Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 13

13 stycznia 2021 r.

Zajęcia 26 stycznia 2021 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L13.1. 1 punkt Wykaż, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a,\, b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy $n \to \infty$.

L13.2. 1 punkt O funkcji ciągłej f wiadomo, że $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| < 2$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ potrafimy z dużą dokładnością obliczać $f(x)$. Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ε, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ oraz $\varepsilon > 0$ są dane.

L13.3. 1 punkt Jak należy dobrać n, aby stosując złożony wzór Simpsona S_n obliczyć przybliżoną wartość całki $\displaystyle\int_{-\pi/5}^{\pi/2} \cos(3x - \pi/3)\,\mathrm{d}x$ z błędem względnym $\leq 10^{-8}$?

L13.4. 1 punkt Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}\left[T_n(f) + M_n(f)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \qquad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułować oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

L13.5. **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenie $T_{16,0}$ następujących całek:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2021x^5 - 2020x^4 + 2019x^2)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1+25x^2}$, c) $\displaystyle\int_{2}^{3\pi} \frac{\sin(7x-2)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Skomentuj wyniki.

L13.6. 1 punkt Rozważmy zadanie obliczania przybliżonej wartości całki $I := \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ (f – funkcja ciągła) metodą Romberga. W **ilu**, i w **których**, punktach przedziału $[-1, 4]$ wystarczy wyznaczyć wartość funkcji f, aby obliczyć przybliżenie $T_{11,0}$ całki I?

L13.7. 1 punkt Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji $f \in C[a, b]$, jest zbieżny do całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

L13.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dobierz węzły x_0, x_1, x_2 oraz współczynnki A_0, A_1, A_2 kwadratury

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

w taki sposób, aby równość

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = Q_2(f)$$

zachodziła dla wszystkich wielomianów stopnia ≤ 5.

L13.9. $\boxed{\text{2 punkty}}$ W języku `PWO++` procedura `LegendreZeros(`m`)` znajduje z dużą dokładnością wszystkie miejsca zerowe m-tego wielomianu Legendre'a. Używając tej procedury, opracuj efektywny **algorytm** znajdowania takich węzłów $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ oraz współczynników $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$, że dla każdego wielomianu w stopnia mniejszego od $2n+2$ zachodzi

$$\int_{-4}^{5} w(x)\,\mathrm{d}x = Q_n(w),$$

gdzie $Q_n(f) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$.

L13.10. $\boxed{\textbf{Dodatkowe zadanie programistyczne}\text{ (do 2 lutego; do 6 punktów)}}$ [1]

Węzły równoodległe używane w kwadraturach Newtona-Cotesa bywają użyteczne dla wielomianów niskich stopni, ale mogą okazać się złym wyborem, gdy stopień jest wysoki. Należy rozważyć kwadratury interpolacyjne dla całek postaci $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ z węzłami będącymi:

(a) zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

(b) zerami wielomianu Czebyszewa drugiego rodzaju $U_{n-1}(x)$, które są punktami ekstremalnymi $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1); \tag{1}$$

(c) wartościami danymi wzorem (1) wraz z $x_0 = 1$ i $x_n = -1$.

Podaj jawne wzory na wagi kwadratur w każdym z wymienionych wypadków. Przetestuj uzyskane kwadratury dla **wielu** różnego rodzaju funkcji f. Skomentuj wyniki.

Literatura

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

(–) Paweł Woźny

[1] Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.