Lista nr 12 z matematyki dyskretnej

1. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

2. *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.
   Uwaga: To zadanie nie jest tak proste, jak się wydaje.

3. (Problem haremu). Niech A i B będą dwoma rozłącznymi zbiorami osób. Przypuśćmy, że każda osoba a należąca do zbioru A chce poślubić (naraz) co najmniej $n_a \geq 1$ osób ze zbioru B. Jaki jest warunek konieczny i wystarczający, aby ten problem miał rozwiązanie? Wskazówka: Zastosuj klonowanie i tw. Halla.

4. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

5. Zmodyfikuj algorytm Dijkstry tak, by działał dla grafów skierowanych.

6. Określ warunki konieczne i wystarczające na to, by spójny graf skierowany miał skierowaną/ny drogę/cykl Eulera. Podaj algorytm znajdujący skierowany cykl Eulera.

7. Pokaż, że jeśli każdy wierzcholek w grafie $G = (V, E)$ ma stopień przynajmniej k, to G zawiera każde drzewo k-krawędziowe.

8. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

9. nk studentów, przy czym $k \geq 2$, jest podzielonych na n towarzystw po k osób i na $n \geq 2$ kół naukowych po k osób każde. Wykaż, że da się wysłać delegację $2n$ osób tak, by każde towarzystwo i każde koło naukowe było reprezentowane. (Każdy student należy do jednego towarzystwa i jednego koła.) Jeden student może reprezentować tylko jedną grupę (typu koło lub towarzystwo).

10. *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

    Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

    Wskazówka: przydatne mogą okazać się skojarzenia.