RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA, WYDZIAŁ ELEKTRONIKI (26 V 2021)

LISTA 5. DWUWYMIAROWE ZMIENNE LOSOWE

1. Rozkład zmiennej losowej (X, Y) zadany jest tabelką

X\ Y	1	2	6	9
2	0,1	0,1	0,1	0,1
4	0,1	0	0	0,3
6	0	0.1	0	0,1

   Wyznacz rozkłady brzegowe. Czy zmienne X i Y są niezależne? Jakie wartości należy wpisać w powyższą tabelkę, aby zmienne X i Y o wyliczonych rozkładach brzegowych były niezależne?

2. Rozkład zmiennej losowej (X, Y) jest absolutnie ciągły z gęstością $f_{(X,Y)}(x, y) = 1/4$, gdy tylko $|x| < 1$ oraz $|y| < 1$. W pozostałych przypadkach $f_{(X,Y)}(x, y) = 0$. Wyznacz gęstości brzegowe. Czy X i Y są niezależne?

3. Rozkład zmiennej losowej (X, Y) zadany jest poniższą tabelką.

X\ Y	-1	0	1	2
-1	0,2	0,1	0	0,1
0	0,1	0	0,2	0,1
1	0,1	0	0	0,1

   Wyznacz rozkłady brzegowe zmiennych X i Y oraz macierz kowariancji wektora (X, Y). Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

4. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady jednostajne na odcinku $[0, 1]$. Wyznacz rozkład łączny wektora (X, Y), a następnie oblicz $\mathbb{P}(X \leqslant Y \leqslant \frac{1}{2})$ oraz $\mathbb{E}(Xe^{XY})$.

5. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład absolutnie ciągły z gęstością

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} x + y \quad , & \text{gdy } x \in [0, 1], y \in [0, 1], \\ \quad 0 \quad\;\; , & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

   Wyznacz rozkłady brzegowe, ich wartości oczekiwane oraz wariancje. Wyznacz macierz kowariancji wektora (X, Y). Czy zmienne X i Y są niezależne?

6. Moc prądu zadana jest wzorem $W = I^2R$, gdzie I oznacza natężenie prądu zaś R oznacza jego opór. Zakładamy, że I oraz R są niezależnymi zmiennymi losowymi o gęstościach

$$\begin{aligned} f_I(x) &= 6x(1 - x), \quad x \in [0, 1], \\ f_R(y) &= 2y, \quad y \in [0, 1]. \end{aligned}$$

   Wyznacz $\mathbb{E}W$ oraz $\mathbb{E}W^2$.

7. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 3$, zaś Y ma rozkład normalny $N(3, 4)$. Wyznacz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej $Z = 4X - 5Y + 6$.

8. Uzasadnij, że dla dowolnych zmiennych losowych X i Y zachodzi

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}X + \mathbb{V}\mathrm{ar}Y + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y).$$

9. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 4$ oraz $Y = 2X + Z$, gdzie Z jest niezależną od X zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego $B(10, 1/2)$. Wyznacz $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$.