Z1

Weźmy optymalnie pokolorowany graf $G=(V,E)$.
Podzielmy jego wierzchołki na podzbiory P_k, w których wszystkie wierzchołki są koloru k $(k \in \{1,2,3,\dots,\chi(G)\})$.

Przyjmijmy kolejność kolorowania $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_{\chi(G)})$ i pokażmy, że jest ona optymalna.

Kolorując P_k kolorujemy jego wierzchołki (dowolna kolejność).
Zauważmy, że tym sposobem pokolorujemy wierzchołki P_k na kolor k.
Gdyby tak nie było (P_k jest różnokolorowe) to by znaczyło, że istnieje $v \in P_k$ taki, że kolor$(v) < k$ (nie może być większy, bo algorytm wybiera kolor najmniejszy możliwy, czyli co najwyżej k, gdyż wiemy, że da się pokolorować P_k w całości na k).
Weźmy wierzchołek o najmniejszym kolorze w P_k.
Nazwijmy ten kolor $\tilde{k}$. Wiemy, że $\tilde{k} < k$ oraz, że wierzchołki w P_k nie są wzajemnie połączone krawędziami.
Skoro tak to znaczy, że można je wszystkie pokolorować na kolor $\tilde{k}$ (niekoniecznie algorytmem) co przeczy założeniu o optymalnym kolorowaniu G (mogło to nam wyeliminować jeden z $\chi(G)$ kolorów).
Zatem kolorując G algorytmem sekwencyjnym w kolejności $(P_1, P_2, \dots, P_{\chi(G)})$ otrzymamy $\chi(G)$-kolorowy graf, który jak wiemy jest pokolorowany optymalnie.

Created with IDroo.com