Uwagi o rozwiązaniach zadań z listy 1

Antoni Kościelski

1 Zadanie 1

Wzór a) jest oczywisty, otrzymujemy go po odpowiednim podstawieniu we wzorze Newtona. Wzór b) także wynika z wzoru Newtona i następujących równości:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np.$$

W tym zadaniu chyba chodzi o przypomnienie wzoru Newtona zwanego także wzorem dwumianowym Newtona. Zgodnie w tym wzorem

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Jest to bardzo ważny wzór, najlepiej go zapamiętać. Można go dowieść stosując zasadę indukcji. Występują w nim symbole Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

definiowane zwykle dla wszystkich naturalnych n i k takich, że $k \leqslant n$. Symbole te można też definiować rekurencyjnie przyjmując

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \;\text{ oraz }\; \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

dla $k < n$.

2 Zadanie 2

Zadanie równie proste, jak poprzednie. Wynika z wzoru

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

który powinien być znany wszystkim, którzy zaliczyli wykład z analizy matematycznej. Dodatkowo – jak w poprzednim zadaniu – trzeba też umieć posługiwać się sumami wyrazów ciągów.

Oczywiście,

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

oraz

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

3 Zadanie 3

Funkcja Γ Eulera jest określona dla dodatnich argumentów p i jest określona wzorem
$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt.$$
Jak widać, wartości funkcji są definiowane jako całki niewłaściwe, dla wszystkich $p > 0$ wyliczenie wartości $\Gamma(p)$ wymaga całkowania po zbiorze nieograniczonym, a dodatkowo, dla $p \in (0,\,1)$ funkcja podcałkowa nie ma granicy w 0 (w sąsiedztwie 0 przyjmuje dowolnie duże wartości) i całka z definicji jest podwójnie niewłaściwa. Można więc mieć wątpliwości, czy funkcja Γ jest dobrze zdefiniowana.

Na razie pokażemy dwie równości:

1. $\Gamma(1) = 1$ oraz
2. $p\,\Gamma(p) = \Gamma(p+1)$ dla wszystkich $p > 0$.

Mamy
$$\int e^{-t}\,dt = -e^{-t}, \quad \text{stąd} \quad \int_0^x e^{-t} = 1 - e^{-x}$$
oraz
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}(1-e^{-x}) = 1.$$
Podobnie dowodzimy drugi z wzorów:
$$\int t^p e^{-t}\,dt = \int t^p(-e^{-t})'\,dt = -t^p e^{-t} + \int p t^{p-1}e^{-t}\,dt.$$
Wobec tego
$$\int_0^x t^p e^{-t}\,dt = -t^p e^{-t}\Big|_0^x + p\int_0^x t^{p-1}e^{-t}\,dt = -xe^{-x} + p\int_0^x t^{p-1}e^{-t}\,dt.$$
oraz
$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty t^p e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x t^p e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(-xe^{-x} + p\int_0^x t^{p-1}e^{-t}\,dt\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} p\int_0^x t^{p-1}e^{-t}\,dt = p\,\Gamma(p).$$

4 Zadanie 4

Właściwie wynika z zadania 3. Przeprowadzimy rachunki mniej dokładne niż w poprzednim zadaniu. Wykorzystamy całkowanie przez podstawianie omówione dokładniej przy okazji zadania 6. Pamiętajmy, że λ jest > 0.
$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left\{\begin{array}{c} t = \lambda x \\ dt = \lambda\,dx \end{array}\right\} = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \Gamma(1) = 1,$$
$$\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \left\{\begin{array}{c} t = \lambda x \\ dt = \lambda\,dx \\ dx = \frac{dt}{\lambda} \end{array}\right\} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty t e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(2)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

5 Zadanie 5

6 Zadanie 6

6.1 Całkowanie przez podstawianie

Będę pomijał drobne założenia w rodzaju całkowalności bądź różniczkowalności funkcji.

6.1.1 Całki nieoznaczone

Podstawowy wzór:

$$\int f(p(x))p'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=p(x)},$$

czyli jeżeli chcemy wyliczyć całkę z funkcji, którą potrafimy przedstawić tak, jak lewą stronę równości, to powinniśmy scałkować funkcję $f(y)$ i w miejsce argumentu y podstawić $p(x)$.

Ten wzór łatwo dowieść. Niech $F(y) = \int f(y)\,dy$. Wtedy (z definicji całki nieoznaczonej) mamy $F'(y) = f(y)$ oraz $(F(p(x))' = F'(p(x))p'(x) = f(p(x))p'(x)$. Jak widać nie są potrzebne żadne specjalne założenia.

Jeżeli są trudności z przedstawieniem funkcji podcałkowej w odpowiedniej postaci i skądś mamy różnowartościowe podstawienie $p(x)$, to bierzemy funkcję $q(y)$ odwrotną do $p(x)$. Wtedy $q(p(x)) = x$ oraz

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)x'\,dx = \int f(q(p(x)))q'(p(x))p'(x)\,dx = \int f(q(y))q'(y)\,dy\Big|_{y=p(x)}.$$

6.1.2 Całki oznaczone z funkcji jednej zmiennej

Z wzorów na całkowanie przez podstawianie dla całek nieoznaczonych bez trudu otrzymujemy podobne wzory dla całek oznaczonych:

$$\int_a^b f(p(x))p'(x)\,dx = \int_{p(a)}^{p(b)} f(y)\,dy$$

oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{p(a)}^{p(b)} f(q(y))q'(y)\,dy.$$

Wzory te można uogólnić na przypadek całek niewłaściwych. Trzeba też pamiętać, że całki oznaczone z funkcji jednej zmiennej są rozumiane jako całki skierowane, a więc dopuszczamy w razie potrzeby przestawienie granic całkowania z jednoczesną zmianą znaku całki.

Bardzo często, korzystając z ostatniego wzoru przedstawiamy rachunki w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} y = p(x) \\ x = q(y) \\ dx = g'(y)\,dy \end{array} \right\} = \int_{p(a)}^{p(b)} f(q(y))q'(y)\,dy.$$

6.1.3 Całki po zbiorze z funkcji dwóch zmiennych

Przypuśćmy, że mamy różnowartościowe przekształcenie φ określone na zbiorze $A \subseteq R^2$ przekształcające ten zbiór na zbiór $B \subseteq R^2$ (a więc $\varphi : A \to B$) takie, że

$$\varphi(x, y) = (U(x, y),\, V(x, y)).$$

Ponieważ jest to przekształcenie różnowartościowe, więc mamy też przekształcenie odwrotne

$$\varphi^{-1}(u, v) = (X(u, v),\, Y(u, v)) \text{ takie, że } \varphi^{-1} : B \to A.$$

Wobec tego, w szczególności

$$X(U(x, y),\, V(x, y)) = x \text{ oraz } Y(U(x, y),\, V(x, y)) = y.$$

Dla takich przekształceń definiujemy tak zwany jakobian przyjmując

$$\mathcal{J}_{U,V} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial V(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_x(x,y) & U_y(x,y) \\ V_x(x,y) & V_y(x,y) \end{vmatrix}$$

zapisany tutaj na dwa sposoby przy użyciu dwóch sposobów wyrażania pochodnych cząstkowych.

W tych wzorach występują wyznaczniki (funkcyjnej w ogólnym przypadku) macierzy (cząstkowych) pochodnych funkcji składowych U i V przekształcenia φ, czyli na przykład

$$U_x(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \text{pochodna } U(x, y) \text{ ze względu na } x \text{ przy ustalonym } y.$$

Zauważmy jeszcze, że napisy $|\mathcal{J}_{U,V}(x, y)|$ i podobne występujące w dalszych wzorach oznaczają wartość bezwzględna jakobianu.

Jak dotychczas, mamy dwie wersje wzoru na całkowanie przez podstawianie:

$$\iint_A f(U(x, y), V(x, y)) \cdot |\mathcal{J}_{U,V}(x, y)| \; dxdy = \iint_B f(u, v)\, dudv$$

oraz

$$\iint_A f(x, y)\, dxdy = \iint_B f(X(u, v), Y(u, v))\, |\mathcal{J}_{X,Y}(u, v)| \; dudv.$$

6.2 Zastosowanie do rozwiązania zadania 6

Mamy obliczyć całkę

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Wskazówka sugeruje, aby liczyć inną całkę:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy = \iint_{R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy = \iint_A e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy,$$

gdzie A jest zbiorem niezerowych punktów płaszczyzny R^2 (a więc $A = R^2 \setminus \{(0, 0)\}$). Nie jest jasne, czy przedstawione przekształcenia są zrozumiałe, ale skupmy się na najtrudniejszym, licząc na to, że pozostałymi zajmiemy się przy innej okazji.

Zbiór A jest zbiorem tych punktów, dla których są określone tak zwane współrzędne biegunowe. Niech φ będzie przekształceniem, które współrzędnym (kartezjańskim) x i y przyporządkowuje współrzędne biegunowe $\varphi(x,y)$ punktu (x,y), czyli parę $(\sqrt{x^2+y^2},\theta)$ z odpowiednim kątem θ, który trudno wyrazić ładnym wzorem i nie jest to potrzebne. Wartości φ należą do zbioru $B=(0,\infty)\times[0,2\pi)$ złożonego z par o dodatniej pierwszej współrzędnej i drugiej współrzędnej z przedziału $[0,2\pi)$. Powinno być jasne, że φ przekształca w sposób różnowartościowy zbiór A na zbiór B.

Łatwo wyraża się wzorem funkcję odwrotną do φ:

$$\varphi^{-1}(r,\theta)=(X(r,\theta),Y(r,\theta))=(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Wyliczmy więc jakobian tego przekształcenia:

$$\mathcal{J}_{X,Y}(r,\theta)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X(r,\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial X(r,\theta)}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial Y(r,\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial Y(r,\theta)}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r.$$

Zgodnie z ostatnim z przytoczonych wzorów na całkowanie przez podstawianie otrzymujemy

$$I^2=\iint_A e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy=\iint_B e^{-\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{2}}\cdot r\,d\theta dr=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}}\,d\theta dr=$$

$$=\int_0^\infty re^{-\frac{r^2}{2}}\left(\int_0^{2\pi}1\,d\theta\right)dr=2\pi\int_0^\infty re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr=\left\{\begin{array}{c}t=\frac{r^2}{2}\\ dt=r\,dr\end{array}\right\}=$$

$$=2\pi\int_0^\infty e^{-t}\,dt=2\pi\Gamma(1)=2\pi.$$