

Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2020

Z szachownicy 8×8 wycinamy jedno pole z narożnika.

Czy tak zdeformowaną szachownicę można pokryć kostkami domina, jeśli każda taka kostka obejmuje dwa pola szachownicy?

Z szachownicy 8×8 wycinamy dwa pola z przeciwległych narożników.

Czy taką szachownicę można pokryć kostkami domina?

Szachownica i pchły

W środku każdego pola szachownicy 5×5 siedzi pchła.

Na sygnał każda z pcheł przeskakuje na jakieś sąsiadujące pole. Dwa pola są **sąsiadujące**, jeśli mają wspólny bok.

Czy istnieje strategia gwarantująca, że w rezultacie znów na każdym polu będzie dokładnie jedna pchła?

Zasada szufladkowa

Niech $k, s \in \mathbb{N} > 0$.

Jeśli wrzucimy k kulek do s szuflad (Dirichleta) a kulek jest więcej niż szuflad ($k > s$), to w którejś szufladzie będą przynajmniej 2 kulki.

Zasada szufladkowa

Niech A i B będą skończonymi zbiorami.

Wówczas, jeśli $|A| > |B|$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa z A w B .

Zasada szufladkowa Dirichleta

Zasada szufladkowa

Niech $k, s \in \mathbb{N} > 0$.

Jeśli wrzucimy $k > s \cdot i$ kulek do s szuflad (Dirichleta), to w którejś szufladzie będą przynajmniej $i + 1$ kulki.

W rzędzie stoi 12 krzeseł. Przychodzi 9 osób i je zajmuje.

Pokaż, że jakieś 3 sąsiadujące krzesła zostaną zajęte.

Pokaż, że w dowolnej grupie n osób ($n \in \mathbb{N}$) jakieś 2 osoby mają taką samą liczbę znajomych (z tej grupy).

Każdy punkt płaszczyzny kolorujemy na jeden z dwóch kolorów: szmaragdowy lub koralowy.

Pokaż, że znajdują się dwa punkty w odległości dokładnie 1, które są tego samego koloru.

Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że:

$$1 \leq x_1 < x_2 < \dots x_{55} \leq 100.$$

Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$.

$$n \bmod d = n - \lfloor \frac{n}{d} \rfloor d$$

$$n \bmod d = r \Leftrightarrow 0 \leq r < d \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}} n = kd + r$$

Funkcja modulo - własności

$$(a + b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$$

$$(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot (b \bmod n)) \bmod n$$

Przystawanie modulo:

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow a \bmod n = b \bmod n$$

$$a + b \equiv_n a \bmod n + b \bmod n$$

$$a \cdot b \equiv_n (a \bmod n) \cdot (b \bmod n)$$

Niech $n, d \in \mathbb{Z}$ i $d \neq 0$.

$$d|n \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{Z}} n = kd$$

$$d|n \Leftrightarrow n \bmod d = 0$$

$$d|n \Leftrightarrow n \equiv_d 0$$

$$d|n_1 \wedge d|n_2 \Rightarrow d|(n_1 + n_2)$$

Czy zachodzi implikacja w drugą stronę?

Pokaż, że wśród dowolnych 8 liczb całkowitych różnica jakichś dwóch dzieli się przez 7.

Pokaż, że istnieją dwie potęgi 3, których różnica dzieli się przez 2020.

Podzielność przez 3

Liczba naturalna x dzieli się przez 3 wtw, gdy suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym dzieli się przez 3.

NWD

Niech $a, b \in \mathbb{N}$.

$$\text{NWD}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d|a \wedge d|b\}$$

Algorytm Euklidesa

$$a \geq b > 0$$

$$NWD(a, b) = NWD(b, a \bmod b)$$

$$NWD(a, 0) = a$$

Rozszerzony algorytm Euklidesa

$$a \geq b > 0$$

$$\exists_{x,y \in \mathbb{Z}} \quad xa + yb = \text{NWD}(a, b)$$

Rozszerzony algorytm Euklidesa

$$xa + yb = \text{NWD}(a, b)$$

$$x'b + y'(a \bmod b) = \text{NWD}(b, a \bmod b) = \text{NWD}(a, b)$$

$$x'b + y'(a - b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor) = \text{NWD}(a, b)$$

$$y'a + (x' - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor)y = \text{NWD}(a, b)$$

$$x \leftarrow y', \quad y \leftarrow x' - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$$

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Niech $a, b, d \in N$, $x, y \in Z$ oraz $a > 0$.

$$d|a \wedge d|b \wedge xa + yb = d$$

Czy to znaczy, że $d = NWD(a, b)$?

Liczby względnie pierwsze

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$.

a i b są **względnie pierwsze** gdy $NWD(a, b) = 1$.