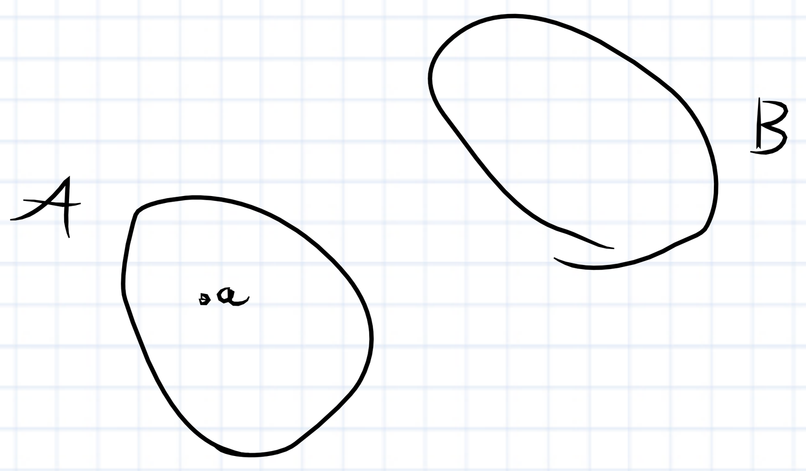
Z2

MPC := minimalne parzyste cięcie

Pokażmy, że każde minimalne cięcie to MPC <=> istnieje cykl Eulera.

1) Każde minimalne cięcie to MPC <= istnieje cykl Eulera:

Weźmy dowolne cięcie minimalne dzielące graf na części A i B. Wyróżnijmy wierzchołek $a \in A$.



a tak jak każdy wierzchołek należy do cyklu Eulera stąd wnioskujemy, że przechodząc do części B musimy być w stanie ewentualnie wrócić do a i zamknąć cykl. Zatem każdej krawędzi wchodzącej (z perspektywy cyklu) do B musi towarzyszyć krawędź wychodząca, czyli jest ich parzyście wiele. To znaczy, że cięcie jest parzyste.

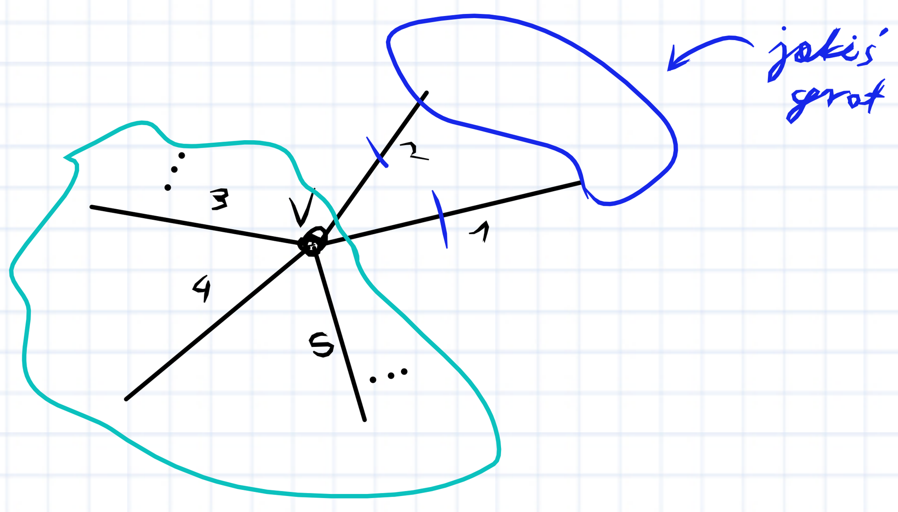
2) Każde minimalne cięcie to MPC => istnieje cykl Eulera:

> Skorzystam z faktu
>
> istnieje cykl Eulera <=> stopnie wszystkich wierzchołków są parzyste

Dowód nie wprost (Zał: Każde minimalne cięcie to MPC $\wedge$ $\neg$ stopnie wszystkich wierzchołków są parzyste)

Weźmy wierzchołek V taki, że $\deg(v) = 2k+1$.

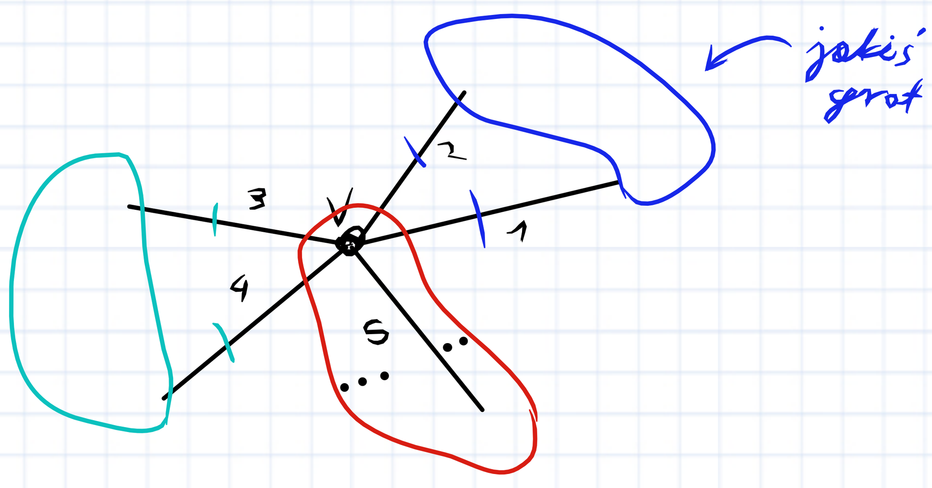
Wiemy, że jakiś podzbiór krawędzi v jest minimalnym cięciem (np. możemy usunąć wszystkie krawędzie i to jest cięcie).
Przyjrzyjmy się dowolnemu MPC krawędzi $\{1,2,3,4,5,\dots,2k+1\}$
(jeśli go nie ma to trywialnie $\{1,2,3,4,5,\dots,2k+1\}$ to minimalne cięcie co daje sprzeczność)



(Jeśli $\{1,2\}$ to MPC)

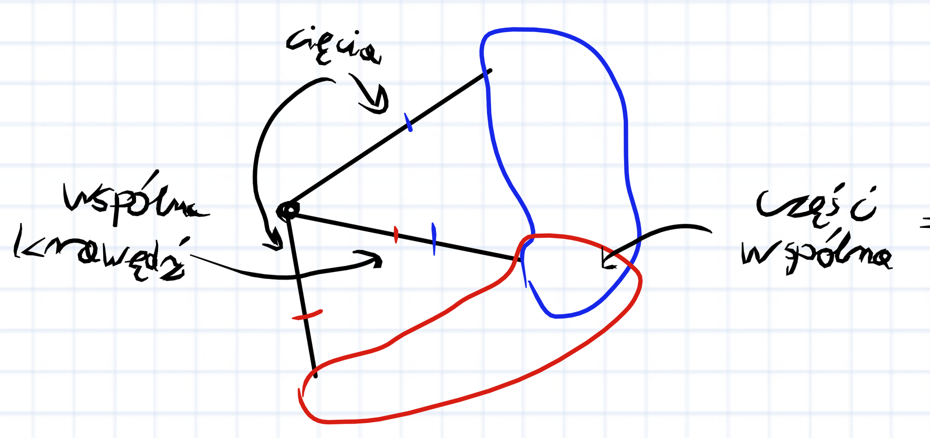
Zauważmy, że $\{3,4,5,\dots,2k+1\}$ to również cięcie.

Wybierzmy dowolne MPC z tego zbioru.



Możemy tak rekurencyjnie schodzić aż zostanie nieparzysty zbiór krawędzi niezawierający MPC, wtedy ten zbiór jest minimalnym cięciem.

Co więcej możemy powiedzieć, że usuwamy wszystkie MPC zbioru $\{1,2,\dots,2k+1\}$, ponieważ MPC są parami rozłączne, → Lemat niżej
zbiór $\{1,2,\dots,2k+1\}$ jest nieparzysty, więc odejmując dowolną parzystą liczbę krawędzi otrzymujemy nieparzystą liczbę krawędzi stanowiące minimalne cięcie (jeśli by tak nie było to wierzchołki odpowiadające pozostałym krawędziom musiały by należeć, do którejś części odseparowanej MPC-em od wierzchołka v. jeśli tak to nie mogło to być MPC bo nie zawierało tych krawędzi)

> **Lemat** (Minimalne cięcia są parami rozłączne)
>
> Dowód nie wprost (Zł: istnieją cięcia o wspólnych krawędziach)
>
> 
>
>
> => i to nie cięcia (bo nie rozspójniają grafu)
> Sprzeczność.