$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ Wszystkie są
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k \sim N(\mu, \sigma^2)$ niezależne

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{n+k}{nk}}}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$
$$\overline{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_k)$$

Suma zmiennych o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny

$$\overline{X} + (-\overline{Y}) \sim N(a, b)$$

Szukamy a

$$E\overline{X} = \frac{1}{n}(EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n) =$$

{ Wiemy, że $EX_i = \mu$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

{ Podobnie $E\overline{Y} = \mu$

$$a = E(\overline{X} - \overline{Y}) = E\overline{X} - E\overline{Y} = \mu - \mu = 0$$

Szukamy b

{ Jeśli $X \perp Y$ to $Cov(X,Y) = 0$ i $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

$$Var(X+Y) = E^2(X+Y) + E(X+Y)^2$$
$$= (EX+EY)^2 + E(X^2 + 2XY + Y^2)$$
$$= (EX)^2 + (EY)^2 + 2EX\,EY + E(X^2) + E(2XY) + E^2(Y)$$
$$= Var(X) + Var(Y) + 2\,EX\,EY + 2E(XY)$$
$$= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$
$$= Var(X) + Var(Y)$$

$$Var(\overline{X}) = Var\left(\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} Var(X_1 + \ldots + X_n) =$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) =$$

{ Wiemy, że $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, czyli
$Var(X_i) = \sigma^2$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

{ Podobnie $Var(\overline{Y}) = \frac{\sigma^2}{k}$

$$b = Var(\overline{X} - \overline{Y}) = Var(\overline{X}) + Var(\overline{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{k} = \sigma^2\frac{k+n}{nk}$$

Czyli $\overline{X} - \overline{Y} \sim N(0, \sigma^2\frac{k+n}{nk})$

{ $X \sim N(0, \sigma^2)$, to $\frac{X}{\sigma} \sim N(0,1)$ ponieważ $Var\frac{X}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}\underbrace{Var X}_{\sigma^2} = 1$

Stąd $\overline{X} - \overline{Y} \sim N(0, \sigma^2\frac{k+n}{nk}) \Rightarrow \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{k+n}{nk}}} \sim N(0,1)$