Algebra macierzy

Geoinformacja, studia stacjonarne II stopnia, I rok

wyklad

1 Macierze - pojęcia podstawowe

Niech dane będą liczby naturalne m, n.

Definicja 1 *Macierzą rzeczywistą wymiaru $m \times n$ nazywamy prostokątna tablicę, której elementami są liczby rzeczywiste, ustawione w m wierszach i n kolumnach*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Macierze zwykle oznaczac będziemy wielkimi literami alfabetu, np. A, B, X. Element macierzy A występujący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie oznaczać będziemy symbolem $a_{i,j}$. Macierz A wymiaru $m \times n$ będziemy także oznaczać symbolem $[a_{i,j}]_{m\times n}$ lub krótko $[a_{i,j}]$. Macierz $A = [a_{i,j}]_{1\times n}$ ($A = [a_{i,j}]_{n\times 1}$) nazywać będziemy wektorem lub wektorem-wierszem (wektorem-kolumną) n-wymiarowym.

Definicja 2 *Macierz wymiaru $n \times n$ nazywamy macierzą kwadratową stopnia n; wyrazy $a_{i,i}$ takiej macierzy tworzą przekątną.*

Przyklad 3 *Przykładami macierzy są:*

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2,44 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 6 & \sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & \frac{3}{4} & \pi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}.$$

Przyklad 4 *Przykładami macierzy kwadratowej są*

$$[3], \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2,44 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja 5 *Macierz, której wszystkie elementy są równe zero nazywamy zerową, a macierz kwadratową, której wyrazy nie leżące na przekątnej są równe* 0*, nazywamy diagonalną. Macierz diagonalną stopnia* n*, której wszystkie elementy leżące na przekątnej są równe* 1*, nazywamy macierzą jednostkową stopnia* n *i oznaczamy symbolem* I_n*.*

Przyklad 6 *Przykładami macierzy zerowej są*

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

natomiast przykładami macierzy diagonalnej są

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

Macierzą jednostkową stopnia 3 *jest macierz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja 7 *Macierzą trójkątną dolną (górną) nazywamy macierz, której wszystkie elementy leżące nad (pod) przekątną są równe* 0.

Przykład 8 *Przykładami macierzy trójkątnych są:*

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3,3 & 1 & 5 \\ 0 & 0,5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

2 Działania na macierzach

Niech dane będą macierze $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$, $B = [b_{i,j}]_{m\times n}$.

Definicja 9 *Sumą* $A + B$ *macierzy* A *i* B *nazywamy macierz* $C = [c_{i,j}]_{m\times n}$, *gdzie*

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

dla $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, *tzn.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & ... & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

W analogiczny sposób definiujemy różnicę macierzy.

Przykład 10

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}.$$

Definicja 11 *Iloczynem macierzy* $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ *przez liczbę* $\alpha \in \mathbb{R}$ *nazywamy macierz* $C = [c_{i,j}]_{m\times n}$, *gdzie*

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j}$$

dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, *tzn.*

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przyklad 12

$$10 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 40 \\ 60 & 80 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

Własności powyższych działań na macierzach opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 13 *Niech A, B, C będą macierzami tgo samego wymiaru i α, β liczbami rzeczywistymi. Wówczas*

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = 0 + A = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$
7. $1 \cdot A = A$
8. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Uwaga 14 *W powyższym twierdzeniu znak sumy można zastąpić znakiem różnicy (z wyjątkiem własności 4)*

Określmy jeszcze jedno działanie na macierzach.

Definicja 15 *Iloczynem macierzy* $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$, $B = [b_{i,j}]_{n\times k}$ *nazywamy macierz* $C = [c_{i,j}]_{m\times k}$, *gdzie*

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + ... + a_{i,n}b_{n,j}$$

dla $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k$.

Przyklad 16

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 6 + 3\cdot 0 & 1\cdot 4 + 2\cdot 8 + 3\cdot 10 \\ 4\cdot 2 + 5\cdot 6 + 6\cdot 0 & 4\cdot 4 + 5\cdot 8 + 6\cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 50 \\ 38 & 116 \end{bmatrix}.$$

Własności iloczynu macierzy opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 17 *Niech* A, B *i* C *będą macierzami odpowiednich wymiarów,* α *liczbą rzeczywistą. Wówczas*

1. $A(B \pm C) = AB \pm AC$
2. $(A \pm B)C = AC \pm BC$
3. $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$
4. $(AB)C = A(BC)$
5. $AI_n = I_m A = A$

Uwaga 18 *Na ogół, mnożenie macierzy kwadratowych nie jest przemienne, tzn.* $AB \neq BA$.

Niech $A = [a_{i,j}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$. Macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz $B = [b_{i,j}]$ wymiaru $n \times m$ taką ,że

$$b_{i,j} = a_{j,i}$$

dla $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Macierz transponowaną do macierzy A oznaczać będziemy symbolem A^T.

Uwaga 19 *Przy transponowaniu macierzy, kolejne jej wiersze stają się kolejnymi kolumnami macierzy transponowanej.*

Przyklad 20

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \ A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Własności operacji transponowania macierzy opisuje nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie 21 *Niech A, B będą macierzami odpowiednich wymiarów, α liczbą rzeczywistą, n - liczbą naturalną. Wówczas*

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^n)^T = (A^T)^n$

W dalszym ciągu, macierz kwadratową A nazywać będziemy macierzą symetryczną (antysymetryczną), gdy $A^T = A$ $(A^T = -A)$.

3 Wyznacznik macierzy

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy kwadratowej $A = [a_{i,j}]$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $\det A$, zadaną w sposób indukcyjny:

1. jeśli macierz A ma stopień $n = 1$, to $\det A = a_{1,1}$

2. jeśli macierz A ma stopień $n \geq 2$, to

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + ... + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n},$$

   gdzie $A_{i,j}$ oznacza macierz stopnia $n-1$ powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wyznacznik macierzy A oznaczany jest także symbolem $|A|$.

Reguła obliczania wyznacznika macierzy stopnia drugiego:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

Przyklad 22

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = 3 \cdot 7 - (-2) \cdot 4 = 29$$

Reguła obliczania wyznacznika macierzy stopnia trzeciego:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + ibd).$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

Przyklad 23

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & -7 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} = (-12 - 96 - 35) - (-8 + 56 + 90) = -5.$$

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & -7 \end{matrix}$$

Uwaga 24 *Powyższej reguły nie można stosować do obliczania wyznaczników macierzy wyższych stopni.*

Interpretacja geometryczna wyznacznika drugiego stopnia: Jeśli D jest równoległobokiem rozpietym na wektorach $\overrightarrow{u} = (a, b)$, $\overrightarrow{v} = (c, d)$, to pole $|D|$ tego równoległoboku wyraża sie wzorem

$$|D| = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right|.$$

Interpretacja geometryczna wyznacznika trzeciego stopnia: Jeśli V jest równoległościanem rozpietym na wektorach $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$, $\overrightarrow{v} = (d, e, f)$, $\overrightarrow{w} = (g, h, i)$, to objętość $|V|$ tego równoległościanu wyraża sie wzorem

$$|V| = \left| \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right|.$$

Definicja 25 *Niech $A = [a_{i,j}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. Dopełnieniem algebraicznym elementu $a_{i,j}$ nazywamy liczbę*

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Ważnym, z praktycznego punktu widzenia jest następujące twierdzenie **o rozwinięciu Laplace'a** wyznacznika.

Twierdzenie 26 *Niech $A = [a_{i,j}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$ i niech $1 \leq i, j \leq n$ będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Wówczas,*

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + ... + a_{in}D_{in} = a_{1j}D_{1j} + ... + a_{nj}D_{nj}.$$

Wyznacznik macierzy trójkątnej dolnej lub górnej jest równy iloczynowi elementów leżących na głównej przekątnej:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot ... \cdot a_{nn},$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot ... \cdot a_{nn}.$$

Prawdziwe jest także twierdzenie ogólniejsze.

Twierdzenie 27 *Wyznacznik macierzy*

$$\begin{bmatrix} A_1 & dow. & ... & dow. \\ 0 & A_2 & ... & dow. \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & A_k \end{bmatrix},$$

gdzie A_1,...,A_k są macierzami kwadratowymi, niekoniecznie tych samych stopni, a symbol „0” oznacza macierz zerową, zaś symbol „dow.” - dowolną macierz odpowiednich wymiarów, wyraża się wzorem

$$\det\begin{bmatrix} A_1 & dow. & ... & dow. \\ 0 & A_2 & ... & dow. \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & A_k \end{bmatrix} = \det A_1 \cdot ... \cdot \det A_k$$

Przyklad 28

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 2 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} = 2\cdot(-11)\cdot(-5) = 110$$

Do obliczania wyznacznika macierzy można wykorzystać następujace własności.

I. Wyznacznik macierzy kwadratowej, zawierającej zerową kolumnę (zerowy wiersz) jest równy 0

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & ... & 0 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & 0 & ... & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} = 0.$$

II. Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeśli przestawimy dwie kolumny (dwa wiersze)

$$\det\begin{bmatrix} & a_{1i} & ... & a_{1j} & \\ & a_{2i} & ... & a_{2j} & \\ ... & \vdots & ... & \vdots & ... \\ & a_{ni} & ... & a_{nj} & \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} & a_{1j} & ... & a_{1i} & \\ & a_{2j} & ... & a_{2i} & \\ ... & \vdots & ... & \vdots & ... \\ & a_{nj} & ... & a_{ni} & \end{bmatrix}.$$

III. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie jednakowe kolumny (wiersze) jest równy zero

$$\det\begin{bmatrix} & \alpha & ... & \alpha & \\ & \beta & ... & \beta & \\ ... & \vdots & ... & \vdots & ... \\ & \omega & ... & \omega & \end{bmatrix} = 0$$

IV. Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (wiersza) macierzy kwadratoweuj zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ca_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & ca_{2j} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & ca_{nj} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} = c\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Przyklad 29

$$\det\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 7 & \frac{4}{2} \\ 2 & \frac{6}{2} \end{bmatrix}$$

V. Wyznacznik macierzy kwadratowej, w której j-ta kolumna (i-ty wiersz) jest sumą dwóch wektorów jest równy sumie wyznaczników dwóch macierzy, w których j-te kolumny (i-te wiersze) są równe składowym wektorom

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j}+a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+a_{nj'} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj'} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Przyklad 30

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1+1 \\ 4 & 1+2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

VI. Wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeśli do elementów dowolnej kolumny (wiersza) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (wiersza) tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+ca_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+ca_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+ca_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Przyklad 31

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 5+2\cdot 8 & 2 & 8 \\ 1+2\cdot 7 & 3 & 7 \\ 4+2\cdot 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

VII. Wyznacznik danej macierzy kwadratowej i wyznacznik macierzy doń transponowanej są równe

$$\det A = \det A^T.$$

Przydatne jest nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie 32 *Jeśli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Wniosek 33 *Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy*

$$\det(A^n) = (\det A)^n.$$

Uwaga 34 *Na ogół wyznacznik sumy macierzy nie jest równy sumie wyznaczników.*

Algorytm Gaussa oblicznia wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 3$ i niech $a_{11} \neq 0$ Wówczas stopień wyznacznika można obniżyć, stosując następującą procedurę:

$$\det A \overset{\frac{w_1}{a_{11}}}{=} a_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{w_2 - a_{21}w_1 \\ w_3 - a_{31}w_1 \\ \vdots}}{=} a_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

gdzie $a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}$ (zamiast elementu a_{11} można wybrać inny niezerowy element i przekształcać odpowiednie wiersze).

Przyklad 35

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{w_1}{a_{11}}}{=} 2\det\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{w_2-3w_1 \\ w_3+4w_1}}{=} 2\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 18 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= 2\cdot\det\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} 2(-63-18) = -162$$

4 Macierz odwrotna

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz A^{-1}, która spełnia warunek

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n.

Uwaga 36 *Dowodzi się, że jeśli istnieje macierz B taka, że $AB = I_n$, to również $BA = I_n$.*

Jeżeli macierz A ma macierz odwrotną to nazywamy ją odwracalną. Macierz odwrotna jest określona jednoznacznie.

Przyklad 37 *Nie istnieje macierz odwrotna do macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Istotnie, bowiem gdyby istniała macierz $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ taka, że $AB = I_2$, to w szczególności byłoby*

$$0\cdot b_{11} + 0\cdot b_{21} = 1,$$

co nie jest prawdą dla żadnych liczb b_{11}, b_{21}.

Przyklad 38 *Istnieje macierz odwrotna do macierzy* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Rzeczywiście, istnieją bowiem liczby* b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} *spełniające równości*

$$\begin{aligned} 3 \cdot b_{11} + 2 \cdot b_{21} &= 1 \\ 3 \cdot b_{12} + 2 \cdot b_{22} &= 0 \\ 0 \cdot b_{11} + 1 \cdot b_{21} &= 0 \\ 0 \cdot b_{12} + 1 \cdot b_{22} &= 1 \end{aligned}$$

(wystarczy rozwiązać układ równań złożony z pierwszego i trzeciego równania oraz układ równań złożony z drugiego i czwartego równania). Macierzą odwrotną do A *jest macierz* $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definicja 39 *Macierz kwadratową* A *nazywamy macierzą osobliwą, gdy*

$$\det A = 0.$$

W przeciwnym przypadku mówimy, ze macierz A *jest nieosobliwa.*

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 40 *Macierz kwadratowa* A *jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. W takim przypadku*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T$$

gdzie D_{ij} *oznacza dopełnienie algebraiczne elementu* a_{ij} *macierzy* A.

Przyklad 41

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Własności macierzy odwrotnych opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 42 *Jeśli macierze A, B tego samego wymiaru są odwracalne, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, to A^{-1}, A^T, AB, αA, A^n także są odwracalne, przy czym*

1. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}(A^{-1})$
6. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Algorytm Gaussa wyznaczania macierzy odwrotnej

Można także określić bezwyznacznikowy algorytm znajdowania macierzy odwrotnej, nazywany metodą przekształceń elementarnych lub algorytmem Gaussa (przy założeniu,że macierz odwrotna istnieje). Polega on na sprowadzeniu macierzy $[A \mid I]$ do postaci $[I \mid B]$ przy pomocy operacji elementarnych na wierszach macierzy $[A \mid I]$, tzn.

- przestawianie wierszy - $w_i \longleftrightarrow w_j$
- mnożenie wierszy przez stałe różne od zera - cw_i
- dodawanie do elementów dowolnego wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza pomnożonego przez dowolną liczbę - $w_i + cw_j$)

Stosując powyższe operacje elementarne, macierz jednostkową I uzyskujemy z macierzy A w dwóch krokach.

I krok Pierwszy krok polega na otrzymaniu macierzy trójkątnej górnej z jedynkami na przekątnej. Uzyskujemy to w następujący sposób: jeśli $a_{11} \neq 0$, to wiersze $w_1,...,w_n$ przekształcamy na wiersze $w_1',...,w_n'$ wg reguły

$$\begin{cases} w_1' = \frac{w_1}{a_{11}} \\ w_2' = w_2 - a_{21}w_1' \\ \vdots \\ w_n' = w_n - a_{n1}w_1' \end{cases}$$

Jeśli natomiast $a_{11} = 0$, to wiersze macierzy A przestawiamy tak, by w lewym górnym rogu znalazł sie element różny od zera. Dalej, wykonujemy w/w operacje. Postępowanie to kontynuujemy w odniesieniu do macierzy coraz niższych stopni, az do uzyskania macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & 1 & ... & b_{2n} \\ ... & ... & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

II krok Drugi krok polega na otrzymaniu macierzy jednostkowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

w wyniku przekształcenia wierszy $w_1',...,w_n'$ na wiersze $w_1'',...,w_n''$ wg wzorów

$$\begin{cases} w_n'' = w_n' \\ w_{n-1}'' = w_{n-1}' - b_{n-1,n}w_n'' \\ w_{n-2}'' = w_{n-2}' - b_{n-2,n-1}w_{n-1}'' - b_{n-2,n}w_n'' \\ \vdots \\ w_1'' = w_1' - b_{12}w_2'' - b_{13}w_3'' - ... - b_{1n}w_n'' \end{cases}$$

Przyklad 43 *Znaleźć macierz odwrotną do macierzy*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Otóż, postępując zgodnie z algorytmem Gaussa, otrzymujemy kolejno

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Szukana macierzą odwrotną jest macierz

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5 Rząd macierzy

Definicja 44 *Niech A będzie dowolną macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Minorem stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z macierzy A poprzez wybór k wierszy i k kolumn.*

Przyklad 45 *Niżej, w macierzy wymiaru 3×4 zaznaczono elementy tworzące przykładowe minory stopnia drugiego i trzeciego*

$$\begin{bmatrix} \boxed{7} & -6 & \boxed{2} & 2 \\ -3 & 3 & -1 & 5 \\ \boxed{2} & -2 & \boxed{1} & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{7} & \boxed{-6} & \boxed{2} & 2 \\ \boxed{-3} & \boxed{3} & \boxed{-1} & 5 \\ \boxed{2} & \boxed{-2} & \boxed{1} & 9 \end{bmatrix}.$$

Definicja 46 *Rzędem macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy 0.*

Rząd macierzy będziemy oznaczać symbolem rzA lub $rankA$.

Własności rzędu macierzy opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 47 *Dla dowolnej macierzy A wymiaru $m \times n$ zachodzi:*

1. $0 \leq rzA \leq \min\{m, n\}$
2. *rząd macierzy nieosobliwej jest równy jej stopniowi*
3. $rz(A^T) = rzA$
4. *rząd macierzy diagonalnej jest równy liczbie jej niezerowych elementów*

Operacje elementarne nie zmieniające rzędu macierzy opisuje kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 48 *Rząd macierzy nie ulega zmianie, gdy*

1. *przestawimy dwa wiersze (kolumny)*
2. *wiersz (kolumnę) pomnożymy przez liczbę różną od zera*

3. *do wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez dowolną liczbę*

Ważnym pojęciem w kontekście rzędu macierzy jest tzw. macierz schodkowa.

Definicja 49 *Macierz nazywamy schodkową, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Przyjmujemy, ze macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.*

Przyklad 50 *Podane niżej macierze są schodkowe*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{5} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{4} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 51 *Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. liczbie schodków).*

Uwaga 52 *Do sprowadzania dowolnej macierzy do postaci schodkowej wykorzystuje się operacje elementarne nie zmieniające rzędu macierzy (postępując w/g algorytmu Gaussa). Przy przekształcaniu macierzy (dla przejrzystości zapisu) należy skreślić wiersze (kolumny) zerowe lub też jeden z dwóch wierszy (kolumn) proporcjonalnych do siebie.*

Przyklad 53 *Wyznaczymy rząd macierzy, sprowadzając ją do postaci schodkowej* *przy pomocy algorytmu Gaussa:*

$$rz\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= rz\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

A więc $rzA = 2$.

6 Układy równań liniowych

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi x_1,...,x_n, gdzie m, $n \in \mathbb{N}$, nazywamy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie a_{ij}, b_i są ustalonymi liczbami rzeczywistymi dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, ..., x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ. Układ równań, który nie ma rozwiązania nazywamy sprzecznym.

Powyższy uklad równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej (macierzowo-wektorowej) w nastepujący sposób

$$AX = B,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy macierzą główną układu równań liniowych, wektor X - wektorem niewiadomych, B - kolumną wyrazów wolnych. W przypadku małej liczby niewiadomych będziemy je zwykle oznaczać małymi literami x, y, z, ...

Przyklad 54 *Postać macierzowa układu równań*

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 2 \\ z = -5 \end{cases}$$

jest następująca

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Układ postaci

$$AX = 0,$$

gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$, natomiast 0 jest wektorem zerowym wymiaru m, nazywamy układem jednorodnym. Układ postaci

$$AX = B, \tag{1}$$

gdzie B jest wektorem niezerowym wymiaru m, nazywamy układem niejednorodnym. Łatwo widać, że jednym z rozwiązań układu jednorodnego jest wektor zerowy

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

wymiaru n, gdzie n oznacza liczbę kolumn macierzy A.

Układem Cramera nazywamy układ postaci (1), w którym macierz A jest macierzą kwadratową nieosobliwą.

Fundamentalny wynik dotyczący układu Cramera zawiera następujące

Twierdzenie 55 *Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie X. Rozwiązanie to określone jest wzorem*

$$X = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \det A_1 \\ \vdots \\ \det A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det A_1}{\det A} \\ \vdots \\ \frac{\det A_n}{\det A} \end{bmatrix},$$

gdzie n oznacza stopień macierzy A, natomiast A_j dla $1 \le j \le n$ oznacza macierz A, w której j-tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych B.

Równość określającą rozwiązanie X układu Cramera nazywamy wzorem Cramera. Wzór ten, po rozpisaniu, przyjmuje postać

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, ..., x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

gdzie $X = (x_1, ..., x_n)$.

Przyklad 56 *Korzystając ze wzoru Cramera, podać rozwiązanie układu*

$$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases}.$$

Zapiszmy najpierw układ w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Jest to układ Cramera, ponieważ $\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = 6 + 15 = 21 \neq 0$. *Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb*

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}}{21} = \frac{12 - 75}{21} = -\frac{63}{21} = -3$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}}{21} = \frac{15 + 6}{21} = 1$$

Rozwiązanie układu Cramera można też uzyskać przy pomocy macierzy odwrotnej

$$X = A^{-1}B.$$

Przyklad 57 *Rozwiązać poniższy układ przy pomocy macierzy odwrotnej*

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ x + 5y = 6 \\ 2x + 10y + 6z = 12 \end{cases}.$$

Najpierw zapiszmy układ w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Sprawdźmy, czy układ jest układem Cramera. Otóż

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix} = 6(-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$$

Wyznaczmy teraz macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix}$. *Mamy*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

I dalej,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Zatem $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$. *W konsekwencji*

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + (-4) \cdot 6 \\ (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 6 \\ (-\frac{1}{3}) \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problem rozwiązywalności układu równań liniowych (niekoniecznie układu Cramera) opisuje następujące

Twierdzenie 58 (Kroneckera-Capellego) *Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej $[A \mid B]$ tego układu*

$$rzA = rz[A \mid B].$$

Przyklad 59 *Rozważmy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $rzA = 2 = rz[A \mid B]$ *(tutaj* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$*),* *więc układ posiada co najmniej jedno rozwiązanie.*

Przyklad 60 *Układ trzech równań z czterema niewiadomymi*

$$\begin{cases} x + 2y + 2w + z = 0 \\ x + y + w = 2 \\ 2x + 3y + 3w + z = 3 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

nie posiada rozwiązań, ponieważ $rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. *Rzeczywiście,*

$$rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = rz \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

O ilości rozwiązań układu $AX = B$ mówi natomiast kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 61 *Niech dany będzie układ równań* $AX = B$, *gdzie* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^m$. *Wówczas,*

1. *jeśli* $rzA \neq rz[A \mid B]$, *to układ nie ma rozwiązania (jest sprzeczny)*
2. *jeśli* $rzA = rz[A \mid B] = n$, *to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (jest oznaczony)*
3. *jeśli* $rzA = rz[A \mid B] = r < n$, *to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).*

Przyklad 62 *Układ równań z Przykładu 59 posiada nieskończenie wiele rozwiązań, ponieważ* $rzA = rz[A \mid B] = 2 < 3 = n$.

Metoda eliminacji Gaussa dla układu Cramera

Niech $AX = B$ będzie układem Cramera, w którym A jest macierzą stopnia n. Rozwiązanie tego układu możemy wyznaczć w następujący sposób:

- budujemy macierz rozszerzoną układu postaci

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mid & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & & b_n \end{bmatrix}$$

- przekształcamy macierz rozszerzoną do postaci

$$[I \mid X] = \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mid & \vdots \\ 0 & ... & 1 & & x_n \end{bmatrix},$$

  wykonując na jej **wierszach** następujące operacje elementarne

- zamianę dwóch wierszy
- pomnożenie dowolnego wiersza przez liczbę różną od zera
- dodanie do dowolnego wiersza innego wiersza pomnożonego przez dowolną liczbę

Ostatnia kolumna macierzy $[I \mid X]$ jest rozwiązaniem wyjściowewgo układu równań

Uwaga 63 *Przy przekształcaniu macierzy rozszerzonej możemy wykorzystać algorytm Gaussa opisany w części poświęconej wyznaczaniu macierzy odwrotnej*

Przyklad 64 *Korzystając z metody eliminacji Gaussa, rozwiązać układ Cramera postaci*

$$\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2y + 3z = 6 \\ -x + y - 5z = -3 \end{cases}$$

Zapiszmy najpierw powyższy układ w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ *obliczmy stosując sposób "skrócony". Łatwo sprawdzamy, że det* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} = -20$. *Teraz zastosujmy algorytm Gaussa*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & & 5 \\ 0 & 2 & 3 & | & 6 \\ -1 & 1 & -5 & & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & & 5 \\ 0 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 2 & -7 & & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & | & 3 \\ 0 & 2 & -7 & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & | & 3 \\ 0 & 0 & -10 & & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & & 5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{2}{5} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązaniem układu jest trójka liczb $x = \frac{17}{5}$, $y = \frac{12}{5}$, $z = \frac{2}{5}$.

Metoda eliminacji Gausa dla dowolnego układu równań liniowych

Niech $AX = B$, gdzie A jest macierza wymiaru $m \times n$ będzie układem równań liniowych. Układ ten możemy rozwiązać w następujący sposób:

- tworzymy macierz rozszerzoną postaci

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & & b_m \end{bmatrix}$$

- przekształcamy macierz rozszerzoną do postaci

$$[A' \mid B'] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \ldots & 0 & s_{1,r+1} & \ldots & s_{1,n} & z_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & s_{r,r+1} & \ldots & s_{r,n} & z_r \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right],$$

  wykonując na jej **wierszach** następujące operacje elementarne

- zamianę dwóch wierszy
- pomnożenie dowolnego wiersza przez liczbę różną od zera
- dodanie do dowolnego wiersza innego wiersza pomnożonego przez dowolną liczbę
- skreślenie wiersza zerowego
- skreślenie jednego z wierszy równych lub proporcjonalnych

Ostatni wiersz może nie pojawić się lub pojawi się ze współczynnikiem $z_{r+1} \neq 0$. Wówczas

a) jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny

b) jeśli ostatni wiersz macierzy $[A' \mid B']$ nie pojawi się i $n = r$, to układ $[A \mid B]$ posiada jednoznaczne rozwiązanie $x_1 = z_1, \ldots, x_n = z_n$

c) jeśli ostatni wiersz macierzy $[A' \mid B']$ nie pojawi się i $n > r$, to układ $[A \mid B]$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, przy czym niewiadome $x_1, \ldots, x_r$ zależą od pozostałych niewiadomych $x_{r+1}, \ldots, x_n$, a mianowicie

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \ldots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r,r+1} & \ldots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Uwaga 65 *Dopuszcza się też w metodzie Gaussa zamianę kolumn, ale wówczas należy pamiętać o zamianie niewiadomych. Podane wyżej przypadki b) i c) należy zmodyfikować w takiej sytuacji. Taki zabieg należy wykonać n.p. w sytuacji, gdy brak jest elementu niezerowego w kolejnej kolumnie, co powoduje niemożność ustawienia kolejnej jedynki na przekątnej.*

Przyklad 66 *Rozwiązać metodą eliminacji Gaussa układ równań*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}$$

Postać macierzowa układu jest następująca

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

W konsekwencji macierz rozszerzona jest postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

Zastosowanie algorytmu Gaussa daje

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Mamy więc przypadek c) i w konsekwencji

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix}$$

czyli

$$\begin{aligned} x &= 11 - 2y - 5t \\ z &= -4 + 2t \\ y &\in \mathbb{R} \\ t &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Innymi słowy, zbiór rozwiązań jest postaci

$$\{(x, y, z, t);\ x = 11 - 2y - 5t,\ z = -4 + 2t,\ y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\}.$$