Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 7. Tydzień rozpoczynający się 19. kwietnia

Zadania

1. Wykazać, że dla rozkładu Cauchy'ego wartość oczekiwana nie istnieje.
$$f(x) = \frac{1}{\pi \cdot (1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
2. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład. Dodatkowo, $\mathrm{E}(X_i) \neq 0$. Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej $Y_k = \dfrac{\sum_{j=1}^k X_j}{\sum_{i=1}^n X_i}$.
3. Załóżmy, że istnieje $\mathrm{E}(X^2)$. Udowodnić, że istnieje też $\mathrm{E}(X)$.
4. Dystrybuanta zmiennej losowej X to $F_X(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2}$, dla $x \in [3, \infty)$. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej.
5. Dane są niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie $U[0,1]$. Niech x, y będą wylosowanymi wartościami zmiennych X, Y. Odcinek $[0,1]$ podzielony jest zatem na trzy części (być może jedna część ma długość 0). Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można utworzyć trójkąt?

   [Do zadań 6–8] Niech (X_1, X_2) będzie dwuwymiarową zmienną losową o gęstości $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\pi}$, dla $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$.
6. Znaleźć gęstości brzegowe zmiennych X_1, X_2.
7. Wykazać że współczynnik korelacji zmiennych X_1, X_2 jest równy zero. Wykazać, że zmienne są zależne.
8. Niech $X_1 = Y_1 \cos Y_2$, $X_2 = Y_1 \sin Y_2$, gdzie $0 < Y_1 < 1$, $0 \leqslant Y_2 \leqslant 2\pi$. Znaleźć gęstość $g(y_1, y_2)$ zmiennej (Y_1, Y_2). Sprawdzić czy zmienne Y_1, Y_2 są niezależne.
9. Dana jest n-wymiarowa zmienna losowa $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$. Zmienną $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ określamy następująco:
$$Y_1 = \bar{\mathbf{X}}, \quad Y_k = X_k - \bar{\mathbf{X}} \text{ dla } k = 2, \ldots, n.$$
   Znaleźć wartość Jacobianu
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$
10. Dane są zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$. Udowodnić, że:
$$\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^n \left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2 + n\,(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2. \tag{1}$$

[**Zadania 11–12**] Zakładamy, że niezależne zmienne losowe X_k podlegają rozkładowi $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

11. **E1** Znaleźć (wraz z uzasadnieniem) rozkład zmiennej $M = \dfrac{n}{\sigma^2} \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2$

12. **E1** Załóżmy, że zmienne $\bar{\mathbf{X}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ oraz $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2$ są niezależne. Korzystając z równania (1) udowodnić, że $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \equiv \mathrm{Gamma}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{n-1}{2}\right)$

[Do zadań 13–14] Boki prostokąta są niezależnymi zmiennymi losowymi X_1 i X_2 o rozkładzie $U[1,2]$. $Y_1 = 2X_1 + 2X_2$ jest obwodem tego prostokąta, $Y_2 = X_1X_2$ oznacza pole tego prostokąta.

13. **E1** Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Y_1, Y_2. (Odp.: 6, $2/3$ dla Y_1, $9/4$, $55/144$ dla Y_2).

14. **E1** Obliczyć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y_1, Y_2. (Odp.: $3\sqrt{330}/55$).

Witold Karczewski