

---

---

# Matrizes

Fernando Jorge

10 de Março, 2023

---

---

## Sumário

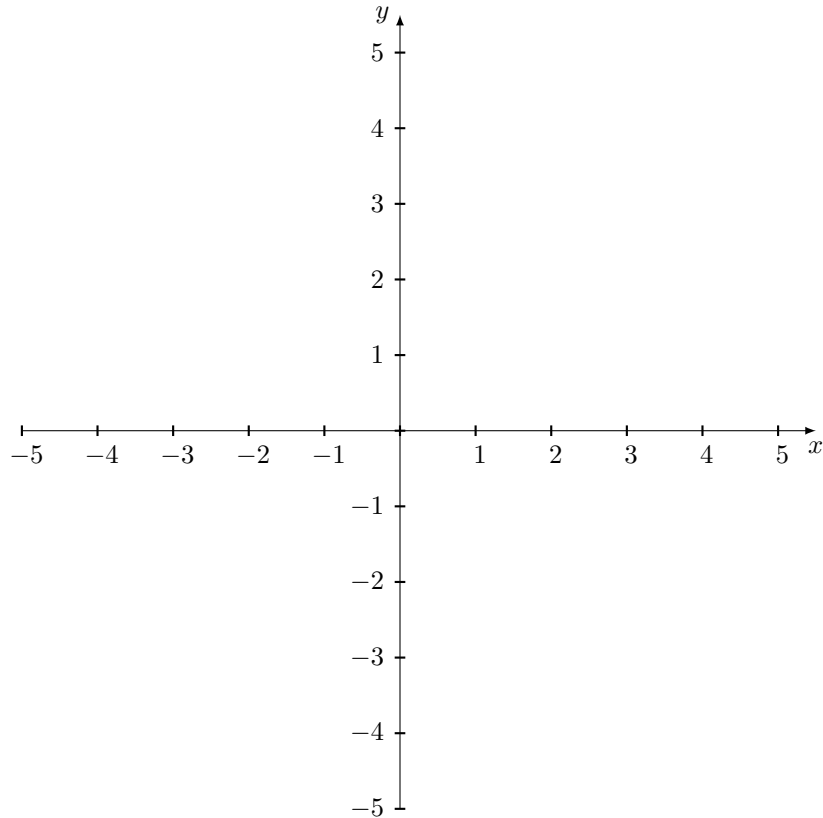
<b>1</b>	<b>Introdução ao estudo das funções</b>	<b>2</b>
1.1	Sistemas de coordenadas . . . . .	2
1.1.1	Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas . . . . .	2
1.1.2	Exercícios Propostos . . . . .	4
1.2	O conceito de função . . . . .	5
1.2.1	A noção de função no cotidiano . . . . .	5
1.2.2	Exercícios Propostos . . . . .	6
1.2.3	Formalização do conceito de função . . . . .	8

# 1 Introdução ao estudo das funções

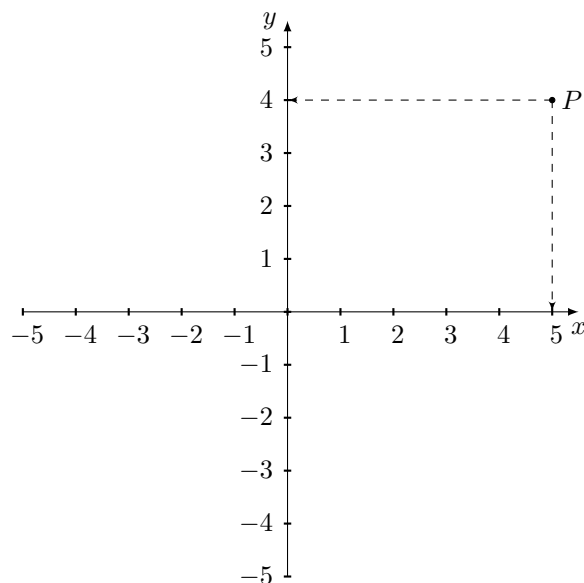
## 1.1 Sistemas de coordenadas

### 1.1.1 Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

O Sistema de coordenadas, mais conhecido como Plano Cartesiano, foi criado por René Descartes com o objetivo de localizar pontos. Ele é formado por dois eixos perpendiculares: um horizontal e outro vertical que se cruzam na origem das coordenadas. O eixo horizontal( $0x$ ) é chamado de *abscissa* e o vertical( $0y$ ) chamado de *ordenada*. Os eixos são enumerados compreendendo o conjunto dos números reais. Observe a seguir a representação do Plano Cartesiano:



Para determinar as coordenadas do ponto  $P$  da figura a seguir, traçamos por  $P$  as perpendiculares ao eixo  $x$  e ao eixo  $y$ , obtendo, nesses eixos, dois números chamados de **abscissa** e **ordenada** do ponto  $P$ , respectivamente.



No exemplo, as **coordenadas** do ponto  $P$  são 5 e 4. A **abscissa** é 5, e a **ordenada** é 4. Indicamos esse fato por  $P(5,4)$ .

A representação  $(5,4)$  é chamada de “**par ordenado** de abscissa 5 e ordenada 4”.

**Proposition 1.1. Generalidades**

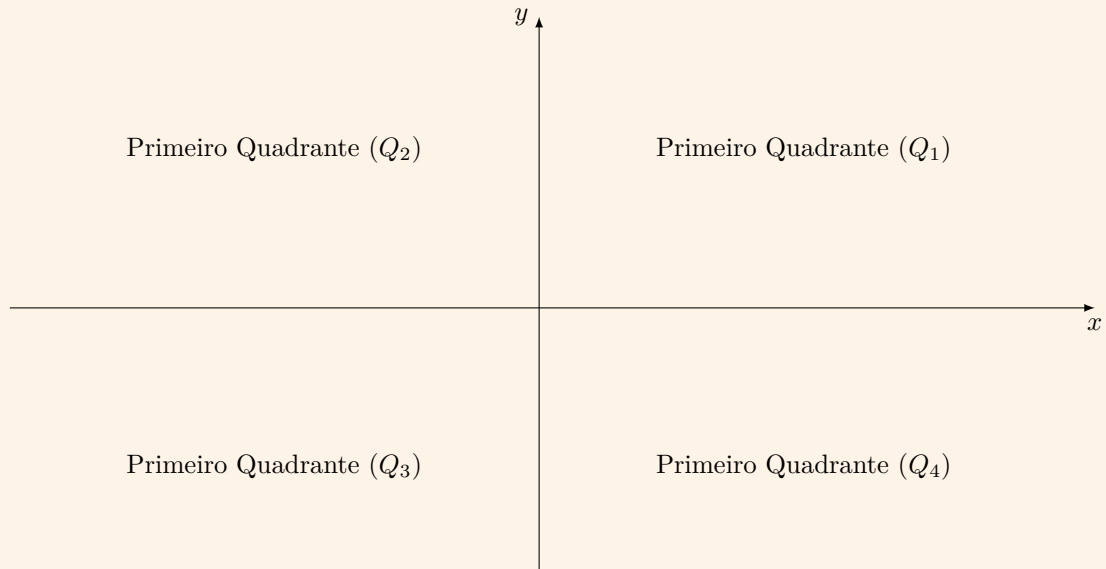
1. Dois pares ordenados de números reais são iguais se, e somente se, suas abscissas são iguais e suas ordenadas são iguais, isto é:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

Por exemplo:

$$(a, 8) = (7, y) \iff a = 7 \text{ e } y = 8$$

2. Os eixos  $0x$  e  $0y$ , chamados de **eixos coordenados**, separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que devem ser enumerados conforme a figura:



$$P(a, b) \in Q_1 \iff a > 0 \text{ e } b > 0$$

$$P(a, b) \in Q_2 \iff a < 0 \text{ e } b > 0$$

$$P(a, b) \in Q_3 \iff a < 0 \text{ e } b < 0$$

$$P(a, b) \in Q_4 \iff a > 0 \text{ e } b < 0$$

Por exemplo:

$$\# (4, 2) \in Q_1$$

$$\# (-\frac{1}{2}, 9) \in Q_2$$

$$\# (-3, -5) \in Q_3$$

$$\# (\frac{3}{2}, -1) \in Q_4$$

Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.

3. Todo ponto de abscissa nula (igual a zero) pertence ao eixo  $Oy$ , e todo ponto de ordenada nula (igual a zero) pertence ao eixo  $0x$ .

Por exemplo:

$$\# (0, -2) \in 0y$$

$$\# (5, 0) \in 0x$$

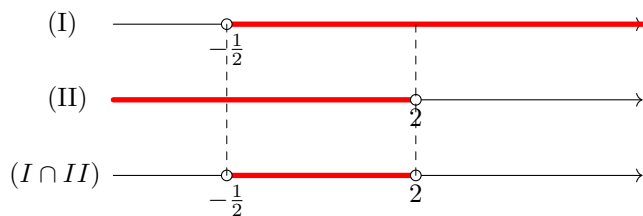
**Exercício Resolvido.** Obter os valores reais de  $m$  de modo que o ponto  $P(2m+1, 3m-6)$  pertença ao quarto quadrante.

**Resolução**

O ponto  $P$  pertence ao quarto quadrante se, e somente se:

$$\begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 3m-6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} & (I) \\ m < 2 & (II) \end{cases}$$

Efetuada a intersecção de (I) e (II), temos:



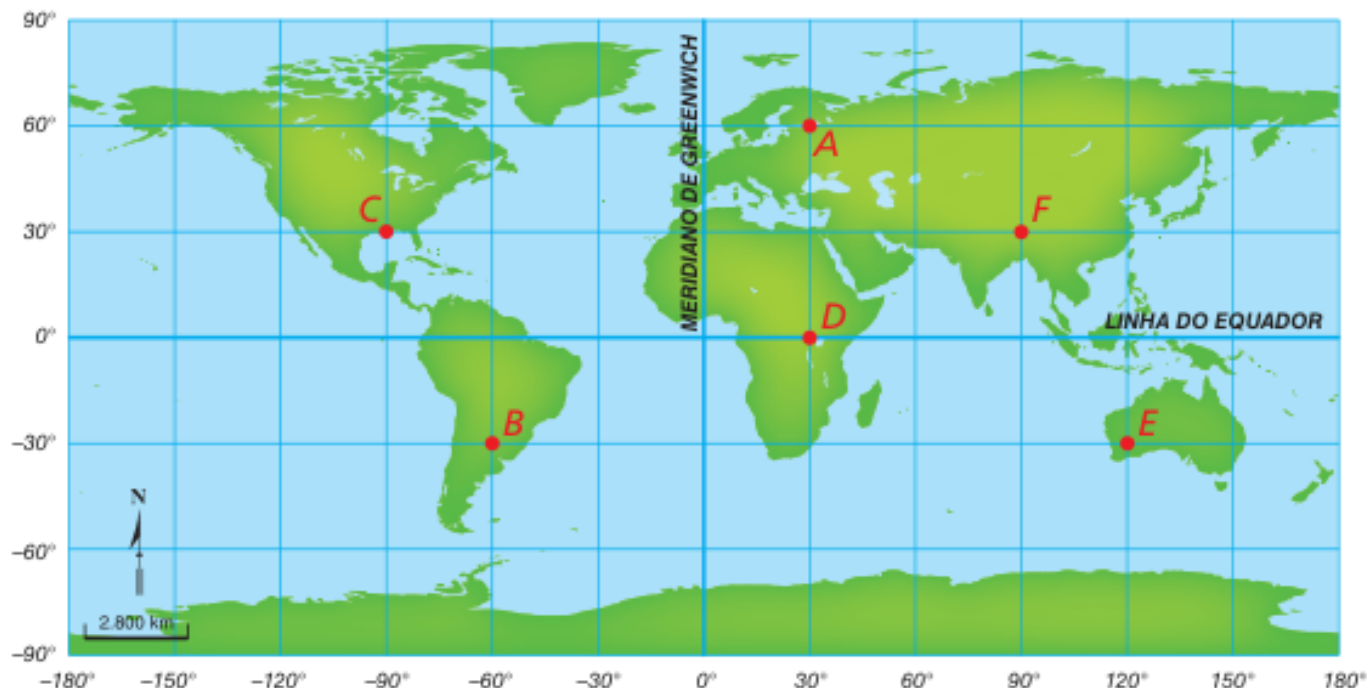
Portanto, concluímos que:  $-\frac{1}{2} < m < 2$

## 1.1.2 Exercícios Propostos

- 1 Represente, no plano cartesiano, os seguintes pontos:
  - a)  $A(4, 2)$
  - b)  $B(2, 4)$
  - c)  $C(-2, 5)$
  - d)  $D(5, -2)$
  - e)  $E(-4, -1)$
  - f)  $F(-1, 4)$
  - g)  $G(-6, 0)$
  - h)  $H(0, -6)$
  - i)  $I(0, 0)$
- 2 Para que valores reais de  $p$  o ponto  $A(p - 7, \frac{4}{5})$  pertence ao eixo das ordenadas?
- 3 Para que valores reais de  $k$  o ponto  $B(5k + 15, 4k^2 - 36)$  pertence ao eixo das abscissas?
- 4 Para que valores reais de  $r$  o ponto  $C(\frac{2}{3}, r - 2)$  pertence ao 1º quadrante?
- 5 Determine os números reais  $a$  e  $b$  de modo que  $(3a - 2b, a + b) = (10, 11)$ .
- 6 O mapa ao lado está na escala 1 : 10.000. Sabendo que o quadriculado é formado por quadradinhos de 1 cm de lado, calcule a distância real entre os pontos da região representada, que correspondem no mapa a  $A$  e  $B$ .



- 7 Um ponto  $P$  sobre a superfície da Terra é determinado por dois números chamados **latitude** e **longitude**. A latitude de  $P$  é a medida em grau do menor arco possível sobre um meridiano ligando o ponto  $P$  à linha do equador. A longitude de  $P$  é a medida em grau do menor arco possível sobre um paralelo terrestre ligando o ponto  $P$  ao meridiano de Greenwich, e como negativas a latitude ao sul do equador e a longitude a oeste do meridiano de Greenwich. Um ponto sobre o equador tem latitude  $0^\circ$  e um ponto sobre o meridiano de Greenwich tem longitude  $0^\circ$ . Indica-se o ponto  $P$  pelo par ordenado  $(x, y)$ , sendo  $x$  a latitude e  $y$  a longitude. O mapa abaixo é uma projeção plana da superfície terrestre.



I Entre os pontos assinalados em vermelho no mapa, determine as coordenadas do ponto:

- assinalado na região que corresponde à América do Sul.
- assinalado na região que corresponde à África.
- assinalado na região que corresponde à América do Norte.
- assinalado na região que corresponde à China.
- assinalado na região que corresponde à Europa.
- assinalado na região que corresponde à Austrália.

II Em que continente está o ponto de latitude  $60^\circ$  norte e longitude  $120^\circ$  leste?

## 1.2 O conceito de função

### 1.2.1 A noção de função no cotidiano

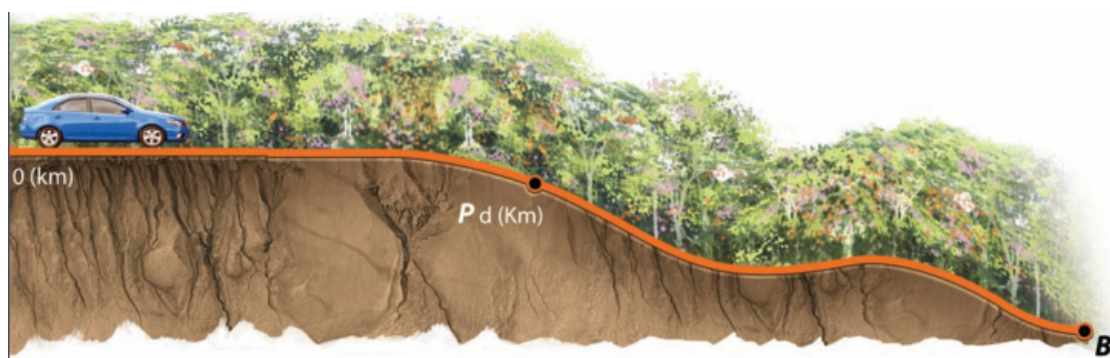
Usamos medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio, etc.

Toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**.

São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e razão.

A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto depende da variação das medidas de outras grandezas. Por exemplo: o crescimento de uma planta depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura; a pressão no mar depende da profundidade. Para estudar essas relações de dependência, podemos recorrer a equações matemáticas que relacionem as grandezas envolvidas.

Para exemplificar, vamos supor que um automóvel percorra um trecho  $AB$  de uma estrada à velocidade constante de 80 km/h.



Considerando  $A$  como ponto de partida, vamos associar a ele a marca 0 km. A cada ponto  $P$  do trecho  $AB$ , vamos associar a marca  $d$  de km, que indica a distância de  $A$  até  $P$ , medida ao longo da trajetória.

Que distância terá percorrido o automóvel após 2 horas da partida?

Como a velocidade do automóvel é constante, 80 km/h, a distância  $d$  percorrida por ele, em quilômetro, após 2 horas, será:

$$d = 80 \cdot 2 \implies d = 160 \text{ km}$$

Raciocionando de maneira análoga, podemos construir a tabela abaixo, que expressa a distância  $d$ , percorrida pelo automóvel, após  $t$  horas de sua partida.

$t$ (hora)	$d$ (quilômetro)
1	80
2	160
3	240
4	320
$\vdots$	$\vdots$

Note que, a cada valor de  $t$ , associamos um único valor de  $d$ . Por isso, dizemos que a distância  $d$  é dada em **função** do tempo.

Dessa forma, podemos representar o problema através de uma expressão matemática, que no caso acima corresponde a:

$$d = 80t$$

Observe que a equação substitui a tabela e oferece o cálculo da distância percorrida em qualquer tempo após a partida, e vice-versa.

Da mesma maneira que relacionamos as grandezas  $d$  e  $t$ , podemos relacionar outras grandezas, de modo que a **cada valor** de uma seja associado **um único valor** da outra. Relações como essas são chamadas de funções.

### Definition 1.1: Função

Dizemos que uma variável  $y$  é dada em **função** de uma variável  $x$  se, e somente se, a cada valor de  $x$  corresponde um único valor de  $y$ .

A condição que estabelece a correspondência entre os valores de  $x$  e  $y$  é chamada de **lei de associação**, ou simplesmente lei entre  $x$  e  $y$ . Quando possível, essa lei é expressa por uma equação.

### Exemplos.

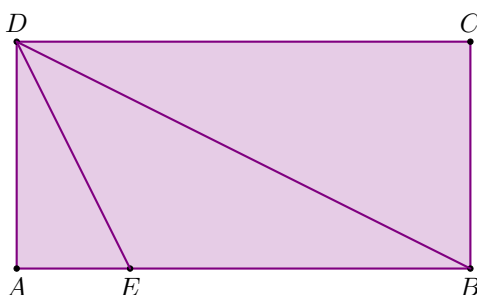
1. Ao completar o tanque de seu carro em um posto de abastecimento, o motorista olhou para a bomba e observou que havia colocado 26 litros de gasolina e que o total a pagar era R\$ 72.80.
  - a) Determinar o valor que o motorista teria pago se colocasse apenas 20 litros de gasolina.
  - b) Considerando o montante de gasolina despejada no tanque em cada instante do abastecimento, o preço a pagar é função desse montante? Por quê?
  - c) Indicando por  $y$  o preço a pagar e por  $x$  os litros de gasolina, formular uma equação que relacione  $x$  e  $y$ .

### Resolução

- a) O preço, em real, do litro de gasolina é o quociente de 72.80 por 26, que é 2.80. Logo, por 20 litros de gasolina, o motorista pagaria, em real,  $20 \cdot 2.80$ , ou seja, R\$ 56.00.
- b) O preço a pagar é função do montante de gasolina, pois, para cada montante de gasolina despejado no tanque, associa-se um único preço.
- c) Como o preço do litro de gasolina é R\$ 2.80, o preço  $y$  de  $x$  litros é dado por:  $y = 2.80 \cdot x$

## 1.2.2 Exercícios Propostos

- [1] A figura  $ABCD$  é um retângulo tal que:  $BD = 6$  cm,  $AD = 3$  cm,  $E$  é um ponto do lado  $\overline{AB}$  e  $AE = x$ .



Determine a lei que expressa a área  $y$  do triângulo  $BDE$  em função de  $x$ .

- 2 Um metalúrgico recebe R\$ 12.00 por hora trabalhada até o limite de 44 horas semanais, sendo acrescidos 30% no salário/hora a cada hora que exceder o limite.

a) Complete a tabela:

Horas semanais trabalhadas	Ganho pelas horas trabalhadas (R\$)
20	
32	
44	
46	
50	

- b) O ganho pelas horas trabalhadas é uma função do número de horas semanais trabalhadas? Por quê?
- c) Indicando por  $y$  o ganho por  $x$  horas de trabalho semanal, com  $x \leq 44$ , elabore uma equação que expresse  $y$  em função de  $x$ .
- d) Indicando por  $y$  o ganho por  $x$  horas de trabalho semanal, com  $x > 44$ , elabore uma equação que expresse  $y$  em função de  $x$ .

- 3 Um consumidor comprou um automóvel por R\$ 20000.00, constatando que, ao final de cada ano de uso, o valor de mercado do veículo diminui para 90% do valor de um ano atrás. Veja na tabela a seguir os valores do automóvel até o final do 2º ano.

Tempo de uso do automóvel (ano)	Valor de mercado (R\$)
0	20.000
1	$0,9 \cdot 20.000$
2	$0,9 \cdot 0,9 \cdot 20.000 = (0,9)^2 \cdot 20.000$

- a) Determine o valor do automóvel ao final de 3 anos de uso.
- b) Determine o valor do automóvel ao final de  $x$  anos de uso.
- c) Indicando por  $y$  o valor de mercado do automóvel com  $x$  anos de uso, obtenha uma equação que relacione  $y$  e  $x$ .
- d) O valor de mercado do automóvel é dado em função do tempo de uso? Por quê?

- 4 Para encher uma piscina, que estava vazia, foi aberta uma torneira cuja vazão é de 26 litros por minuto.

- a) Indicando por  $y$  o volume em litro de água despejada pela torneira em  $x$  minutos, obtenha uma equação que relacione  $x$  e  $y$ .
- b) O volume de água despejada é função do tempo? Por quê?

- 5 Em um termômetro, a variação do comprimento da coluna de mercúrio é proporcional à variação da temperatura, obedecendo à razão  $\frac{8}{5}$ ; por exemplo, o comprimento da coluna de mercúrio aumenta 8mm para cada  $5^\circ C$  de aumento na temperatura; e diminui 8 mm para cada  $5^\circ C$  de diminuição na temperatura. Sabe-se que, à temperatura de  $0^\circ C$ , o comprimento da coluna é 40 mm.

- a) Construa uma tabela apresentando os valores, em grau Celsius ( $^\circ C$ ), e os respectivos comprimentos da coluna, em milímetro, com os registros da temperatura variando de  $5^\circ C$  em  $5^\circ C$  desde  $-15^\circ C$  até  $15^\circ C$ .
- b) O comprimento da coluna de mercúrio é dado em função da temperatura? Por quê?
- c) Formule uma equação que relacione o comprimento do mercúrio com a temperatura.

## 1.2.3 Formalização do conceito de função

### Relação

#### Definition 1.2: Relação entre conjuntos

Dados dois conjuntos não vazios,  $A$  e  $B$ , chama-se **relação** de  $A$  em  $B$  qualquer conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  com  $x \in A$  e  $y \in B$ .

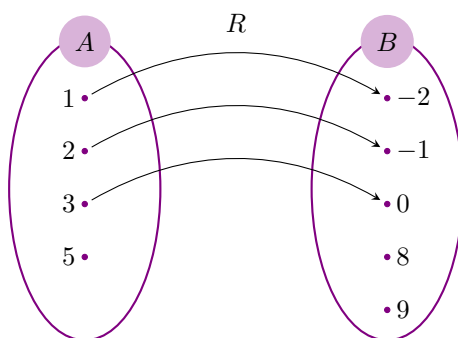
**Exemplo.** Sendo  $A = \{1, 2, 3, 5\}$  e  $B = \{-2, -1, 0, 8, 9\}$  a relação  $R$  de  $A$  em  $B$ , que associa um elemento  $x$  de  $A$  ao elemento  $x - 3$  de  $B$ , pode ser obtida pela tabela:

$x$	$x - 3$
1	-2
2	-1
3	0
5	?

Observe que o elemento 5 de  $A$  não tem correspondente em  $B$ , pois  $5 - 3 = 2$  e 2 não pertence a  $B$ . Assim a relação  $R$  é dada por:

$$R = \{(1, -2), (2, -1), (3, 0)\}$$

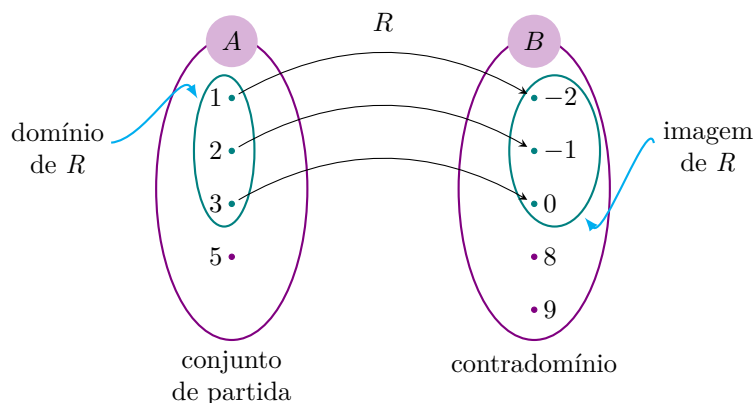
Outra forma de representar essa relação é pelo diagrama de flechas a seguir:



Para qualquer relação de  $A$  em  $B$ :

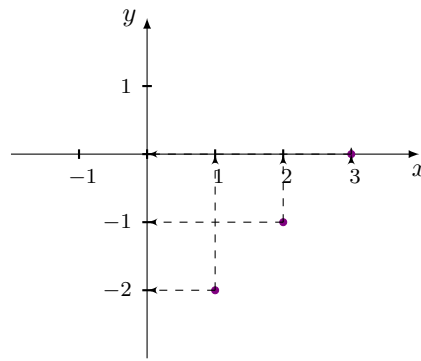
- o conjunto  $A$  é chamado de **conjunto de partida** da relação;
- o conjunto  $B$  é chamado de **contradomínio** da relação e é simbolizado por  $CD(R)$ ;
- o conjunto formado pelos elementos de  $A$  que têm correspondentes em  $B$ , através de  $R$ , é chamado de **domínio** da relação e é simbolizado por  $D(R)$ ;
- o conjunto formado pelos elementos de  $B$  que têm correspondentes em  $A$ , através de  $R$ , é chamado de **conjunto imagem** da relação e é simbolizado por  $I_m(R)$ .

Para o exemplo anterior, temos  $D(R) = \{1, 2, 3\}$  e  $I_m(R) = \{-2, -1, 0\}$ .



Também podemos representar essa relação por um gráfico cartesiano, que é formado pelos pontos determinados pelos pares ordenados da relação. Veja abaixo:

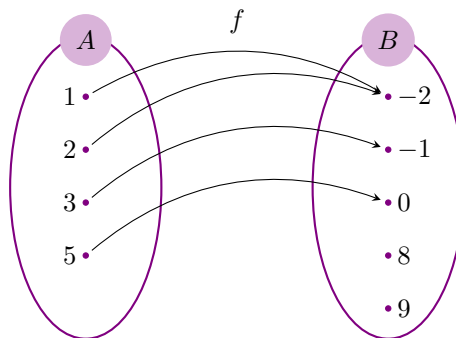




Com base na definição de relação, formalizamos, a seguir, o conceito de função.

## Função

Vamos considerar uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  tal que **qualquer** elemento de  $A$  esteja associado, através de  $f$ , a um único elemento de  $B$ :



Essa propriedade caracteriza um tipo particular de relação, ao qual damos o nome de **função** de  $A$  em  $B$ . Assim, definimos:

### Definition 1.3: Função

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios. Uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  é **função** se, e somente se, qualquer elemento de  $A$  está associado, através de  $f$ , a um único elemento de  $B$ .

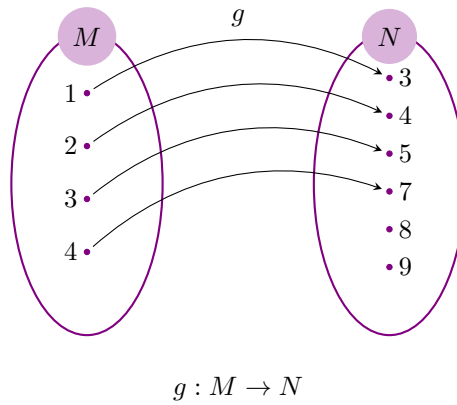
Adotaremos a notação  $f : A \rightarrow B$  para indicar que  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$ .

Destacamos que, como uma função  $f : A \rightarrow B$  é um tipo particular de relação, temos:

- o **domínio** da função é o próprio conjunto de partida, isto é,  $D(f) = A$ ;
- o **contradomínio** da função é o conjunto  $CD(f) = B$ ;
- o **conjunto imagem** da função é o conjunto  $I_m(f) = \{y \in B \mid (x, y) \in f\}$ .

### Exemplos.

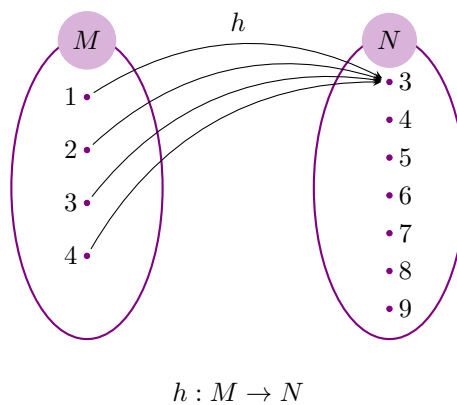
- a) A relação  $g$ , abaixo, é uma função de  $M$  em  $N$ , pois qualquer elemento de  $M$  tem, através de  $g$ , um único correspondente em  $N$ .



O domínio  $D(g)$ , o contradomínio  $CD(g)$  e o conjunto imagem  $I_m(g)$  dessa função são dados por:

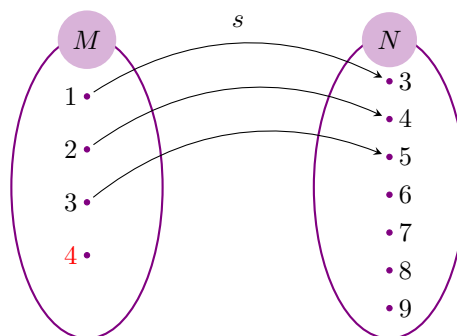
$$\begin{aligned} D(g) &= M = \{1, 2, 3, 4\} \\ CD(g) &= N = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\} \\ I_m(g) &= \{3, 4, 5, 7\} \end{aligned}$$

- b) A relação  $h$ , abaixo, é uma função de  $M$  em  $N$ , pois qualquer elemento de  $M$  tem, através de  $h$ , um único corresponde em  $N$ .



$$\begin{aligned} D(g) &= M = \{1, 2, 3, 4\} \\ CD(g) &= N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ I_m(g) &= \{3\} \end{aligned}$$

- c) A relação  $s$ , abaixo, não é função de  $M$  em  $N$ , pois existe elemento em  $M$  (o elemento 4) que não está associado, através de  $s$ , a algum elemento de  $N$ .



- d) A relação  $t$ , abaixo, não é função de  $M$  em  $N$ , pois existe elemento em  $M$  ( o elemento 1) que está associado, através de  $t$ , a mais de um elemento de  $N$ .

