http://www.ii.uni.wroc.pl/~pwo/An/an-L-lista-08.pdf

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 8

25 listopada 2020 r.

Zajęcia 1 grudnia 2020 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L8.1. 1 punkt Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

a)

x_k	0	2	4
y_k	-8	8	-8

,

b)

x_k	-1	$-1/2$	$1/2$	1
y_k	4	2	-6	-24

.

L8.2. 1 punkt Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 18x + 13 & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ -5x^3 - 12x^2 + 7 & \text{dla} \quad -1 \le x \le 0, \\ 5x^3 - 12x^2 + 7 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ -x^3 + 6x^2 - 18x + 13 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest naturalną interpolacyjną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

L8.3. 1 punkt Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2020x & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1, \\ -2020x & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest naturalną interpolacyjną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

L8.4. 1 punkt Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ spełniają układ równań

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1}$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

L8.5. 2 punkty Niech będzie `x`$:=[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$, `y`$:=[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz `z`$:=[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ $(0 \le k \le n)$. W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor `Z` $:= [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję f. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich miejsc w przedziale $[x_0, x_{100}]$, w których funkcja f ma ekstrema lokalne.

L8.6. **Włącz komputer!** 2 punkty Niech s_x i s_y będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 95),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{95}$ $(k = 0, 1, \ldots, 95)$, natomiast

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{95}] := [5.5, 8.5, 10.5, 13, 17, 20.5, 24.5, 28, 32.5, 37.5, 40.5, 42.5, 45, 47, 49.5, 50.5, 51, 51.5, 52.5, 53, 52.8, 52, 51.5, 53, 54, 55, 56, 55.5, 54.5, 54, 55, 57, 58.5, 59, 61.5, 62.5, 63.5, 63, 61.5, 59, 55, 53.5, 52.5, 50.5, 49.5, 50, 51, 50.5, 49, 47.5, 46, 45.5, 45.5, 45.5, 46, 47.5, 47.5, 46, 43, 41, 41.5, 41.5, 41, 39.5, 37.5, 34.5, 31.5, 28, 24, 21, 18.5, 17.5, 16.5, 15, 13, 10, 8, 6, 6, 6, 5.5, 3.5, 1, 0, 0, 0.5, 1.5, 3.5, 5, 5, 4.5, 4.5, 5.5, 6.5, 6.5, 5.5],$$

$$[y_0, y_1, \ldots, y_{95}] := [41, 40.5, 40, 40.5, 41.5, 41.5, 42, 42.5, 43.5, 45, 47, 49.5, 53, 57, 59, 59.5, 61.5, 63, 64, 64.5, 63, 61.5, 60.5, 61, 62, 63, 62.5, 61.5, 60.5, 60, 59.5, 59, 58.5, 57.5, 55.5, 54, 53, 51.5, 50, 50, 50.5, 51, 50.5, 47.5, 44, 40.5, 36, 30.5, 28, 25.5, 21.5, 18, 14.5, 10.5, 7.50, 4, 2.50, 1.50, 2, 3.50, 7, 12.5, 17.5, 22.5, 25, 25, 25, 25.5, 26.5, 27.5, 27.5, 26.5, 23.5, 21, 19, 17, 14.5, 11.5, 8, 4, 1, 0, 0.5, 3, 6.50, 10, 13, 16.5, 20.5, 25.5, 29, 33, 35, 36.5, 39, 41].$$

Opracuj **własną implementację** wyznaczania naturalnej interpolacyjnej funkcji sklejanej trzeciego stopnia. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \ldots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, M)$, a M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?

L8.7. **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 20 grudnia; do 8 punktów) [1]

Jest rok 2284. Autonomiczny latający dron *Floty Naukowej* został wysłany na misję do puszczy na odległej planecie, aby zbierać dokumentację o lokalnej faunie i florze. Na polanach tej puszczy żyje rdzenna ludność o mniej zaawansowanym poziomie rozwoju kulturalnego i technologicznego. *Podstawowa Zasada Badawcza Floty Naukowej* (nazywana dalej *PZB*) zakazuje zakłócania ewolucji kulturowej innych gatunków. Takim zakłóceniem niewątpliwie byłoby pojawienie się drona na niebie nad polaną. Dlatego drony zaprogramowano tak, aby nie zostały zauważone, a dokładniej – aby unikały obszarów w kształcie koła, w których znajdują się polany.

Pewnego dnia odnaleziono krytyczny błąd oprogramowania drona, przez który nie ma pewności, że wybrana trasa faktycznie unikała zakazanych obszarów. Jedyne wiarygodne informacje o położeniu i ruchu drona to zapisywane w określonych odstępach czasu położenie i prędkość. Zespół operatorek i operatorów drona próbuje ustalić, czy doszło do złamania *PZB*.

[1] Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

Analizując sytuację, jedna z osób przypomniała sobie, że wielomian interpolacyjny można konstruować nie tylko w oparciu o wartości funkcji w węzłach, ale również wykorzystując informacje o wartościach jej pierwszej i kolejnych pochodnych w tych węzłach. Taki rodzaj interpolacji nazywamy *interpolacją Hermite'a*. Zobacz np. [1, §4.3.1], [2, §2.4].

(a) Sformułuj zadanie interpolacji wielomianowej Hermite'a i udowodnij, że ma ono zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

(b) Zapoznaj się z oszczędnymi algorytmami wyznaczania *postaci Newtona* wielomianu interpolacyjnego Hermite'a i potrzebnych do tego tzw. *uogólnionych ilorazów różnicowych*.

(c) Trajektorię ruchu drona w czasie można opisać na płaszczyźnie (dla uproszczenia przyjmujemy, że dron przeprowadza badania na stałej wysokości) przy pomocy krzywej parametrycznej

$$\gamma(t) := \{(x(t), y(t)) \ : \ t \geq 0\} \qquad (t - \text{czas}).$$

Dla zadanych: liczb rzeczywistych $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ (czas), wartości funkcji $x(t_0), y(t_0), x(t_1), y(t_1), \ldots, x(t_n), y(t_n)$ (położenie drona) oraz ich pochodnych $x'(t_0), y'(t_0), x'(t_1), y'(t_1), \ldots, x'(t_n), y'(t_n)$ (prędkość drona), opracuj algorytm konstrukcji postaci Newtona wielomianów Hermite'a $H_x, H_y \in \Pi_{2n+1}$ spełniających następujące warunki:

$$H_x(t_k) = x(t_k), \quad H_x'(t_k) = x'(t_k), \quad H_y(t_k) = y(t_k), \quad H_y'(t_k) = y'(t_k)$$

$(k = 0, 1, \ldots, n)$. Sprawdź **dla wielu doborów** interpolowanych funkcji x, y oraz węzłów t_k działanie tego rodzaju interpolacji w praktyce.

(d) Pora przekonać się, czy doszło do złamania *PZB*. Dla zadanych $t_i := t_0 + ih$ ($i = 0, 1, \ldots, n$; $h, t_0 > 0$ – ustalone), położenia drona (wartości $x(t_i), y(t_i)$) i jego prędkości (wartości $x'(t_i), y'(t_i)$) $(0 \leq i \leq n)$ oraz *obszarów zakazanych* $K_0, K_1, \ldots, K_m$ ($m \in \mathbb{N}$) będących kołami o środkach odpowiednio w punkach $z_j := (z_j^x, z_j^y)$ i promieniach $r_j > 0$ ($j = 0, 1, \ldots, m$), określ – wykorzystując interpolację wielomianową Hermite'a – czy dron złamał *PZB*.

Wykonaj szczegółowe testy dla różnych trajektorii drona i różnych zestawów obszarów zakazanych.

Literatura

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

[2] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1., WNT, 1988.

Autor zadania: *Filip Chudy*.

(–) Paweł Woźny