https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=318

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 12

22 grudnia 2020 r.

Zajęcia 19 stycznia 2021 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L12.1. 1 punkt Jak już wiadomo, język programowania `PWO++` ma obszerną bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura `Integral(`f`)` znajdująca z dużą dokładnością wartość całki $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, gdzie $f \in C[-2,2]$. W jaki sposób użyć procedury `Integral` do obliczenia całki

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a < b;\ g \in C[a,b])?$$

L12.2. 2 punkty Udowodnij, że kwadratura postaci

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k). \tag{1}$$

ma rząd $\geq n+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

L12.3. 1 punkt Udowodnij, że rząd kwadratury postaci (1) nie przekracza $2n+2$.

L12.4. 2 punkty Załóżmy, że dane są: funkcja ciągła f, liczby $a < b$ oraz parami różne węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Niech $Q_n(f)$ będzie kwadraturą interpolacyjną z węzłami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ przybliżającą wartość całki

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jak wiadomo, współczynniki A_k $(0 \leq k \leq n)$ kwadratury Q_n,

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

wyrażają się wzorem:

$$A_k = \int\limits_a^b \left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) \mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Podaj **efektywny algorytm** obliczania wartości współczynników $A_0, A_1, \ldots, A_n$ i określ jego złożoność.

L12.5. 1 punkt Jak upraszcza się wzór interpolacyjny Lagrange'a dla węzłów równoodległych?

L12.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$N_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(a + k \cdot h_n) \qquad \left(h_n := \frac{b-a}{n}\right) \tag{2}$$

są takie, że $A_k = A_{n-k}$ $(k = 0,\ 1, \ldots, n)$.

L12.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech A_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ oznaczają współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa (2). Udowodnij, że $A_k/(b-a)$ $(0 \leq k \leq n)$ są liczbami wymiernymi.

L12.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podaj **efektywny algorytm** wyznaczania współczynników kwadratury Newtona-Cotesa (patrz też zadania **L12.4**–**L12.6**) i określ jego złożoność.

L12.9. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Oblicz $N_n(f)$ $(n = 2, 4, 6, 8, 10, 12)$ dla całki

$$\int_{-3}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} 3.$$

Który wynik jest najdokładniejszy? Jak to skomentować?

(–) Paweł Woźny