Lista nr 11 z matematyki dyskretnej

1. Digraf D jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy D zawiera źródło, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w D. Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie.

2. Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i, j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i < j$.

3. Digraf, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowaną, nazywamy turniejem. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego wierzchołka po drodze o długości co najwyżej 2.

4. Podaj warunek konieczny na to, by graf dwudzielny był grafem hamiltonowskim.

   Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

5. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

6. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki.

7. Czy n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona?

8. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym z wagami na krawędziach $c : E \to R \geq 0$. Św. Mikołaj chce rozwieźć prezenty

do mieszkanców wszystkich ulic - każda ulica jest reprezentowana jako krawędź w G. Jak obliczyć trasę dla Św. Mikołaja, w której przejeżdza on każdą ulicą *przynajmniej* raz i która jest minimalna wagowo?

Wskazówka: Zakładamy, że mamy do dyspozycji wielomianowy algorytm obliczający skojarzenie doskonałe o minimalnej wadze.

9. Krawędzie pewnego grafu G pokolorowano na czerwono i niebiesko. Kiedy graf ten zawiera drzewo rozpinające niemonochromatyczne?

10. Krawędzie pewnego grafu spójnego G niezawierającego pętli ani krawędzi równoległych pokolorowano na czerwono, zielono i niebiesko. G ma przynajmniej 4 krawędzie oraz przynajmniej jedną krawędź każdego z trzech kolorów. Czy graf ten w każdym przypadku zawiera drzewo rozpinające trójkolorowe?

    A gdyby kolorów było cztery i G był dodatkowo dwudzielny, czy zawsze zawierałby drzewo rozpinające zawierające przynajmniej jedną krawędż każdego z czterech kolorów? Czy dwudzielność jest potrzebna?