Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2020

3 osobników leśnych

Trzej zawzięci wrogowie X, Y, Z mieszkają w lesie. Każdy z nich chce poprowadzić ścieżkę do gazu, wody i elektryczności (każdy z tych trzech zasobów jest w jednym miejscu). Czy istnieje taki sposób poprowadzenia tych 9 sciezek, by żadne dwie się nie przecinały?

3 osobników leśnych

Trzej zawzięci wrogowie X, Y, Z mieszkają w lesie. Każdy z nich chce poprowadzić ścieżkę do gazu, wody i elektryczności (każdy z tych trzech zasobów jest w jednym miejscu). Czy istnieje taki sposób poprowadzenia tych 9 scieżek, by żadne dwie się nie przecinały?

Innymi słowy: czy da się narysować graf $K_{3,3}$ na płaszczyźnie tak, by żadne dwie krawędzie się nie przecinały?

Graf planarny

Graf G jest planarny, gdy da się go narysować na płaszczyźnie w taki sposób, by żadne dwie krawędzie się nie przecinały.

Co to znaczy narysować graf na płaszczyźnie?

Rysunek grafu

Łamana (linia wielokątną, linia łamana) to ciąg skończenie wielu odcinków, z których każdy zaczyna się tam, gdzie poprzedni kończy; poza tym żadne dwa odcinki nie mają punktów wspólnych.

Rysunek grafu $G = (V, E)$ na płaszczyźnie to funkcja różnowartościowa f:

1. odwzorowująca każdy wierzchołek $v \in V$ na punkt $f(v)$ płaszczyzny oraz
2. każdą krawędź (u, v) na łamaną łączącą $f(u)$ z $f(v)$.

Mówimy, że rysunek nie ma przecięć, jeśli dla dowolnych dwóch krawędzi e, e' $f(e) \cap f(e')$ może zawierać jedynie obrazy wspólnych konców e i e'.

Graf G jest planarny, jeśli posiada rysunek bez przecięć.
Konkretny rysunek bez przecięć grafu G nazywamy grafem płaskim.

Graf płaski

Ściana w grafie płaskim G to spójny obszar płaszczyzny po usunięciu linii reprezentujących krawędzie. Innym słowy, ściana to zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą nieprzecinającą żadnej krawędzi.

Granica ściany zawiera krawędzie styczne z tą ścianą.
Długość granicy ściany to długośc zamkniętej marszruty przechodzącej przez wszystkie krawędzie granicy tej ściany.

Niech f_i oznacza długość granicy i-tej ściany grafu planarnego $G = (V, E)$, a l liczbę ścian G. Wtedy:
$\sum_{i=1}^{l} f_i = 2|E|$.

Twierdzenie Jordana

Twierdzenie Jordana

Zamknięta nieprzecinająca się łamana C o skończonej liczbie odcinków dzieli płaszczyznę na dokładnie dwie ściany, zktórych każda ma C jako granicę.

Graf dualny

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem planarnym. Graf dualny $G*$ dla grafu płaskiego G tworzy się następująco:

- Dla każdej ściany (włącznie z ścianą zewnętrzną) grafu G dodajemy wierzchołek.
- Jeśli dwie ściany mają wspólną krawędź e, łączymy wierzchołki utworzone w poprzednim kroku odpowiednie dla sąsiadujących ścian krawędzią przecinającą tylko krawędź e.

Graf dualny grafu planarnego G nie jest wyznaczony jednoznacznie - zależy od rysunku G.

Wzór Eulera

Wzór Eulera

Niech G będzie spójnym grafem planarnym (niekoniecznie prostym) o n wierzchołkach, m krawędziach i f ścianach. Wówczas $n - m + f = 2$.

Krawędzie w grafie planarnym

Liczba krawędzi grafu planarnego

Niech G będzie prostym grafem planarnym o $n \geq 3$ wierzchołkach. Wówczas iczba krawędzi m tego grafu nie przekracza $3n - 6$. Jeśli dodatkowo, G nie zawiera żadnego trójkąta, to $m \leq 2n - 4$.

Grafy homeomorficzne

Grafy G i H są homeomorficzne, gdy jeden można przekształcić do drugiego za pomocą skończonej liczby operacji następujących dwóch typów:

1. zamian krawędzi na ścieżkę o długości 2, tj. w ten sposób dodajemy również jeden nowy wierzchołek,
2. zamiana ścieżki $P = (u, v, w)$ takiej, że v ma stopień 2 na krawędź (u, w), jednocześnie usuwając v.

Twierdzenie Kuratowskiego

Twierdzenie Kuratowskiego [1930]

Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z $K_{3,3}$ lub K_5.

Kolorowanie grafu planarnego

Twierdzenie Heawooda [1890]

Każdy graf planarny jest 5-kolorowalny.