Trzy razy o indukcji

Antoni Kościelski

29 października 2015

1 Co to są liczby naturalne?

Indukcja matematyczna wiąże się bardzo z pojęciem liczby naturalnej. W szkole zwykle najpierw uczymy się posługiwać liczbami naturalnymi, ale nikt nie stara się ich zdefiniować. Potem poznajemy liczby wymierne i całkowite. W końcu liczymy na liczbach rzeczywistych. Wtedy też zaczynamy klasyfikować liczby i pojawiają się wyjaśnienia, jakie liczby uważamy za naturalne. Podobnie jak w szkole, przyjmiemy, że liczby rzeczywiste są nam doskonale znane, i zdefiniujemy liczby naturalne.

Uproszczona definicja mówi, że 0 jest liczbą naturalną, a pozostałe takie liczby otrzymujemy wielokrotnie dodając do 0 jedynkę. Naturalnymi są więc liczby 0, $1 = 0 + 1$, $2 = 0 + 1 + 1$, 3, 4, itd. Ta definicja nie jest zbyt precyzyjna. Wynika z niej jednak, że zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ ma następujące własności:

1) $0 \in \mathbb{N}$ oraz

2) dla jakiegokolwiek n, jeżeli $n \in \mathbb{N}$, to także $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Każdy zbiór liczb rzeczywistych, który ma te dwie własności, będziemy nazywać induktywnym. Tak więc zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ powinien być induktywny.

Łatwo podać wiele przykładów zbiorów induktywnych. Takim jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, również zbiór nieujemnych liczb rzeczywistych. Zbiory

$$\{0\} \cup (\frac{3}{4}, \infty) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{3}{4}\} = \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \vee x > \frac{3}{4}\}$$

oraz

$$\{0, \frac{1}{2}\} \cup [1, \infty) = \{0, \frac{1}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x \geqslant 1\}$$

też są induktywne. Można zauważyć, że przekrój zbiorów induktywnych również jest induktywny. Wobec tego, przekrój

$$\Big(\{0\} \cup (\frac{3}{4}, \infty)\Big) \cap \Big(\{0, \frac{1}{2}\} \cup [1, \infty)\Big) = \{0\} \cup [1, \infty)$$

jest kolejnym zbiorem induktywnym.

Jeżeli wiemy, że zbiór liczb naturalnych jest szczególnym zbiorem induktywnym, to możemy wymienić wiele liczb naturalnych: takimi są np. 0, 1, 2, 3 itd. Musimy jeszcze jakoś rozstrzygać, czy inne liczby, takie jak $\frac{1}{3}$ lub π, są naturalne. Zgodnie z naszymi intuicjami, za naturalne chcemy uważać jedynie 0 i te liczby, które można otrzymać dodając do 0 liczbę 1. Żadne inne liczby nie powinny zostać uznane za naturalne, a więc zbiór liczb naturalnych powinien być możliwie mały.

Przyjmijmy więc, że zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest najmniejszym zbiorem induktywnym, zawartym w każdym innym zbiorze induktywnym, a więc że spełnia następujące warunki:

1) $\mathbb{N}$ jest induktywny oraz

2) jeżeli X jest jakimkolwiek zbiorem induktywnym, to $\mathbb{N} \subseteq X$.

W szczególności, w tej definicji zostało powiedziane, że jeżeli jakaś liczba nie należy do pewnego zbioru induktywnego, to nie jest ona naturalna. Tak więc liczba $\frac{1}{3}$ nie jest naturalna, gdyż nie należy do zbioru $\{0\} \cup (\frac{3}{4}, \infty)$. Podobnie można pokazać, że π nie jest liczbą naturalną (jak?). Natomiast liczby 0, 1, 2, 3 itd. są naturalne, ponieważ należą do każdego zbioru induktywnego, w tym do $\mathbb{N}$.

Tego typu definicje, polegające na wymienieniu własności definiowanego obiektu, nie muszą być poprawne. Są jednak poprawne dla takich własności, jak definiująca zbiór $\mathbb{N}$. W szczególności, definicja zbioru $\mathbb{N}$ jest poprawna. Jednak w tej chwili tego tematu nie będziemy rozwijać.

2 Zasada indukcji, metoda indukcji

Podstawowa zasada indukcji matematycznej to nic innego, jak drugi punkt z definicji zbioru liczb naturalnych. Jest to wręcz oczywista konsekwencja definicji zbioru $\mathbb{N}$:

Twierdzenie 2.1 (Zasada indukcji matematycznej 1) *Jeżeli X jest jakimkolwiek zbiorem induktywnym, to $\mathbb{N} \subseteq X$.*

Można ją też sformułować nieco inaczej:

Twierdzenie 2.2 (Zasada indukcji matematycznej 2) *Jeżeli X jest jakimkolwiek induktywnym zbiorem liczb naturalnych, to $X = \mathbb{N}$.*

Chyba najczęściej formułuje się ją w następujący sposób:

Twierdzenie 2.3 (Zasada indukcji matematycznej 3) *Przypuśćmy, że φ jest własnością, która może przysługiwać liczbom naturalnym. Załóżmy, że liczba 0 ma własność φ i dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$, z tego że n ma własność φ, wynika, że własność φ przysługuje też liczbie $n + 1$. Wtedy wszystkie liczby naturalne mają własność φ.*

Dowód. Rozważmy zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ma własność } \varphi\}.$$

Z przyjętych założeń bardzo łatwo wynika, że jest to zbiór induktywny. Jako że jest induktywny, zawiera zbiór wszystkich liczb naturalnych. Stąd teza. □

Z tej ostatniej zasady indukcji matematycznej wynika metoda dowodzenia własności liczb naturalnych zwana indukcją matematyczną. Metoda ta pozwala dowodzić wyłącznie uniwersalne własności liczb naturalnych, czyli stwierdzenia postaci "każda liczba naturalna ma własność φ". Zgodnie z tą metodą:

1) Najpierw dowodzimy, że 0 ma własność φ. Jest to tzw. pierwszy krok dowodu indukcyjnego.

2) Drugi krok polega na udowodnieniu, że dla dowolnej liczby naturalnej n, z założenia, że n ma własność φ (czyli z tzw. założenia indukcyjnego) wynika, że także liczba $n+1$ ma własność φ.

Jeżeli uda nam się to zrobić, to na mocy zasady indukcji matematycznej możemy stwierdzić, że każda liczba naturalna ma własność φ. Nic dziwnego, sprawdziliśmy przecież założenia zasady indukcji 3 (twierdzenia 2.3). Jeżeli są prawdziwe, prawdziwa jest też teza.

Indukcyjny dowód stwierdzenia "każda liczba naturalna ma własność φ" w rzeczywistości polega na wykazaniu, że zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{ liczba } n \text{ ma własność } \varphi\}$$

jest induktywny, a więc jest równy zbiorowi $\mathbb{N}$.

Dla przykładu, korzystając z indukcji matematycznej sprawdzimy, że

Fakt 2.4 Dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $\dfrac{n(n+1)}{2}$ też jest naturalna.

Dowód. Własnością φ w tym przypadku jest stwierdzenie "$\dfrac{n(n+1)}{2}$ jest liczbą naturalną". Dla podkreślenia, że rozumiemy je jako własność liczby n zamiast φ piszemy zwykle $\varphi(n)$.

Najpierw powinniśmy dowieść, że 0 ma własność φ, czyli $\varphi(0)$, a więc, że

$$\frac{0(0+1)}{2} \text{ jest liczbą naturalną.}$$

Łatwo się przekonać o prawdziwości tego stwierdzenia. Wystarczy wyliczyć wartość ułamka, jest nią liczba 0, która oczywiście jest naturalna.

W drugim kroku indukcyjnym dla dowolnej liczby naturalnej n tak naprawdę mamy dowieść, że liczba $n+1$ ma własność φ (dowodzimy tezę $\varphi(n+1)$). Mamy więc sprawdzić, czy

$$\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \text{ jest liczbą naturalną.}$$

Robiąc to mamy prawo korzystać z założenia indukcyjnego dla liczby n, które w tym przypadku mówi, że

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ jest liczbą naturalną.}$$

Spróbujmy więc znaleźć związek między tymi dwoma ułamkami:

$$\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1.$$

Pierwszy z tych ułamków jest liczbą naturalną, gdyż jest sumą trzech liczb naturalnych, w tym liczby $\frac{n(n+1)}{2}$, która jest naturalna na mocy założenia indukcyjnego.

Zrobiliśmy wszystko, co jest wymagane przez metodę indukcji matematycznej i w ten sposób dowiedliśmy fakt 2.4. $\square$

Przedstawiony dowód może wydawać się niepełny. Co prawda mówimy o liczbach naturalnych, ale zostały one zdefiniowane w jakiś dziwny sposób i nie jest jasne, czy mają znane własności, na przykład, czy dodając dwie tak rozumiane liczby naturalne otrzymujemy liczbę naturalną. Jeżeli są takie wątpliwości, to oczywiście można je rostrzygnąć, stosując również metodę indukcji matematycznej.

Dowodząc prawie każdą własność liczb naturalnych, gdzieś po drodze będziemy musieli skorzystać z indukcji matematycznej. Jest to bowiem metoda bardzo bliska definicji liczb naturalnych.

2.1 Kolejne wersje zasady indukcji

W tym rozdziale φ będzie własnością, która może przysługiwać liczbom naturalnych.

Znamy wiele innych zasad indukcji. Na przykład:

Twierdzenie 2.5 (Zasada indukcji matematycznej 4) *Załóżmy, że liczba m_0 ma własność φ i dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant m_0$ z tego, że n ma własność φ wynika, że własność φ przysługuje też liczbie $n+1$. Wtedy wszystkie liczby naturalne $\geqslant m_0$ mają własność φ.*

Dowód. Z przyjętych założeń wynika, że zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{jeżeli } n \geqslant m_0, \text{ to } n \text{ ma własność } \varphi\}$$

jest induktywny. Teza wynika ze zwykłej zasady indukcji (np. z twierdzenia 2.2). □

Twierdzenie 2.6 (Zasada indukcji matematycznej 5) *Załóżmy, że liczby 0 i 1 mają własność φ i dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$, z tego, że n i $n+1$ mają własność φ wynika, że własność φ przysługuje też liczbie $n+2$. Wtedy wszystkie liczby naturalne mają własność φ.*

Dowód. Z założeń tej zasady indukcji wynika, że zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{liczby } n \text{ i } n+1 \text{ mają własność } \varphi\}$$

jest induktywny. Ze zwykłej zasady indukcji 2.2 otrzymujemy, że dla każdej liczby naturalnej n, zarówno n, jak i $n+1$ mają własność φ. Tym bardziej wszystkie liczby naturalne mają właśność φ. □

Twierdzenie 2.7 (Zasada indukcji matematycznej 6) *Załóżmy, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ z tego, że wszystkie liczby naturalne $< n$ mają własność φ wynika, że własność φ przysługuje też liczbie n. Wtedy wszystkie liczby naturalne mają własność φ.*

Dowód. Podobny do poprzednich. Z założeń wynika, że zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{wszystkie liczby } i < n \text{ mają własność } \varphi\}$$

jest induktywny (wszystkie liczby naturalne mniejsze od 0 mają własność φ, ponieważ ich nie ma). Wobec tego, dla każdej liczby naturalnej n, wszystkie mniejsze od niej liczby naturalne mają własność φ. Ponieważ każda liczba naturalna jest mniejsza od jakiejś liczby naturalnej, więc każda liczba naturalna ma własność φ. □

To nie są wszystkie zasady indukcji matematycznej. Po zdobyciu pewnego doświadczenia bez trudu formułujemy, weryfikujemy oraz stosujemy odpowiednie wersje.

3 Tzw. indukcja strukturalna

Zasada indukcji matematycznej dotyczy nie tylko liczb naturalnych. Jest ściśle związana raczej nie z tymi liczbami, ale z postacią ich definicji. W ten sposób definiujemy bardzo dużo pojęć informatycznych, a ich własności również dowodzimy przez indukcję.

3.1 Zbiór słów

Formuła rachunku zdań to podstawowe pojęcie logiki matematycznej. Aby to pojęcie zdefiniować musimy mieć zmienne zdaniowe. Będziemy je oznaczać polskimi literami takimi jak p, q, r, ale powinno być ich nieskończenie wiele. Nie jest specjalnie istotne, czym one są, zwykle traktuje się je tak, jak znaki. Musimy je tylko odróżniać od innych znaków (i innych obiektów), w tym nawiasów i spójników. Będziemy stosować dwa nawiasy: otwierający (oraz zamykający). Przyjmujemy, że w formułach występują następujące spójniki: negacja $\neg$ (lub lepiej: symbol oznaczający negację albo symbol negacji), koniunkcja $\wedge$, alternatywa $\vee$, implikacja $\rightarrow$ oraz równoważność $\leftrightarrow$. Czasem do wymienionych dodaje się jeszcze dwa symbole $\top$ oraz $\bot$, które mają oznaczać proste zdania, z których pierwsze jest prawdziwe niezależnie od czegokolwiek, a drugie – fałszywe. Wszystkie te elementy uważamy za znaki, a przynajmniej mówimy o nich jak o znakach.

Ze znaków tworzymy słowa, które bywają nazywane także napisami. Są to skończone ciągi znaków. Zbiór słów będziemy oznaczać literą $\mathcal{S}$. Przykładami słów są $\vee)p\neg\wedge)$ oraz $prr)$. Nic nie wskazuje, że są to sensowne napisy. Bardziej sensownym słowem jest $(\neg p)\vee p$.

Słowa należące do $\mathcal{S}$ możemy łączyć, czyli konkatenować. Jeżeli łączymy dwa ciągi, to otrzymujemy inny ciąg, którego początkowe wyrazy są identyczne z wyrazami pierwszego ciągu, a kolejne – z wyrazami drugiego. Jeżeli połączymy trzy wyżej wymienione słowa w kolejności, w jakiej zostały podane, to otrzymamy napis $\vee)p\neg\wedge)prr)(\neg p) \vee p$.

3.2 Formuły rachunku zdań

Definiując formuły mało precyzyjnie można powiedzieć, że zmienne zdaniowe są formułami, a inne formuły powstają ze zmiennych zdaniowych przez wielokrotne łączenie spójnikami logicznymi wcześniej otrzymywanych w ten sposób napisów. Bardziej precyzyjna definicja wymaga zdefiniowania najpierw zbioru formuł rachunku zdań $\mathcal{F}$.

Zbiór $\mathcal{F}$ będzie jednym ze zbiorów $X \subseteq \mathcal{S}$ o następujących własnościach:

1) wszystkie zmienne zdaniowe należą do X,

2) jednoznakowe słowa $\top$ i $\bot$ należą do X,

3) jeżeli A należy do X, to także $\neg A$ należy do X oraz

4) jeżeli A i B należą do X, to także napisy $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ należą do X.

Napis $(A \vee B)$ oznacza tu złączenie złożonego z jednego znaku słowa (, słowa A, słowa (znaku) $\vee$, słowa B oraz jednoznakowego słowa). Pozostałe wzory z przytoczonej definicji rozumiemy analogicznie. Nietrudno też zauważyć analogie tych własności z występującymi w definicji zbiorów induktywnych.

Jest oczywiście wiele zbiorów mających te cztery własności. Ma je na przykład zbiór $\mathcal{S}$. Także ma je zbiór otrzymany z $\mathcal{S}$ przez usunięcie z niego wszystkich spójników logicznych, czyli jednoznakowych słów takich, jak $\vee$ (każdy znak utożsamiamy z odpowiednim, jednoznakowym słowem). Także te własności ma zbiór, którego elementami są dokładnie zmienne zdaniowe, jednoznakowe słowa $\top$ i $\perp$, oraz przynajmniej dwuznakowe słowa zaczynające się nawiasem otwierającym. Przekrój zbiorów mających własności od 1) do 4) też ma te własności.

Zbiór formuł rachunku zdań $\mathcal{F}$ jest najmniejszym podzbiorem $\mathcal{S}$ mającym własności od 1) do 4). Formuły rachunku zdań to oczywiście elementy zbioru $\mathcal{F}$.

Definicję zbioru $\mathcal{F}$ wyrazimy raz jeszcze w zwarty sposób, trochę innym językiem. Przyjmujemy, że

1) wszystkie zmienne zdaniowe należą do $\mathcal{F}$,
2) słowa $\top$ i $\perp$ należą do $\mathcal{F}$,
3) jeżeli A należy do $\mathcal{F}$, to także $\neg A$ należy do $\mathcal{F}$,
4) jeżeli A i B należą do $\mathcal{F}$, to także napisy $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ należą do $\mathcal{F}$ oraz
5) zbiór $\mathcal{F}$ jest zawarty w każdym zbiorze mający cztery wyżej wymienione własności.

Wyżej wyrażoną, bardzo precyzyjną definicję formuły rachunku zdań podaje się często w postaci uproszczonej, takiej jak:

1) wszystkie zmienne zdaniowe są formułami (rachunku zdań),
2) słowa $\top$ i $\perp$ są formułami,
3) jeżeli A jest formułą, to także $\neg A$ jest formułą,
4) jeżeli A i B są formułami, to także napisy $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ są formułami oraz
5) żadne inne słowa, poza otrzymanymi zgodnie z wyżej wymienionymi regułami, nie są formułami.

Tę ostatnią definicję czasami upraszcza się jeszcze bardziej pomijając własność 5, uważaną za tak oczywistą, że nie warto jej przytaczać, mimo że jest ona niezbędna.

3.3 Twierdzenie o dowodzeniu przez indukcję

Symbol Φ będzie oznaczać własność, która może przysługiwać formułom. Taką własnością jest na przykład stwierdzenie, że (w formule) znajduje się tyle samo nawiasów otwierających, co zamykających. Innym przykładem może być stwierdzenie, że łączna liczba wystąpień zmiennych oraz symboli $\top$ i $\perp$ jest (w formule) o jeden większa od liczby wystąpień spójników dwuargumentowych.

Formuły są skończonymi ciągami. Dla takich ciągów jest zdefiniowane pojęcie długości. Dzięki temu własności formuł można dowodzić przez zwykłą indukcję. Aby dowieść, że

$$\text{każda formuła ma własność } \Phi,$$

wystarczy przez indukcję wykazać, że

$$\text{dla dowolnej liczby naturalnej } n, \text{ każda formuła o długości } \leqslant n \text{ ma własność } \Phi.$$

W takich rozumowaniach można też wykorzystać specjalną zasadę indukcji pozwalającą dowodzić własności formuł, wynikającą z definicji zbioru formuł $\mathcal{F}$ i wykorzystującą następujące

Twierdzenie 3.1 (Zasada indukcji dla $\mathcal{F}$) *Przypuśćmy, że*

1) *wszystkie zmienne zdaniowe mają własność Φ,*

2) *formuły $\top$ i $\bot$ mają własność Φ,*

3) *jeżeli formuła A ma własność Φ, to także $\neg A$ ma tę własność,*

4) *jeżeli formuły A i B mają własność Φ, to także $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ mają własność Φ.*

Wtedy wszystkie formuły rachunku zdań mają własność Φ (czyli $\forall\varphi \in \mathcal{F}\ \Phi(\varphi)$).

Dowód. Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu zasady indukcji 3 dla liczb naturalnych (twierdzenie 2.3). Rozważmy zbiór

$$X = \{\varphi \in \mathcal{F} : \varphi \ \text{ ma własność } \ \Phi\}.$$

Przyjęte założenia stwierdzają, że ten zbiór ma cztery pierwsze własności wymagane w definicji od zbioru wszystkich formuł $\mathcal{F}$. Zbiór $\mathcal{F}$, jako najmniejszy zbiór o tych własnościach, jest zawarty w zbiorze X. To zawieranie w szczególności oznacza, że wszystkie elementy zbioru $\mathcal{F}$ mają własność Φ. $\square$

3.4 Przykłady dowodów indukcyjnych

Korzystając z twierdzenia 3.1 bez trudu wyprowadzamy dla dowolnej formuły obie własności Φ przytoczone jako przykłady. W szczególności, ani zmienne zdaniowe, ani znaki $\top$ i $\bot$ (a właściwie odpowiednie, jednoliterowe słowa) nie zawierają ani nawiasów otwierających, ani zamykających. W tych formułach jest tyle samo nawiasów obydwóch rodzajów (dokładniej: jest po 0 nawiasów). Jeżeli w słowach A i B jest tyle samo nawiasów otwierających, co zamykających, to to samo jest prawdą dla napisu $(A \wedge B)$, ponieważ do A i B dopisaliśmy (oprócz znaku koniunkcji) po jednym nawiasie otwierającym i zamykającym. Analogiczne argumenty są słuszne dla formuł budowanych za pomocą pozostałych spójników. Zgodnie z twierdzeniem 3.1, w dowolnej formule jest więc tyle samo nawiasów otwierających, co zamykających.

Ważniejszą własność zbioru formuł $\mathcal{F}$ wyraża następne twierdzenie. Jest dość oczywiste. Co więcej, analogiczne twierdzenia są prawdziwe także dla innych, podobnie definiowanych zbiorów. Na przykład, że każda liczba naturalna jest albo równa 0, albo można ją otrzymać dodając 1 do innej liczby naturalnej (lub innymi słowy, odejmując 1 od dowolnej niezerowej liczby naturalnej otrzymujemy liczbę naturalną). Twierdzenie to wyraża pewnien fakt charakterystyczny dla zbiorów definiowanych w rozważany sposób.

Twierdzenie 3.2 *Dowolna formuła rachunku zdań jest albo zmienną zdaniową, albo jedną z formuł $\top$ lub $\bot$, albo negacją (czyli słowem postaci $\neg A$ dla pewnej formuły A), albo koniunkcją (czyli jest postaci $(A \wedge B)$ dla pewnych formuł A i B), albo też jest alternatywą, implikacją lub równoważnością.*

Dowód. Twierdzenie to mówi, że dowolna formuła X ma następującą własność $\Phi(X)$:

X jest zmienną zdaniową lub $X = \top$ lub $X = \bot$

lub istnieje $A \in \mathcal{F}$ takie, że $X = \neg A$

lub istnieją $A, B \in \mathcal{F}$ takie, że

$$[X = (A \wedge B) \text{ lub } X = (A \vee B) \text{ lub } X = (A \to B) \text{ lub } X = (A \leftrightarrow B)]\,.$$

W oczywisty sposób przekonujemy się, że dla własności Φ spełnione są założenia twierdzenia 3.1. Na przykład, jeżeli A jest zmienną zdaniową, to zachodzi własność $\Phi(A)$. Tak jest, ponieważ poprzednik tej implikacji jest jednym z członów alternatywy, jaką jest własność Φ. Podobnie, jeżeli A jest formułą, to napis $\neg A$ ma jedną z dopuszczalnych postaci wymienionych we własności Φ. Analogiczne argumenty są słuszne w pozostałych przypadkach. Tak więc teza jest konsekwencją twierdzenia 3.1. □

Przez indukcję można też dowieść kolejną własność formuł rachunku zdań:

Twierdzenie 3.3 *Jeżeli A i B są formułami rachunku zdań i $AY = BZ$ dla pewnych słów Y i Z, to $A = B$.*

Dowód. Mamy więc wykazać, że jeżeli przez dopisanie do formuł pewnych znaków, być może wielu, potrafimy uzyskać identyczne napisy, to te formuły są identyczne. Aby to zrobić weźmy własność $\Phi(X)$ stwierdzającą, że

$$\text{dla każdego } B \in \mathcal{F}, \text{ dla wszystkich } Y, Z \in \mathcal{S} \; [\text{jeżeli } XY = BZ, \text{ to } X = B].$$

Teraz wystarczy sprawdzić, że spełnione są założenia twierdzenia 3.1. Jest to proste, ale dość żmudne i wymaga skorzystania z poprzedniego twierdzenia. □

Oba wspomniane twierdzenia wyrażają już ważne własności formuł rachunku zdań. Formuły zostały zdefiniowane w taki sposób, że z wyjątkiem najprostszych, a więc zmiennych zdaniowych i formuł $\top$ i $\bot$, dzielą się na rozłączne zbiory negacji, koniunkcji, alternatyw, implikacji i równoważności, w szczególności żadna formuła nie może być jednocześnie, powiedzmy, koniunkcją i alternatywą. Co więcej, jeżeli na przykład jakaś formuła jest koniunkcją, to daje się przedstawić jako koniunkcja w dokładnie jeden sposób, a więc jej człony są jednoznacznie wyznaczone.

Przytoczone własności formuł rachunku zdań są konsekwencją zapisania w definicji $\mathcal{F}$ wymogu pełnego nawiasowania. W praktyce formuły definiujemy inaczej, wprowadzając między innymi różne zasady opuszczania nawiasów.

4 Indukcja w postaci bardzo abstrakcyjnej

Będziemy w tym rozdziale rozważać zbiór $\mathbb{A}$ i dowolną relację R określoną w zbiorze $\mathbb{A}$, czyli zawartą w zbiorze $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ (spełniającą warunek $R \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$). Jeżeli mamy mówić o indukcji, to byłoby dobrze podać jakąś interpretację tej sytuacji.

Możemy wyobrażać sobie, że mamy zbiór $\mathbb{A}$, w którym są określone pewne operacje pozwalające – mając dane jakieś elementy $\mathbb{A}$ – konstruować inne elementy $\mathbb{A}$. W zbiorze $\mathcal{S}$ jedna z takich operacji mogłaby parze słów X i Y przyporządkowywać napis $(X \wedge Y)$. W zbiorze $\mathbb{A}$ są jakieś takie operacje, ale nie są jasno określone. Nie wiemy, ile ich jest, nie znamy liczb argumentów tych operacji. Co więcej, dopuszczamy operacje o zmiennej liczbie argumentów, wykorzystujące nieskończenie wiele argumentów, także zależne od dowolnego zbioru argumentów ze zbioru $\mathbb{A}$ itp. Relacja R ma wyrażać związek między argumentami i rezultatami wszystkich rozważanych operacji.

Dokładniej, warunek $yR\,x$ będziemy interpretować jako stwierdzenie, że

konstruując x użyliśmy y jako argumentu zastosowanej operacji.

Wobec tego, dla $x \in \mathbb{A}$ bardzo ważny będzie zbiór[1]

$$R^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{A} : yR\,x\}.$$

Można go uważać za zbiór argumentów potrzebnych do utworzenia elementu x.

4.1 Twierdzenie o dowodzeniu przez indukcję

Zajmując się indukcją posługiwaliśmy się dotychczas zbiorami induktywnymi. Teraz będziemy rozważać zbiory R-induktywne, czyli zbiory $X \subseteq \mathbb{A}$ spełniające następujący warunek:

$$\text{dla dowolnego } x \in \mathbb{A}, \text{ jeżeli } R^{-1}(x) \subseteq X, \text{ to } x \in X. \tag{1}$$

Jak zwykle, interesuje nas najmniejszy zbiór R-induktywny (spełniający warunek (1)), zawarty w każdym innym takim zbiorze. Dalej oznaczamy go symbolem $\mathbb{A}_0$.

Podana definicja $\mathbb{A}_0$ jest poprawna pod warunkiem, że w jakiś sposób zostanie wykazane istnienie tego zbioru[2]. Można go łatwo skonstruować. Trzeba wiedzieć, że jest przynajmniej jeden zbiór spełniający warunek (1). Takim jest na przykład zbiór $\mathbb{A}$. Ponadto powinniśmy wiedzieć, że przekrój dwóch zbiorów, a także dowolnej ilości zbiorów spełniających warunek (1) też spełnia ten warunek. W tej sytuacji $\mathbb{A}_0$ można zdefiniować jako przekrój wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{A}$ spełniających warunek (1).

Jak można się spodziewać, także własności elementów najmniejszego zbioru R-induktywnego $\mathbb{A}_0$ można dowodzić przez indukcję wykorzystując

Twierdzenie 4.1 *Niech φ będzie własnością, która może przysługiwać elementom zbioru $\mathbb{A}_0$. Przypuśćmy, że dla każdego elementu $x \in \mathbb{A}_0$ z tego, że wszystkie elementy zbioru $R^{-1}(x)$ mają własność φ wynika, że także element x ma własność φ. Wtedy wszystkie elementy zbioru $\mathbb{A}_0$ mają własność φ.*

Dowód. Weźmy zbiór

$$X = \{x \in \mathbb{A}_0 : x \text{ ma własność } \varphi\}.$$

Oczywiście, jest on zawarty w zbiorze $\mathbb{A}_0$. Dowiedziemy, że spełnia warunek (1). Ponieważ $\mathbb{A}_0$ jest najmniejszym zbiorem spełniającym ten warunek, stąd otrzymamy, że $\mathbb{A}_0 \subseteq X$. Wobec tego, każdy element zbioru $\mathbb{A}_0$ należy do X i – w szczególności – ma własność φ.

Dowód, że X spełnia warunek (1) jest teraz nieco bardziej skomplikowany. Weźmy $x \in \mathbb{A}$ i załóżmy, że $R^{-1}(x) \subseteq X$.

Z definicji X otrzymujemy, że $R^{-1}(x) \subseteq \mathbb{A}_0$, a ponieważ $\mathbb{A}_0$ spełnia warunek (1), więc $x \in \mathbb{A}_0$. Wszystkie elementy zbioru $R^{-1}(x)$ mają własność φ (na mocy zawierania $R^{-1}(x) \subseteq X$). Dla elementu x możemy więc skorzystać z założenia twierdzenia. Wobec tego, x ma własność φ i w konsekwencji x spełnia oba warunki wymagane od elementów zbioru X. Tak więc $x \in X$. W ten sposób dowiedliśmy spełnianie warunku (1) przez X.$\square$

[1] Oczywiście, zapis $yR\,x$ oznacza, że $\langle y, x\rangle \in R$. Wzór $R^{-1}(x)$ oznacza przeciwobraz $R^{-1}(\{x\})$ zbioru $\{x\}$ wyznaczony przez relację R i ma taką postać dla uproszczenia zapisu.

[2] Ta sama uwaga dotyczy także zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathcal{F}$, a także innych zbiorów podobnie definiowanych (definiowanych przez indukcję). Zbiór $\mathbb{A}_0$ też jest definiowany przez indukcję, bardzo ogólną. Szkic dowodu istnienia takich zbiorów jest taki sam we wszystkich omawianych przypadkach.

4.2 Drobne przykłady i najprostsza własność

Są przynajmniej dwa interesujące przykłady rozważanej sytuacji.

Możemy wziąć jako $\mathbb{A}$ zbiór $\mathbb{R}^*$ niezerowych liczb rzeczywistych i relację R w tym zbiorze, dla której yRx oznacza, że $y = x - 1$. Oczywiście, $R^{-1}(1) = \emptyset$ oraz $R^{-1}(x) = \{x-1\}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^*$ różnych od 1. W tym przypadku, $\mathbb{A}_0$ jest zbiorem dodatnich liczb naturalnych, a twierdzenie 4.1 redukuje się do zwykłej, szkolnej zasady indukcji.

Jeżeli weźmiemy $\mathbb{A} = \mathbb{N}$ i zwykła relację mniejszości $<$ jako R, to wtedy $R^{-1}(n) = \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$ i twierdzenie 2.7 pozwala dowieść, że $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A} = \mathbb{N}$. W tej sytuacji twierdzenie 4.1 mówi to samo, co szósta zasada indukcji matematycznej (twierdzenie 2.7).

Ponadto, każdy element najmniejszego zbioru zamkniętego ze względu na pewne operacje musi zostać otrzymany w wyniku stosowania tych operacji do innych elementów tego zbioru. Tę charakterystyczną własność zbiorów definiowanych przez indukcję wyraża na przykład twierdzenie 3.2. Analogiczne twierdzenie zachodzi także dla zbioru $\mathbb{A}_0$. Zgodnie z nim, jeżeli w $\mathbb{A}_0$ znajdzie się jakiś element x, to w tym zbiorze muszą się znaleźć także wszystkie elementy zbioru $R^{-1}(x)$, czyli wszystkie elementy potrzebne do skonstruowania x. Nie są to wszystkie interesujące własności takich zbiorów. Na razie proponuję sprawdzić, że z twierdzenia 4.1 można wyprowadzić następujące

Twierdzenie 4.2 *Dla wszystkich $x \in \mathbb{A}_0$ zbiór $R^{-1}(x)$ jest zawarty w $\mathbb{A}_0$.* □

4.3 Elementy minimalne i relacje regularne

Nadal będziemy zajmować się dowolną relacją $R \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ i najmniejszym zbiorem R-induktywnym $\mathbb{A}_0$. Dalsze rozważania wymagają wprowadzenia pojęcia elementu minimalnego. Jest to znane pojęcie, zwykle wykorzystywane dla relacji porządkujących, które – w zależności od podejścia – są albo zwrotne, albo antyzwrotne.

Przypuśćmy, że $X \subseteq \mathbb{A}$. Elementem R-minimalnym w zbiorze X nazywamy taki $x \in X$, dla którego nie istnieje $y \in X$ spełniający warunek yRx. Mówiąc inaczej: $x \in X$ jest elementem R-minimalnym w zbiorze X, jeżeli zbiory $R^{-1}(x)$ oraz X są rozłączne. Zwykle tak definiujemy elementy minimalne dla relacji antyzwrotnych. Teraz tę definicję będziemy stosować dla dowolnych relacji, nawet dla porządków zwrotnych.

Pojęcie elementu minimalnego jest wykorzystywane w definicji relacji regularnych. Przyjmujemy, że relacja $R \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ jest regularna, jeżeli w każdym niepustym podzbiorze zbioru $\mathbb{A}$ jest element R-minimalny.

Najbardziej znanym przykładem relacji regularnej jest relacja mniejszości $<$ w zbiorze liczb naturalnych, patrz twierdzenie 4.6.

4.4 Regularność a induktywność

Regularność ściśle wiąże się z induktywnością, a świadczy o tym następujący

Lemat 4.3 *Jeżeli w zbiorze $X \subseteq \mathbb{A}$ nie ma elementu R-minimalnego, to jego dopełnienie $\mathbb{A} \setminus X$ jest zbiorem R-induktywnym.*

Dowód. Niech X będzie podzbiorem $\mathbb{A}$ bez elementu R-minimalnego. Aby pokazać, że $\mathbb{A} \setminus X$ spełnia warunek (1), weźmy dowolny $x \in \mathbb{A}$ i załóżmy, że $R^{-1}(x) \subseteq \mathbb{A} \setminus X$.

Mamy dowieść, że $x \in \mathbb{A} \setminus X$, a właściwie, że $x \notin X$. Jest to oczywiste, gdyż w przeciwnym razie x byłby elementem R-minimalnym w zbiorze X, jako że należałby do X i – na mocy założenia – spełniałby warunek $R^{-1}(x) \cap X = \emptyset$. □

Jeszcze dobitniej związki między induktywnością i regularnością wyraża fakt, że lemat 4.3 można odwrócić, oba występujące w nim warunki są logicznie równoważne, a właściwie mówią to samo. Ten fakt nie jest w tej chwili potrzebny. Wystarczy nam

Wniosek 4.4 *Jeżeli w zbiorze $X \subseteq \mathbb{A}$ nie ma elementu R-minimalnego, to jest on rozłączny z $\mathbb{A}_0$.* $\square$

Twierdzenie 4.5 *W każdym niepustym podzbiorze $\mathbb{A}_0$ jest element R-minimalny. Stąd relacja R ograniczona do zbioru $\mathbb{A}_0$, czyli $R \cap \mathbb{A}_0 \times \mathbb{A}_0$, jest regularna.*

Dowód. Twierdzenie to łatwo wyprowadza się z wniosku 4.4. $\square$

Tak więc relacja „konstruowania” coraz to nowych elementów zbiorów definiowanych indukcyjnie jest zawsze regularna. Czasem jest to bardzo ważny rezultat. W szczególności, stosując twierdzenie 4.5 dla $\mathbb{A} = \mathbb{N}$ i R będącego relacją zwykłego porządku w zbiorze liczb naturalnych otrzymuje bardzo ważną zasadę minimum:

Twierdzenie 4.6 (Zasada minimum) *Relacja zwykłego porządku w zbiorze liczb naturalnych jest regularna, a więc w każdym niepustym zbiorze liczb naturalnych jest element minimalny (który w tym przypadku jest też najmniejszy).*

4.5 Indukcja dla relacji regularnych

Biorąc dowolny zbiór $\mathbb{A}$, dla regularnej relacji $R \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ łatwo możemy ustalić zbiór $\mathbb{A}_0$. Zachodzi bowiem

Twierdzenie 4.7 *Jeżeli $R \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ jest relacją regularną, to $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}$.*

Dowód. Załóżmy, że R jest relacją regularną, ale $\mathbb{A}_0$ jest właściwym podzbiorem $\mathbb{A}$. Wtedy $\mathbb{A} \setminus \mathbb{A}_0 \neq \emptyset$. Niech $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{A}_0$ będzie elementem R-minimalnym w tym zbiorze. Wobec tego, zbiór $R^{-1}(x) \subseteq \mathbb{A}$ jest rozłączny z $\mathbb{A} \setminus \mathbb{A}_0$. Implikuje to, że $R^{-1}(x) \subseteq \mathbb{A}_0$. Ponieważ $\mathbb{A}_0$ spełnia warunek (1), więc $x \in \mathbb{A}_0$. Przeczy to jednak wyborowi x. $\square$

Jako wniosek stąd otrzymujemy

Twierdzenie 4.8 (Zasada indukcji dla relacji regularnych) *Niech φ będzie własnością, która może przysługiwać elementom zbioru $\mathbb{A}$, a $R \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ – relacją regularną. Przypuśćmy, że dla każdego elementu $x \in \mathbb{A}$ z tego, że wszystkie elementy zbioru $R^{-1}(x)$ mają własność φ wynika, że także tę własność ma element x. Wtedy wszystkie elementy zbioru $\mathbb{A}$ mają własność φ.*

Dowód. Jest to oczywista konsekwencja zasady indukcji 4.1 i twierdzenia 4.7. $\square$

4.6 Zakończenie

Nie zostały tu przedstawione wszystkie możliwe rodzaje zasad indukcji. Brakuje chyba zasad wykorzystywanych w sytuacjach, w których poszczególne elementy są konstruowane na wiele sposobów. Na przykład zbiór liczb całkowitych może zostać zdefiniowany (lub scharakteryzowany) jako najmniejszy spośród zbiorów $X \subseteq \mathbb{R}$ spełniających następujące warunki:

1) $1 \in X$,

2) jeżeli $m, n \in X$, to $m - n \in X$.

Własności liczb całkowitych można więc, przynajmniej teoretycznie, dowodzić korzystając z zasady indukcji wynikającej z takiej definicji.