Przykład rozwiązań zadania: “sprawdź czy coś jest tautologią w logice pierwszego rzędu”

Bartosz Bednarczyk
Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego
bartosz.bednarczyk@cs.uni.wroc.pl

Aby pokazać, że formuła ψ logiki pierwszego rzędu nie jest tautologią, należy wskazać przykład struktury $\mathfrak{A}$, składającej się ze zbioru A zwanego uniwersum oraz interpretacji symboli używanych w formułach, w której ψ nie jest spełniona. Fakt, że struktura $\mathfrak{A}$ spełnia ψ zapisujemy $\mathfrak{A} \models \psi$.

▷ **Zadanie.** Pokaż, że formuła $\psi \overset{\text{def}}{:=} (\exists x\ \varphi) \Leftrightarrow (\exists x\ \neg\varphi)$ nie jest tautologią.

Dowód. Niech $\mathfrak{A}$ będzie strukturą o uniwersum $A = \{1\}$, a symbol $=$ będzie interpretowany jako równość. Weźmy $\varphi(x) \overset{\text{def}}{:=} x = 1$. Wtedy oczywiście $\mathfrak{A} \models \exists x\ \varphi$ (czytaj: struktura $\mathfrak{A}$ spełnia formułę $\exists x\ \varphi$), gdyż znajdziemy takiego $x \in A$ (np. $x = 1$), że $x = 1$. Natomiast formuła $\exists x\ \neg\varphi$, czyli $\exists x\ x \neq 1$, nie jest spełniona w $\mathfrak{A}$ (zapisujemy: $\mathfrak{A} \not\models \exists x\ x \neq 1$). Zatem ψ nie jest tautologią. ◀

▷ **Zadanie.** Pokaż, że formuła $\psi \overset{\text{def}}{:=} (\exists x\ \varphi_1) \wedge (\exists x\ \varphi_2) \Rightarrow \exists x\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ nie jest tautologią.

Dowód. Podobnie jak w poprzednim zadaniu weźmy strukturę $\mathfrak{A}$ taką, że jej uniwersum A jest równe $\mathbb{N}_+$ (uniwersum to liczby naturalne dodatnie) oraz symbole $=, +$ są interpretowane jako równość liczb naturalnych oraz ich suma. Weźmy formułę $\varphi_1(x) \overset{\text{def}}{:=} \exists y\ x = y + y$, oraz formułę $\varphi_2(x) \overset{\text{def}}{:=} \neg\exists y\ x = y + y$. Zauważmy, że $\varphi_1(x)$ mówi że x jest parzysty, a $\varphi_2(x)$ mówi, że x jest nieparzysty.

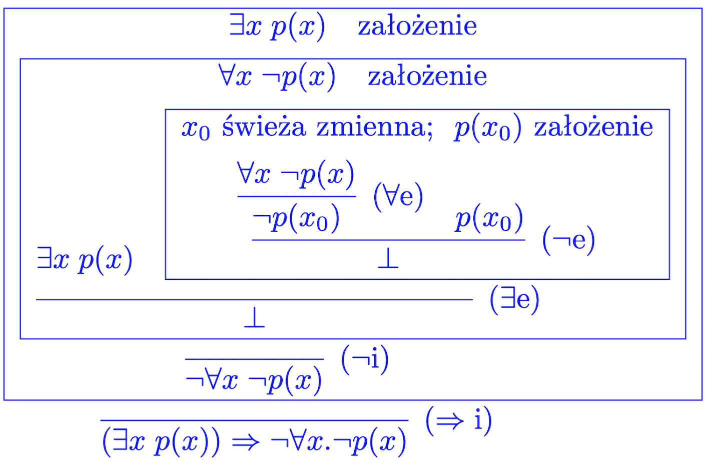
Wtedy $\mathfrak{A} \models (\exists x\ \varphi_1)$, bo np. liczba $2 \in A$ jest parzysta, więc spełnia φ_1. Zauważmy, że $\mathfrak{A}$ spełnia również formułę $(\exists x\ \varphi_2)$, bo np. liczba $3 \in A$ jest nieparzysta, więc spełnia φ_2. Ale nie istnieje liczba naturalna dodatnia, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta. Zatem $\mathfrak{A} \not\models \exists x\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Więc formuła ψ z treści zadania nie jest tautologią.

Innym, równie dobrym rozwiązaniem by było wzięcie $\mathfrak{B}$ o uniwersum $B = \{1, 2\}$ z symbolem $=$ interpretowanym jako równość i formuły $\varphi_1(x) \overset{\text{def}}{:=} x = 1$ oraz $\varphi_2(x) \overset{\text{def}}{:=} x = 2$. Wtedy $\mathfrak{B} \models \exists x\ \varphi_1$, bo istnieje taki $x \in B$ (np. $x = 1$ spełniający φ_1). Analogicznie, istnieje $x \in B$ (np. $x = 2$) spełniający φ_2, więc $\mathfrak{B} \models \exists x\ \varphi_2$. Ale nie ma takiego $x \in B$, który jednocześnie spełniałby $\varphi_1(x)$ oraz $\varphi_2(x)$, więc $\mathfrak{B} \not\models \exists x\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, więc ψ nie jest tautologią. ◀

Rozwiążmy również zadanie, mówiące że dana formuła jest tautologią.

▷ **Zadanie.** Pokaż, że formuła $\psi \overset{\text{def}}{:=} (\exists x\ p(x)) \Rightarrow (\neg\forall x\ \neg p(x))$ jest tautologią.

Dowód. Jedną z możliwości jest przeprowadzenie dowodu w systemie naturalnej dedukcji.



Inną możliwością jest przeprowadzenie dowodu bezpośrednio. Weźmy dowolną strukturę $\mathfrak{A}$ i pokażmy, że spełniona jest w niej formuła $(\exists x\ p(x)) \Rightarrow (\neg\forall x\ \neg p(x))$. Aby to zrobić, załóżmy że $\mathfrak{A} \models \exists x\ p(x)$ i pokażmy, że $\mathfrak{A} \models (\neg\forall x\ \neg p(x))$. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest, czyli że $\mathfrak{A} \models \forall x\ \neg p(x)$. Skoro $\mathfrak{A} \models \exists x\ p(x)$, to istnieje takie $x \in A$ (nazwijmy je x_0), takie że x_0 spełnia p (inaczej: $\mathfrak{A} \models p(x_0)$). Ponieważ zachodzi $\mathfrak{A} \models \forall x\ \neg p(x)$ to dla dowolnego $x \in A$ spełnione jest $\neg p(x)$. Czyli dla x_0 również, co oznacza że $\mathfrak{A} \models p(x_0)$ oraz $\mathfrak{A} \models \neg p(x_0)$. Sprzeczność. Zatem zachodzi $\mathfrak{A} \models (\neg\forall x\ \neg p(x))$, co oznacza że $\mathfrak{A} \models \psi$. Z dowolności $\mathfrak{A}$ dostajemy, że ψ jest tautologią.

◀