Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2020

Podzbiory k-elementowe

Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?

Podzbiory k-elementowe

Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?

$|U| = \{1, 2, \ldots, n\}$
$P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$

Porównajmy P_n^k z wariacjami k-elementowymi bez powtórzeń.
$|D| = \{1, 2 \ldots, k\}$
$F_{k,n}^{1-1} = \{f : D \to U : f \text{ różnowartościowa } \}$

Podzbiory k-elementowe

Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?

$|U| = \{1, 2 \ldots, n\}$
$P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$

Porównajmy P_n^k z wariacjami k-elementowymi bez powtórzeń.
$|D| = \{1, 2 \ldots, k\}$
$F_{k,n}^{1-1} = \{f : D \to U : f \text{ różnowartościowa } \}$
Dla $k = 1$ zachodzi: $|F_{k,n}^{1-1}| = |P_n^k|$
Dla $k > 1$ zachodzi: $|F_{k,n}^{1-1}| > |P_n^k|$

Podzbiory k-elementowe

Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?

- Elementy k-elementowego podzbioru U możemy ustawić na $k!$ sposobów.
- Każdemu k-elem. podzbiorowi A odpowiada $k!$ funkcji różnowartościowych $\{1, 2, \dots k\} \to A$.
- Każdemu k-elem. podzbiorowi A odpowiada $k!$-elem zbiór Z_A.
- Zauważmy, że $A \neq B \Rightarrow Z_A \cap Z_B = \emptyset$.
- $F^{1-1}_{k,n} = \bigcup_{A \subseteq U, |A|=k} Z_A$
- $|F^{1-1}_{k,n}| = k! |P^k_n|$
- $\frac{n!}{(n-k)!} = k! |P^k_n|$
- $|P^k_n| = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k \leq n$.
Wówczas $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k \leq n$.
Wówczas $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: budujemy bijekcję $\mathcal{F}$ między P_n^k i P_n^{n-k}.
$P_n^k = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : |A| = k\}$
$P_n^{n-k} = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : |A| = n - k\}$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k \leq n$.
Wówczas $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: budujemy bijekcję $\mathcal{F}$ między P_n^k i P_n^{n-k}.
$P_n^k = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : |A| = k\}$
$P_n^{n-k} = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : |A| = n - k\}$

$\mathcal{F} : P_n^k \to P_n^{n-k}$
$\mathcal{F}(A) = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus A = \bar{A}$ (A przyporządkowujemy dopełnienie A)

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k < n$.
Wówczas $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny:

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k < n$.
Wówczas $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: dzielimy P_{n+1}^{k+1} na dwa rozłączne zbiory:

$U = \{1, 2, \ldots, n+1\}$
Z_+^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U zawierających $n+1$
Z_-^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U niezawierających $n+1$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k < n$.
Wówczas $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: dzielimy P_{n+1}^{k+1} na dwa rozłączne zbiory:

$U = \{1, 2, \ldots, n+1\}$
Z_+^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U zawierających $n+1$
Z_-^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U niezawierających $n+1$

$|P_{n+1}^{k+1}| = |Z_+^{k+1}| + |Z_-^{k+1}|$
$|Z_-^{k+1}| = |P_n^{k+1}| = \binom{n}{k+1}$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k < n$.
Wówczas $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: dzielimy P_{n+1}^{k+1} na dwa rozłączne zbiory:

$U = \{1, 2, \ldots, n+1\}$
Z_{+}^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U zawierających $n+1$
Z_{-}^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U niezawierających $n+1$

$$|P_{n+1}^{k+1}| = |Z_{+}^{k+1}| + |Z_{-}^{k+1}|$$
$$|Z_{-}^{k+1}| = |P_{n}^{k+1}| = \binom{n}{k+1}$$
$$|Z_{+}^{k+1}| = |P_{n}^{k}| = \binom{n}{k}$$

Trójkąt Pascala

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Kulki i szufladki

Na ile sposobów można wrzucić n (nierozróżnialnych) kulek do k (rozróżnialnych) szuflad?

Kulki i szufladki

Na ile sposobów można wrzucić n kulek do k szuflad?

Zakodujmy każdy rozrzut za pomocą zer i jedynek, tzn. jako ciąg zerojedynkowy.

Kulki i szufladki

Na ile sposobów można wrzucić n kulek do k szuflad?

Zakodujmy każdy rozrzut za pomocą zer i jedynek, tzn. jako ciąg zerojedynkowy.
Użyjemy n zer - reprezentują kulki i $k-1$ jedynek, które są oddzielaczami.
Interpretacja: ilość zer między $(i-1)$szą i i-tą jedynką to ilość kulek w i-tej szufladzie.
Przykład: 0011000 oznacza 2-kulki w pierwszej, 0 kulek w drugiej, 3 kulki w trzeciej.

Kulki i szufladki

Na ile sposobów można wrzucić n kulek do k szuflad?
Na tyle, ile jest ciągów złożonych z n zer i $k-1$ jedynek.

Każdy taki ciąg ma długość $n+k-1$.
Trzeba wybrać $k-1$ miejsc spośród $n+k-1$, na których postawimy jedynkę.

Odpowiedź: $\binom{n+k-1}{k-1}$

Dwumian Newtona

Wzór dwumienny Newtona

Dla $n \in N$ zachodzi:
$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Dwumian Newtona

Wzór dwumienny Newtona

Dla $n \in N$ zachodzi:
$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Dowód kombinatoryczny:
$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i y^{n-i}$
$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y) = x^n + y^n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x^i y^{n-i}$

Mamy 2^n mnożeń.
α_i to liczba sposobów, na jakie możemy wybrać i spośród n nawiasów, w których w mnożeniu uczestniczyć będzie x (a nie y)

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

Asymptotyka

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

- Czy $f(n) = O(f(n))$?
- Czy $f(n) = O(\frac{f(n)}{100})$?
- Czy $10^6 n = O(n^2)$?

Asymptotyka

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \rightarrow R \geq 0$.
$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

- Czy $f(n) = O(f(n))$? $n_0 = 0, \ c = 1$
- Czy $f(n) = O(\frac{f(n)}{100})$? $n_0 = 0, \ c = 100$
- Czy $10^6 n = O(n^2)$? $n_0 = 10^6, \ c = 1$

Asymptotyka

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Asymptotyka

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

- Czy $f(n) = o(f(n))$?
- Czy $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$?
- Czy $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow g(n) = o(f(n))$?

Asymptotyka

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

- Czy $f(n) = o(f(n))$? NIE
- Czy $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$? TAK
- Czy $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow g(n) = o(f(n))$? NIE

Asymptotyka

Duże O

Niech $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$.

- $\forall_{\alpha,\beta} \alpha \leq \beta \Rightarrow n^{\alpha} = O(n^{\beta})$
- $\forall_{a>1} n^{C} = O(a^{n})$
- $\forall_{\alpha>0} (\ln n)^{C} = O(n^{\alpha})$

Asymptotyka

Duże O

Niech $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$.

- $\forall_{\alpha,\beta} \alpha \leq \beta \Rightarrow n^{\alpha} = O(n^{\beta})$
- $\forall_{a>1} n^{C} = O(a^{n})$
- $\forall_{\alpha>0} (\ln n)^{C} = O(n^{\alpha})$

Przydatna może sie okazać reguła de l'Hospitala:
Jeśli $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończości, to $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

Asymptotyka

Inne funkcje

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

- $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \geq cg(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$
- $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Suma harmoniczna

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$G_k = \{i : \frac{1}{2^k} < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{2^{k-1}}\}$$

Kulki i szufladki c.d.

Na ile sposobów można wrzucić n kulek do k szufladek tak, aby żadna szuflada nie była pusta?