Mamy $(X,Y) \sim N(0,1)$, gdzie X, Y są niezależne

a) Rozważamy zmienną (D, Θ) i obliczamy jej gęstość.

Wiemy, że $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$ oraz $d = x^2 + y^2$

Wiadomo również, że $\tan\Theta = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\tan\theta$, stąd

$d = x^2 + x^2\tan\theta \Rightarrow d = x^2(1+\tan^2\theta)$

$1+\tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$d = x^2(1+\tan^2\theta) \Rightarrow x^2 = d\cos^2\theta \Rightarrow x = \pm\sqrt{d}\cos\theta$

$y = x\tan\theta = \pm\sqrt{d}\cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \pm\sqrt{d}\sin\theta$

czyli $x = \pm\sqrt{d}\cos\theta$, $y = \pm\sqrt{d}\sin\theta$.

Zamiast rozważać wszystkie przypadki zauważmy, że

$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial x}{\partial d}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \wedge \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial y}{\partial d}\right) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial d} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial d} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm\frac{\cos\theta}{2\sqrt{d}} & \mp\sqrt{d}\sin\theta \\ \pm\frac{1}{2\sqrt{d}}\sin\theta & \pm\sqrt{d}\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{1}{2}$$

Skoro $y, x \in (-\infty, \infty)$ to $d \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dy\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \cdot \frac{1}{2}\, d\theta\, dd, \text{ zatem } f(d,\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

b) D, Θ są niezależne, zatem $f(d,\theta) = f_1(d) f_2(\theta)$.

$$f_1(d) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{d}{2}} d\theta = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{d}{2}} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} e^{-\frac{d}{2}}$$

$$f_2(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} e^{\frac{-d}{2}} dd = \left| \begin{matrix} t = -\frac{d}{2} \\ dt = -\frac{1}{2} dd \\ -2dt = dd \end{matrix} \right| = \frac{-2}{4\pi} \int_0^{-\infty} e^t\, dt = \int_{-\infty}^0 e^t\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[e^t\right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{2\pi}$$

$f_1(d) f_2(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{-d}{2}} = \frac{1}{4\pi} e^{\frac{-d}{2}} = f(d,\theta)$ dla każdego d, θ, czyli są niezależne.

c) $f_1(d) = \frac{1}{2} e^{-d/2}$ — rozkład wykładniczy dla $\lambda = \frac{1}{2}$

Created with IDroo.com