Wyznacznik macierzy – definicja i własności

Autorzy:

Agnieszka Kowalik

2019

AGH E-PODRĘCZNIKI

Wyznacznik macierzy - definicja i własności

Autor: Agnieszka Kowalik

DEFINICJA

Definicja 1: Definicja wyznacznika

Z każdą macierzą kwadratową A związana jest liczba (rzeczywista lub zespolona) nazywana **wyznacznikiem macierzy** A , oznaczana symbolem

$$\det A$$

. Wyznacznik definiujemy indukcyjnie, w następujący sposób:

1. jeżeli macierz $A = (a_{11})$ jest stopnia 1, to $\det A = a_{11}$;::
2. jeżeli macierz $A = (a_{ij})$ jest stopnia n, gdzie $n > 1$, to

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1},$$

gdzie

$$A_{i1}$$

oznacza podmacierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy

$$A$$

poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz pierwszej kolumny.

Wyznacznik macierzy będziemy również oznaczać, stosując następujący zapis:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Warto zapamiętać, że wyznaczniki liczymy **tylko** dla macierzy kwadratowych.

PRZYKŁAD

Przykład 1:

Zgodnie z definicją, wyznacznikiem macierzy składającej się z jednego elementu jest wartość tego elementu, tj.

$$\det(7) = 7$$
$$|-27| = -27.$$

PRZYKŁAD

Przykład 2:

Obliczmy wyznacznik macierzy stopnia 2. Niech zatem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z definicją obliczamy

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot 2 + (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot (-1) = 7.$$

W przypadku obliczania wyznaczników macierzy stopnia 2 można zastosować prostszą metodę mnożenia .

PRZYKŁAD

Przykład 3:

Zajmijmy się następnie obliczeniem wyznacznika macierzy stopnia 3. Mamy daną macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mamy:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det A_{11} + (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \det A_{21} + (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot A_{31}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \det A_{11} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2, \\ \det A_{21} &= \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \det A_{31} &= \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \end{aligned}$$

skąd ostatecznie
$\det A = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-1)^3 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1)^4 \cdot 3 \cdot 3 = -4 + 9 = 5.$

W przypadku obliczania wyznaczników macierzy stopnia 3 można zastosować prostszą metodę tzw.

TWIERDZENIE

Twierdzenie 1: Własności wyznacznika macierzy

Niech A będzie macierzą kwadratową.

1. Jeżeli macierz A zawiera wiersz (kolumnę) składającą się z samych zer, to $\det A = 0$;
2. Jeżeli zamienimy miejscami dwa wiersze (kolumny) macierzy A, to wyznacznik zmieni znak na przeciwny;
3. Jeżeli macierz A zawiera dwa jednakowe wiersze (kolumny), to $\det A = 0$;
4. Jeżeli do każdego z elementów pewnego wiersza (kolumny) macierzy A dodamy pomnożone przez tę samą liczbę odpowiednie elementy innego wiersza (kolumny) tej macierzy (tj. dodajemy elementy leżące w tych samych kolumnach (wierszach)), to wyznacznik macierzy A nie zmieni się.
   Ogólnie, wyznacznik macierzy A nie zmieni się, jeżeli do pewnego wiersza (kolumny) tej macierzy dodamy kombinację liniową innych wierszy (kolumn) macierzy A;
5. Jeżeli wszystkie elementy pewnego wiersza (kolumny) macierzy A pomnożymy przez liczbę α, to wyznacznik otrzymanej macierzy będzie równy $\alpha \cdot \det A$;
6. Transpozycja macierzy A nie zmienia jej wyznacznika, tj. $\det A = \det A^T$;
7. Jeżeli macierze A i B są tych samych stopni, to

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \qquad \text{(}\textbf{prawo Cauchy'ego}\text{)}.$$

PRZYKŁAD

Przykład 4:

Obliczmy wyznacznik macierzy

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&2&3&4&5\\0&0&3&4&5\\0&0&0&4&5\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}.$$

Mamy:

$$\det A=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}2&3&4&5\\0&3&4&5\\0&0&4&5\\0&0&0&5\end{pmatrix},$$

skąd

$$\det A=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix}3&4&5\\0&4&5\\0&0&5\end{pmatrix}=\ldots$$

i dalej analogicznie

$$\ldots=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot 2\cdot(-1)^{3+3}\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix}4&5\\0&5\end{pmatrix}=$$
$$(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot 2\cdot(-1)^{3+3}\cdot 3\cdot(-1)^{4+4}\cdot 4\cdot(-1)^{5+5}\cdot 5$$

,

skąd ostatecznie otrzymujemy

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&2&3&4&5\\0&0&3&4&5\\0&0&0&4&5\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$$

Powyższy przykład ilustruje następujące

TWIERDZENIE

Twierdzenie 2: Wyznacznik macierzy trójkątnej

Wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów leżących na głównej przekątnej.

Jest to podstawowy fakt z teorii macierzy, wyznaczników i układów równań liniowych. Stanowi on podstawę dla tzw. metody Gaussa.

Autor: Agnieszka Kowalik