1) $X=(x_1,\dots,x_n) \sim U[0,\theta]$ +

• $\theta_{ML} = \arg\max\limits_{\theta} p(X|\theta) = \arg\max\limits_{\theta} \prod\limits_{i=1}^{n} p(x_i|\theta) =$

$= \arg\max\limits_{\theta} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln p(x_i|\theta) = \arg\max\limits_{\theta} \frac{n}{\theta} = \left\{ \theta \geq x_i \ \forall i \in \overline{1,n} \right\}$

$= \max(x_1, \dots, x_n)$

• $p(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta} \qquad p(X|\theta) = \frac{1}{\theta^n}$

$$p(\theta)_{сопр} = \begin{cases} \frac{b a^b}{\theta^{b+1}}, & \theta \geq a \\ 0, & \theta < a \end{cases} = \mathrm{Pareto}(\theta|a,b)$$

$$p(\theta|X) = \frac{p(X|\theta)\,p(\theta)}{\int_{\theta_{min}}^{\infty} p(X|\theta)\,p(\theta)\,d\theta} = \left\{ \text{т.к. } p(\theta)\text{-сопр} \right\} =$$

$$= \mathrm{Pareto}(\theta|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta \alpha^\beta}{\theta^{\beta+1}}, & \theta \geq \alpha \\ 0, & \theta < \alpha \end{cases}$$

$$\int_{\theta_{min}}^{\infty} p(X|\theta)\,p(\theta)\,d\theta = \int_{\theta_{min}}^{\infty} \frac{b a^b}{\theta^{b+1}} \frac{1}{\theta^n} d\theta = \left. \frac{-b a^b}{\theta^{n+b}(n+b)} \right|_{\theta_{min}}^{\infty} =$$

$$= \frac{b a^b}{\theta_{min}^{n+b}(n+b)}$$

$$\frac{b a^b}{\theta^{b+1}} \cdot \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{\theta_{min}^{n+b} (n+b)}{b a^b} = \frac{\beta \alpha^\beta}{\theta^{\beta+1}}$$

$$\beta = b+n$$

$$\alpha = \theta_{min} = \max(x_1, \dots, x_n, a)$$

$$\cdot P(\theta | x) = \begin{cases} \frac{(b+n) \cdot \max(x_1, \dots, x_n, a)^{b+n}}{\theta^{b+n+1}}, & \theta \geq \max(x_i, a) \\ 0, & \theta < \max(x_i, a) \end{cases}$$

$$E\,pareto(x | a, b) = \int_a^\infty \frac{b a^b}{x^{b+1}} x \, dx = -\frac{a^b b}{(b-1) x^{b-1}} \Big|_a^\infty =$$

$$= \frac{ab}{b-1} \quad (b > 1)$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{a^b b}{\theta^{b+1}} d\theta = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b$$

$$F(Med) = 0{,}5 \Rightarrow Med = a \sqrt[b]{2}$$

$$\frac{d\, Pareto(x | a, b)}{dx} = \frac{-(b+1) b a^b}{x^{b+2}} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Moda = a$$

• $E p(\theta|x) = \dfrac{\max(x_i, a)(b+n)}{(b+n-1)}$ (*)

• $Med(p(\theta|x)) = \max(x_i, a)\sqrt[b+n]{2}$

• $Moda(p(\theta|x)) = \max(x_i, a)$

---

2) θ — кол-во автобусов

$\cancel{p(x|\theta)}$ — воспользуемся моделью из пункта 1.

$$P_d(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+1} Pareto(x|a,b)\,dx$$

$$p(\theta) = Pareto(\theta|a,b)$$

Определить параметры можно по-разному

] $a = 1$ (т.к. во многих городах может быть 1 автобус + у нас нет доп. информации)

] Мы хотим, чтобы $E p(\theta) = E p_{real}(\theta)$

∃ город в котором мы приезжали находится в России(!) $\exists E_{real} = 30$

$\exists E_{real} = 26$

$$\frac{a^b b}{b-1} = 26 \rightarrow b = 1{,}04$$

Оценки на θ матожидание апостериора (мода и медиана $\approx a = 1$)

$$E\,p(\theta \mid x = \{100\}) = \frac{\max(1, 100)\cdot(1{,}04+1)}{1{,}04+1-1} = (*)$$

$$= 196{,}15 \approx 196$$

$$E\,p(\theta \mid x = \{100, 50\}) = \frac{100\cdot(1{,}04+2)}{1{,}04+1} = 149$$

$$E\,p(\theta \mid x = \{100, 50, 150\}) = 199$$

3. $\text{Pareto}(x|a,b) = \frac{b a^b}{x^{b+1}} \; [x \geq a]$

$$P(x|b) = \frac{1}{(ba^b)^{-1}} \cdot x^{-1} \cdot e^{-b\ln x} =$$

$$= \frac{1}{h(b)} g(x) e^{b\,u(x)}$$

$$h(b) = (ba^b)^{-1}$$

$$g(x) = x^{-1}$$

$$u(x) = -\ln(x)$$

$$\cancel{E\log(x) = \iint \left(\ln(ba^b) + \ln(x^{-1}) - \ln(x)\right) x \, db\, dx}$$

$$\cancel{= \iint x \ln b \, db\, dx + \iint x b \ln a \, db\, dx + \iint -x\ln x \, db\, dx =}$$

$$E\log(x) = -E\,u(x) = -\frac{dh(b)}{db} =$$

$$= -(ba^b \ln(a) + a^b) = -a^b(b\ln a + 1)$$