Z12

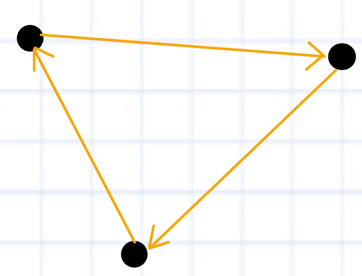
$T_n :=$ graf o n wierzchołkach taki, że

$$\forall_{v \in V(T_k)} \quad outdeg(v) = indeg(v) = \frac{n-1}{2}$$

Pokażmy, że dla każdego $n = 2k+1$ istnieje T_n

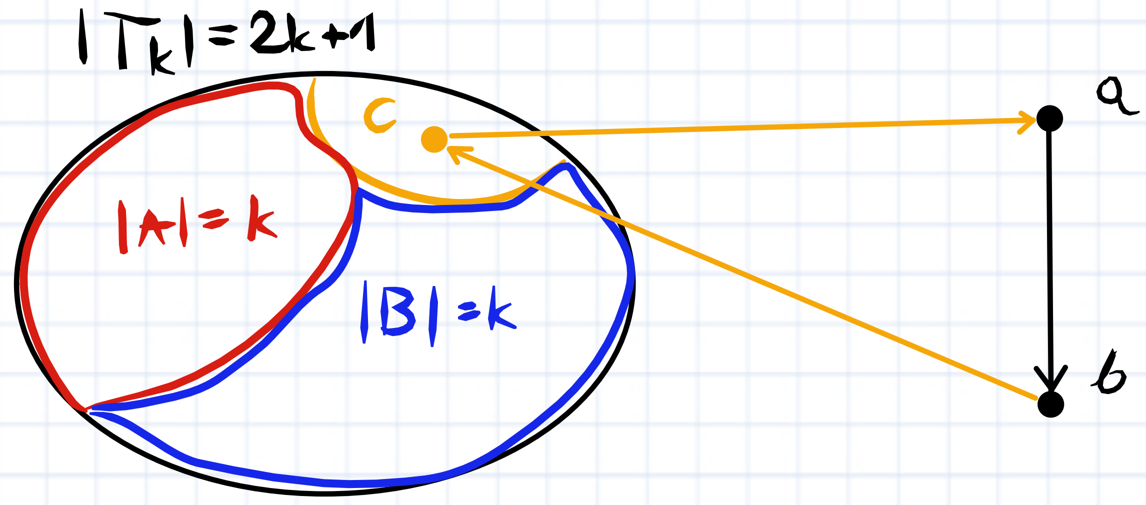
<u>Indukcja po k</u>:

- Baza ($k=1$)



- Krok ($\exists T_{2k+1} \Rightarrow \exists T_{2k+3}$):
  ($n = 2k+3$)

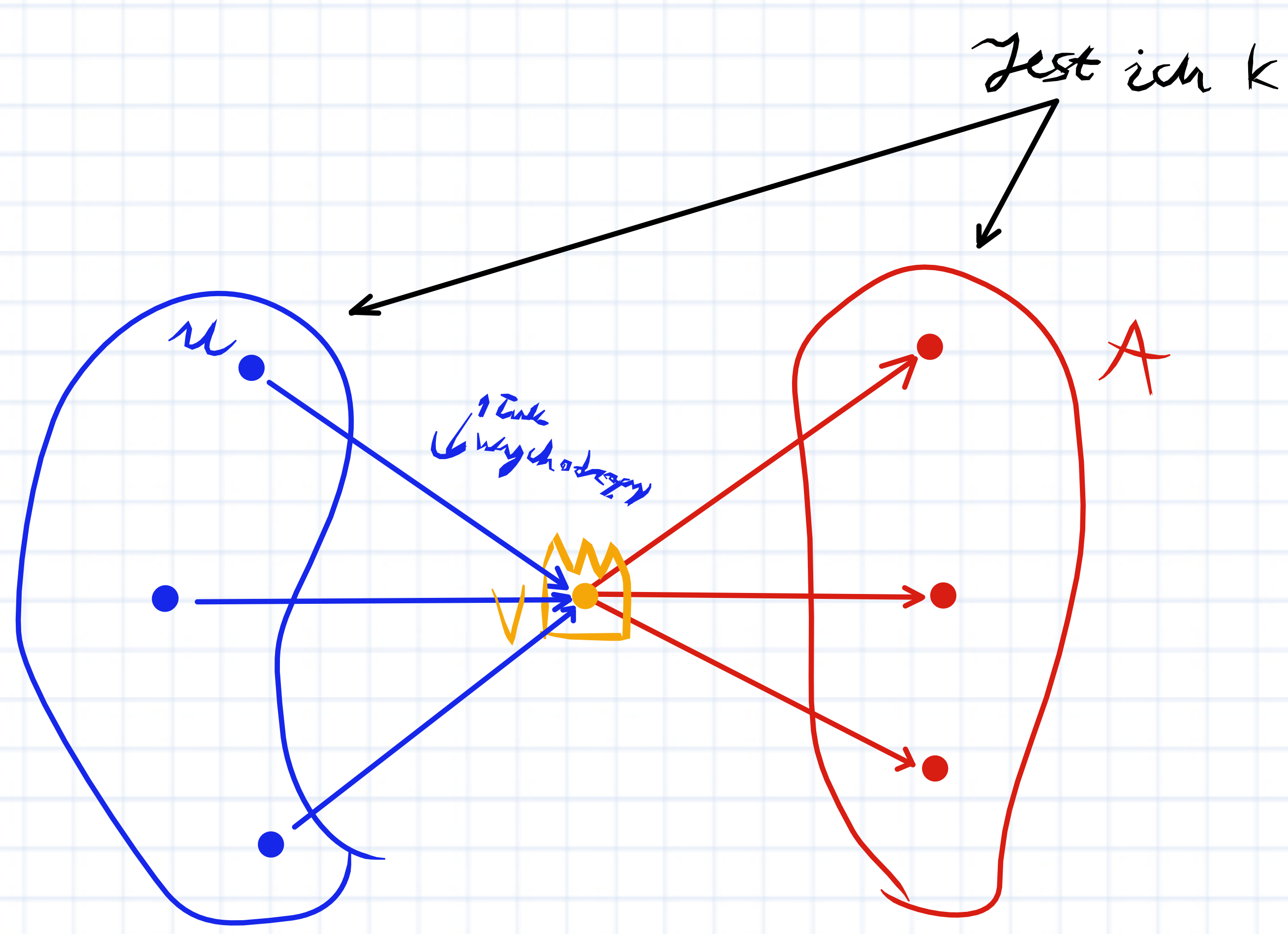
$|T_k| = 2k+1$



Wyróżnijmy wierzchołek c ze zbioru Tk.
Prowadzimy łuki c do a oraz z b do c.
Następnie dzielimy zbiór (Tk - c) na dwie równe części (każda po k).
Po czym prowadzimy łuki z każdego wierzchołka w A do a oraz od b.
Dla wszystkich wierzchołków w zbiorze B prowadzimy łuki do b oraz od a.

Zauważmy, że dla każdego wierzchołka v deg(v)=k+1.
(Wszystkie wierzchołki z A i B dostały po jednym łuku wchodzącym i wychodzącym. Wierzchołki a i b dostały po k wchodzących i wychodzących łuków)

Pokażmy, że w turnieju T_n ($n = 2k+1$) każdy wierzchołek jest królem



Weźmy dowolny wierzchołek v należący do Tk, dowolny inny u, do którego v nie ma wchodzącego łuku oraz zbiór A wierzchołków o bezpośrednich łukach wchodzących do v. Zauważmy, że |A|=k oraz, że u ma łuk wychodzący od któregoś z wierzchołków A. Gdyby tak nie było to u ma k+1 łuków wychodzących (po jednym na każdy z ka wierzchołków w A oraz, jak wiadomo, łuk do v).
Wybierzmy zatem wierzchołek z A, z kórego prowadzi łuk wchodzący do u, nazwijmy ten wierzchołek a.
Zauważmy, że możemy wtedy przejść ścieżką (v, a, u). Ta ścieżka jest długości 2.
Oczywiście, jako że wszystkie wierzchołki z A są bezpośrednio osiągalne z v to można do nich dojść ścieżką długości 1.
Zatem v jest królem.