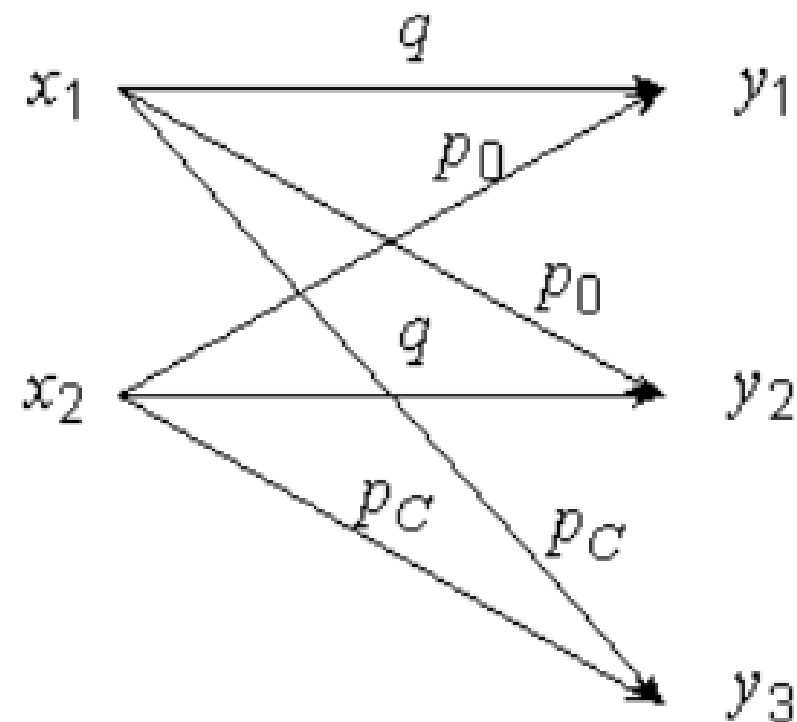


Статистический анализ корректирующих способностей различных методов при передаче данных в каналах со стираниями

Кожанов Илья, группа 417

Модель канала со стиранием

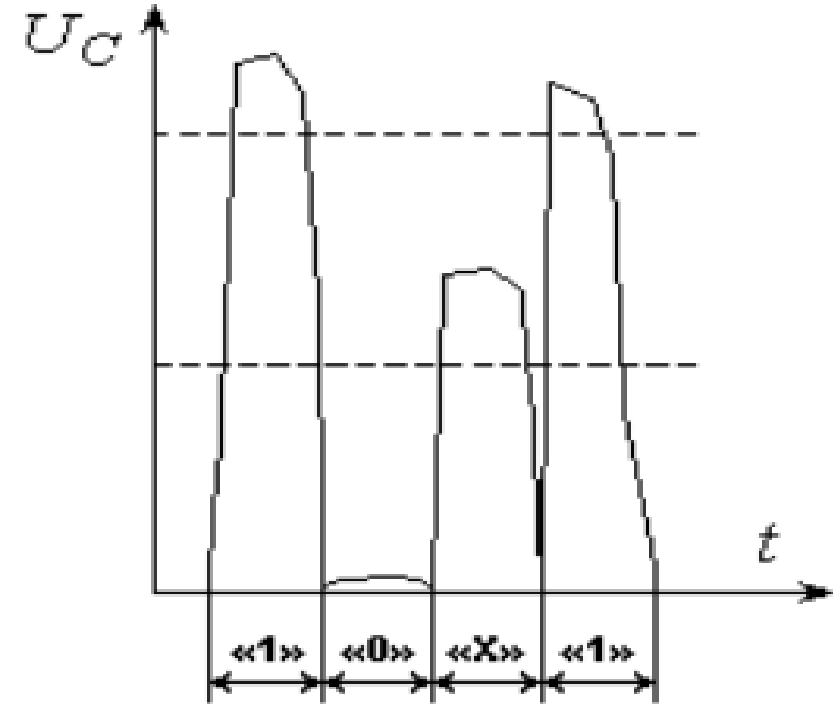
- q – вероятность правильного приема;
- p_0 – вероятность ошибочного приема символа;
- p_c – вероятность получения стертого символа;
- y_3 – символ стирания.



Граф переходных вероятностей
двоичного симметричного канала со стиранием

Модель канала со стиранием

- Если $U_C > U_{п2}$, то фиксируется символ "1".
Если $U_C < U_{п1}$, то фиксируется символ "0".
Если $U_{п1} \geq U_C \geq U_{п2}$, то фиксируется символ стирания.



Декодирование символов при использовании стирания

Модель канала со стиранием

- В канале связи могут возникать ошибки двух типов: ошибки трансформации и ошибки стирания.
- Ошибка трансформации возникает с вероятностью p_0 и для двоичного канала связи физически означает трансформацию “0” в “1” или “1” в “0”.
- Ошибка стирания возникает с вероятностью p_c . Под ней понимают прием вместо “1” или “0” какого-то третьего символа (символа стирания), который указывает на позицию искаженного символа.

Модель канала со стиранием. Уточнение

- Считаем, что вероятность ошибки трансформации $p_0 = 0$.
- Символы – пакеты данных.

Постановка задачи

- Дано сообщение длины K (то есть состоящее из K пакетов-«символов»). Вероятность потери каждого пакета в сообщении независима и неизменна: $p_c = p = \text{const}$. Пусть в результате некоторого преобразования данных длина сообщения стала $N = K + M$. Назовем M - избыточными пакетами, а M/N – избыточностью кода.
- Необходимо, чтобы в результате кодирования-восстановления-декодирования, вероятность потери пакета = p_i (при вероятностной интерпретации полученного сообщения аналогичной исходному) с минимальной избыточностью
- $p_i = 0.001$

Помехоустойчивое кодирование

- Чтобы обнаружить и исправить ошибку, применяют помехоустойчивое кодирование, т.е. кодируют сообщение таким образом, чтобы принимающая сторона знала, произошла ошибка или нет, и при могла исправить ошибки в случае их возникновения.

По сути, кодирование — это добавление к исходной информации дополнительной, проверочной, информации. Для кодирования на передающей стороне используются *кодер*, а на принимающей стороне — используют *декодер* для получения исходного сообщения.

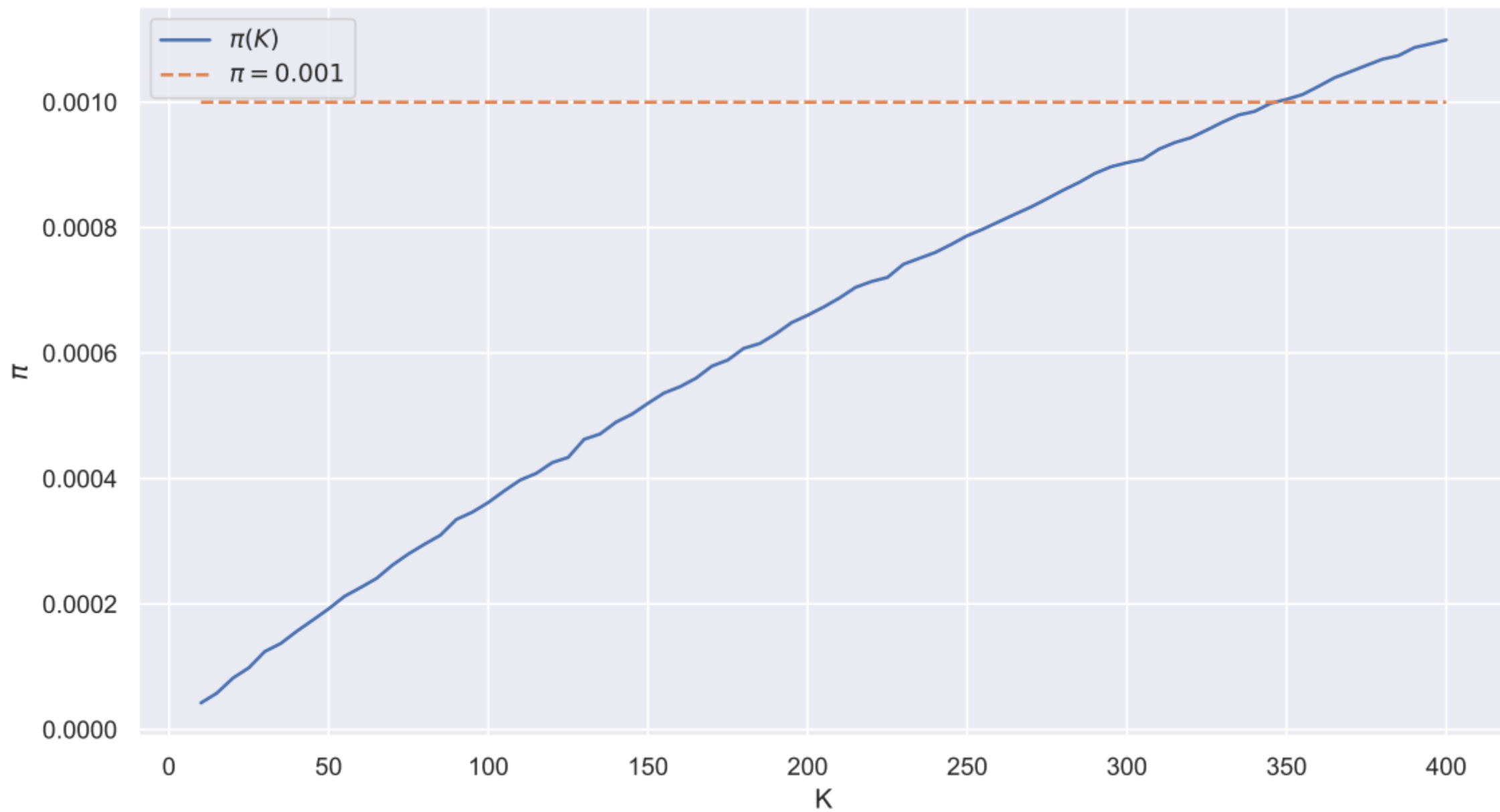
Добавление пакета четности

- Пакет чётности формируется при выполнении операции «Исключающее-ИЛИ» побитово между пакетами
- Избыточность = $1/(K+1)$

Добавление пакета четности

Текущая вероятность потери пакетов (р)	Число информационных пакетов(К)	«Новая» вероятность (π)	π(К+1)
0.002	346	0.0009995635838150288	0.0010026512968299712
0.003	134	0.0009971194029850747	0.0010016296296296297
0.005	44	0.00099525	0.0010155333333333333
0.007	21	0.0009626619047619048	0.0010097272727272728
0.01	10	0.00095315	0.0010507727272727272
0.02	2	0.000791185	0.0011813
0.03	1	0.0008987	0.0017721
0.05	-	-	-

График зависимости пост-вероятности от длины сообщения при $p=0.002$, $M=1$



Добавление пакета четности

$$\pi = p * (1 - p)^{K-1} * (1 - p)$$

$$K = \left\lceil \frac{\ln(\pi) - \ln(p)}{\ln(1-p)} \right\rceil$$

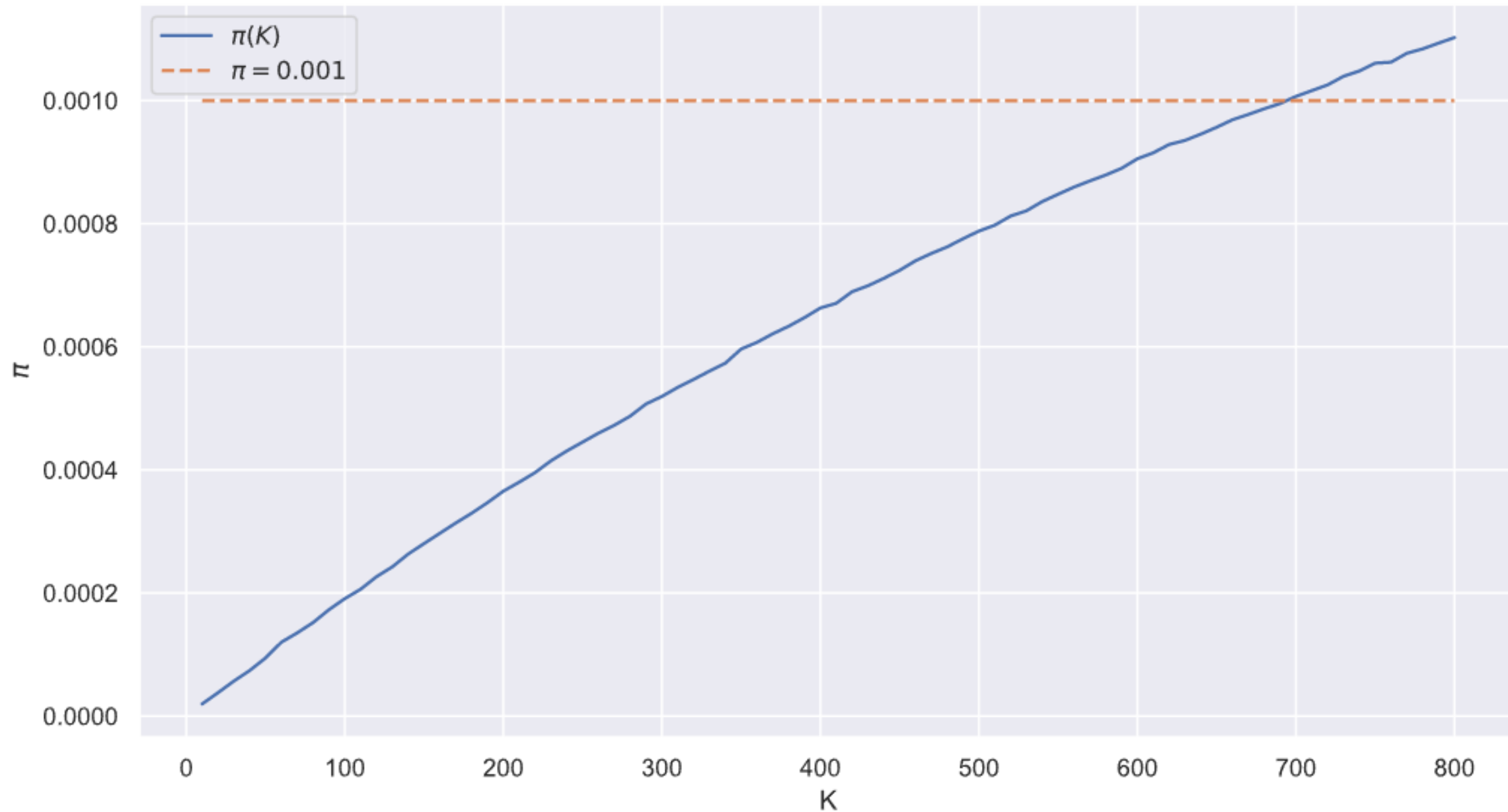
Модификация even/odd

- Пакеты чётности формируются при выполнении операции «Исключающее-ИЛИ» побитово для каждой группы из K/M пакетов
- Избыточность = $M/(K+M)$
- В частности, even/odd имеет избыточность = $2/(K+2)$

Модификация even/odd

Текущая вероятность потери пакетов (p)	Число информационных пакетов(K)	«Новая» вероятность (π)	π(K+1)
0.002	692	0.0009977702312138727	0.0010039206349206349
0.003	269	0.0009958884758364311	0.0010050888888888888
0.005	88	0.000996556818181818	0.0010056516853932584
0.007	43	0.000978511627906977	0.0010167727272727273
0.01	20	0.00097205	0.001010095238095238
0.02	4	0.0007985	0.0010252199999999999
0.03	2	0.00089915	0.0014863666666666666
0.05	-	-	-

График зависимости пост-вероятности от длины сообщения при $p=0.002$, even/odd



Модификация even/odd

$$\pi = p * (1 - p)^{K/2-1} * (1 - p)$$

$$K = \left\lfloor 2 \frac{\ln(\pi) - \ln(p)}{\ln(1-p)} \right\rfloor$$

Корректирующая способность

- Корректирующая способность — характеристика t кода C , описывающая возможность исправить ошибки в кодовых словах. Определяется как целое число, меньшее половины от минимального расстояния d_{\min} между кодовыми словами минус один в принятой метрике кода:

$$t = \lfloor (d_{\min} - 1) / 2 \rfloor$$

- Для Хемминговой метрики корректирующую способность кода можно определить как максимальный радиус сфер Хемминга, при котором для двух различных кодовых векторов сферы не пересекаются:

$$t = \max_{\vec{v}_i, \vec{v}_j \in C} \{l | S_l(\vec{v}_i) \cap S_l(\vec{v}_j) = \emptyset, \vec{v}_i \neq \vec{v}_j\}$$

Коды Рида-Соломона

- Рида – Соломона коды (РС-код) можно интерпретировать как недвоичные коды БЧХ (Боуза – Чоудхури – Хоквингема), значения кодовых символов которых взяты из поля $GF(2^r)$, т. е. r информационных символов отображаются отдельным элементом поля. Коды Рида – Соломона – это линейные недвоичные систематические циклические коды, символы которых представляют собой r -битовые последовательности, где r – целое положительное число, большее 1.

Коды Рида – Соломона (n, k) определены на r -битовых символах при всех n и k , для которых:

$0 < k < n < 2^r + 2$, где

k – число информационных блоков, подлежащих кодированию,

n – число кодовых символов в кодируемом блоке.

- Для большинства (n, k) -кодов Рида – Соломона; $(n, k) = (2^r - 1, 2^r - 1 - 2 \cdot t)$, где t – количество ошибочных символов, которые может исправить код, а $n - k = 2t$ – число контрольных символов.

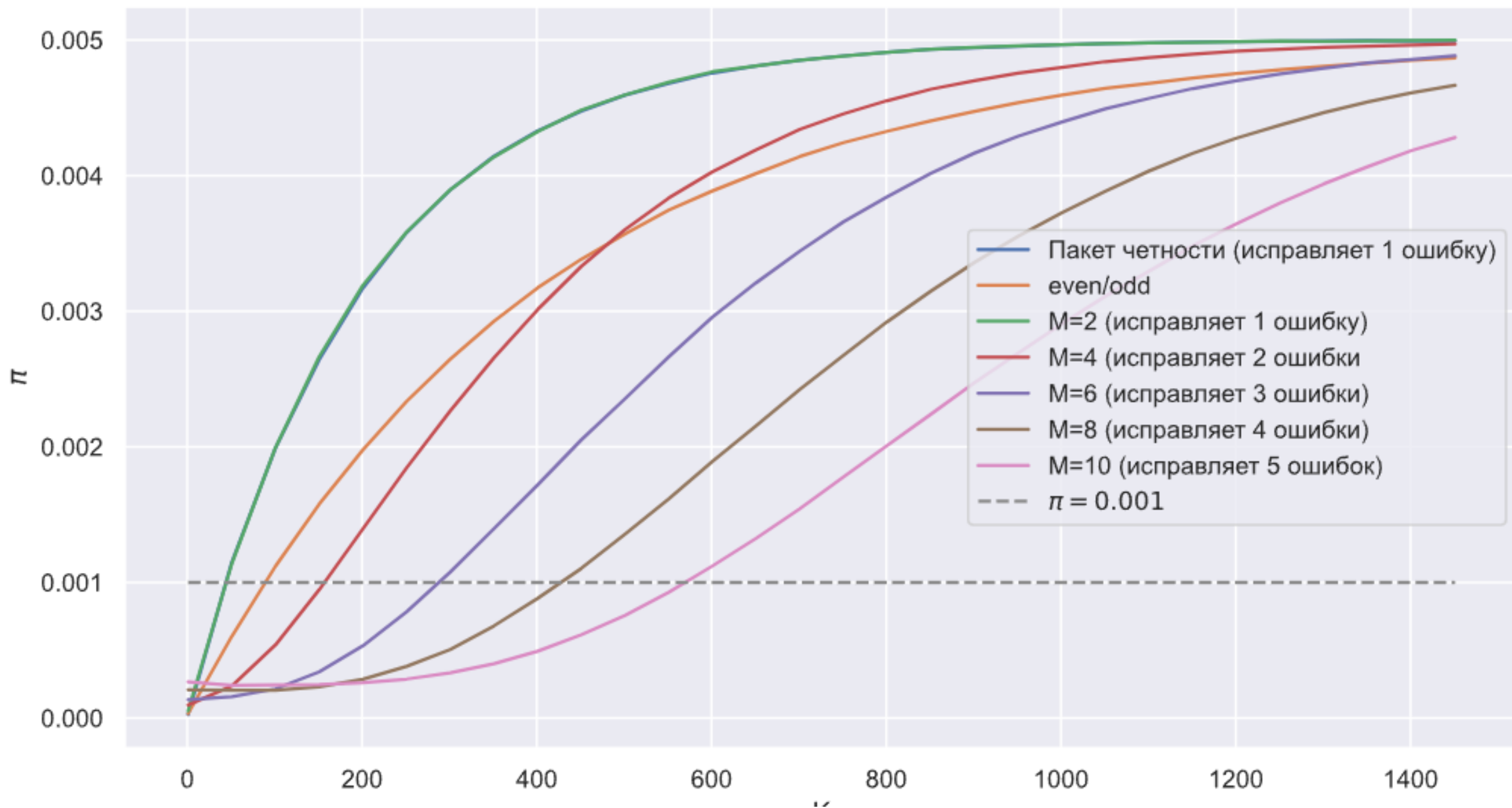
Коды Рида-Соломона



Почему именно РС-коды?

- **Теорема (граница Рейгера).** Каждый линейный блочный код, исправляющий все пакеты длиной t и менее, должен содержать, по меньшей мере, $2t$ проверочных символов.
- Код Рида — Соломона, исправляющий t ошибок, требует $2t$ проверочных пакетов, и с его помощью исправляются произвольные t ошибок и меньше.

График зависимости пост-вероятности от длины сообщения при $p=0.005$, РС-коды



N	P (в %)	M
5	0.5	1
	0.7	1
	1	1
	1.5	1
	2	1
10	0.5	1
	0.7	1
	1	1
	1.5	1
	2	2
50	0.5	1
	0.7	2
	1	2
	1.5	2
	2	3
100	0.5	2
	0.7	2
	1	3
	1.5	3
	2	4
300	0.5	2
	0.7	3
	1	5
	1.5	7
	2	9
500	0.5	3
	0.7	5
	1	6
	1.5	10
	2	13
1000	0.5	5
	0.7	8
	1	11
	1.5	17
	2	22

N	P (в %)	M
5	0.5	1
	0.7	1
	1	2
	1.5	2
	2	2
10	0.5	2
	0.7	2
	1	2
	1.5	2
	2	2
50	0.5	2
	0.7	3
	1	3
	1.5	4
	2	4
100	0.5	3
	0.7	3
	1	4
	1.5	5
	2	6
300	0.5	4
	0.7	5
	1	7
	1.5	9
	2	12
500	0.5	6
	0.7	7
	1	10
	1.5	13
	2	17
1000	0.5	9
	0.7	12
	1	16
	1.5	22
	2	28