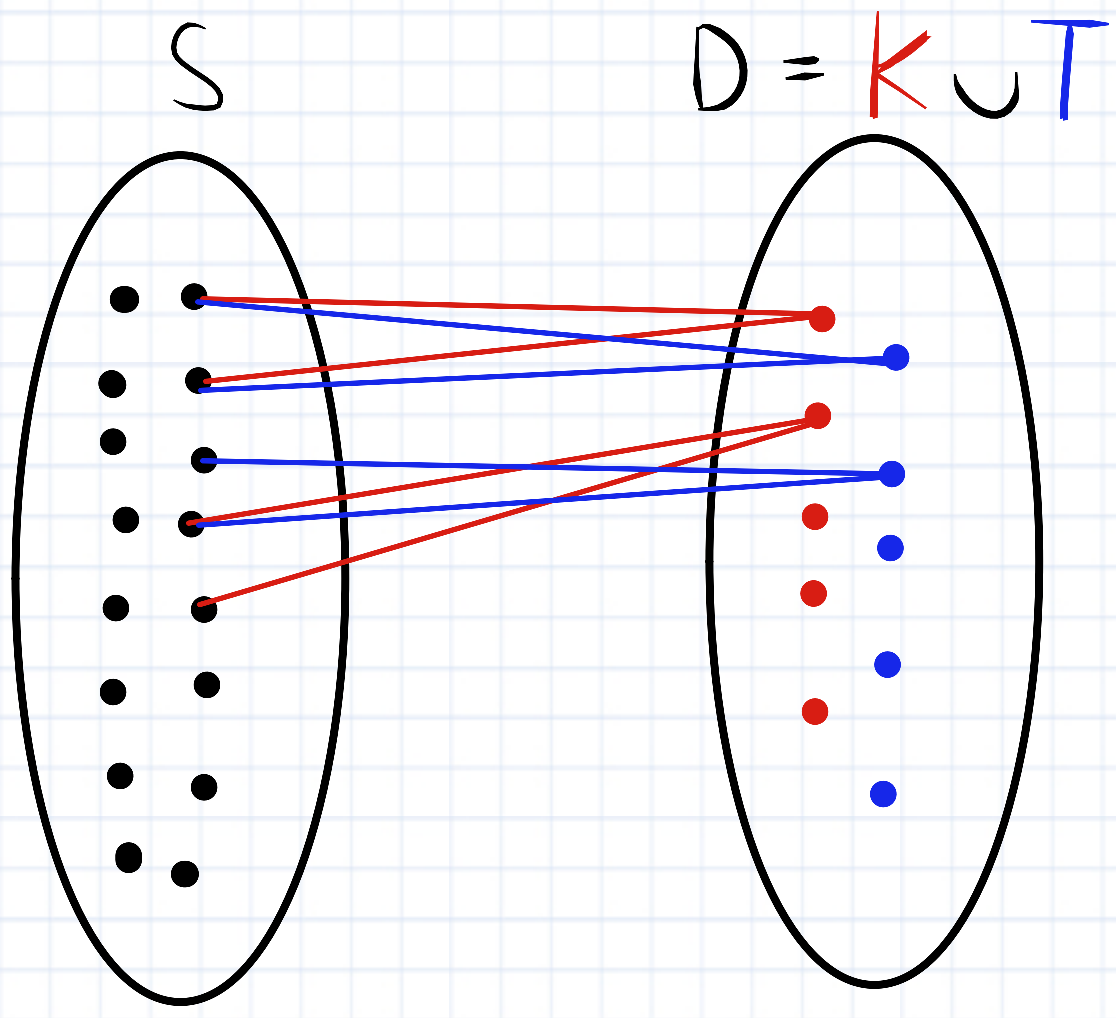
Z 9

K – koła

T – towarzystwa



Załóżmy, że warunek Halla nie zachodzi, czyli że

$$\exists_{D' \subseteq D} \; |N(D')| < |D'|$$

Szacujemy $|N(D')| \geq \left\lceil \frac{|D'|}{2} \right\rceil \cdot k \geq \frac{|D'|}{2} \cdot k$

Z każdego wierzchołka D wychodzi k krawędzi. Żadne dwie krawędzie tego samego koloru nie mogą wchodzić do tego samego wierzchołka w S. Zatem dla parzystej liczby wierzchołków z D mamy co najmniej połowę maksymalnej liczby sąsiadów.

Podstawmy to oszacowanie do założenia $|N(D')| < |D'|$

$$\frac{|D'|}{2} \cdot k < |D'|$$

$$k|D'| - 2|D'| < 0$$

$$(k-2)\,|D'| < 0$$

zawsze dodatnie

Zatem to musiałoby być prawdą

$$(k-2) < 0$$

Ale z treści zadania wiemy, że $k \geq 2$

Sprzeczność z założeniem!

(czyli istnieje skojarzenie D-doskonałe)