Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2020

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

Funkcja tworzące dla ciągu:
$(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \ldots)$ to
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_i x^{2i} + \ldots = A(x^2)$.

Funkcja tworzące dla ciągu:
$(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, a_3, 0, 0, \ldots)$ to
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^3 + a_2 x^6 + \ldots + a_i x^{3i} + \ldots = A(x^3)$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(a_0, 0, a_2, 0, a_4, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.
$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \ldots + a_i (-x)^i + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(a_0, 0, a_2, 0, a_4, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.
$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \ldots + a_i (-x)^i + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(a_0, 0, a_2, 0, a_4, \ldots)$?

$\frac{A(x)+A(-x)}{2}$

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.
$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \ldots + a_i (-x)^i + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1, 0, a_3, 0, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.
$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \ldots + a_i (-x)^i + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1, 0, a_3, 0, \ldots)$?

$\frac{A(x)-A(-x)}{2}$

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu: $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, ia_i, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + a_2 x + \ldots + i a_i x^{i-1} + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu: $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, i a_i, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + a_2 x + \ldots + i a_i x^{i-1} + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu: $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, ia_i, \ldots)$?

$A'(x)x$

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu: $(0, a_1/1, a_2/2, a_3/3, a_4/4, \ldots, a_i/i, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

$$\int A(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + C$$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1/1, a_2/2, a_3/3, a_4/4, \ldots, a_i/i, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem o funkcji tworzącej

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots.$$

$$\int A(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + C$$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1/1, a_2/2, a_3/3, a_4/4, \ldots, a_i/i, \ldots)$?

$$\int_0^1 \frac{A(x) - a_0}{x} dx$$

Rekursja uniwersalna

Rekursja uniwersalna

Niech a, b, c będą dodatnimi stałymi. Rozwiązaniem równania rekurencyjnego

$$T(n) = \begin{cases} b & dla \quad n = 1 \\ aT(n/c) + bn & dla \quad n > 1 \end{cases}$$

dla n będących potęgą liczby c jest

$$T(n) = \begin{cases} O(n) & jeżeli \quad a < c \\ O(n \log n) & jeżeli \quad a = c \\ O(n^{\log_c a}) & jeżeli \quad a > c. \end{cases}$$

Grafy

Graf nieskierowany to para zbiorów (V, E), gdzie $E = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. V nazywamy zbiorem wierzchołków, a E krawędzi.

Pętla to krawędź postaci $\{v, v\}$.
Krawedzie równoległe - dwie lub więcej krawędzie łączace dwa wierzchołki u, v $(u \neq v)$.

Graf $G = (V, E)$ jest prosty jeśli nie zawiera pętli ani krawędzi równoległych.

Grafy

Zastosowania grafów:

- znalezienie najkrótszej drogi,
- obliczenie przydziału zadań pracownikom,
- pokolorowanie mapy.

Grafy

Graf skierowany to para zbiorów (V, E), gdzie $E = \{(u, v) : u, v \in V\}$.
V nazywamy zbiorem wierzchołków, a E krawędzi skierowanych lub łuków.

Pętla to krawędź postaci $\{v, v\}$.
Krawedzie równoległe - dwie lub więcej krawędzie z u do v.

Graf $G = (V, E)$ jest prosty jeśli nie zawiera pętli ani krawędzi równoległych.

Stopień wierzchołka

Krawędź e jest incydentna do wierzchołka u, jeśli jeden z końców e to u.

Stopień wierzchołka u, oznaczany $deg(u)$, to liczba krawędzi incydentnych do u.
(Każda pętla incydentna do u dokłada się do stopnia u liczbą 2.)

Lemat

Niech $G = (V, E)$ będzie nieskierowanym grafem. Wtedy

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|.$$

Różne reprezentacje grafów

- listowa,
- za pomocą macierzy sąsiedztwa,
- za pomocą macierzy incydencji.

Izomorfizm grafów

Dwa grafy nieskierowane proste $G = (V, E)$ i $H = (V', E')$ są *izomorficzne* wtw, gdy $\exists$ bijekcja $f : V \to V'$ taka, że

$$\forall_{u,v \in V} \ \{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Marszruta, ścieżka, droga

Marszrutą o długości k jest ciąg $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ taki, że $\forall_{0 \leq i < k} \ \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

Droga to marszruta, w której żadna krawędź nie występuje dwukrotnie.

Ścieżka to marszruta, w której żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.