Rachunek Prawdopodobieństwa

Wydział Elektroniki

WYKŁAD IV

1. Parametry rozkładów zmiennych losowych

1.1. **Wartość oczekiwana zmiennej losowej.** Przypuśćmy, że otrzymaliśmy propozycję udziału w następującej grze losowej: rzucamy jednocześnie dwiema symetrycznymi monetami. Jeśli wypadną dwa orły, to wygrywamy 2 złote, jeśli zaś dwie reszki – 1 złoty. Jeśli jednak uzyskamy orła i reszkę, to płacimy 2 złote. Czy warto zagrać? Czy taka gra jest opłacalna na dłuższą metę?

Nietrudno ocenić opłacalność takiej gry na dłuższą metę. Jeśli rozegramy na przykład 100 partii, to każdy z możliwych wyników $(O,O),(R,R),(O,R),(R,O)$ pojawi się mniej więcej po $100/4 = 25$ razy. Wobec tego łączna wygrana wyniesie:

$$25 \cdot 2 + 25 \cdot 1 + 50 \cdot (-2) = -25.$$

Wartość ta jest ujemna, co oznacza, że taka gra nie jest opłacalna na dłuższą metę (będziemy musieli dość dużo zapłacić!). Jeśli chcemy oszacować średnią wygraną przypadającą na pojedynczą grę, to wystarczy podzielić tę łączna wygraną przez liczbę partii, co daje

$$-\frac{1}{4} = \frac{-25}{100} \left(= \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \right).$$

Nie warto zatem rozegrać nawet pojedynczej partii.

Zauważmy, że jeśli oznaczymy przez X wygraną w pojedynczej grze, to po prawej stronie powyższej równości bez trudu zidentyfikujemy wartości $\{-2,1,2\}$ zmiennej losowej X oraz prawdopodobieństwa $1/2, 1/4, 1/4$ z jakimi są one przyjmowane. Jest to zatem średnia ważona liczb będących wartościami tej zmiennej z wagami zadanymi przez te prawdopodobieństwa. Nazwiemy tę liczbę **wartością oczekiwaną** (lub **wartością średnią**) zmiennej losowej X.

Przejdźmy do formalnej definicji.

Definicja. Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny, to jej **wartość oczekiwaną** definiujemy wzorem

$$\mathbb{E}X = \sum_{n \in T} x_n \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{n \in T} x_n p_n,$$

o ile szereg po prawej stronie jest bezwzględnie zbieżny, tzn. $\sum_{n\in T} |x_n| p_n < \infty$. Jeżeli zaś X ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości f, to jej **wartość oczekiwaną** definiujemy wzorem

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

o ile całka po prawej stronie istnieje i jest skończona, tzn. $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$.

Uwaga. Przykład zmiennej losowej, dla której wartość oczekiwana nie istnieje, pojawi się na liście zadań.

Jak już wspomnieliśmy powyżej, wartość oczekiwana jest czasami nazywana **wartością średnią**. Jeżeli zmienna X ma rozkład dyskretny na zbiorze n-elementowym $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ oraz $\mathbb{P}(X = x_n) = 1/n$, to dostajemy

$$\mathbb{E}X = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

W tym przypadku rzeczywiście $\mathbb{E}X$ jest średnią wartością jaką przyjmuje X.

Własności wartości oczekiwanej: jeżeli $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}Y$ istnieją, to:

- jeśli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}X \geq 0$,
- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$,
- dla dowolnej stałej $a \in \mathbb{R}$ mamy $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}X$.

Przykład. Przeanalizujemy następujące dwa przykłady.

- Jeśli $X \sim B(n,p)$, to $\mathbb{E}X = np$. Liczymy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!}p^{l}(1-p)^{n-1-l} = np(p+1-p)^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

- Jeśli $X \sim Exp(\lambda)$, to $\mathbb{E}X = 1/\lambda$. Całkując przez części, mamy

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x(\lambda e^{-\lambda x})dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Do dalszych rachunków potrzebny będzie nam także następujący fakt.

Stwierdzenie 1. *Załóżmy, że g jest funkcją borelowską (np. ciągłą lub monotoniczną). Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny, to*

$$\mathbb{E}g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x_n)\mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x_n)p_n$$

o ile szereg po prawej stronie jest bezwzględnie zbieżny, tzn. $\sum_{n\in T} |g(x_n)|p_n < \infty$. Jeżeli X ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości f, to

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx,$$

o ile całka po prawej stronie istnieje i jest skończona, tzn. $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$.

1.2. **Wariancja zmiennej losowej.** Drugim ważnym parametrem rozkładu zmiennej losowej jest **wariancja**, która mierzy jego „rozrzut” wokół wartości oczekiwanej.

Definicja. Wariancją zmiennej losowej X nazywamy wielkość

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2,$$

o ile jest skończona (inne oznaczenie: $D^2X = \mathbb{V}\mathrm{ar}X$). Ponadto, wielkość

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}X}$$

nazywamy **odchyleniem standardowym**.

Uwaga. Jeśli wartość oczekiwana po prawej stronie pierwszej równości w powyższej definicji jest nieskończona, to mówimy że zmienna X nie ma (skończonej) wariancji.

Uwaga. Zachodzi (niezwykle użyteczna) równość

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2.$$

Rzeczywiście, mamy

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2.$$

Własności wariancji: jeżeli $\mathbb{V}\mathrm{ar}X$ istnieje, to:

- $\mathbb{V}\mathrm{ar}X \geq 0$,
- dla dowolnych stałych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}X,$$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}X = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna X jest stała z prawdopodobińostwem 1.

Przykład. Wariancja rozkładu wykładniczego. Korzystając ze Stwierdzenia 1, całkując przed podstawienie i wykorzystując definicję funkcji Gamma Eulera, otrzymujemy
$$\mathbb{E}X^2 = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2!}{\lambda^2}.$$
Zatem
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

1.3. **Momenty wyższych rzędów, momenty centralne.**

Definicja. Momentem rzedu n i momentem centralnym rzędu n zmiennej losowej X nazywamy odpowiednio wielkości
$$\mathbb{E}X^n \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^n,$$
o ile szeregi lub całki definiujące odpowiednie wartości oczekiwane są dobrze określone.

Uwaga. Wartość oczekiwana $\mathbb{E}X$ oraz wariancja $\mathbb{V}\mathrm{ar}X$ są odpowiednio pierwszym momentem i drugim momentem centralnym zmiennej X.

1.4. **Kwantyle.**

Definicja. Kwantylem rzędu $q \in (0, 1)$ rozkładu zmiennej X nazywamy najmniejszą liczbę $x_q \in \mathbb{R}$, która spełnia
$$\lim_{x \to x_q-} F(x) \leq q \leq F(x_q).$$
Kwantyl rzędu $1/2$ nazywamy **medianą**, a kwantyle rzędu $1/4$ i $3/4$ – **kwartylami**.

Uwaga. W zależności od tego czy dystrybuanta ma skoki, w powyższej definicji możliwe są dwie sytuacje (zilustrujemy to graficznie podczas wykładu on-line). Jeżeli dystrybuanta jest funkcją **ciągłą**, to warunek upraszcza się do $F(x_q) = q$. Jeśli ponadto dystybuanta jest **ściśle rosnąca**, to mamy $x_q = F^{-1}(q)$.

1.5. **Standaryzacja rozkład normalnego.** Przypomnijmy, że rozkład normalny $N(m, \sigma^2)$, to rozkład absolutnie ciągły o gęstości
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$
Jeżeli $X \sim N(m, \sigma^2)$, to
$$\mathbb{E}X = m, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}X = \sigma^2.$$
Ponadto, jeśli $X \sim N(m, \sigma^2)$, to zmienna losowa
$$Y = \frac{X - m}{\sigma}$$
ma rozkład $N(0, 1)$ zwany **standardowym rozkładem normalnym**. Dystrybuantę rozkładu $N(0, 1)$ oznaczamy przez Φ.

Uwaga. Wartości $\Phi(x)$ dla $0 \leq x \leq 4.99$ są spisane w tablicach rozkładu normalnego. Dla $x < 0$ stosujemy wzór $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$. Zachodzi $\Phi(3) \approx 0,99865$, więc dla dużych x (większych niż 3) wartości dystrybuanty Φ są już bardzo bliskie 1.