Z 4

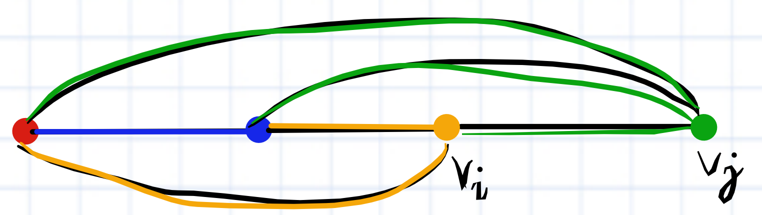
Wybierzmy k parami różnokolorowych punktów $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$. Przyjmijmy, że $\forall_i$ v_i jest koloru i.

Wiemy, że algorytm przypisuje wierzchołkowi v kolor i jeśli jest to najmniejszy (względem ustalonej kolejności) niewystępujący kolor u sąsiadów v. Zatem $(i-1)$-mniejszych kolorów jest już w użyciu. Ogólnie $\forall_{v_i}$ $\deg(v_i) \geq i-1$.

Wykonajmy oszacowanie:

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_k) \geq 0 + 1 + \ldots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$$

Zauważmy, że nie liczymy dwukrotnie żadnej krawędzi, ponieważ zliczamy krawędzie od wierzchołków o niższych kolorach np. jeśli z v_i jest krawędź do v_j, gdzie $i<j$ to szacując v_j policzymy krawędź $\{v_j, v_i\}$, ale dla v_i ta krawędź prowadzi do „wyższego" koloru, więc nie jest liczona.



Wykorzystajmy fakt udowodniony w zadaniu 1 na tej liście. Wiedząc, że każdy graf można optymalnie pokolorować oraz, że algorytm sekwencyjny potrafi takie kolorowanie wykonać przyjmując $k = \chi(G)$, dostajemy $|V| \leq \dfrac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$.