Especiais</b>	<b>3</b>
4.1	Matriz Quadrada . . . . .	3
4.2	Matriz Identidade . . . . .	4
4.3	Matriz Nula . . . . .	4
4.4	Transposta de uma Matriz . . . . .	4
4.5	Igualdade de Matrizes . . . . .	4
4.6	Exercícios Propostos . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Operações entre Matrizes</b>	<b>5</b>
5.1	Adição de matrizes . . . . .	5
5.2	Subtração de Matrizes . . . . .	6
5.3	Multiplicação de um número real por uma Matriz . . . . .	6
5.4	Exercícios Propostos . . . . .	6
5.5	Multiplicação de Matrizes . . . . .	6
5.6	Exercícios Propostos . . . . .	8
5.7	Matrizes Inversas . . . . .	8
5.8	Exercícios Propostos . . . . .	9

# 1 Introdução

	(1) Norte	(2) Nordeste	(3) Sudeste	(4) Sul	(5) Centro-Oeste
(1) Homens	69,1	66,5	70,4	71,6	70,6
(2) Mulheres	74,9	73,8	78,5	78,5	77,5

Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>>. Acesso em: 9 nov. 2009.

Figura 1: expectativa de vida brasileira em 2008

Note que podemos encontrar a expectativa de vida de uma mulher residente na região Sul bastando olhar o cruzamento da linha 2 com a coluna 4, onde encontramos o valor de 78,5 anos.

Em matemática, as tabelas como essa são chamadas de **matrizes**, sobre as quais definiremos a relação de igualdade e algumas operações.

## 2 Definição

### Definition 2.1: Matriz

Chama-se **matriz do tipo**  $m \times n$  (lemos “m por n”) toda tabela de números dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.

Essa tabela deve ser representada entre parênteses  $()$  ou entre colchetes  $[]$ .

#### Exemplos.

- a)  $\begin{bmatrix} -6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  é uma matriz do tipo  $3 \times 2$ , pois tem 3 linhas e 2 colunas.
- b)  $[3 \quad \sqrt{2} \quad -5]$  é uma matriz do tipo  $1 \times 3$ , pois tem 1 linha e 3 colunas.

## 3 Representação genérica

Indicamos por  $a_{ij}$  o elemento posicionado na linha  $i$  e na coluna  $j$  de uma matriz  $A$ .  
Na matriz:

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- o elemento 6 está na linha 1 e na coluna 1; por isso, ele é indicado por  $a_{11}$ , ou seja,  $a_{11} = 6$ ;
- o elemento 7 está na linha 1 e na coluna 2; por isso, ele é indicado por  $a_{12}$ , ou seja,  $a_{12} = 7$ ;
- analogamente, temos  $a_{21} = -4$ ,  $a_{22} = 0$ ,  $a_{31} = 2$ ,  $a_{32} = -1$ .

### Definition 3.1: Matriz Genérica

Representamos genericamente uma matriz  $A$  do tipo  $m \times n$  da seguinte maneira:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como essa representação é muito extensa, vamos convencionar uma forma abreviada. Essa matriz pode ser representada simplesmente por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  ou, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao tipo de matriz, por  $A = (a_{ij})$ .

**Exercício Resolvido.** Representar explicitamente a matriz  $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$  tal que  $a_{ij} = 2i + j$ .

Primeiro, representamos genericamente a matriz  $A$ , do tipo  $2 \times 4$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

A seguir, calculamos o valor de cada elemento  $a_{ij}$ , pela lei  $a_{ij} = 2i + j$ :

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$a_{14} = 2 \cdot 1 + 4 = 6$$

$$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$$

$$a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$a_{24} = 2 \cdot 2 + 4 = 8$$

Concluindo, temos a matriz:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

## 4 Matrizes Especiais

### 4.1 Matriz Quadrada

#### Definition 4.1: Matriz Quadrada

É toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

O número de linhas ou de colunas de uma matriz quadrada é chamado de **ordem** da matriz.

#### Exemplos.

a)  $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$  é uma matriz quadrada de ordem 3.      b)  $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  é uma matriz quadrada de ordem 2.

Numa matriz  $A$  de ordem  $n$ , os elementos  $a_{ij}$ , tais que  $i = j$  formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos  $a_{ij}$ , tais que  $i + j = n + 1$  formam a **diagonal secundária**. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

### 4.2 Matriz Identidade

#### Definition 4.2: Matriz Identidade

É a matriz quadrada cujos elementos da **diagonal principal** são iguais a 1 e os demais iguais a 0.

Indicamos por  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n$ .

#### Exemplos.

a)  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       b)  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

### 4.3 Matriz Nula

#### Definition 4.3: Matriz Nula

É a matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

#### Exemplos.

a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

## 4.4 Transposta de uma Matriz

### Definition 4.4: Transposta de uma Matriz

Transposta de uma matriz  $A$  é a matriz  $A^t$  tal que os números que a formam são obtidos através da troca de posição entre linhas e colunas da matriz  $A$ .

#### Exemplos.

a) A transposta de  $A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$  é a matriz  $A_{2 \times 3}^t = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

b) A transposta de  $B_{1 \times 4} = [2 \quad 0 \quad -5 \quad 8]$  é a matriz  $B_{4 \times 1}^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Nome que a transposta de uma matriz  $m \times n$  é uma matriz do tipo  $n \times m$ .

## 4.5 Igualdade de Matrizes

### Definition 4.5: Igualdade de Matrizes

Duas Matrizes do mesmo tipo são iguais quando todos os elementos correspondentes são iguais.

**Exercício Resolvido.** Determinar o número real  $x$  tal que:  $\begin{bmatrix} 6 & x^2 - 5 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

#### Resolução

As matrizes são do mesmo tipo ( $2 \times 2$ ). Logo, elas serão iguais se, e somente se, os elementos correspondentes forem iguais, isto é:

$$\begin{cases} 6 = 6 \\ x^2 - 5 = 11 \\ 0 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = 16 \\ x = 4 \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = 4 \end{cases}$$

Como o número 4 é a única solução comum às duas equações do sistema, concluímos que as matrizes são iguais se, e somente se,  $x = 4$ .

## 4.6 Exercícios Propostos

- [1] Uma rede comercial é formada por cinco lojas, numeradas de 1 a 5. A tabela abaixo mostra o faturamento, em real, de cada loja nos quatro primeiros dias de janeiro:

1950	2030	1800	1950
1500	1820	1740	1680
3010	2800	2700	3050
2500	2420	2300	2680
1800	2020	2040	1950

Cada elemento  $a_{ij}$  dessa matriz é o faturamento da loja  $i$  no dia  $j$ .

- Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2?
- Qual foi o faturamento dessa rede de lojas no dia 3?
- Qual foi o faturamento da loja 1 nos quatro dias?

- [2] Represente explicitamente cada uma das matrizes:

- $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$  tal que  $a_{ij} = i + 2j$
- $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$  tal que  $b_{ij} = i^2 + 3j$
- $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$  tal que  $c_{ij} = 2i$
- $D = (a_{ij})_{2 \times 3}$  tal que  $\begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ i + j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

3] Sendo  $I_2$  a matriz identidade de ordem 2, determine o número real  $x$  tal que:

$$\begin{bmatrix} x^2 - 15 & 0 \\ 0 & x - 3 \end{bmatrix} = I_2$$

4] Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ , determine as matrizes:

- a)  $A^t$
- b)  $(A^t)^t$

5] Obtenha os valores reais de  $x$  e  $y$  de modo que a matriz abaixo seja nula.

$$\begin{bmatrix} 3x + y - 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5x - y - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 5 Operações entre Matrizes

### 5.1 Adição de matrizes

#### Definition 5.1: Adição de Matrizes

A **soma** de duas matrizes do mesmo tipo,  $A$  e  $B$ , é a matriz em que cada elemento é a soma de seus correspondentes em  $A$  e  $B$ .

Indicamos essa soma por:  $A + B$ .

**Exemplo.**

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$$

#### Proposition 5.1. Adição de Matrizes

1. Associativa:  $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
2. Comutativa:  $A + B = B + A$
3. Elemento Neutro:  $A + 0 = 0 + A = A$ . Onde  $0$  é a **matriz nula**.
4. Elemento oposto:  $A + (-A) = (-A) + A = 0$ . Onde  $-A$  é a **matriz oposta** de  $A$ .

**Exemplo.** Dado  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$ , sua **matriz oposta** é  $-A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$ , pois:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 5.2 Subtração de Matrizes

#### Definition 5.2: Subtração de Matrizes

A **diferença** de duas matrizes do mesmo tipo,  $A$  e  $B$ , nessa ordem, é a soma de  $A$  com a oposta de  $B$ .

Indicamos essa diferença por  $A - B$ .

**Exemplo.** Sendo  $A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , temos:

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Para simplificar esse procedimento, podemos subtrair os elementos correspondentes em  $A$  e  $B$ :

$$A - B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-2 & 6-4 \\ 4-(-3) & 0-5 \\ -4-1 & -1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

## 5.3 Multiplicação de um número real por uma Matriz

### Definition 5.3: Multiplicação de um número real por uma Matriz

O **produto** de um número real  $k$  por uma matriz  $A$  é a matriz em que cada elemento é o produto de seu correspondente em  $A$  pelo número  $k$ .

Indicamos esse produto por  $k \cdot A$  ou  $kA$ .

**Exemplo.**

$$6 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 6 \\ 0 & 6\sqrt{2} & -12 \end{bmatrix}$$

## 5.4 Exercícios Propostos

[1] Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$  determine:

- $A + B$
- $2A - B$
- $3A - \frac{1}{2} \cdot C^t$

[2] Determine a matriz  $X$  tal que:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix} + X = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

[3] Determine as matrizes  $X$  e  $Y$  tais que:

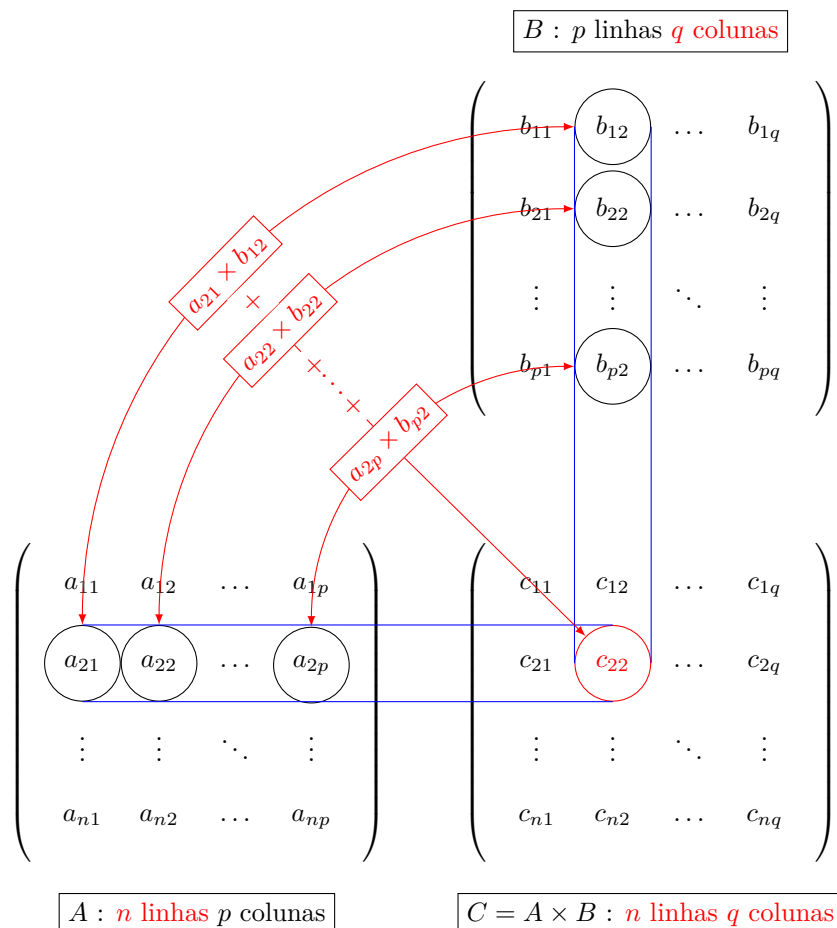
$$X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } X - Y = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

## 5.5 Multiplicação de Matrizes

### Definition 5.4: Multiplicação de Matrizes

O **produto** da matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  pela matriz  $B = (b_{ij})_{n \times p}$  é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times p}$  tal que cada elemento  $c_{ij}$  é o produto da linha  $i$  de  $A$  pela coluna  $j$  de  $B$ .

Esse produto é indicado por  $A \cdot B$  ou  $AB$ . O esquema a seguir ajuda a visualizar essa definição:



### Exemplos.

$$\begin{aligned} 1. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix} \\ 2. \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 5 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 20 & 9 \\ 8 & 10 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Nota:-

1. Se  $A$  e  $B$  são matrizes, existe o produto  $AB$  se, e somente se, o número de colunas de  $A$  é igual ao número de linhas de  $B$ . Veja abaixo:

a) Existe o produto  $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 5}$

b) Não existe o produto  $A_{2 \times 3} \cdot B_{4 \times 2}$

2. A matriz  $C$ , tal que  $C = AB$ , possui o mesmo número de linhas de  $A$  e o mesmo número de colunas de  $B$ , isto é:

$$A_{m \times k} \cdot B_{k \times n} = C_{m \times n}$$

Por exemplo:

a)  $A_{3 \times 5} \cdot B_{5 \times 8} = C_{3 \times 8}$

b)  $A_{1 \times 4} \cdot B_{4 \times 1} = C_{1 \times 1}$

### Proposition 5.2. Propriedades da multiplicação de matrizes

1. Associativa:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$ , em que  $A_{m \times n}$ ,  $B_{n \times k}$  e  $C_{k \times p}$ .
2. Distributiva:  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ , em que  $A_{m \times n}$ ,  $B_{m \times n}$  e  $C_{k \times m}$ .
3. Elemento neutro:  $A \cdot I_n = A$  e  $I_m \cdot A = A$
4. Transposta do produto:  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ , em que  $A_{m \times n}$  e  $B_{n \times k}$ .

### Exercício Resolvido.

1. Determinar a matriz  $X$  tal que:  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix}$

#### Resolução

Primeiro, vamos determinar o tipo da matriz  $X$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot X_{m \times n} = \begin{bmatrix} 4 & -9 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Para que seja possível multiplicar as matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas de  $X$ ; portanto,  $m = 2$ . O número de colunas da matriz  $X$  deve ser igual ao número de colunas da matriz produto; portanto,  $n = 1$ .

Assim, a matriz  $X$  é do tipo  $2 \times 1$ .

Seja  $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a + 3b \\ a - 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ a - 4b = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ -2a + 8b = 18 \end{cases} \Rightarrow 0a + 11b = 22 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -1$$

Assim, concluímos:  $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

## 5.6 Exercícios Propostos

[1] Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$ , determine, se possível:

a)  $A \cdot B$

b)  $A \cdot C$

c)  $B \cdot C$

d)  $A^2$

e)  $B^2$

[2] Sendo as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ , determine:

a)  $A \cdot B$

b)  $B \cdot A$

c)  $A \cdot I_3$

d)  $I_2 \cdot A$

e)  $B \cdot C$

- [3]** O valor de  $a$  para que a setença  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  seja verdadeira é:
- a) 1    b) 2    c) 0  
d) -2    e) -1
- [4]** Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{9 \times 8}$ , com  $a_{ij} = 2j$ ;  $B = (b_{ij})_{8 \times 6}$ , com  $b_{ij} = i$ ; e  $C \cdot A$ , determine o elemento  $C_{45}$  da matriz  $C$ .
- [5]** Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix}$ , obtenha a matriz  $X$  tal que  $A \cdot X = B$ .

## 5.7 Matrices Inversas

### Definition 5.5: Matrices Inversas

Uma matriz  $A$  de ordem  $n$  é **invertível** se, e somente se, existe uma matriz  $B$  tal que:

$$AB = BA = I_n$$

em que  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

**Exemplo.** As matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  são inversas entre si, pois:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Assim, indicamos  $B = A^{-1}$  ou, de maneira equivalente,  $A = B^{-1}$ .

**Exercício Resolvido.** Determinar, se existir, a inversa de cada uma das matrizes.

a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$       b)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

## Resolução

a) Admitindo que  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  seja a inversa da matriz  $A$ , devemos ter  $A \cdot A^{-1} = I_2$ , ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iguando as matrizes, encontramos:

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ 2c = 0 \\ b + 3d = 0 \\ 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3c = 1 \\ c = 0 \\ b + 3d = 0 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:  $a = 1$

Substituindo (4) em (3), obtemos:  $b = -\frac{3}{2}$

Assim, concluímos:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) Admitindo que  $B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  seja a inversa da matriz  $B$ , devemos ter  $B \cdot B^{-1} = I_2$ , ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Igualando as matrizes, encontramos: } \begin{cases} a & + 2c & = 1 \\ 2a & + 4c & = 0 \\ & b & + 2d = 0 \\ & 2b & + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & + 2c & = 1 & (1) \\ a & + 2c & = 0 & (2) \\ & b & + 2d = 0 & (3) \\ & b & + 2d = \frac{1}{2} & (4) \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível de responder, pois não existe solução e dessa forma não existe matriz inversa de  $B$ .

## 5.8 Exercícios Propostos

- 1 Obtenha, se existir, a inversa de cada matriz:



$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$