Lista nr 10 z matematyki dyskretnej

1. Przypuśćmy, że w grafie G wszystkie wagi krawędzi są różne. Pokaż, nie używając żadnego algorytmu, że G zawiera tylko jedno minimalne drzewo rozpinające.

2. Niech T będzie MST grafu G. Pokaż, że dla dowolnego cyklu C grafu G drzewo T nie zawiera jakiejś najcięższej krawędzi z C.

3. (-) Czy poniższy algorytm zawsze znajduje MST w grafie spójnym G?

   Załóżmy, że krawędzie grafu są posortowane wg wag: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$. Dla każdej krawędzi o indeksie i w kolejności od m do 1 wykonaj następujące: jeśli wyrzucenie e_i nie rozspaja G, wyrzuć e_i z G.

4. Udowodnij, że algorytm Prima znajdowania MST działa poprawnie.

5. Założmy, że wszystkie krawędzie w grafie mają różne wagi. Udowodnij, że algorytm Boruvki rzeczywiście znajduje drzewo rozpinające, tzn. pokaż, że w żadnej iteracji nie powstaje cykl.

6. Jak zmodyfikować algorytm Boruvki, by działał również w grafach, w których jakieś krawędzie mają takie same wagi?

7. Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym, a M i N jego dwoma skojarzeniami. Pokaż, że istnieje skojarzenie M' takie, że każdy wierzchołek $a \in A$ skojarzony w M jest również skojarzony w M' oraz każdy wierzchołek $b \in B$ skojarzony w N jest również skojarzony w M'.

8. Pokaż jak znaleźć największe skojarzenie w drzewie T.

9. (-) Udowodnij lub obal: Jeśli T jest minimalnym drzewem spinającym grafu G, to ścieżka łącząca wierzchołki u i v w drzewie T jest minimalną wagowo ścieżką między u i v w grafie G.

10. W pewnej grupie muzykujących osób Ania gra na skrzypcach, harfie, kontrabasie i wiolonczeli, Bartek gra na harfie i fortepianie, Cezary gra

na fortepianie, Dąbrówka gra na harfie i Elwira gra na kontrabasie, skrzypcach, wiolonczeli i harfie.

Chcieliby zagrać utwór na fortepian, skrzypce, wiolonczelę, kontrabas i harfę. Czy uda im się dobrać skład?

11. Opracuj algorytm znajdowania ścieżki powiększającej w grafie dwudzielnym.