$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$x = r\cos\Theta$

$y = r\sin\Theta$

Podstawienie to jest znane jako przejście do układu współrzędnych biegunowych, w którym punkty reprezentujemy jako promień i kąt jego nachylenia. Zatem, jeśli wcześniej całkowaliśmy na obszarze $\mathbb{R}^2$, to teraz dodatni promień r będzie w $[0,\infty]$, a kąt Θ w $[0, 2\pi]$

Wyznaczamy Jakobian tego podstawienia:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\Theta & -r\sin\Theta \\ \sin\Theta & r\cos\Theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

(przechodzimy na biegunowy układ współrzędnych)

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy\,dx = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2(\overbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^{=1})}(r\,d\theta)(dr) = \int_0^\infty r e^{-\frac{1}{2}r^2}\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)dr = 2\pi\int_0^\infty r e^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr$$

$$= 2\pi\int_0^\infty r e^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr = -2\pi\int_0^\infty \left(e^{-\frac{1}{2}r^2}\right)'\cdot 1\,dr = 2\pi\left[-e^{-\frac{1}{2}r^2}\right]_0^\infty + 0 = -\lim_{r\to\infty}\frac{2\pi}{e^{r^2/2}} + 2\pi e^0 = 2\pi$$

Created with IDroo.com