

## Lista nr 2 z matematyki dyskretnej

1. Wykaż, że wśród  $n + 1$  różnych liczb wybranych spośród  $2n$  kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieje przynajmniej jedna para, z których jedna liczba dzieli drugą.
2. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.
3. Dany jest ciąg liczb naturalnych  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Pokaż, że istnieją takie  $i$  oraz  $j$ ,  $i \leq j$ , że suma  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$  jest podzielna przez  $n$ .
4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje liczba podzielna przez  $n$ , której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.
5. W każde pole szachownicy  $n \times n$  wpisujemy jedną z liczb:  $-1, 0, 1$ . Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.
6. Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.
7. Niech  $a$  i  $b$  będą dowolnymi liczbami naturalnymi takimi, że  $a + b > 0$ . Pokaż, że liczby  $\frac{a}{NWD(a,b)}$ ,  $\frac{b}{NWD(a,b)}$  są względnie pierwsze.
8. (-) Jak znaleźć  $NWW(a, b)$  znając liczby naturalne  $a, b$  oraz  $NWD(a, b)$ ?
9. (-) Oblicz  $NWD(8, 13)$  oraz całkowite liczby  $x, y$  takie, że  $8x + 13y = NWD(8, 13)$ .
10. Niech  $a, b, n$  będą dodatnimi liczbami naturalnymi. Pokaż, że jeśli  $a \perp n$  i  $b \perp n$ , to  $ab \perp n$ .
11. Udowodnij, że jeśli  $a > b$  oraz  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze, to dla  $0 \leq m < n$  zachodzi:  $NWD(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{NWD(m,n)} - b^{NWD(m,n)}$ .
12. Oszacuj złożoność czasową algorytmu Euklidesa.