# Uwagi do zadań z listy nr 2

Antoni Kościelski

## 1 Zadanie 5

### 1.1 Treść zadania

Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

| $x$ | $(-\infty; -2]$ | $(-2; 3]$ | $(3; 5]$ | $(5; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 0 | 0.2 | 0.7 | 1 |

Podać postać funkcji gęstości f(x).

### 1.2 Uwagi wstępne, potrzebny aparat

Zastanówmy się najpierw, co wiemy o zmiennej losowej lub i związanych z nią prawdopodobieństwach w sytuacji, gdy znamy dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej.

Zgodnie z definicją dystrybuanty, jeżeli mamy dany rozkład $P_X$ zmiennej $X$ (czyli odpowiedni rozkład prawdopodobieństwa na $\sigma$-ciele borelowskich podzbiorów $R$), to albo

$$F(x) = P_X((-\infty, x)) = P(X < x)$$

albo – bez odwoływania się do pojęcia rozkładu zmiennej –

$$F(x) = P(X < x) \text{ lub dokładniej } F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}).$$

Dwie ostatnie równości mówią to samo, pierwsza – w sposób skrótowy, stosowany w probalistyce i statystyce, druga – z zachowaniem przyjętych zasad zapisu wzorów matematycznych. Obie równości stwierdzają, że wartość dystrybuanty rozkładu zmiennej losowej $X$ dla argumentu $x$ jest równa prawdopodobieństwu zdarzenia polegającego na zajściu tych zdarzeń elementarnych, w których zmienna losowa $X$ przyjmuje wartości mniejsze od $x$.

Może przez chwilę zajmijmy się pewnym przykładem. Przypuśćmy, że właściel sklepu odzieżowego chciałby wiedzieć, czy częściej odwiedzają jego sklep osoby wysokie i powinien więc sprowadzać więcej odzieży dla takich osób, czy może przeciwnie – ma więcej klientów wśród niskiej części społeczeństwa. Jeżeli chcemy pomóc takiemu właścicielowi, to możemy rozważać zdarzenia elementarne polegające na wejściu do sklepu potencjalnego klienta. Jeżeli takie zdarzenie ma miejsce, to mamy określoną sytuację: jest któraś godzina, pada śnieg lub nie, weszła kobieta w spodniach lub Szkot w spódnicy, osoba ta ma określony wzrost, wagę, zasobność portfela i buty o określonym rozmiarze. Dla takich sytuacji możemy rozważać różne zmienne losowe, w szczególności zmienną $X$, która zdarzeniu elementarnemu (wejściu klienta do sklepu) przypisuje wzrost wchodzącej osoby. Wtedy może nas interesować zdarzenie polegające na tym, że w sklepie pojawiła się osoba o wzroście mniejszym niż 150 cm, może być ważne jego prawdopodobieństwo lub to, jak często takie zdarzenie elementarne występując. Znając dystrybuantę $F$ rozkładu zmiennej $X$ takie prawdopodobieństwo potrafimy bez problemu ustalić wyliczając $F(150)$. Na ogół jednak nie znamy ani tego rozkładu, ani jego dystrybuanty, ale na podstawie jakichś iluzorycznych danych chcemy coś o nich powiedzieć.

W tej chwili zakładamy, że dystrubuanta rozkładu $X$ jest nam znana, a chcemy ustalić inne własności tego rozkładu.

Znając dystrybuantę rozkładu możemy w pełni wyliczyć rozkład. Mówiąc nieprecyzyjnie, znając dystrybuantę rozkładu zmiennej $X$ możemy wyliczyć prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń zdefiniowanych "poprzez $X$", na przykład $P_X(\{5\}) = P(X = 5)$ lub $P_X((3,6]) = P(3 < X \leqslant 6)$. Trzeba tylko wiedzieć, jak to zrobić.

### 1.2.1 Przydatne własności prawdopodobieństwa

W takich sytuacjach posługujemy się kilkoma znanymi własnościami prawdopodobieństwa ($P$ oznacza tu dowolne prawdopodobieństwo, także rozkłady zmiennych losowych):

1. Dla dowolnego ciągu $A_0, A_1, \ldots$ parami rozłącznych zdarzeń
$$P(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$$
(jest to własność stanowiąca część definicji prawdopodobieństwa),
2. $P(\emptyset) = 0$,
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla dowolnych rozłącznych (wykluczających się) zdarzeń $A$ i $B$,
4. $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ pod warunkiem, że $B \subseteq A$,
5. dla dowolnego wstępującego ciągu zdarzeń (takiego, że $A_i \subseteq A_{i+1}$ dla wszystkich $i \in N$) zachodzi wzór
$$P(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i),$$
6. prawdopodobieństwo
$$P(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$
dla dowolnego zstępującego ciągu zdarzeń (takiego, że $A_{i+1} \subseteq A_i$ dla wszystkich $i \in N$).

Aby dowieść własność 5, korzystamy z własności 1 dla ciągu $B_0 = A_0$, $B_1 = A_0 \setminus A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots$, $B_i = A_i \setminus A_{i-1}, \ldots$. Ciąg ten składa się z parami rozłącznych zbiorów. Zachodzą też oczywiste równości

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = A_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1}) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{oraz} \quad \bigcup_{i=0}^{n} B_i = A_0 \cup \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus A_{i-1}) = \bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_n.$$

Stąd

$$P(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=0}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Własność 6 dla zstępującego ciągu ciągu $A_0, A_1, A_2, \ldots$ wyprowadzamy z własności 5 dla wstępującego ciągu różnic $A_0 \setminus A_0, A_0 \setminus A_1, A_0 \setminus A_2, \ldots$

## 1.3 Rozwiązanie

Będziemy liczyć rozkład $P_X$ dla różnych zbiorów $A$. Na przykład wiemy, że

$$P_X((-\infty, -2)) = P(X < -2) = P(X \in (-\infty, -2)) = F(-2) = 0.$$

Wiemy także

$$P_X((-\infty, 3)) = P(X < 3) = P(X \in (-\infty, 3)) = F(3) = 0,2.$$

Stąd (patrz własność 4 prawdopodobieństwa)

$$P_X([-2, 3)) = P(-2 \leqslant X < 3) = P(X \in [-2, 3)) = P_X((-\infty, 3) \setminus (-\infty, -2)) =$$

$$= P_X((-\infty, 3)) - P_X((-\infty, -2)) = F(3) - F(-2) = 0,2.$$

Podobnie

$$P_X([-2+\frac{1}{n}, 3)) = P_X((-\infty, 3)\setminus(-\infty, -2+\frac{1}{n})) = F(3)-F(-2+\frac{1}{n}) = 0,2-0,2 = 0.$$

Teraz z własności 5 otrzymujemy, że

$$P_X((-2, 3)) = P_X(\bigcup_{n=1}^{\infty}[-2 + \frac{1}{n}, 3)) = \lim_{n\to\infty} P_X([-2 + \frac{1}{n}, 3)) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Mamy też

$$P_X(\{-2\}) = P(X = -2) = P_X([-2, 3)\setminus(-2, 3)) = P_X([-2, 3))-P_X((-2, 3)) = 0,2.$$

Takie rachunki można prowadzić na wiele sposobów. Na przykład

$$P_X((-\infty, -2]) = P_X(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, 2 + \frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} P_X((-\infty, -2 + \frac{1}{n})) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} F(-2 + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} 0,2 = 0,2,$$

a stąd

$$P_X(\{-2\}) = P_X((-\infty, -2] \setminus (-\infty, -2)) = P_X((-\infty, -2]) - P_X((-\infty, -2)) = 0,2.$$

Analogicznie można wyprowadzić kilka dalszych własności rozkładu $P_X$, w szczególności

$$P_X(\{-2\}) = 0,2, \quad P_X(\{3\}) = 0,5, \quad P_X(\{5\}) = 0,3,$$

czyli (stosując inny zapis)

$$P(X = -2) = 0,2, \quad P(X = 3) = 0,5, \quad P(X = 5) = 0,3.$$

Podobnie, a także z przytoczonych wzorów otrzymujemy, że

$$P_X(R \setminus \{-2, 3, 5\}) = P(X \neq -2 \wedge X \neq 3 \wedge X \neq 5) = 0.$$

W ten sposób zgromadziliśmy pełną informację o rozkładzie zmiennej X.

Aby teraz wyliczyć gęstość rozkładu zmiennej $X$ w pierwszym rzędzie powinniśmy ustalić jej definicję, a zwłaszcza dziedzinę tej funkcji. Niewątpliwie należą do niej liczby -2, 3 i 5 i dla tych argumentów gęstość $f$ rozkładu zmiennej $X$ przyjmuje wartości zgodnie z tabelką

| $x$ | $-2$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0,2$ | $0,5$ | $0,3$ |

Dla pozostałych argumentów $x$ (o ile istnieją) wartość $f(x) = 0$.

# 2 Zadanie 8

## 2.1 Sformułowanie zadania

Sprawdzić, że

1. $B(p, q+1) = B(p, q)\dfrac{q}{p+q}$,
2. $B(p, q) = B(p, q+1) + B(p+1, q)$.

## 2.2 Rozwiązanie

Dowód drugiej z równości:

$$B(p, q+1) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q \, dt = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}(1-t) \, dt =$$

$$= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} \, dt - \int_0^1 t^p(1-t)^{q-1} \, dt = B(p, q) - B(p+1, q).$$

Dowód równości pomocniczej:

$$B(p+1, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^{q-1} \, dt = \int_0^1 t^p \left(-\frac{1}{q}(1-t)^q\right)' \, dt =$$

$$= -\frac{1}{q} t^p(1-t)^q \Big|_0^1 + \frac{p}{q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q \, dt = \frac{p}{q}B(p, q+1)$$

Stąd i z poprzedniej równości otrzymujemy, że

$$B(p, q) = B(p, q+1) + B(p+1, q) = B(p, q+1) + \frac{p}{q}B(p, q+1) = \frac{p+q}{q}B(p, q+1).$$

# 3 Zadanie 9

## 3.1 Treść zadania

Należy wykazać, że

$$B(a, b)\Gamma(a+b) = \Gamma(a)\Gamma(b),$$

gdzie

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \, dx \quad \text{oraz} \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x} \, dx.$$

## 3.2 Idea rozwiązania

Bierzemy lewą stronę wzoru

$$B(a, b)\Gamma(a+b) = \left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \, dx\right) \cdot \left(\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y} \, dy\right) = \ldots$$

i przekształcamy ją tak długo, aż otrzymamy prawą stronę. Kłopot polega na tym, że nie bardzo wiadomo co zrobić z taką lewą stroną. Żadnej z tych całek nie potrafimy wyliczyć. Możemy jednak zastosować bardziej skomplikowaną technikę polegającą na przejściu do całek podwójnych.

### 3.2.1 Przejście do całek podwójnych

Jeżeli przekształcamy wyrażenie postaci

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\,dy\right),$$

to pierwszą (a także drugą) z tych całek możemy potraktować jako ustaloną liczbę $C$ i możemy skorzystać z wzoru

$$C\cdot\int_c^d h(z)\,dz=\int_c^d C\cdot h(z)\,dz.$$

Po dwukrotnym skorzystaniu z powyższego wzoru otrzymujemy

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)=\int_c^d\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot g(y)\,dy=$$

$$=\int_c^d\left(\int_a^b f(x)\cdot g(y)\,dx\right)\,dy=\int_c^d\int_a^b f(x)\cdot g(y)\,dxdy.$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)=\int_a^b\int_c^d f(x)\cdot g(y)\,dydx.$$

Przy okazji pokazaliśmy, że wzór

$$\int_a^b\int_c^d k(x,y)\,dydx=\int_c^d\int_a^b k(x,y)\,dxdy$$

zachodzi przynajmniej dla niektórych funkcji dwóch zmiennych. W rzeczywistości wzór ten jest słuszny właściwie dla wszystkich funkcji $k$ i będziemy z tego korzystać.

### 3.2.2 Pierwszy krok

Mamy więc

$$B(a,b)\Gamma(a+b)=\left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\,dy\right)=$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}y^{a+b-1}e^{-y}\,dx\right)dy$$

i możemy wewnętrzną całkę scałkować przez podstawienie $t=x\cdot y$ (wprowadzamy nową zmienną $t$, która jest iloczynem stałej $y$ i zmiennej $x$, po której całkujemy).

Dalej powinniśmy przestawić całki i zmienić kolejność całkowania. Niestety, wykonane przekształcenie (podstawianie) uzmiennia granicę całkowania wewnętrznej całki, a to powoduje dalsze komplikacje. Podany wzór na przestawianie całek wymaga bowiem stałych granic całkowania.

### 3.2.3 Ciąg dalszy

Jeżeli mamy już wzór postaci

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \int_0^\infty \int_0^y k(t,y)\; dtdy,$$

to bierzemy pomocniczą funkcję

$$p(t,y) = \begin{cases} 0 & t > y \\ 1 & t \leqslant y \end{cases}.$$

Wtedy

$$\int_0^y k(t,y)\; dt = \int_0^y p(t,y)\cdot k(t,y)\; dt = \int_0^y p(t,y)\cdot k(t,y)\; dt + \int_y^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)\; dt =$$

$$= \int_0^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)\; dt$$

oraz

$$\int_0^\infty \int_0^y k(t,y)\; dtdy = \int_0^\infty \int_0^y p(t,y)\cdot k(t,y)\; dtdy = \int_0^\infty \int_0^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)\; dtdy.$$

Teraz już można przestawić całki. Trzeba jeszcze zauważyć, że

$$\int_0^\infty \int_0^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)\; dtdy = \int_0^\infty \int_0^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)\; dydt = \int_0^\infty \int_t^\infty k(t,y)\; dydt.$$

Dalsze rachunki nie powinny sprawiać trudności.

## 3.3 Rozwiązanie

(Jest w nim więcej niż trzeba nawiasów.)

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\; dx\right)\cdot\left(\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\; dy\right) =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}y^{a+b-1}e^{-y}\; dx\right) dy =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^1 (xy)^{a-1}(y-xy)^{b-1}e^{-y}y\; dx\right) dy = \left\{ \begin{array}{c} t = x\cdot y \\ dt = y\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^y t^{a-1}(y-t)^{b-1}e^{-y}\; dt\right) dy = \int_0^\infty \left(\int_t^\infty t^{a-1}(y-t)^{b-1}e^{-y}\; dy\right) dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} s = y-t \\ ds = dy \\ y = s+t \end{array} \right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty t^{a-1}s^{b-1}e^{-s-t}\; ds\right) dt =$$

$$= \left(\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt\right)\cdot\left(\int_0^\infty s^{b-1}e^{-s}\; ds\right) = \Gamma(a)\Gamma(b).$$