
Matrizes

Fernando Jorge

10 de Março, 2023

Sumário

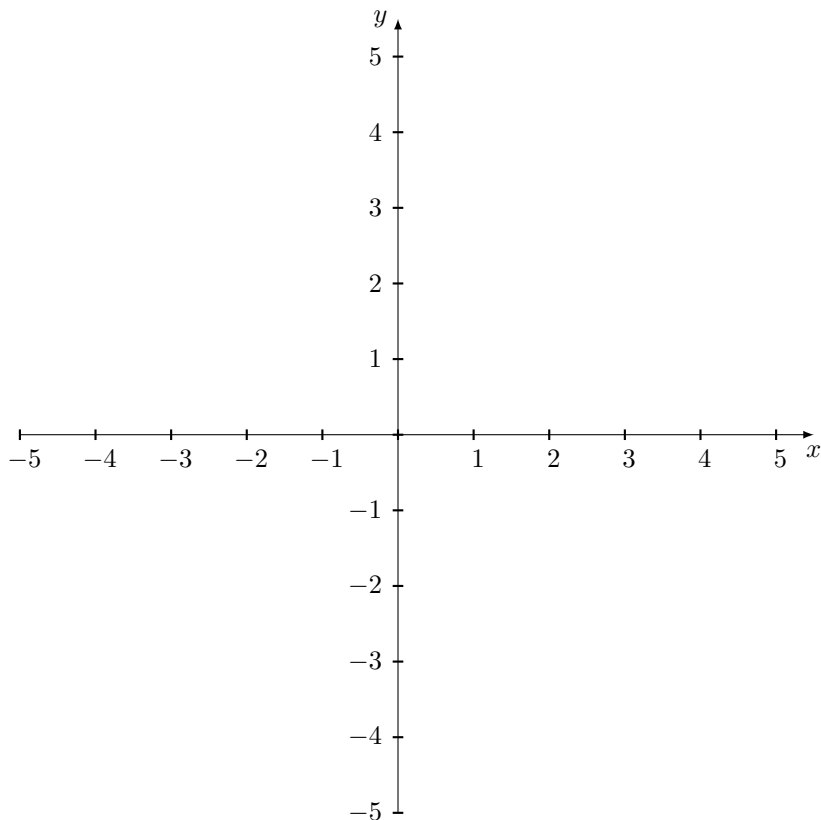
1	Introdução ao estudo das funções	2
1.1	Sistemas de coordenadas	2
1.1.1	Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas	2
1.1.2	Exercícios Propostos	4
1.2	O conceito de função	5
1.2.1	A noção de função no cotidiano	5
1.2.2	Exercícios Propostos	6
1.2.3	Formalização do conceito de função	8

1 Introdução ao estudo das funções

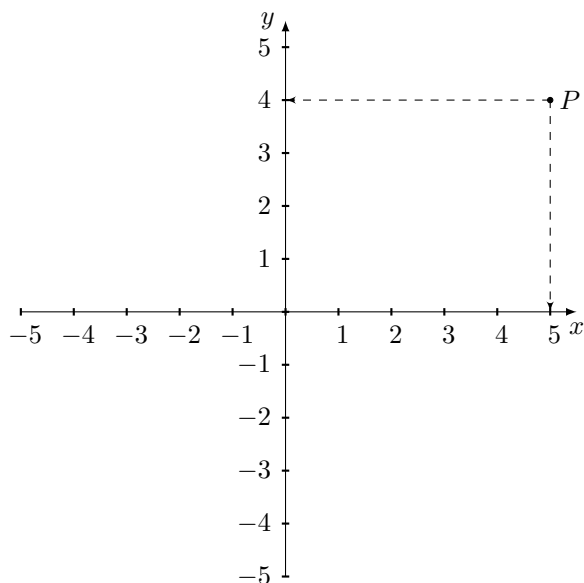
1.1 Sistemas de coordenadas

1.1.1 Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

O Sistema de coordenadas, mais conhecido como Plano Cartesiano, foi criado por René Descartes com o objetivo de localizar pontos. Ele é formado por dois eixos perpendiculares: um horizontal e outro vertical que se cruzam na origem das coordenadas. O eixo horizontal($0x$) é chamado de *abscissa* e o vertical($0y$) chamado de *ordenada*. Os eixos são enumerados compreendendo o conjunto dos números reais. Observe a seguir a representação do Plano Cartesiano:



Para determinar as coordenadas do ponto P da figura a seguir, traçamos por P as perpendiculares ao eixo x e ao eixo y , obtendo, nesses eixos, dois números chamados de **abscissa** e **ordenada** do ponto P , respectivamente.



No exemplo, as **coordenadas** do ponto P são 5 e 4. A **abscissa** é 5, e a **ordenada** é 4. Indicamos esse fato por $P(5, 4)$.

A representação $(5, 4)$ é chamada de “**par ordenado** de abscissa 5 e ordenada 4”.

Proposition 1.1. Generalidades

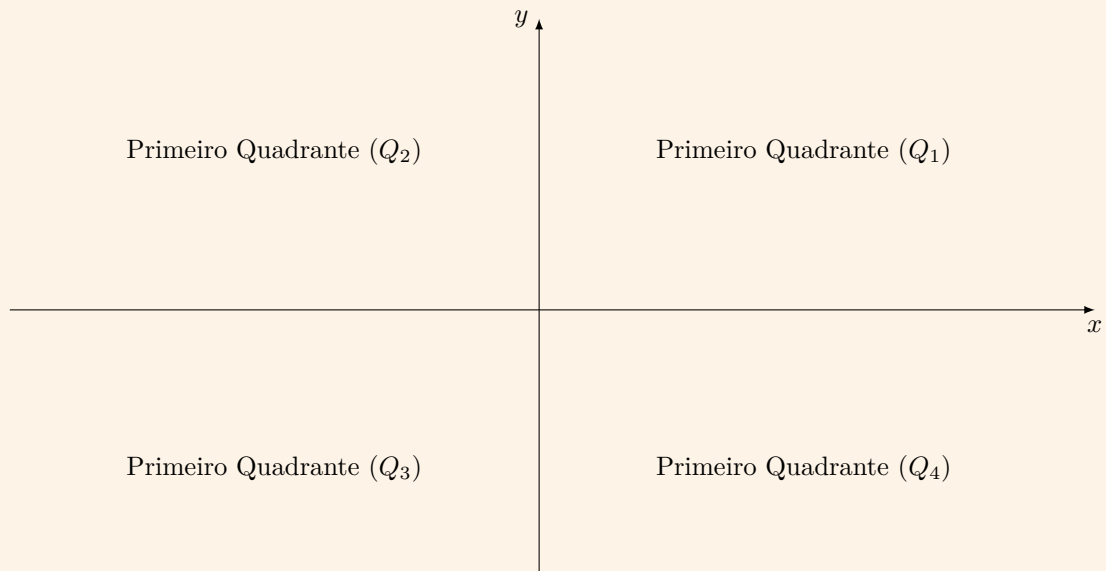
1. Dois pares ordenados de números reais são iguais se, e somente se, suas abscissas são iguais e suas ordenadas são iguais, isto é:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

Por exemplo:

$$(a, 8) = (7, y) \iff a = 7 \text{ e } y = 8$$

2. Os eixos $0x$ e $0y$, chamados de **eixos coordenados**, separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que devem ser enumerados conforme a figura:



$$P(a, b) \in Q_1 \iff a > 0 \text{ e } b > 0$$

$$P(a, b) \in Q_3 \iff a < 0 \text{ e } b < 0$$

$$P(a, b) \in Q_2 \iff a < 0 \text{ e } b > 0$$

$$P(a, b) \in Q_4 \iff a > 0 \text{ e } b < 0$$

Por exemplo:

$$\# (4, 2) \in Q_1$$

$$\# (-3, -5) \in Q_3$$

$$\# \left(-\frac{1}{2}, 9\right) \in Q_2$$

$$\# \left(\frac{3}{2}, -1\right) \in Q_4$$

Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.

3. Todo ponto de abscissa nula (igual a zero) pertence ao eixo Oy , e todo ponto de ordenada nula (igual a zero) pertence ao eixo $0x$.

Por exemplo:

$$\# (0, -2) \in 0y$$

$$\# (5, 0) \in 0x$$

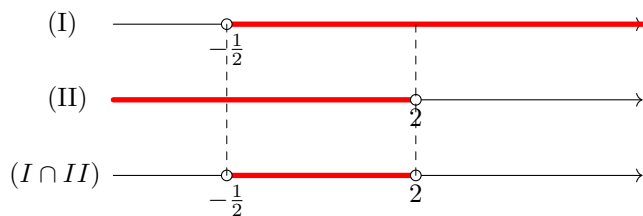
Exercício Resolvido. Obter os valores reais de m de modo que o ponto $P(2m+1, 3m-6)$ pertença ao quarto quadrante.

Resolução

O ponto P pertence ao quarto quadrante se, e somente se:

$$\begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 3m-6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} & (I) \\ m < 2 & (II) \end{cases}$$

Efetuada a intersecção de (I) e (II), temos:



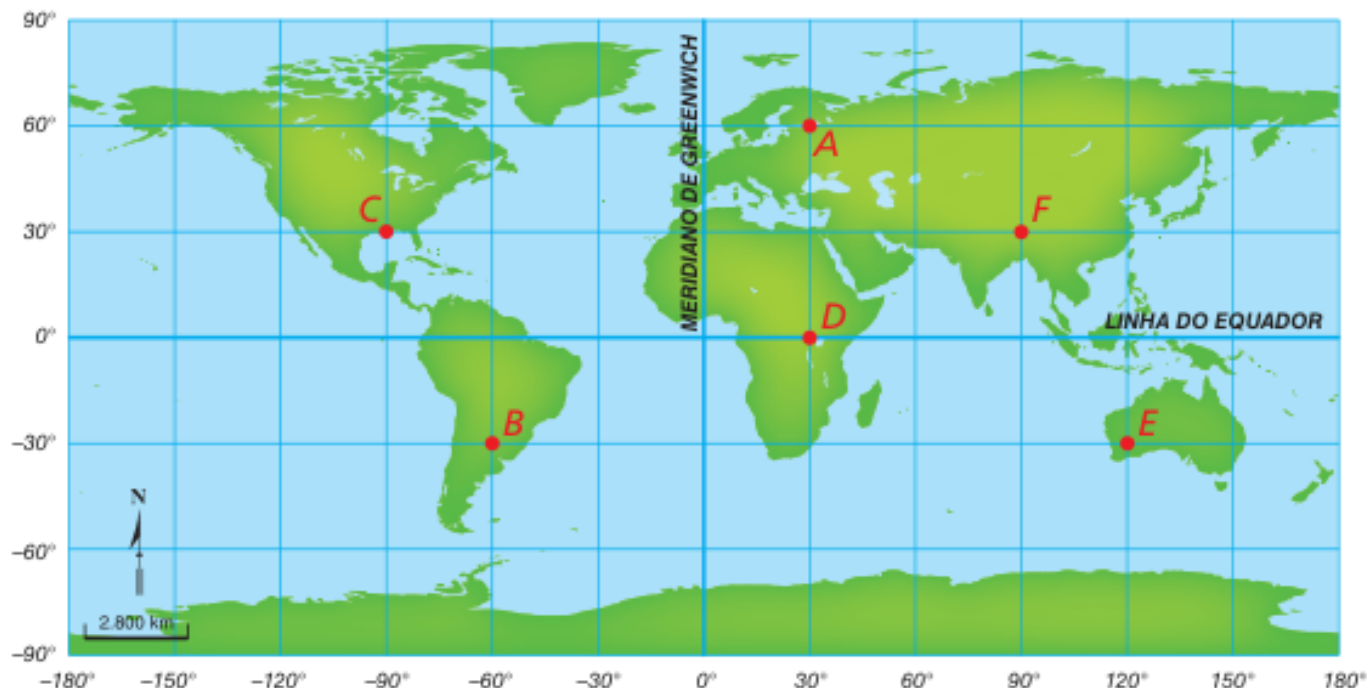
Portanto, concluímos que: $-\frac{1}{2} < m < 2$

1.1.2 Exercícios Propostos

- 1 Represente, no plano cartesiano, os seguintes pontos:
 - a) $A(4, 2)$
 - b) $B(2, 4)$
 - c) $C(-2, 5)$
 - d) $D(5, -2)$
 - e) $E(-4, -1)$
 - f) $F(-1, 4)$
 - g) $G(-6, 0)$
 - h) $H(0, -6)$
 - i) $I(0, 0)$
- 2 Para que valores reais de p o ponto $A(p - 7, \frac{4}{5})$ pertence ao eixo das ordenadas?
- 3 Para que valores reais de k o ponto $B(5k + 15, 4k^2 - 36)$ pertence ao eixo das abscissas?
- 4 Para que valores reais de r o ponto $C(\frac{2}{3}, r - 2)$ pertence ao 1º quadrante?
- 5 Determine os números reais a e b de modo que $(3a - 2b, a + b) = (10, 11)$.
- 6 O mapa ao lado está na escala 1 : 10.000. Sabendo que o quadriculado é formado por quadradinhos de 1 cm de lado, calcule a distância real entre os pontos da região representada, que correspondem no mapa a A e B .



- 7 Um ponto P sobre a superfície da Terra é determinado por dois números chamados **latitude** e **longitude**. A latitude de P é a medida em grau do menor arco possível sobre um meridiano ligando o ponto P à linha do equador. A longitude de P é a medida em grau do menor arco possível sobre um paralelo terrestre ligando o ponto P ao meridiano de Greenwich, e como negativas a latitude ao sul do equador e a longitude a oeste do meridiano de Greenwich. Um ponto sobre o equador tem latitude 0° e um ponto sobre o meridiano de Greenwich tem longitude 0° . Indica-se o ponto P pelo par ordenado (x, y) , sendo x a latitude e y a longitude. O mapa abaixo é uma projeção plana da superfície terrestre.



I Entre os pontos assinalados em vermelho no mapa, determine as coordenadas do ponto:

- assinalado na região que corresponde à América do Sul.
- assinalado na região que corresponde à África.
- assinalado na região que corresponde à América do Norte.
- assinalado na região que corresponde à China.
- assinalado na região que corresponde à Europa.
- assinalado na região que corresponde à Austrália.

II Em que continente está o ponto de latitude 60° norte e longitude 120° leste?

1.2 O conceito de função

1.2.1 A noção de função no cotidiano

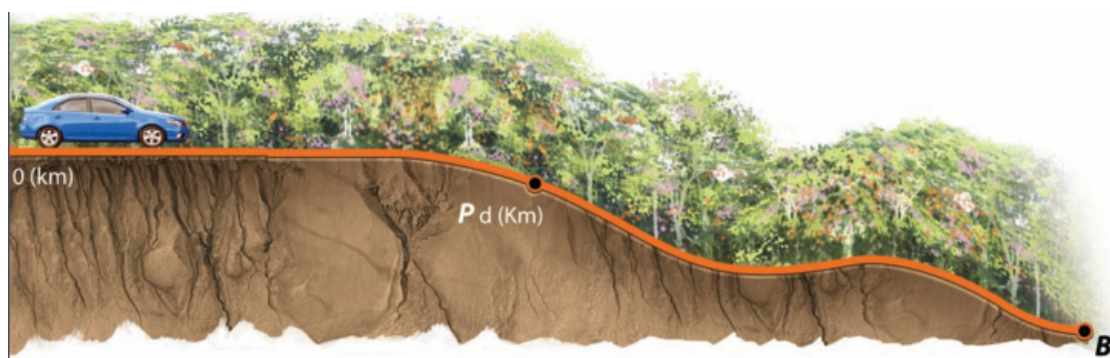
Usamos medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio, etc.

Toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**.

São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e razão.

A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto depende da variação das medidas de outras grandezas. Por exemplo: o crescimento de uma planta depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura; a pressão no mar depende da profundidade. Para estudar essas relações de dependência, podemos recorrer a equações matemáticas que relacionem as grandezas envolvidas.

Para exemplificar, vamos supor que um automóvel percorra um trecho AB de uma estrada à velocidade constante de 80 km/h.



Considerando A como ponto de partida, vamos associar a ele a marca 0 km. A cada ponto P do trecho AB , vamos associar a marca d de km, que indica a distância de A até P , medida ao longo da trajetória.

Que distância terá percorrido o automóvel após 2 horas da partida?

Como a velocidade do automóvel é constante, 80 km/h, a distância d percorrida por ele, em quilômetro, após 2 horas, será:

$$d = 80 \cdot 2 \Rightarrow d = 160 \text{ km}$$

Raciocionando de maneira análoga, podemos construir a tabela abaixo, que expressa a distância d , percorrida pelo automóvel, após t horas de sua partida.

t (hora)	d (quilômetro)
1	80
2	160
3	240
4	320
\vdots	\vdots

Note que, a cada valor de t , associamos um único valor de d . Por isso, dizemos que a distância d é dada em **função** do tempo.

Dessa forma, podemos representar o problema através de uma expressão matemática, que no caso acima corresponde a:

$$d = 80t$$

Observe que a equação substitui a tabela e oferece o cálculo da distância percorrida em qualquer tempo após a partida, e vice-versa.

Da mesma maneira que relacionamos as grandezas d e t , podemos relacionar outras grandezas, de modo que a **cada valor** de uma seja associado **um único valor** da outra. Relações como essas são chamadas de funções.

Definition 1.1: Função

Dizemos que uma variável y é dada em **função** de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y .

A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de **lei de associação**, ou simplesmente lei entre x e y . Quando possível, essa lei é expressa por uma equação.

Exemplos.

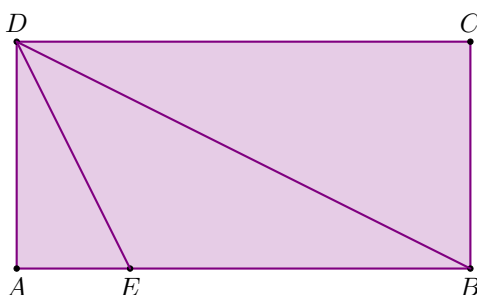
1. Ao completar o tanque de seu carro em um posto de abastecimento, o motorista olhou para a bomba e observou que havia colocado 26 litros de gasolina e que o total a pagar era R\$ 72.80.
 - a) Determinar o valor que o motorista teria pago se colocasse apenas 20 litros de gasolina.
 - b) Considerando o montante de gasolina despejada no tanque em cada instante do abastecimento, o preço a pagar é função desse montante? Por quê?
 - c) Indicando por y o preço a pagar e por x os litros de gasolina, formular uma equação que relacione x e y .

Resolução

- a) O preço, em real, do litro de gasolina é o quociente de 72.80 por 26, que é 2.80. Logo, por 20 litros de gasolina, o motorista pagaria, em real, $20 \cdot 2.80$, ou seja, R\$ 56.00.
- b) O preço a pagar é função do montante de gasolina, pois, para cada montante de gasolina despejado no tanque, associa-se um único preço.
- c) Como o preço do litro de gasolina é R\$ 2.80, o preço y de x litros é dado por: $y = 2.80 \cdot x$

1.2.2 Exercícios Propostos

- [1] A figura $ABCD$ é um retângulo tal que: $BD = 6$ cm, $AD = 3$ cm, E é um ponto do lado \overline{AB} e $AE = x$.



Determine a lei que expressa a área y do triângulo BDE em função de x .

- 2 Um metalúrgico recebe R\$ 12.00 por hora trabalhada até o limite de 44 horas semanais, sendo acrescidos 30% no salário/hora a cada hora que exceder o limite.

a) Complete a tabela:

Horas semanais trabalhadas	Ganho pelas horas trabalhadas (R\$)
20	
32	
44	
46	
50	

- b) O ganho pelas horas trabalhadas é uma função do número de horas semanais trabalhadas? Por quê?
- c) Indicando por y o ganho por x horas de trabalho semanal, com $x \leq 44$, elabore uma equação que expresse y em função de x .
- d) Indicando por y o ganho por x horas de trabalho semanal, com $x > 44$, elabore uma equação que expresse y em função de x .

- 3 Um consumidor comprou um automóvel por R\$ 20000.00, constatando que, ao final de cada ano de uso, o valor de mercado do veículo diminui para 90% do valor de um ano atrás. Veja na tabela a seguir os valores do automóvel até o final do 2º ano.

Tempo de uso do automóvel (ano)	Valor de mercado (R\$)
0	20.000
1	$0,9 \cdot 20.000$
2	$0,9 \cdot 0,9 \cdot 20.000 = (0,9)^2 \cdot 20.000$

- a) Determine o valor do automóvel ao final de 3 anos de uso.
- b) Determine o valor do automóvel ao final de x anos de uso.
- c) Indicando por y o valor de mercado do automóvel com x anos de uso, obtenha uma equação que relacione y e x .
- d) O valor de mercado do automóvel é dado em função do tempo de uso? Por quê?

- 4 Para encher uma piscina, que estava vazia, foi aberta uma torneira cuja vazão é de 26 litros por minuto.

- a) Indicando por y o volume em litro de água despejada pela torneira em x minutos, obtenha uma equação que relacione x e y .
- b) O volume de água despejada é função do tempo? Por quê?

- 5 Em um termômetro, a variação do comprimento da coluna de mercúrio é proporcional à variação da temperatura, obedecendo à razão $\frac{8}{5}$; por exemplo, o comprimento da coluna de mercúrio aumenta 8mm para cada $5^\circ C$ de aumento na temperatura; e diminui 8 mm para cada $5^\circ C$ de diminuição na temperatura. Sabe-se que, à temperatura de $0^\circ C$, o comprimento da coluna é 40 mm.

- a) Construa uma tabela apresentando os valores, em grau Celsius ($^\circ C$), e os respectivos comprimentos da coluna, em milímetro, com os registros da temperatura variando de $5^\circ C$ em $5^\circ C$ desde $-15^\circ C$ até $15^\circ C$.
- b) O comprimento da coluna de mercúrio é dado em função da temperatura? Por quê?
- c) Formule uma equação que relacione o comprimento do mercúrio com a temperatura.

1.2.3 Formalização do conceito de função

Relação

Definition 1.2: Relação entre conjuntos

Dados dois conjuntos não vazios, A e B , chama-se **relação** de A em B qualquer conjunto de pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.

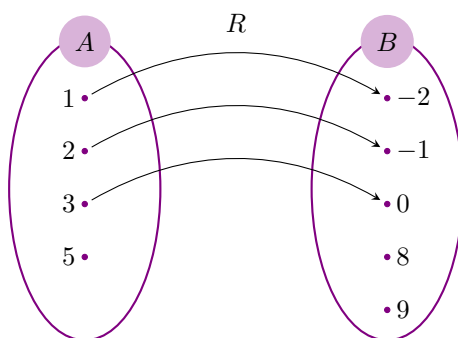
Exemplo. Sendo $A = \{1, 2, 3, 5\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 8, 9\}$ a relação R de A em B , que associa um elemento x de A ao elemento $x - 3$ de B , pode ser obtida pela tabela:

x	$x - 3$
1	-2
2	-1
3	0
5	?

Observe que o elemento 5 de A não tem correspondente em B , pois $5 - 3 = 2$ e 2 não pertence a B . Assim a relação R é dada por:

$$R = \{(1, -2), (2, -1), (3, 0)\}$$

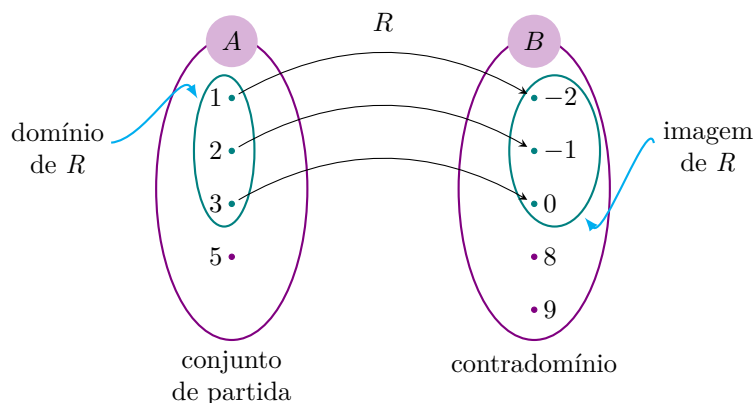
Outra forma de representar essa relação é pelo diagrama de flechas a seguir:



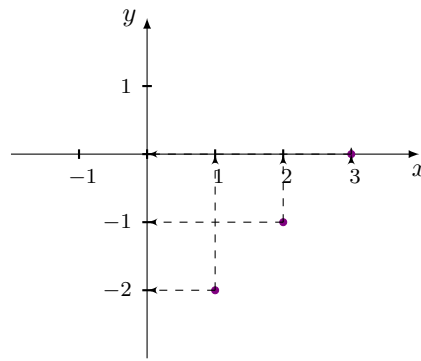
Para qualquer relação de A em B :

- o conjunto A é chamado de **conjunto de partida** da relação;
- o conjunto B é chamado de **contradomínio** da relação e é simbolizado por $CD(R)$;
- o conjunto formado pelos elementos de A que têm correspondentes em B , através de R , é chamado de **domínio** da relação e é simbolizado por $D(R)$;
- o conjunto formado pelos elementos de B que têm correspondentes em A , através de R , é chamado de **conjunto imagem** da relação e é simbolizado por $I_m(R)$.

Para o exemplo anterior, temos $D(R) = \{1, 2, 3\}$ e $I_m(R) = \{-2, -1, 0\}$.



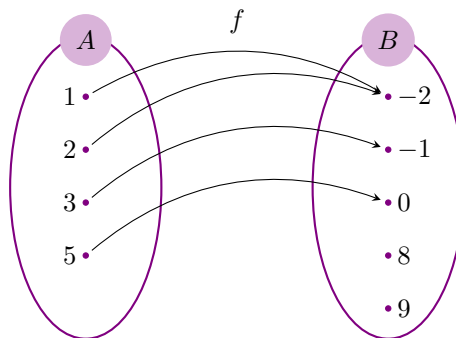
Também podemos representar essa relação por um gráfico cartesiano, que é formado pelos pontos determinados pelos pares ordenados da relação. Veja abaixo:



Com base na definição de relação, formalizamos, a seguir, o conceito de função.

Função

Vamos considerar uma relação f de A em B tal que **qualquer** elemento de A esteja associado, através de f , a um único elemento de B :



Essa propriedade caracteriza um tipo particular de relação, ao qual damos o nome de **função** de A em B . Assim, definimos:

Definition 1.3: Função

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação f de A em B é **função** se, e somente se, qualquer elemento de A está associado, através de f , a um único elemento de B .

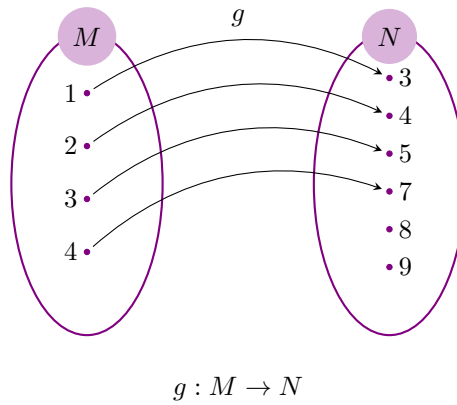
Adotaremos a notação $f : A \rightarrow B$ para indicar que f é uma função de A em B .

Destacamos que, como uma função $f : A \rightarrow B$ é um tipo particular de relação, temos:

- o **domínio** da função é o próprio conjunto de partida, isto é, $D(f) = A$;
- o **contradomínio** da função é o conjunto $CD(f) = B$;
- o **conjunto imagem** da função é o conjunto $I_m(f) = \{y \in B \mid (x, y) \in f\}$.

Exemplos.

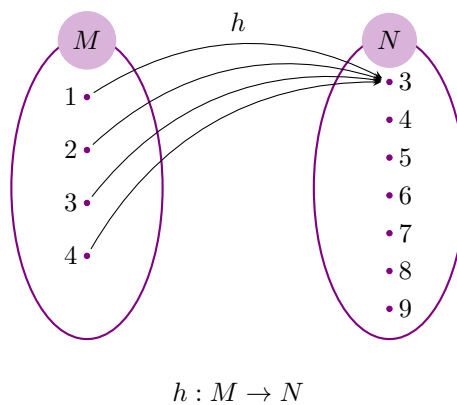
- a) A relação g , abaixo, é uma função de M em N , pois qualquer elemento de M tem, através de g , um único correspondente em N .



O domínio $D(g)$, o contradomínio $CD(g)$ e o conjunto imagem $I_m(g)$ dessa função são dados por:

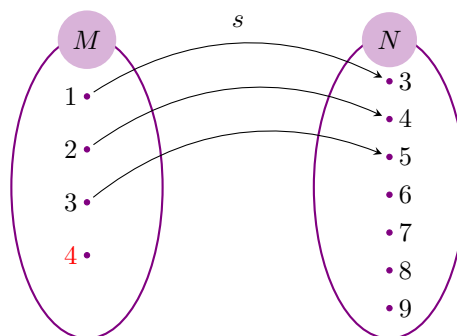
$$\begin{aligned} D(g) &= M = \{1, 2, 3, 4\} \\ CD(g) &= N = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\} \\ I_m(g) &= \{3, 4, 5, 7\} \end{aligned}$$

- b) A relação h , abaixo, é uma função de M em N , pois qualquer elemento de M tem, através de h , um único corresponde em N .



$$\begin{aligned} D(g) &= M = \{1, 2, 3, 4\} \\ CD(g) &= N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ I_m(g) &= \{3\} \end{aligned}$$

- c) A relação s , abaixo, não é função de M em N , pois existe elemento em M (o elemento 4) que não está associado, através de s , a algum elemento de N .



- d) A relação t , abaixo, não é função de M em N , pois existe elemento em M (o elemento 1) que está associado, através de t , a mais de um elemento de N .

