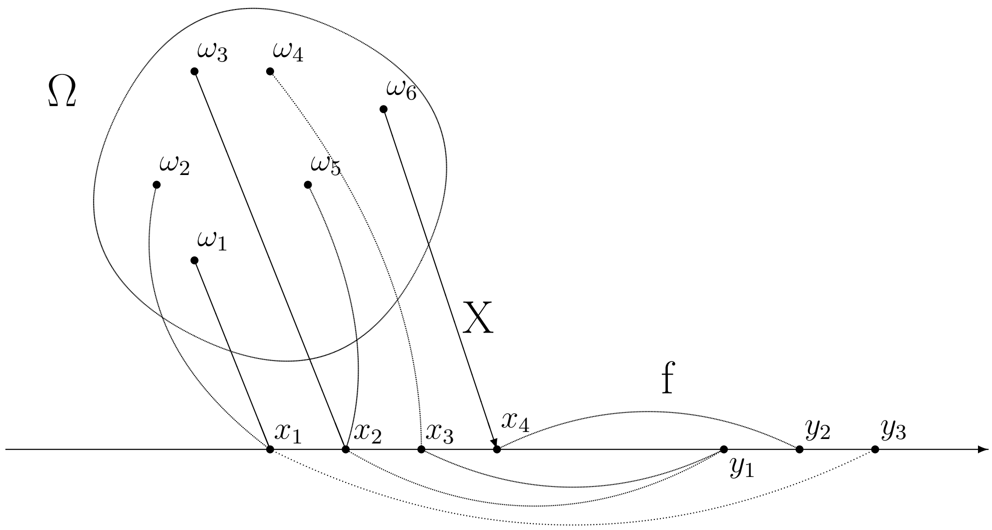
Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Antoni Kościelski

14 marca 2021

1 Podstawowa definicja

Aby zdefiniować wartość oczekiwaną zmiennej losowej X musimy mieć samą zmienną X i przestrzeń probabilistyczną, na której ta zmienna jest określona. Na rysunku mamy wyobrażenie przestrzeni Ω ze zdarzeniami elementarnymi $\omega_1, \ldots, \omega_6$. Przyjmijmy, że jest to przestrzeń z prawdopodobieństwem P i prawdopodobieństwo $P(\{\omega_i\})$ zdarzenia elementarnego ω_i jest równe p_i. Jest też tam zobrazowana zmienna losowa X, dla której w szczególności mamy $X(\omega_4) = x_3$.



Zgodnie z podstawową definicją wartości oczekiwanej zmiennej X jest to całka z X względem prawdopodobieństwa P, a więc

$$E(X) = \int X(\omega) dP(\omega) = \sum_{i=1}^{6} X(\omega_i) P(\{\omega_i\}) = x_1 p_1 + x_1 p_2 + x_2 p_3 + x_3 p_4 + x_2 p_5 + x_4 p_6.$$

2 Rozkład zmiennej losowej

W zastosowaniach praktycznych zwykle przestrzeń probabilistyczna nie jest jasno określona i probabiliści wolą problem przenieść do zbioru liczb rzeczywistych i matematyki. W tym celu posługują się pojęciem rozkładu zmiennej losowej. Jest to pewne prawdopodobieństwo określone w zbiorze liczb rzeczywistych. Dla naszej zmiennej X jest to albo prawdopodobieństwo określone dla wszystkich borelowskich podzbiorów liczb rzeczywistych, albo dla wszystkich podzbiorów zbioru wartości X.

Zgodnie z definicją rozkładem zmiennej X nazywamy prawdopodobieństwo P_X zdefiniowane wzorem

$$P_X(A) = P(X^{-1}[A]),$$

gdzie $X^{-1}[A]$ jest przeciwobrazem zbioru A wyznaczonym przez zmienną X.

Dla naszej zmiennej X mamy oczywiste zależności:

$$P_X(R \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = P(X^{-1}[R \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}]) = P(\emptyset) = 0,$$

$$P_X(\{x_1\}) = P(X^{-1}(\{x_1\}) = P(\{\omega_1, \omega_2\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) = p_1 + p_2,$$

$$P_X(\{x_2\}) = p_3 + p_5, \quad P_X(\{x_3\}) = p_4 \text{ oraz } P_X(\{x_4\}) = p_6.$$

3 Inna definicja wartości oczekiwanej

Często wartość oczekiwaną zmiennej losowej definiuje się lub wyraża się za pomocą rozkładu zmiennej przyjmując, że

$$E(X) = \int x\, dP_X(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_X(\{x_i\}) = x_1(p_1 + p_2) + x_2(p_2 + p_5) + x_3 p_4 + x_4 p_6.$$

Jak widać powyższa równość powstała przez odpowiednie pogrupowanie składników w podstawowej definicji $E(X)$. W naszym konkretnym przypadku równoważność obu definicji wartości oczekiwanej jest oczywista i dowodzi się, że zachodzi w każdym przypadku.

4 Zmienna losowa $f(X)$

Zmienna losowa $f(X)$ to nic innego jak złożenie funkcji rzeczywstej f i zmiennej losowej X. Jeżeli przyjmiemy, $f(X) = Y$, to $Y(\omega) = f(X(\omega))$. Zmienna $f(X)$ z powyższego rysuunku przyjmuje trzy wartości y_1, y_2 i y_3. Jej rozkład jest scharakteryzowany wzorami

$$P_{f(X)}(\{y_1\}) = p_3 + p_4 + p_5, \quad P_{f(X)}(\{y_2\}) = p_6 \text{ oraz } P_{f(X)}(\{y_3\}) = p_1 + p_2.$$

Znamy już dwa sposoby liczenia wartości oczekiwanej zmiennej $f(X)$, a mianowicie

$$E(f(X)) = \int f(X(\omega))\, dP(\omega) = y_3 p_1 + y_3 p_2 + y_1 p_3 + y_1 p_4 + y_1 p_5 + y_2 p_6$$

oraz

$$E(f(X)) = \int y dP_{f(X)}(y) = y_1(p_3 + p_4 + p_5) + y_2 p_6 + y_3(p_1 + p_2).$$

Pierwszy polega na całkowaniu względem prawdopodobieństwa P, drugi – na całkowaniu względem rozkładu $P_{f(X)}$ zmiennej $f(X)$. Możemy też obliczyć tę wartość całkując względem rozkładu P_X zmiennej X zgodnie z wzorem

$$\int y\, dP_{f(X)}(y) = \int f(x)\, dP_X(x).$$

Wzór ten dość łatwo dowodzi się przez indukcję (!) ze względu na f. Powinien być "do sprawdzenia" dla funkcji zero-jedynkowach, równych 1 na jakimś zbiorze (borelowskim) A, i byłby to tzw. pierwszy krok indukcyjny.

Licząc zgodnie z tym wzorem wartość oczekiwaną zmiennej $f(X)$ otrzymujemy

$$E(f(X)) = \int y\, dP_{f(X)}(y) = \int f(x)\, dP_X(x) = \sum_{i=1}^{4} f(x_i) P_X(\{x_i\}) =$$

$$= f(x_1)(p_1+p_2)+f(x_2)(p_3+p_5)+f(x_3)p_4+f(x_4)p_6 = y_3(p_1+p_2)+y_1(p_3+p_5)+y_1p_4+y_2p_6.$$

Omówione tu własności zostały zaprezentowane na przykładzie dyskretnym, ale zachodzą w pełnej ogólności. Wymagają tylko bardziej skomplikowanych dowodów.

Przedstawione tu rozważania są istotne w porządnych dowodach własności takich jak $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ i innych zadań z listy 5.