夏学習内容

フーリエ級数で捉える流体現象の特異性

伊藤匠理

理学部応用数学科 4 年

September 30, 2022

定理 7: 単位円周上で k 回微分可能関数 f

f : 単位円周上の C^k 級関数 $(k \geq 2) \Rightarrow \hat{f}(n) = \mathcal{O}(1/|n|^k)$
ここで、$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ とは、ある定数 $C > 0$ が存在し、十分大きな n に対して
$|f(n)| \leq C|g(n)|$ が成立する。

k の大きさと関数 f の滑らかさ (微分可能性) について

上の傾き k を見積もることで f の滑らかさがわかる。
これは微分方程式の解の近似をフーリエ級数近似をした場合、べき則を見ることで解の微分可能性の喪失 (=特異性) を検出することができるということ。
これの導出は定理 7 に対して対偶を考えればすぐに理解できる。

$C^k \Rightarrow \hat{f}(n) = \mathcal{O}(|n|^{(-k)})$
$\Leftrightarrow C^k \Rightarrow \hat{f}(n) \leq C * |n|^{(-k)}$
$\Leftrightarrow C^k \Rightarrow log\hat{f}(n) \leq logC - k * log|n|$
$log\hat{f}(n) > logC - k * log|n| \Rightarrow \neq C^k$

(補足) フーリエ係数の k 回微分

$f : C^k$ 級 $\Rightarrow \widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n)$

これより、$s \geq k$ に対して $|\hat{f}(n)| = \mathcal{O}(1/|n|^k)$ ならば、この k 回微分のフーリエ係数は $\mathcal{O}(1/|n|^{s-k})$ である。
従って $s, k \in \mathbb{R}$ であることと、定理 6 より

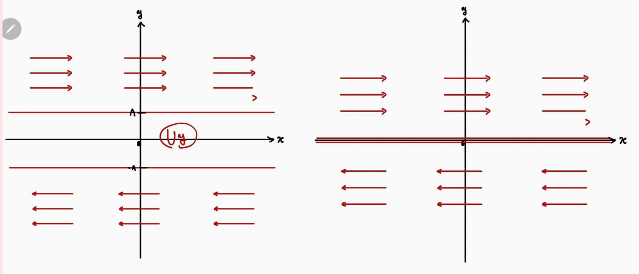
$$s - k \geq 2 \text{ ならばフーリエ級数は一様収束する}$$

渦層の例 (x,y) 平面の例

平面における以下のせん断流れ (流れの向きと垂直方向に速度が変化している流れ) を考える
$\dot{x} = u(x,y), \dot{y} = v(x,y)$ として、

$$u(x,y) = \begin{cases} UA & y > A \\ Uy & -A \le y \le A \\ -UA & y < -A \end{cases}, \quad v(x,y) = 0$$

$$u(x,y) = \begin{cases} UA & y > A \\ -UA & y < -A \end{cases}, \quad v(x,y) = 0$$



渦層

前のスライドの右の図の x 軸のように速度場の不連続線を二次元渦層と呼び、渦層は 1 次元の曲線より、以下二つのパラメータを用いて次のように表せる。
・渦層上のある点から渦層に沿って図った循環 Γ を曲線パラメータ
・時刻 t
$\Rightarrow (x(\Gamma, t), y(\Gamma, t))$.
これを複素関数 $z(\Gamma, t) = x(\Gamma, t) + iy(\Gamma, t)$ と同一視することでこの曲線の時間発展は次の Birkhoff-Rott 方程式によって記述できる。

Birkhoff-Rott 方程式

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial t}(\Gamma, t) = \frac{1}{2\pi i} pv. \int \frac{\gamma(\Gamma')}{z(\Gamma, t) - z(\Gamma', t)} d\Gamma'$$

ただし、$\overline{z}$ は z の複素共役であり、$pv. \int$ はコーシーの主値積分である。

Kelvin-Helmholz 不安定性と線形安定性解析

平坦な渦層 $z(\Gamma, t) = \Gamma$ は先に登場した Birk... 方程式の定常解であり、この流れは Kelvin-helmholz 不安定と呼ばれる不安定化を起こすことが知られている

これを確認するために定常解に対してフーリエ級数型の微小な摂動を与え、その時間発展を見てみる。

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{in\Gamma}$$

与えた摂動は微小としているので、この式に対して線形安定性解析を行える。すると摂動のフーリエ係数 a_n に対する以下の線形化方程式を得ることができる。

$$\frac{d\bar{a}_{-n}}{dt} = \frac{i|n|}{2} a_n, \qquad \frac{da_n}{dt} = \frac{|n|}{2i} \bar{a}_{-n}$$

線形安定性解析とは
微分方程式の平衡解周りで非線形項に対して近似を行い線形方程式を得ること。
一般には以下のようにヤコビ行列を用いる。
非線形関数 $f(x)$ に対して微分方程式 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ の平衡解 $\overline{x}$ における線形化はヤコビ行列 $J_f(\overline{x})$ を用いて

$$\frac{dx}{dt} = J_f(\overline{x}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

得た線形化方程式の固有値から、解を求める

$$\frac{d\bar{a}_{-n}}{dt} = \frac{i|n|}{2}a_n, \qquad \frac{da_n}{dt} = \frac{|n|}{2i}\bar{a}_{-n}$$

この線形化方程式の固有値は $\sigma_n^{\pm} = \pm\dfrac{|n|}{2}$ より、この方程式を解くと、初期に与えた微小摂動の波数 n のフーリエ係数は $exp(\sigma^{+}t)$ に成長する。これは高次のモード (振動子) に与えられた摂動ほど急速な成長をすることを示しており、高波数不安定性と言われている

このように、初期に与えた摂動が微小としていても、不安定性で成長するためその仮定は認められなくなる。
すなわち、初期摂動による非線形効果が無視できなくなり、線形安定性解析の仮定を満たせない。→ そこで $Moore$ の漸近解析が登場する。

(補足) 線形化方程式の固有値による解の安定性

・実部が全て負 ⇒ 漸近安定 (平衡解に安定する)
・実部が全て非正 ⇒ リアプノフ安定 (平衡解に近づきも離れもしない)
・ある実部が正 (他に負があっても良い)⇒ 不安定 (方向によっては外内に解が飛ばされる)

Moore による漸近解析

初期値 $z(\Gamma, 0) = \Gamma + i\epsilon sin\Gamma, \qquad -\infty < \Gamma < \infty, \qquad \epsilon$ は微小パラメタ
これに対応するように解を次の様にフーリエ級数を用いて表す

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + 2i\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) sinn\Gamma, \qquad A_n(0) = \frac{1}{2}\epsilon\delta_{n1} \qquad (\delta_{n1} \text{ は Kronecker のデルタ関数})$$

ここで A_n の主要項 $\mathcal{O}(\epsilon)^{|n|}$ がとある展開を持つと仮定をし、$t >> 1$ において以下の漸近系を得る。

$$\epsilon^n A_{n0} \sim \frac{C}{t} n^{-\frac{5}{2}} exp\{n(1 + \frac{1}{2}t + ln(\frac{1}{4}\epsilon t))\}$$

ここで、最後の式の $1 + \frac{1}{2}t + ln(\frac{1}{4}\epsilon t)$ は ϵ が微小の時、$ln(\frac{1}{4}\epsilon t)$ が極めて小さいため、< 0 である。一方でこの部分は t の一次関数でもあるので、ある $t = t_c$ で $1 + \frac{1}{2}t_c + ln(\frac{1}{4}\epsilon t_c) = 0$ となることが考えられる。すると、$t = t_c$ の時の渦層は以下のフーリエ級数によって表現される

$$z(\Gamma, t_c) \sim \Gamma + \sum C' n^{-\frac{5}{2}} e^{in\Gamma} \qquad (C' = \frac{C}{t_c})$$

曲率特異性

$$z(\Gamma, t_c) \sim \Gamma + \sum C' n^{-\frac{5}{2}} e^{in\Gamma} \qquad (C' = \frac{C}{t_c})$$

これは、フーリエ係数が $-\frac{5}{2}$ で減衰すること。
この減衰率を元に z の級数項に対して連続性を考える。
定理 6 と、フーリエ係数の微分を考えると 1 階微分に対してはフーリエ級数は連続となる。
が 2 階微分に対してはフーリエ級数は不連続となる。
二回微分は曲率に対応することが知られているので、これを曲率特異性と呼ぶ。