

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 11

16 grudnia 2020 r.

Zajęcia 12 stycznia 2020 r.  
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L11.1.** 1 punkt Uzasadnij proces *ortogonalizacji Grama-Schmidta*.
- L11.2.** 1 punkt Niech  $P_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) będzie  $k$ -tym wielomianem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego  $(\cdot, \cdot)_N$ . Pokaż, że dla dowolnego wielomianu  $w \in \Pi_{k-1}$  jest  $(w, P_k)_N = 0$ .
- L11.3.** 2 punkty Niech  $P_0, P_1, \dots, P_N$  ( $1 \leq k \leq N$ ) będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego  $(\cdot, \cdot)_N$ . Udowodnij podaną na wykładzie zależność rekurencyjną spełnianą przez te wielomiany.
- L11.4.** 2 punkty Niech  $\{P_k\}$  będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego  $(f, g)_N := \sum_{k=0}^N f(x_k)g(x_k)$ , gdzie  $x_0, x_1, \dots, x_N$  są parami różnymi punktami. Ustalmy  $x \in \mathbb{R}$  oraz liczbę naturalną  $n < N$ . Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby obliczyć wartości  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ ? Uwzględnij **wszystkie** szczegóły obliczeń.
- L11.5.** 1 punkt Niech  $\{Q_k\}$  będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:
- $$\begin{cases} Q_0(x) = 1, & Q_1(x) = x - c_1, \\ Q_k(x) = (x - c_k)Q_{k-1}(x) - d_k Q_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots), \end{cases}$$
- gdzie  $c_k, d_k$  są danymi stałymi. Udowodnij, że następujący *algorytm Clenshawa*:
- $$B_{m+2} := B_{m+1} := 0,$$
- $$B_k := a_k + (x - c_{k+1})B_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} \quad (k = m, m-1, \dots, 0),$$
- wynik  $:= B_0$ ,
- oblicza wartość sumy  $\sum_{k=0}^m a_k Q_k(x)$ . Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości  $Q_m(x)$ ?
- L11.6.** 1 punkt Dwoma podanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany  $P_0, P_1, P_2$  ortogonalne na zbiorze  $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , gdzie  $x_j := -10 + 5j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ).
- L11.7.** 1 punkt Funkcja  $h$  przyjmuje w punktach  $x_j := -10 + 5j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ) odpowiednio wartości  $3, -5, -1, -5, 3$ . Wykorzystując ortogonalność wielomianów **skonstruowanych w poprzednim zadaniu**, wyznacz taki wielomian  $w_2^* \in \Pi_2$ , aby wyrażenie

$$\sum_{j=0}^4 [w_2^*(x_j) - h(x_j)]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

- L11.8.** **Włącz komputer!** **2 punkty** W pliku `punkty.csv`<sup>1</sup> znajduje się zbiór 50 par liczb ze zbioru  $\mathcal{X} := \{(t_i, y_i) : 0 \leq i \leq 49\}$ . Wartość te są odczytami z aparatury mierzącej pewną wielkość fizyczną  $f$  zachowującą się – jak mówi teoria – zgodnie ze wzorem

$$f(t) = (t + 3.6)(t - 2.1)(t - 3.7).$$

Z tym jednak, że aparatura dokonuje pomiarów z dokładnością  $\pm 0.15$  z rozkładu jednostajnego, czyli

$$y_i = f(t_i) + U[-0.15, 0.15] \quad (0 \leq i \leq 49).$$

- (a) Narysuj wykres funkcji  $f$  i zbiór  $\mathcal{X}$ .
  - (b) Wyznacz i narysuj wielomian interpolacyjny dla danych z pliku `punkty.csv`. Co obserwujemy?
  - (c) Korzystając z **własnej implementacji** skonstruuj i narysuj wielomiany optymalne  $w_n^*$  w sensie aproksymacji średniokwadratowej dla danych ze zbioru  $\mathcal{X}$  o stopniach  $2 \leq n \leq 8$ . Skomentuj wyniki.
- L11.9.** **Włącz komputer!** **do 5 punktów** Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do opracowania modelu opisującego przebieg pandemii koronawirusa w Polsce. Możesz rozważyć i modelować różne dane i wskaźniki. Na przykład liczbę aktywnych przypadków w pierwszych 100 dniach od wykrycia pierwszego zakażenia (4 marca 2020 r.). Zadanie to ma charakter *badawczy* — wiele zależy tu od Ciebie i Twojej pomysłowości.

Wskazówki. 1. Wiele dobrze opracowanych danych na temat epidemii w Polsce znajdziesz **pod tym adresem** (autor zbioru danych: Michał Rogalski). 2. Jeśli zdecydujesz się modelować liczbę aktywnych przypadków, to warto rozpocząć od próby dopasowania danych do modelu typu  $\exp(f(x))$ , gdzie  $f$  jest odpowiednio dobraną funkcją, np. wielomianem niewysokiego stopnia (porównaj z zadaniem **L10.6**). 3. Osoby zainteresowane *matematyką koronawirusa* powinny odwiedzić m.in. **stronę PTM**.

(–) Paweł Woźny

---

<sup>1</sup>Patrz **SKOS**.