

X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 są niezależne, więc gęstość łączna iloczynem gęstości brzegowych.

$$P(X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5)$$

Zauważmy, że jeśli $X_5 = t$, to wtedy $X_4 > X_5 \Rightarrow$ zakres X_4 to (t, ∞) .

Podobnie $X_4 = s \wedge X_3 < X_4 \Rightarrow$ zakres X_3 to $(-\infty, s)$.

$$X_3 = z \wedge X_1 > X_3 \Rightarrow X_2 \in (z, \infty)$$

$$X_2 = y \wedge X_1 < X_2 \Rightarrow X_1 \in (-\infty, y).$$

$$P(X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_t^{\infty} \int_{-\infty}^s \int_z^{\infty} \int_{-\infty}^y f(x) f(y) f(z) f(s) f(t) dx dy dz ds dt =$$

Całka z gęstości to dystrybucja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_t^{\infty} \int_{-\infty}^s \int_z^{\infty} [F(x)]_{x=-\infty}^{x=y} f(y) f(z) f(s) f(t) dy dz ds dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_t^{\infty} \int_{-\infty}^s \int_z^{\infty} F(y) f(y) f(z) f(s) f(t) dy dz ds dt =$$

$$\left(\frac{F^2(y)}{2}\right)' = F(y) \cdot F'(y), \text{ ponieważ } F'(y) = f(y) \text{ więc } f(y) \text{ to pochodna wewnętrzna}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_t^{\infty} \int_{-\infty}^s \left[\frac{F^2(y)}{2}\right]_{y=z}^{y=\infty} f(z) f(s) f(t) dz ds dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_t^{\infty} \int_{-\infty}^s \frac{1}{2} (1 - F^2(z)) f(z) f(s) f(t) dz ds dt =$$

$$\frac{1}{2} \left(F(z) - \frac{F^3(z)}{3} \right)' = \frac{1}{2} f(z) (1 - F^2(z)) \quad \text{itd...}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_t^{\infty} \frac{1}{2} \left(F(z) - \frac{F^3(z)}{3} \right) f(s) f(t) ds dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{F^2(s)}{2} - \frac{F^4(s)}{12} \right]_{s=t}^{s=\infty} f(t) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{F^2(t)}{2} - \frac{F^4(t)}{12} \right) \right] f(t) dt =$$

$$\left[\frac{5F(t)}{24} - \frac{F^3(t)}{12} - \frac{F^5(t)}{120} \right]_{t=-\infty}^{t=\infty} = \frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{2}{15}$$

Dla dowolnej gęstości rozkładu $p = \frac{2}{15}$, wynik jest od niej niezależny.