Matrizes

Fernando Jorge

10 de Março, 2023

Sumário

1 Introdução

	(1) Norte	(2) Nordeste	(3) Sudeste	(4) Sul	(5) Centro-Oeste
(1) Homens	69,1	66,5	70,4	71,6	70,6
(2) Mulheres	74,9	73,8	78,5	78,5	77,5

Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 9 nov. 2009.

Figura 1: expectativa de vida brasileira em 2008

Note que podemos encontrar a expectativa de vida de uma mulher residente na região Sul bastando olhar o cruzamento da linha 2 com a coluna 4, onde encontramos o valor de 78,5 anos.

Em matemática, as tabelas como essa são chamadas de **matrizes**, sobre as quais definiremos a relação de igualdade e algumas operações.

2 Definição

Definition 2.1: Matriz

Chama-se **matriz do tipo** $m \times n$ (lemos "m por n") toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas.

Essa tabela deve ser representada entre parênteses () ou entre colchetes [].

Exemplos.

a) $\begin{bmatrix} -6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2, pois tem 3 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×3, pois tem 1 linha e 3 colunas.

3 Representação genérica

Indicamos por a_{ij} o elemento posicionado na linha i e na coluna j de uma matriz A.
Na matriz:

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- o elemento 6 está na linha 1 e na coluna 1; por isso, ele é indicado por a_{11}, ou seja, $a_{11} = 6$;
- o elemento 7 está na linha 1 e na coluna 2; por isso, ele é indicado por a_{12}, ou seja, $a_{12} = 7$;
- analogamente, temos $a_{21} = -4$, $a_{22} = 0$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = -1$.

Definition 3.1: Matriz Genérica

Representamos genericamente uma matriz A do tipo $m \times n$ da seguinte maneira:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como essa representação é muita extensa, vamos convencionar uma forma abreviada. Essa matriz pode ser representada simplesmente por $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ou, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao tipo de matriz, por $A = (a_{ij})$.

Exercício Resolvido. Representar explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 4}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$.

Primeiro, representamos genericamente a matriz A, do tipo 2×4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

A seguir, calculamos o valor de cada elemento a_{ij}, pela lei $a_{ij} = 2i + j$:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $\quad$ $a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ $\quad$ $a_{14} = 2 \cdot 1 + 4 = 6$

$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ $\quad$ $a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ $\quad$ $a_{24} = 2 \cdot 2 + 4 = 8$

Concluindo, temos a matriz: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

4 Matrizes Especiais

4.1 Matriz Quadrada

Definition 4.1: Matriz Quadrada

É toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

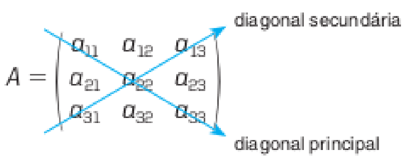
O número de linhas ou de colunas de uma matriz quadrada é chamado de **ordem** da matriz.

Exemplos.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

b) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

Numa matriz A de ordem n, os elementos a_{ij}, tais que $i = j$ formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos a_{ij}, tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**. Por exemplo:



4.2 Matriz Identidade

Definition 4.2: Matriz Identidade

É a matriz quadrada cujos elementos da **diagonal principal** são iguais a 1 e os demais iguais a 0.

Indicamos por I_n a matriz identidade de ordem n.

Exemplos.

a) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.3 Matriz Nula

Definition 4.3: Matriz Nula

É a matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplos.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4.4 Transposta de uma Matriz

Definition 4.4: Transposta de uma Matriz

Transposta de uma matriz A é a matriz A^t tal que os números que a formam são obtidos através da troca de posição entre linhas e colunas da matriz A.

Exemplos.

a) A transposta de $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^t_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

b) A transposta de $B_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}$ é a matriz $B^t_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Nome que a transposta de uma matriz $m \times n$ é uma matriz do tipo $n \times m$.

4.5 Igualdade de Matrizes

Definition 4.5: Igualdade de Matrizes

Duas Matrizes do mesmo tipo são iguais quando todos os elementos correspondentes são iguais.

Exercício Resolvido. Determinar o número real x tal que: $\begin{bmatrix} 6 & x^2-5 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

As matrizes são do mesmo tipo (2×2). Logo, elas serão iguais se, e somente se, os elementos correspondentes forem iguais, isto é:

$$\begin{cases} 6 = 6 \\ x^2 - 5 = 11 \\ 0 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = 16 \\ x = 4 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = 4 \end{cases}$$

Como o número 4 é a única solução comum às duas equações do sistema, concluímos que as matrizes são iguais se, e somente se, $x = 4$.

4.6 Exercícios Propostos

1 Uma rede comercial é formada por cinco lojas, numeradas de 1 a 5. A tabela abaixo mostra o faturamento, em real, de cada loja nos quatro primeiros dias de janeiro:

$$\begin{bmatrix} 1950 & 2030 & 1800 & 1950 \\ 1500 & 1820 & 1740 & 1680 \\ 3010 & 2800 & 2700 & 3050 \\ 2500 & 2420 & 2300 & 2680 \\ 1800 & 2020 & 2040 & 1950 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j.

a) Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2?

b) Qual foi o faturamento dessa rede de lojas no dia 3?

c) Qual foi o faturamento da loja 1 nos quatro dias?

2 Represente explicitamente cada uma das matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ tal que $a_{ij} = i + 2j$

b) $B = (b_{ij})_{2\times 3}$ tal que $b_{ij} = i^2 + 3j$

c) $C = (c_{ij})_{2\times 2}$ tal que $c_{ij} = 2i$

d) $D = (a_{ij})_{2\times 3}$ tal que $\begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ i + j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

3 Sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2, determine o número real x tal que:

$$\begin{bmatrix} x^2 - 15 & 0 \\ 0 & x - 3 \end{bmatrix} = I_2$$

4 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, determine as matrizes:

a) A^t

b) $(A^t)^t$

5 Obtenha os valores reais de x e y de modo que a matriz abaixo seja nula.

$$\begin{bmatrix} 3x + y - 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5x - y - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5 Operações entre Matrizes

5.1 Adição de matrizes

Definition 5.1: Adição de Matrizes

A **soma** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B, é a matriz em que cada elemento é a soma de seus correspondentes em A e B.

Indicamos essa soma por: $A + B$.

Exemplo.

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Proposition 5.1. Adição de Matrizes

1. Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
2. Comutativa: $A + B = B + A$
3. Elemento Neutro: $A = 0 = 0 + A = A$. Onde 0 é a **matriz nula**.
4. Elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0$. Onde $-A$ é a **matriz oposta** de A.

Exemplo. Dado $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$, sua **matriz oposta** é $-A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$, pois:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2 Subtração de Matrizes

dfnSubtração de Matrizes A **diferença** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B, nessa ordem, é a soma de A com a oposta de B.

Indicamos essa diferença por $A - B$.

Exemplo. Sendo $A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, temos:

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Para simplificar esse procedimento, podemos subtrair os elementos correspondentes em A e B:

$$A - B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-2 & 6-4 \\ 4-(-3) & 0-5 \\ -4-1 & -1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3 Multiplicação de um número real por uma Matriz

Definition 5.2: Multiplicação de um número real por uma Matriz

O **produto** de um número real k por uma matriz A é a matriz em que cada elemento é o produto de seu correspondente em A pelo número k.

Indicamos esse produto por $k \cdot A$ ou kA.

Exemplo. $6 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 6 \\ 0 & 6\sqrt{2} & -12 \end{bmatrix}$

5.4 Exercícios Propostos

$\boxed{1}$ Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$ determine:

a) $A + B$

b) $2A - B$

c) $3A - \frac{1}{2} \cdot C^t$

$\boxed{2}$ Determine a matriz X tal que:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix} + X = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ Determine as matrizes X e Y tais que:

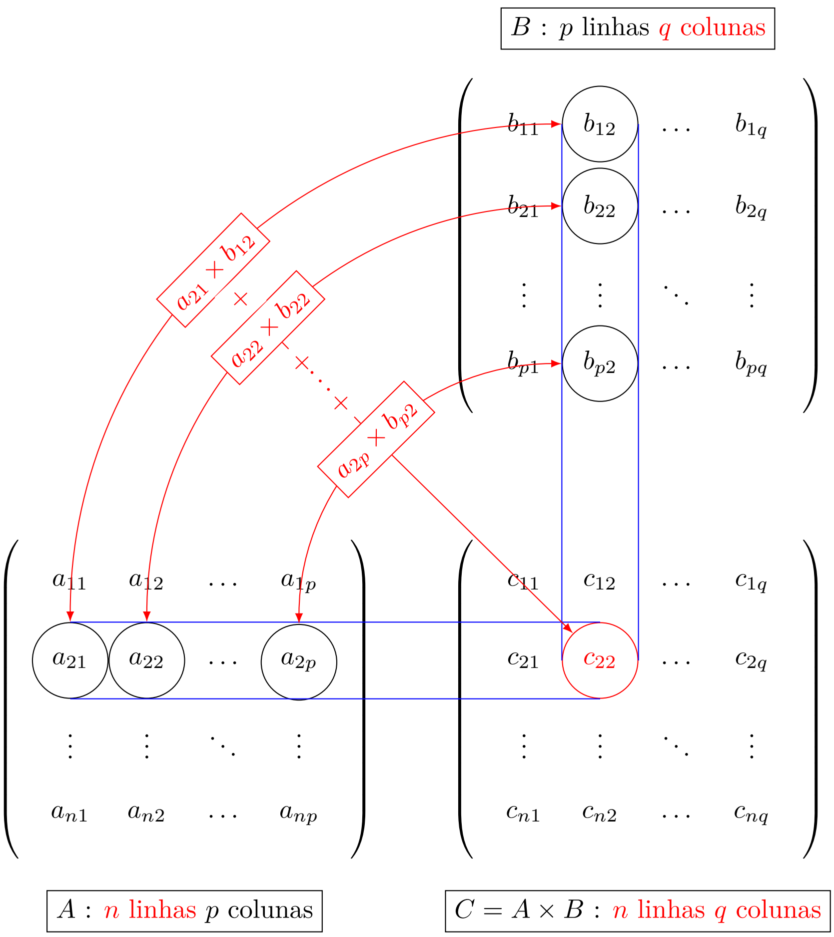
$$X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } X - Y = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

5.5 Multiplicação de Matrizes

Definition 5.3: Multiplicação de Matrizes

O **produto** da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ pela matriz $B = (b_{ij})_{n \times p}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$ tal que cada elemento c_{ij} é o produto da linha i de A pela coluna j de B.

Esse produto é indicado por $A \cdot B$ ou AB. O esquema a seguir ajuda a visualizar essa definição:



Exemplos.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 5 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 20 & 9 \\ 8 & 10 & -4 \end{bmatrix}$

Nota:-

1. Se A e B são matrizes, existe o produto AB se, e somente se, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Veja abaixo:

   a) Existe o produto $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 5}$

   b) Não existe o produto $A_{2 \times 3} \cdot B_{4 \times 2}$

2. A matriz C, tal que $C = AB$, possui o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B, isto é:

$$A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = C_{m\times n}$$

Por exemplo:

a) $A_{3\times 5} \cdot B_{5\times 8} = C_{3\times 8}$

b) $A_{1\times 4} \cdot B_{4\times 1} = C_{1\times 1}$

Proposition 5.2. Propriedades da multiplicação de matrizes

1. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$, em que $A_{m\times n}$, $B_{n\times k}$ e $C_{k\times p}$.
2. Distributiva: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, em que $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ e $C_{k\times m}$.
3. Elemento neutro: $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A = A$
4. Transposta do produto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, em que $A_{m\times n}$ e $B_{n\times k}$.