Matematyka dyskretna (L) - cheatsheet
Autor: Tomasz Woszczyński, strona nr 1

# 1 Wariacje

**Liczba wariacji z powtórzeniami**

Dla zbiorów $A, B$ o odpowiednio $m, n$ elementach liczba funkcji ze zbioru $A$ w $B$ wynosi $n^m$, czyli $|\{f : A \to B\}| = n^m|$.

**Liczba wariacji bez powtórzeń**

Dla zbiorów $A, B$ o odpowiednio $m, n$ elementach liczba funkcji różnowartościowych ze zbioru $A$ w $B$ wynosi $n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

**Liczba podzbiorów**

Zbiór $A$ o $n$ elementach ma $|\{B : B \subseteq A\} = 2^n|$ podzbiorów.

**Para podzbiorów**

Dla $U$ będącego $n$-elementowym można wyznaczyć dwa jego podzbiory $A, B$ takie, że $A \subseteq B$ na $|\{(A,B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = |\{f : U \to \{0,1,2\}\}| = 3^n$ sposobów.

**Liczba permutacji**

Zbiór $U$ o $n$ elementach można spermutować na $n!$ sposobów.

**Sufit, podłoga, część ułamkowa**

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:
1. $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \le x < n+1$
2. $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n-1 < x \le n$
3. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

**Własności sufitu i podłogi**

Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, wtedy:
1. $\lfloor x+n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$, ponieważ $\lfloor x \rfloor + n \le x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.

Ponadto mamy:
2. $\lceil x+n \rceil = n + \lceil x \rceil$
3. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

**Podzbiory k-elementowe**

Niech $|U| = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$. Wtedy $\frac{n!}{(n-k)!} = k!\left|P_n^k\right|$, czyli $\left|P_n^k\right| = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

**Symbol Newtona**

Dla $k, n \in \mathbb{N}$ takich, że $0 \le k \le n$ zachodzi:
1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

**Tożsamość absorpcyjna**

Dla $k \ge 1$ zachodzi $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

**Tożsamość Cauchy'ego**

$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$

**Tożsamość Pascala**

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

**Kulki i szufladki**

$n$ kulek do $k$ szuflad można wrzucić na tyle sposobów, ile jest ciągów złożonych z $n$ zer i $k-1$ jedynek, czyli $\binom{n+k-1}{k-1}$.

**Dwumian Newtona**

Dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

**Inna tożsamość (jaka?)**

$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{m-k}{n-k}$

**Zasada szufladkowa Dirichleta**

Niech $k, s \in \mathbb{N}_+$. Jeśli wrzucimy $k$ kulek do $s$ szuflad (Dirichleta), a kulek jest więcej niż szuflad ($k > s$), to w którejś szufladzie będą przynajmniej dwie kulki. Innymi słowy, dla skończonych zbiorów $A, B$, jeśli $|A| > |B|$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa z $A$ w $B$. Dla $k > s \cdot i$ kulek oraz $s$ szuflad będzie w jakiejś szufladzie $i+1$ kulek.

# 2 Asymptotyka

Niech $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ge 0$, wtedy możemy mówić o takich funkcjach asymptotycznych:

**Notacja dużego $O$**

Mamy $f(n) = O(g(n))$ wtw, gdy $\exists(c > 0)\ \exists(n_0 \in \mathbb{N})\ \forall(n \ge n_0)\ f(n) < cg(n)$. Ponadto dla $C, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą takie własności:
1. $\forall(\alpha, \beta)\ \alpha \le \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$,
2. $\forall(\alpha > 1)\ n^C = O(a^n)$,
3. $\forall(\alpha > 0)\ (\ln n)^C = O(n^\alpha)$.

Przydatna może okazać się reguła de l'Hospitala, więc gdy $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

**Notacja małego $o$**

$f(n) = o(g(n))$ wtw, gdy $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

**Notacja duże Omega ($\Omega$)**

$f(n) = \Omega(g(n))$ wtw, gdy $\exists(c > 0)\exists(n_0 \in \mathbb{N})\forall(n \ge n_0) f(n) \ge cg(n)$.

**Notacja Theta ($\Theta$)**

$f(n) = \Theta(g(n))$ wtw, gdy $f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$.

**Notacja małe Omega ($\omega$)**

$f(n) = \omega(g(n))$ wtw, gdy $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

# 3 Arytmetyka modularna

**Funkcja modulo**

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Wtedy:

$n \bmod d = n - \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \cdot d$.

$n \bmod d = r$ wtw, gdy $0 \le r < d \ \wedge\ \exists(k \in \mathbb{Z})\ n = kd + r$

**Przystawanie modulo**

$a \equiv_n b$ wtw, gdy $a \bmod n = b \bmod n$

**Własności funkcji modulo**

1. $a + b \equiv_n a \bmod n + b \bmod n$
2. $a \cdot b \equiv_n (a \bmod n) \cdot (b \bmod n)$

**Podzielność**

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$. Wtedy:
1. $d|n$ wtw, gdy $\exists(k \in \mathbb{Z})\ n = kd$
2. $d|n$ wtw, gdy $n \bmod d = 0$
3. $d|n$ wtw, gdy $n \equiv_d 0$
4. $d|n_1 \wedge d|n_2$ to $d|(n_1 + n_2)$

**Największy wspólny dzielnik (NWD, gcd)**

Niech $a, b \in \mathbb{N}$, wtedy $\gcd(a,b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d|a \wedge d|b\}$

**Własności NWD**

Dla $a > b$ względnie pierwszych ($a \perp b$) i $0 \le m < n$:
$\gcd(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{\gcd(m,n)} - b^{\gcd(m,n)}$.

**Algorytm Euklidesa**

Dla $a \ge b > 0$ korzystamy z własności: $\gcd(a,b) = \gcd(b, a \bmod b)$ oraz $\gcd(a,0) = a$.

```
gcd(a, b):
    while b != 0:
        c = a mod b
        a = b
        b = c
    return a
```

**Rozszerzony algorytm Euklidesa**

Dla $a \ge b > 0$:
$\exists(x, y \in \mathbb{Z})\ xa + yb = \gcd(a,b)$

```
gcd(a, b):
    x = 1, y = 0, r = 0, s = 1
    while b != 0:
        c = a mod b
        q = a div b
        a = b
        b = c

        r' = r
        s' = s
        r = x - q * r
        s = y - q * s
        x = r'
        y = s'

    return a, x, y
```

**Liczby względnie pierwsze**

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, wtedy te liczby są względnie pierwsze, gdy $\gcd(a,b) = 1$.

**Coś o liczbach pierwszych**

1. Jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $n$ jest liczbą pierwszą.
2. Jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$.
3. Jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to $n$ jest potęgą liczby 2.

# 4 Wzór włączeń i wyłączeń

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

# 5 Rekurencja, zależności rekurencyjne

**Liczby Fibonacciego**

Niech $F_0 = 0, F_1 = 1$, wtedy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

**Własności liczb Fibonacciego**

Każde dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.
$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$

**Szereg harmoniczny**

$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$

**Podział płaszczyzny na obszary**

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ p_{n-1} + n & \text{dla } n \ge 1 \end{cases}$$

**Liczba nieporządków $n$-elementowych**

1. $d_n = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$
2. $d_{n+1} = n(d_n + d_{n+1})$ dla $d_0 = 1, d_1 = 0$.

**Operator przesunięcia $\mathbf{E}$**

Mamy ciąg $\langle a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$. Wtedy $\mathbf{E}\langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$.

**Złożenie operatora przesunięcia**

$\mathbf{E}^2 \langle a_n \rangle = \mathbf{E}(\mathbf{E}\langle a_n \rangle) = \langle a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$

**Operatory działające na ciągi**

1. $\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle = \langle a_0 + b_0, \ldots \rangle$
2. $c\langle a_n \rangle = \langle ca_n \rangle = \langle ca_0, ca_1, \ldots \rangle$

**Co anihiluje dane ciągi?**

1. $\langle \alpha \rangle \Longrightarrow \mathbf{E} - 1$.
2. $\left\langle \alpha a^i \right\rangle \Longrightarrow \mathbf{E} - a$.
3. $\left\langle \alpha a^i + \beta b^i \right\rangle \Longrightarrow (\mathbf{E} - a)(\mathbf{E} - b)$.
4. $\left\langle \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k^i \right\rangle \Longrightarrow \prod_{k=0}^{n} (\mathbf{E} - a_k)$.
5. $\langle \alpha i + \beta \rangle \Longrightarrow (\mathbf{E} - 1)^2$.
6. $\left\langle (\alpha i + \beta) a^i \right\rangle \Longrightarrow (\mathbf{E} - a)^2$.
7. $\left\langle (\alpha i + \beta) a_i + \gamma b^i \right\rangle \Longrightarrow (\mathbf{E} - a)^2 (\mathbf{E} - b)$.
8. $\left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k i^k \right\rangle a^i \Longrightarrow (\mathbf{E} - a)^n$.

**Dodatkowe własności anihilatorów**

Jeśli $\mathbf{E}_A$ anihiluje $\langle a_i \rangle$, to ten sam anihilator anihiluje również ciąg $c\langle a_n \rangle$ dla dowolnej stałej $c$.
Jeśli $\mathbf{E}_A$ anihiluje $\langle a_i \rangle$ i $\mathbf{E}_B$ anihiluje $\langle b_i \rangle$, to $\mathbf{E}_A \mathbf{E}_B$ anihiluje $\langle a_i \rangle \pm \langle b_i \rangle$.

**Liczby Catalana**

$C_n$ oznacza $n$-tą liczbę Catalana, wyraża się przez $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$ dla $C_0 = 0$.
Można je również przedstawić wzorami $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Spełniają one zależność $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.
Liczby Catalana posiadają różne interpretacje kombinatoryczne, takie jak liczba poprawnych rozmieszczeń nawiasów, liczba dróg w układzie współrzędnych w I ćwiartce, liczba drzew binarnych, liczba podziałów wielokąta wypukłego na trójkąty.

**Funkcje tworzące (OGF)**

Dla ciągu $\langle a_n \rangle$ można utworzyć funkcję $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = A(x)$, która jest funkcją tworzącą tego ciągu. Poniżej kilka typowych funkcji tworzących dla ciągów:
1. $\frac{1}{1-x}$ dla ciągu $\langle 1 \rangle$, czyli $\frac{n}{1-x}$ dla $\langle n \rangle$.
2. $\frac{1}{1-2x}$ dla ciągu $\langle 2^n \rangle$.
3. $\frac{1}{(1-x)^2}$ dla ciągu $\langle 1, 2, 3, \ldots \rangle$.
4. $\frac{1}{1-x^2}$ dla ciągu $\langle 0, 1, 0, 1, \ldots \rangle$.

**Przesunięcie wyrazów w prawo o $k$ miejsc**

Aby z ciągu $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ o OGF $A(x)$ otrzymać ciąg $\langle 0, \ldots, 0, a_0, a_1, \ldots \rangle$, w którym pierwsze $k$ wyrazów jest 0, należy pomnożyć funkcję tworzącą przez $x^k$, więc mamy $x^k A(x)$.

**Przesunięcie wyrazów w lewo o $k$ miejsc**

Aby z takiego ciągu jak wyżej otrzymać ciąg $\langle a_k, a_{k+1}, \ldots \rangle$, należy wykonać takie działanie: $\frac{A(x) - \left(a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}\right)}{x^k}$.

**Przerwy pomiędzy wyrazami**

Funkcją tworzącą takiego ciągu $\langle a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \ldots \rangle$ jest $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots = A(x^2)$. Dla ciągu o wyrazach co 3 miejsca byłoby to $A(x^3)$, dla 4 to $A(x^4)$, dla $n$ więc $A(x^n)$.

**Co drugi wyraz ciągu (pochodne)**

Funkcją tworzącą $\langle a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \ldots \rangle$ jest $\frac{A(x) + A(-x)}{2}$, dla $\langle 0, a_1, 0, a_3, \ldots \rangle$ mamy $\frac{A(x) - A(-x)}{2}$.

Funkcją tworzącą takiego ciągu $\langle 0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, ia_i, \ldots \rangle$ jest pochodna funkcji $A(x)$ przesunięta o jedno miejsce w prawo, a więc $xA'(x)$.

**Wykorzystanie całek w OGF**

Aby odnaleźć funkcję tworzącą ciągu $\left\langle 0, \frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_i}{i}, \ldots \right\rangle$ należy scałkować funkcję tworzącą $A(x)$ i przesunąć ją w lewo: $\int_0^1 \frac{A(x) - a_0}{x} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i} x^i$.

**Inne funkcje tworzące**

1. $\left\langle n^2 \right\rangle$ odpowiada OGF $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.
2. $\left\langle n^3 \right\rangle$ odpowiada OGF $x\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$.

3. $\left\langle\binom{n+k}{k}\right\rangle$ odpowiada OGF $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$.

**Liczba podziałów liczby $n$**

1. Dowolne składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$
2. Różne składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^i)$
3. Nieparzyste składniki: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2i-1})$
4. Składniki mniejsze od $m$: $\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{1-x^i}$
5. Różne potęgi 2: $\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2^i})$

**Rekursja uniwersalna**

Niech $a, b, c$ będą dodatnimi stałymi, rozwiązaniem równania rekurencyjnego

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{dla } n = 1 \\ aT(\frac{n}{c}) + bn & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

dla $n$ będących potęgą liczby $c$ jest

$$T(n) = \begin{cases} O(n) & \text{dla } a < c \\ O(n \log n) & \text{dla } a = c \\ O\left(n^{\log_c a}\right) & \text{dla } a > c \end{cases}$$

## 6 Teoria grafów

**Graf nieskierowany**

Graf nieskierowany to para zbiorów $(V, E)$, gdzie $E = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. $V$ to zbiór wierzchołków, $E$ to zbiór krawędzi.

**"Patologie"w grafach**

Pętla to krawędź postaci $\{v, v\}$, a krawędzie równoległe to dwie lub więcej krawędzi łączących te same wierzchołki $u, v$ (dla $u \neq v$).

**Graf prosty**

Graf $G = (V, E)$ jest prosty, jeśli nie zawiera pętli ani krawędzi równoległych.

**Graf skierowany**

Graf nieskierowany to para zbiorów $(V, E)$, gdzie $E = \{(u, v) : u, v \in V\}$. $V$ to zbiór wierzchołków, $E$ to zbiór krawędzi skierowanych lub łuków.

**Krawędź incydentna**

Krawędź $e$ jest incydentna do wierzchołka $u$, jeśli jeden z końców $e$ to $u$.

**Stopień wierzchołka**

Stopień wierzchołka $u$ oznaczany przez $\deg(u)$ to liczba krawędzi incydentnych do $u$. Każda pętla incydentna do $u$ dokłada się do stopnia $u$ liczbą 2.

**Lemat o uściskach dłoni**

Niech $G = (V, E)$ będzie nieskierowanym grafem. Wtedy $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

**Lemat o uściskach dłoni dla grafu skierowanego**

Niech $G = (V, E)$ będzie skierowanym grafem. Wtedy $\sum_{v \in V} \deg_{in}(v) = \deg_{out}(v)$.

**Reprezentacje grafów**

Graf można reprezentować za pomocą list sąsiadów, macierzy sąsiedztwa lub macierzy incydencji.

**Izomorfizm grafów**

Dwa grafy nieskierowane proste $G = (V, E)$ i $H = (V', E')$ są izomorficzne wtw, gdy istnieje bijekcja $f : V \to V'$ taka, że $\forall (u, v \in V)\ \{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$.

**Marszruta, ścieżka, droga, cykl**

1. Marszruta o długości $k$ to ciąg $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ taki, że $\forall (0 \leq i < k)\ \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
2. Droga to marszruta, w której żadna krawędź nie występuje dwukrotnie.
3. Ścieżka to marszruta, w której żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.
4. Cykl to marszruta, w której pierwszy wierzchołek jest taki sam jak ostatni, a poza tym, żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.

$u - v$-marszruta to marszruta taka, że $v_0 = u$ i $v_k = v$, analogicznie definiujemy $u - v$-drogę i $u - v$-ścieżkę.

Marszruta/droga jest zamknięta, gdy $v_0 = v_k$. Zamknięta ścieżka to cykl.

**Graf spójny**

Nieskierowany graf $G = (V, E)$ jest spójny, jeśli z każdego wierzchołka da się dojść do innego, tzn. dla każdego wierzchołka $u, v \in V$ istnieje $u - v$-ścieżka.

**Dopełnienie grafu**

Dopełnienie grafu $G$ oznaczamy przez $\overline{G}$, a definiujemy je jako graf $\overline{G} = (V, E')$ taki, że $\{u, v\} \in E'$ wtw, gdy $\{u, v\} \notin E$.

**Podgraf**

Podgrafem grafu $G = (V, E)$ jest dowolny graf $H = (V', E')$ taki, że $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Podgraf jest właściwy, jeśli $G \neq H$.

**Spójna składowa**

Spójna składowa grafu $G$ to dowolny podgraf spójny $H = (V', E')$ grafu $G$, który jest maksymalny ze względu na zawieranie, tzn. taki, że nie istnieje podgraf spójny $H'$, którego podgrafem właściwym jest $H$.

**Drzewo i las**

Graf $G = (V, E)$ jest acykliczny, jeśli nie zawiera żadnego cyklu. Las jest acyklicznym grafem, a drzewo acyklicznym grafem spójnym. Drzewa są spójnymi składowymi lasu, a więc las składa się z drzew.

Drzewo jest najmniejszym grafem spójnym, a więc jeśli chcemy zbudować graf spójny $G$ na zbiorze wierzchołków $V$, to $G$ musi być drzewem.

**Liść**

Liść to wierzchołek o stopniu 1. Dowolne drzewo o $n \geq 2$ wierzchołkach zawiera przynajmniej 2 liście.

**Most**

Most to krawędź, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych grafu, ponadto żaden most nie leży na cyklu.

**Charakteryzacja drzewa**

Niech $G = (V, E)$ będzie $n$-wierzchołkowym grafem nieskierowanym ($n \geq 1$). Wtedy wszystkie następujące stwierdzenia są równoważne:

1. $G$ jest spójny i acykliczny ($G$ jest drzewem).
2. $G$ jest spójny i ma $n - 1$ krawędzi.
3. $G$ jest acykliczny i ma $n - 1$ krawędzi.
4. Dla każdego $u, v \in V$ w $G$ jest tylko jedna $u - v$-ścieżka.
5. $G$ jest spójny i każda krawędź jest mostem.
6. $G$ nie ma cykli, ale dołożenie jakiejkolwiek krawędzi tworzy cykl.

**Liczba liści w dowolnym drzewie**

Niech $t_i$ oznacza liczbę wierzchołków stopnia $i$ w drzewie, wtedy

$t_1 = \sum_{i=3}^{n} (i-2)t_i + 2$ oznacza liczbę liści

w drzewie. Nie zależy ona od $t_2$, gdyż "przedłużenie"liścia kolejną krawędzią nie zmienia liczby liści w drzewie.

**Wierzchołek centralny, promień grafu**

Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków $u, v$, czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej je. Dla każdego wierzchołka $v$ definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek $w$, dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywamy wierzchołkiem centralnym grafu $G$, a liczbę $r(G) = r(w)$ promieniem grafu $G$.

**Graf dwudzielny**

Graf $G = (V, E)$ jest dwudzielny wtw, gdy istnieje podział zbioru $V$ na zbiory $A$ i $B$ taki, że dla każdej krawędzi $e \in E$ jeden koniec $e$ należy do zbioru $A$, a drugi do zbioru $B$. Podział wierzchołków nie zawsze jest jednoznaczny! Graf $G$ jest dwudzielny wtw, gdy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości.

**Lemat o zamkniętej marszrucie**

Każda zamknięta marszruta o nieparzystej długości zawiera cykl o nieparzystej długości.

**Graf o minimalnym stopniu $k$**

Niech $G$ będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej $k$. Wówczas $G$ zawiera ścieżkę o długości $k$. Jeśli $k \geq 2$, to $G$ zawiera cykl o długości przynajmniej $k + 1$.

**Algorytmy przeszukiwania grafów**

**Przeszukiwanie grafu w głąb**

```
DFS(u):
  u.visited = true
    for each neighbour v of u:
      if not v.visited
        DFS(v)
```

**Przeszukiwanie grafu wszerz**

```
BFS(v):
  queue Q = {}
  Q.enqueue(v)
  v.visited = true

  while (Q != empty):
    u = Q.dequeue()
      for each neighbour w of u:
        if not w.visited:
          Q.enqueue(w)
          w.visited = true
```

Czas działania DFS oraz BFS to $O(V + E)$.

**Drzewo rozpinające**

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. Drzewo rozpinające grafu $G$ to podgraf $T = (V, E')$, który jest drzewem. $T$ zawiera wszystkie wierzchołki grafu $G$.

**Las rozpinający**

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem niekoniecznie spójnym. Las rozpinający grafu $G$ to podgraf $F = (V, E')$, który jest lasem, którego liczba spójnych składowych jest taka sama jak liczba spójnych składowych grafu $G$.

**Minimalne drzewo rozpinające (MST)**

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach, a graf $T = (V, E')$ jego drzewem rozpinającym.

Wagę definiuje funkcja $c : E \to \mathbb{R}_+$. Wtedy wagą drzewa rozpinającego $c(T) = \sum_{e \in E'} c(e)$. Minimalnym drzewem rozpinającym (MST) grafu $G$ jest drzewo rozpinające $T$ o minimalnej wadze.

**Algorytmy na znajdowanie MST**

**Algorytm Kruskala** polega na dodawaniu kolejnych krawędzi w taki sposób, aby nie stworzyły one żadnego cyklu.

```
KRUSKAL:
  sort(E) wzgledem wagi
  T = {}
  for i in [1, m]:
    if (T + {e(i)} nie tworzy
        zadnego cyklu):
      T = T + {e(i)}
```

**Algorytm Prima** polega na dobieraniu najlżejszych krawędzi do grafu $T$.

```
PRIM:
  T = {}
  U = {1} (dowolny wierzcholek G)
  while (U != V):
    e = najlzejsza krawedz (u, v),
        taka ze u jest z U,
        a v jest z V-U
    T = T + {(u, v)}
    U = U + {v}
```

**Algorytm Boruvki** polega na dodawaniu najlżejszych krawędzi do $T$, łączeniu ich w superwierzchołki i wykonywaniu algorytmu od początku.

```
BORUVKA:
  T = V
  while (T != MST):
    wybierz najmniejsza krawedz
    z najmniejsza waga i dodaj
    ja do zbioru E'

    gdy jest wiecej niz jedna
    spojna skladowa, polacz
    wszystkie wierzcholki w
    superwierzcholki i wykonaj
    algorytm od poczatku
```

Wszystkie powyżej przedstawione algorytmy działają w czasie $O(|E| \cdot \log |V|)$.

**Algorytm Reverse-delete** polega na usuwaniu kolejnych krawędzi aby otrzymać $MST$.

```
KRUSKAL(edges[] E):
  sort(E) malejaco wzgledem wagi
  i = 0

  while i < size(E):
    edge = E[i]
    usun E[i]
    if graf nie jest spojny:
      E[i] = edge
      i = i + 1

  return edges[] E
```

Złożoność czasowa tego algorytmu to $O(E \log V (\log \log V)^3)$.

**Skojarzenie (matching)**

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. Skojarzenie grafu $G$ to dowolny pozdbiór krawędzi $M \subseteq E$ taki, że żadne dwie krawędzie z $M$ nie mają wspólnego końca.

**Największe skojarzenie**

Skojarzenie największe grafu $G$ to skojarzenie o maksymalnej liczbie krawędzi.

**Wierzchołki skojarzone, wolne**

Niech $G = (V,E)$ będzie grafem spójnym, a $M$ jakimś skojarzeniem w $G$. Wierzchołek $v \in V$ jest skojarzony w $M$, jeśli jest końcem jakiejś krawędzi z $M$. Wierzchołek $v \in V$ jest wolny/nieskojarzony, jeśli żadna krawędź z $M$ nie jest z nim incydentna.

**Ścieżka alternująca**

Ścieżka $P$ w grafie $G$ jest alternująca (względem $M$) jeśli krawędzie na $P$ na przemian należą i nie należą do $M$.

**Ścieżka powiększająca**

Ścieżka $P$ w grafie $G$ jest powiększająca (względem $M$), jeśli jest alternująca względem $M$ i jej końce są nieskojarzone (w $M$).

**Skojarzenie doskonałe/pełne**

Skojarzenie doskonałe/pełne grafu $G$ to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z $V$ jest skojarzony.

**Cykl alternujący**

Cykl $C$ w grafie $G$ jest alternujący względem $M$ jeśli krawędzie na $C$ na przemian należą i nie należą do $M$.

**Twierdzenie Berge'a**

Skojarzenie $M$ grafu $G$ jest największe wtw, gdy $G$ nie zawiera ścieżki powiększającej względem $M$.

**Sąsiedztwo wierzchołków**

Niech $G = (V,E)$ będzie grafem a $W \subseteq V$ podzbiorem wierzchołków. Sąsiedztwo $W$ oznaczane jako $N(W)$ definiujemy jako zbiór $\{v \in V : \exists(w \in W)\ \{v,w\} \in E\}$.

**Warunek Halla**

Niech graf $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$.

**Skojarzenie doskonałe w grafie dwudzielnym**

Graf dwudzielny $G$ zwiera skojarzenie doskonałe wtw, gdy spełniony jest w nim warunek Halla.

**Waga ścieżki, najlżejsza ścieżka**

Waga ścieżki $P$ to suma wag krawędzi leżących na $P$. Najlższejsza/najkrótsza (względem $c : E \to \mathbb{R}_+$) ścieżka z $s$ do $t$ to ta, która ma najmniejszą wagę.

Niech $S \subseteq V$, a $s$ będzie ustalonym wierzchołkiem z $V$. Ścieżka $P$ z $s$ do $v$ jest prawie $S$-owa/osiągalna bezpośrednio z $S$, jeśli wszystkie wierzchołki na $P$ oprócz $v$ są w $S$.

$d(v)$ to waga najkrótszej ścieżki z $s$ do $v$.

$t(v)$ to waga najkrótszej prawie $S$-owej ścieżki z $s$ do $v$, a gdy taka ścieżka nie istnieje, to $t(v) = \infty$.

**Algorytm Dijkstry**

Algorytm Dijkstry służy do znajdowania wagi najkrótszych ścieżek.

```
DIJKSTRA:
  S = {s}
  d(s) = 0

  for each neighbour v of s:
    t(v) = c(s, v)
  for other vertices:
    while (S != V):
      u = argmin{t(u): u not in S}
      S = S + {u}
      update all t(v):
        for each neighbour v
        (not in S) of vertex u:
          t(v) = min{t(v),
                     d(u)+c(u,v)}
```

**Pokrycie wierzchołkowe**

Niech $G = (V,E)$ będzie grafem. Pokrycie wierzchołkowe $G$ to dowolny pozdbiór $V' \subseteq V$ taki, że każda krawędź z $E$ ma przynajmniej jeden z końców w $V'$.

**Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe**

Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe grafu $G$ to to spośród pokryć wierzchołkowych $G$, które zawiera najmniej wierzchołków.

**Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie**

Niech $G = (V,E)$ będzie grafem. Niech $M$ będzie jakimś skojarzeniem $G$, a $W$ jakimś pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M| \leq |W|$.

**Twierdzenie Koeniga**

Niech $G = (V,E)$ będzie grafem dwudzielnym, $M_{\text{max}}$ największym skojarzeniem $G$, a $W_{\text{min}}$ najmniejszym pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M_{\text{max}}| = |W_{\text{min}}|$.

**Droga i cykl Eulera**

Niech $G = (V,E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym, niekoniecznie prostym. Droga Eulera grafu $G$ to droga (krawędzie się nie powtarzają, wierzchołki mogą), która zawiera każdą krawędź $e \in E$. Cykl Eulera grafu $G$ to droga zamknięta (wierzchołek startowy jest taki sam jak końcowy), która zawiera każdą krawędź $e \in E$.

**Warunki istnienia drogi/cyklu Eulera**

Spójny graf $G$ posiada drogę Eulera wtw, gdy zawiera $0$ lub $2$ wierzchołki o stopniu nieparzystym. Spójny graf $G$ posiada cykl Eulera wtw, gdy wszystkie jego wierzchołki mają stopień parzysty. W grafie skierowanym warunkiem na istnienie cyklu Eulera jest taka sama liczba krawędzi wychodzących i wchodzących dla każdego wierzchołka.

Aby spójny graf skierowany miał drogę Eulera, muszą zachodzić:
1. dla dokładnie jednego wierzchołka jest $\deg_{\text{in}}(v) = \deg_{\text{out}}(v) + 1$,
2. dla dokładnie jednego wierzchołka jest $\deg_{\text{in}}(v) + 1 = \deg_{\text{out}}(v)$,
3. dla każdego innego niż dwa powyższe wierzchołki jest $\deg_{\text{in}}(v) = \deg_{\text{out}}(v)$.

**Ścieżka i cykl Hamiltona**

Niech $G = (V,E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym. Ścieżka Hamiltona grafu $G$ to ścieżka (wierzchołki się nie powtarzają), która zawiera każdy wierzchołek $v \in V$. Cykl Hamiltona grafu $G$ to cykl (wierzchołki się nie powtarzają), który zawiera każdy wierzchołek $v \in V$.

**Warunki istnienia drogi/cyklu Hamiltona**

Sprawdzenie, czy graf $G = (V,E)$ zawiera ścieżkę lub cykl Hamiltona jest problemem trudnym obliczeniowo - jest to problem NP-trudny.

**Warunki konieczne na istnienie cyklu Hamiltona**

Jeśli graf $G = (A \cup B, E)$ jest dwudzielny, to warunkiem koniecznym na istnienie cyklu Hamiltona jest $|A| = |B|$.

Jeśli graf $G = (V,E)$ zawiera cykl Hamiltona, to dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$, graf $G - S$ (powstały po usunięciu wierzchołków z $S$ wraz z incedyntnymi krawędziami) zawiera co najmniej $|S|$ spójnych składowych.

**Twierdzenie Diraca**

Jeśli graf $G = (V,E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G) \geq \frac{|V|}{2}$, to $G$ zawiera cykl Hamiltona.

**Twierdzenie Ore'a (albo Orego)**

Jeśli graf $G = (V,E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i takim, że dla każdych dwóch wierzchołków $u$ i $v$ niepołączonych krawędzią zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$, to $G$ zawiera cykl Hamiltona.

**Obliczanie najmniejszego wagowo cyklu Hamiltona**

Odległości między krawędziami zapisane są jako funkcja wagi $c : E \to R \geq 0$. Zakładamy, że skrót zawsze się opłaca, czyli $\forall u,v,w \in V : c(u,v) \leq c(u,w) + c(w,v)$. Niech $OPT$ oznacza sumaryczną długość optymalnej trasy. Wtedy $c(MST(G)) \leq OPT$.

Algorytm na obliczenie najmniejszego wagowo cyklu Hamiltona jest następujący:
1. Oblicz $MST(G)$.
2. Podwój $MST(G)$ otrzymując $T^2$.
3. Znajdź cykl Eulera $C_E$ podwojonego $MST(G)$, czyli $T^2$.
4. Skróć $C_E$ do cyklu Hamiltona.

Tak obliczona trasa ma wagę $\leq 2OPT$.

**Algorytm Christofidesa (najmniejszy wagowo cykl Hamiltona)**

1. Oblicz $MST(G)$.
2. Oblicz najmniejsze wagowo skojarzenie pełne $M$ na podgrafie zawierającym wierzchołki $V^-$, które mają stopień nieparzysty w $MST(G)$.
3. Znajdź cykl Eulera $C_E$ multigrafu $MST(G) + M$.
4. Skróć $C_E$ do cyklu Hamiltona.

Tak otrzymana trasa ma wagę $\leq \frac{3}{2}OPT$.

**Kolorowanie grafu**

Niech graf $G = (V,E)$ będzie grafem prostym. Kolorowaniem wierzchołkowym grafu $G$ nazywamy funkcję $f : V \to \text{Kolory}$ taką, że $\forall(u,v) \in E : f(u) \neq f(v)$. Liczba chromatyczna grafu $G$ (oznaczana $\chi(G)$) to najmniejsza liczba kolorów, jaką można pokolorować graf $G$.

**Własności liczby chromatycznej**

Przez $\omega(G)$ oznaczamy wielkość największej kliki zawartej w $G$. Wtedy $\chi(G) \geq \omega(G)$. $\Delta(G)$ to największy stopień wierzchołka w $G$. Wtedy $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

**Twierdzenie Brooksa**

Jeśli $G$ nie jest kliką ani nieparzystym cyklem, to $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

**Algorytm sekwencyjny kolorowania grafu**

Niech $\text{Kolory} = \{1,2,3,\ldots\}$ i $G = (V,E)$. Wtedy algorytmem sekwencyjnym jest:
1. Ustaw wierzchołki z $V$ w pewien ciąg.
2. Dla każdego wierzchołka $v$ w kolejności dyktowanej przez ciąg wykonaj: przypisz wierzchołkowi $v$ najmniejszą liczbę naturalną spośród takich, które nie są przypisane żadnemu sąsiadowi $v$.

**Graf planarny**

Graf $G$ jest planarny, gdy da się go narysować na płaszczyźnie w taki sposób, by żadne dwie krawędzie się nie przecinały.

**Rysunek grafu**

Łamana (linia wielokątna, linia łamana) to ciąg skończenie wielu odcinków, z których każdy zaczyna się tam, gdzie kończy poprzedni; poza tym żadne dwa odcinki nie mają punktów wspólnych.

Rysunek grafu $G = (V,E)$ na płaszczyźnie to funkcja różnowartościowa $f$ taka, że odwzorowuje każdy wierzchołek $v \in V$ na punkt $f(v)$ płaszczyzny oraz każdą krawędź $(u,v)$ na łamaną łączącą $f(u)$ z $f(v)$.

Mówimy, że rysunek nie ma przecięć, jeśli dla dowolnych dwóch krawędzi $e, e'$, $f(e) \cap f(e')$ może zawierać jedynie obrazy wspólnych końców $e$ i $e'$.

Graf $G$ jest planarny, jeśli posiada rysunek bez przecięć.

**Graf płaski**

Konkretny rysunek bez przecięć grafu $G$ nazywamy grafem płaskim.

Ściana takiego grafu to spójny obszar płaszczyzny po usunięciu linii reprezentujących krawędzie. Innymi słowy, ściana to zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą nieprzecinającą żadnej krawędzi. Granica ściany zawiera krawędzie styczne z tą ścianą. Długość granicy ściany to długość zamkniętej marszruty przechodzącej przez wszystkie krawędzie granicy tej ściany. Niech $f_i$ oznacza długość granicy $i$-tej ściany grafu planarnego $G = (V,E)$, a $l$ liczbę ścian $G$. Wtedy $\sum_{i=1}^{l} f_i = 2|E|$.

**Twierdzenie Jordana**

Zamknięta nieprzecinająca się łamana $C$ o skończonej liczbie odcinków dzieli płaszczyznę na dokładnie dwie ściany, z których każda ma $C$ jako granicę.

**Graf dualny**

Niech $G = (V,E)$ będzie grafem planarnym. Graf dualny $G*$ dla grafu płaskiego $G$ tworzy się następująco: dla każdej ściany (włącznie ze ścianą zewnętrzną) grafu $G$ dodajemy wierzchołek. Jeśli dwie ściany mają wspólną krawędź $e$, łączymy wierzchołki utworzone w poprzednim kroku odpowiednie dla sąsiadujących ścian krawędzią przecinającą tylko krawędź $e$. Graf dualny nie jest wyznaczony jednoznacznie (zależy od rysunku $G$).

**Wzór Eulera**

Niech $G$ będzie spójnym grafem planarnym (niekoniecznie prostym) o $n$ wierzchołkach, $m$ krawędziach i $f$ ścianach. Wówczas $n - m + f = 2$. Dla niespójnego grafu o $k$ spójnych składowych jest to wzór $n - m + f = k - 1$.

**Liczba krawędzi grafu planarnego**

Niech $G$ będzie prostym grafem planarnym o $n \geq 3$ wierzchołkach. Wówczas liczba krawędzi $m$ tego grafu nie przekracza $3n - 6$. Jeśli dodatkowo, $G$ nie zawiera żadnego trójkąta, to

Matematyka dyskretna (L) - cheatsheet
Autor: Tomasz Woszczyński, strona nr 4

$m \leq 2n - 4$.

**Grafy homeomorficzne**

Grafy $G$ i $H$ są homeomorficzne, gdy jeden można przekształcić do drugiego za pomocą skończonej liczby operacji następujących dwóch typów:
1. zamian krawędzi na ścieżkę o długości $2$, tj. w ten sposób dodajemy również jeden nowy wierzchołek,
2. zamiana ścieżki $P = (u, v, w)$ takiej, że $v$ ma stopień $2$ na krawędź $(u, w)$, jednocześnie usuwając $v$.

**Twierdzenie Kuratowskiego**

Graf $G$ jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z $K_{3,3}$ lub $K_5$.

**Twierdzenie Heawooda**

Każdy graf planarny jest $5$-kolorowalny.

**Sieć, przepływ w sieci**

Sieć to graf skierowany (digraf) $D = (V, E)$ z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami $s, t \in V$ zwanymi źródłem i ujściem i funkcją przepustowości $c : E \to R \geq 0$ na krawędziach. Niech $f : E \to R$, dla $v \in V$ definujemy $f^+(v) = \sum_{e=(v,w):e\in E, w\in V} f(v, w)$ oraz $f^-(v) = \sum_{e=(w,v):e\in E, w\in V} f(w, v)$.

Funkcja $f$ jest przepływem, jeśli spełnia warunki przepustowości $\forall e \in E : \; 0 \leq f(e) \leq c(e)$ oraz jeśli spełnia warunek zachowania przepływu: $\forall v \in V\{s, t\} : \; f^+(v) = f^-(v)$. Wartość przepływu $f$, oznaczana jako $|f|$ to $f^-(t) - f^+(t)$.

**Ścieżka powiększająca**

Ścieżka powiększająca $P$ dla przepływu $f$ to ścieżka postaci $(s = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, t = v_{k+1})$ taka, że:
$\forall 0 \leq i \leq k : \; e_{i+1} \in E \wedge (e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \vee e_{i+1} = (v_{i+1}, v_i)$,
$\forall 0 \leq i \leq k : \; e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \implies f(e_{i+1}) < c(e_{i+1})$ (krawędź w przód),
$\forall 0 \leq i \leq k : \; e_{i+1} = (v_{i+1}, v_i) \implies f(e_{i+1}) > 0$ (krawędź w tył).
Luz ścieżki powiększającej $P$ to minimum z dwóch minimów: $\min\{c(e) - f(e)\}$ po wszystkich krawędziach w przód ścieżki oraz $\min\{f(e)\}$ po wszystkich krawędziach wstecznych.

**Zastosowanie ścieżki powiększającej**

Weźmy ścieżkę powiększającą $P$ taką jak powyżej dla przepływu $f$ o luzie $\epsilon$. Zastosować $P$ do przepływu $f$ oznacza funkcję $f'$ taką, że:
1. dla $e \in E \setminus P : f'(e) = f(e)$,
2. dla $e \in P$ w przód: $f'(e) = f(e) + \epsilon$,
3. dla $e \in P$ wstecznej: $f'(e) = f(e) - \epsilon$.

Lemat: $f'$ jest przepływem takim, że $|f'| = |f'| + \epsilon$.

**Algorytm Forda-Fulkersona**

Niech $D = (V, E)$ będzie digrafem spójnym, $c : E \to R \geq 0$, $s, t \in V$ oraz $\forall e \in E : \; f(e) \leftarrow 0$. Wtedy algorytm jest taki:
Dopóki istnieje ścieżka powiększająca $P$ dla $f$, wykonaj:
1. zastosuj $P$ do $f$, otrzymując $f'$,
2. $f \leftarrow f'$.

**Algorytm znajdowania ścieżki powiększającej**

1. $R \leftarrow \{s\}$.
2. Dopóki można, wykonuj:
2.1. Jeśli istnieje krawędź $e = (u, v) : u \in R, v \notin R, f(e) < c(e)$, to dodaj $v$ do $R$.
2.2. Jeśli istnieje krawędź $e = (v, u) : u \in R, v \notin R, f(e) > 0$, to dodaj $v$ do $R$.
Jeżeli $R$ zawiera $t$, to znaczy, że istnieje ścieżka powiększająca $P$ dla $f$.

**Przepustowość przekroju**

$[S, T]$ to $s - t$ przekrój, jeśli $s \in S, t \in T, S \cup T = V, S \cap T = \emptyset$. Przepustowość przekroju:
$c([S, T]) = \sum_{e=(u,v)\in E: \; u\in S, v\in T} c(e)$.

Lemat: Niech $U \subset V$. Wtedy $f^+(U) - f^-(U) = \sum_{v \in V} f^+(v) - f^-(v)$.

Dla dowolnego $s - t$ przekroju $[S, T]$ zachodzi $|f| \leq c([S, T])$.

**Maksymalny przepływ, minimalne cięcie**

Twierdzenie: przepływ $f$ obliczony przez algorytm Forda-Fulkersona ma wartość równą przepustowości pewnego $s - t$ przekroju. Zatem jest maksymalny.

Przepływ całkowitoliczbowy: jeśli przepustowość każdej krawędzi w sieci jest liczbą całkowitą, to istnieje przepływ $f$ maksymalny, który jest całkowitoliczbowy.

**Zastosowania przepływów**

Są to między innymi znajdowanie największego skojarzenia w grafach dwudzielnych, jak i znajdowanie największego $b$-skojarzenia w grafach dwudzielnych.

Niech $b : V \in N$. Wtedy $M \subseteq E$ jest $b$-skojarzeniem, jeśli $\forall v \in V : \; \deg_M(v) \leq b(v)$ (liczba krawędzi z $M$ incydentna do $v$ nie przekracza $b(v)$).