Rachunek Prawdopodobieństwa

Wydział Elektroniki

WYKŁAD I

1. Oznaczenia i potrzebne definicje

Przypomnienie: przez $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_+$ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oznaczamy odpowiednio zbiory liczb naturalnych (z zerem), liczb naturalnych dodatnich, liczb całkowitych, liczb wymiernych, liczb rzeczywistych i liczb zespolonych.

Poniżej symbolem Ω zawsze będziemy oznaczać pewien zbiór niepusty. Nazwiemy go przestrzenią.

1.1. Sumy i przekroje przeliczalne zbiorów.

Definicja (Suma przeliczalna zbiorów)**.** Niech $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ będą podzbiorami pewnej przestrzeni Ω . Suma przeliczalna zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{def}{=} \{\omega \in \Omega : \text{istnieje } n \in \mathbb{N}_+ \text{ takie, że } \omega \in A_n\}.$$

Uwaga. Należenie do sumy zbiorów oznacza należenie do przynajmniej jednego z nich.

Uwaga. Mówimy, że zbiory A_n, $n \geq 1$, są parami rozłączne, jeśli $A_n \cap A_m = \emptyset$ dla każdej pary $n \neq m$.

Definicja (Przekrój przeliczalny zbiorów)**.** Niech $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ będą podzbiorami pewnej przestrzeni Ω. Przekrój przeliczalny zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{def}{=} \{\omega \in \Omega : \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}_+ \text{ zachodzi } \omega \in A_n\}.$$

Uwaga. Należenie do przekroju zbiorów oznacza należenie do każdego z nich.

Przykład. Niech $A_n = [-1/n, 2+n) \subset \mathbb{R}$, $B_n = [(-1)^n n, n^2) \subset \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, \infty), \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{R},$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 3), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset.$$

1.2. Szeregi liczbowe.

Dla ustalonego ciągu liczbowego $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ definiujemy **ciąg sum częściowych**

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Jeżeli założymy, że $a_n \geq 0$, to ciąg sum częściowych jest niemalejący. Posiada on zatem granicę

- właściwą, gdy jest ograniczony z góry;
- niewłaściwą $(+\infty)$, gdy jest nieograniczony.

Definicja. Sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy granicę (właściwą lub niewłaściwą) ciagu sum częściowych, tzn.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{def}{=} \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Przykład. Dla dowolnego $|q| < 1$ zachodzi

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

2. Przestrzeń probabilistyczna

2.1. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.

Definicja. Przestrzenia probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie

(a) Ω to pewien niepusty zbiór nazywany **zbiorem zdarzeń elementarnych** lub **przestrzenią stanów**.

(b) $\mathcal{F}$ to pewna rodzina podzbiorów Ω posiadająca następujące własności
- $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to $A^c \in \mathcal{F}$,
- jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, to
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Zbiory z rodziny $\mathcal{F}$ nazywamy **zdarzeniami losowymi** (lub krótko: **zdarzeniami**), a samą rodzinę $\mathcal{F}$ – **σ-ciałem zdarzeń losowych**.

(c) $\mathbb{P}$ to funkcja, która zbiorom z rodziny $\mathcal{F}$ przyporządkowuje liczby ze zbioru $[0,1]$ (tzw. funkcja zbioru) posiadająca następujące własności:
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (unormowanie)
- jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne, to
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{(przeliczalna addytywność funkcji } \mathbb{P}\text{)}.$$

Funkcję zbioru $\mathbb{P}$ nazywamy **prawdopodobieństwem**.

Terminologia: Jeżeli $A, B \in \mathcal{F}$ spełniają warunek $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że **zdarzenia** A **i** B **wykluczają się**. Jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to zdarzenie $A^c \in \mathcal{F}$ nazywamy **zdarzeniem przeciwnym do** A. Zdarzenie $\emptyset$ nazywamy **zdarzeniem niemożliwym**, zaś zdarzenie Ω nazywamy **zdarzeniem pewnym**.

2.2. Własności prawdopodobieństwa.

Poniższe własności wynikają wprost z aksjomatów określających prawdopodobieństwo $\mathbb{P}$ w powyższej definicji.

- Dla każdego $A \in \mathcal{F}$ zachodzi $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$.
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Jeżeli $A \subset B$, to $\mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$.
- Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ zachodzi
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
i stąd otrzymujemy
$$\mathbb{P}(A \cup B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$
Ponadto, jeśli A i B są rozłączne, tzn. $A \cap B = \emptyset$, to
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$
Ogólniej, jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ (niekoniecznie parami rozłączne), to
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
Uwaga. Jeżeli zbiory są parami rozłączne, to bezpośrednio z definicji mamy równość.
- Jeżeli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ (wstępujący ciąg zdarzeń), to
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
Jeżeli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ (zstępujący ciąg zdarzeń), to
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

2.3. Przykłady przestrzeni probabilistycznych.

(a) Przestrzeń trywialna.
Ω - dowolny zbiór niepusty, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(b) Skończona przestrzeń stanów.
$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ - zbiór skończony
$\mathcal{F} = 2^\Omega$ - rodzina wszystkich podzbiorów Ω

Prawdopodobieństwo na $(\Omega, \mathcal{F})$ możemy określić w następujący sposób. Wybieramy liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n \in [0, 1]$ takie, że $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ i kładziemy

$$\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k.$$

Ponadto, skoro $\mathbb{P}$ ma być prawdopodobieństwem, to dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ mamy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\{k:\, \omega_k \in A\}} p_k.$$

Przykład. W urnie znajdują się kule w trzech kolorach: białym, czarnym i zielonym. Wiadomo, że szansa wylosowania kuli białej jest dwa razy większa, niż szansa wylosowania kuli czarnej, a szansa wylosowania kuli czarnej jest trzykrotnie większa, niż szansa wylosowania kuli zielonej. Losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę białą lub czarną?

Możemy przyjąć, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, gdzie ω_1 oznacza wylosowanie kuli białej, ω_2 czarnej, zaś ω_3 zielonej (tzn. zdarzenia elementarne możemy utożsamić tu z możliwymi wynikami doświadczenia losowego), oraz $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Określamy

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{6}{10} = p_1, \quad \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{3}{10} = p_2, \quad \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{10} = p_3.$$

Zdarzenie losowe, o które pytamy, to $A = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}$. Zatem

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}.$$

Uwaga. Przypadek szczególny, gdy $\mathrm{card}(\Omega) = n \in \mathbb{N}_+$ oraz $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$, nazywamy **prawdopodobieństwem klasycznym** ($\mathrm{card}(A)$ oznacza liczność zbioru A). Wówczas mamy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

W sytuacjach, w których mamy do czynienia z prawdopodobieństwem klasycznym, do wyliczenia liczebności poszczególnych zbiorów wykorzystujemy kombinatorykę. Takie przykłady pojawią się na pierwszej liście zadań.

(c) Nieskończona, ale przeliczalna przestrzeń stanów.
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ - zbiór przeliczalny, tzn. jego elementy możemy ustawić w ciąg
$\mathcal{F} = 2^\Omega$ - rodzina wszystkich podzbiorów Ω

Prawdopodobieństwo na $(\Omega, \mathcal{F})$ można zdefiniować podobnie jak poprzednio. Wybieramy ciąg liczbowy $p_1, p_2, \ldots \in [0, 1]$ taki, że $\sum_{k=1}^\infty p_k = 1$ i kładziemy

$$\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k.$$

Podobnie jak w (b), dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\{k:\, \omega_k \in A\}} p_k.$$

Przykład. Rzucamy (uczciwą) kostką sześcienną do momentu wypadnięcia SZÓSTKI. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zakończymy doświadczenie po parzystej liczbie rzutów?

Przyjmujemy, że $\Omega = \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (tzn. wprost utożsamiamy zdarzenia elementarne z możliwymi wynikami), $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Definiujemy

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Zdarzenie losowe, o które pytamy, to $A = \{2k : k \in \mathbb{N}_+\}$ – parzyste liczby naturalne (bez zera). Zatem

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{5}\frac{(5/6)^2}{1-(5/6)^2} = \frac{5}{11}.$$

(d) Nieprzeliczalna przestrzeń stanów. Przestrzeń Ω jest zbiorem nieskończonym, który nie jest zbiorem przeliczalnym. W tym przypadku σ-ciało $\mathcal{F}$ jest zazwyczaj istotnie mniejsze od rodziny wszystkich podzbiorów Ω.

Szczególnym przypadkiem takiego modelu jest **prawdopodobieństwo geometryczne**.

Definicja. Rodziną **zbiorów borelowskich** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (odpowiednio $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$) nazywamy najmniejszą (w sensie zawierania) rodzinę podzbiorów $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$), która posiada własności z definicji σ-ciała $\mathcal{F}$ i zawiera wszystkie odcinki (koła, kule).

Uwaga. Można wykazać, że istnieje funkcja zbioru $\lambda_1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, która spełnia wszystkie własności prawdopodobienstwa oprócz warunku unormowania i taka, że dla dowolnego przedziału $[a, b]$ zachodzi

$$\lambda_1([a, b]) = b - a.$$

Funkcję tę nazywamy miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.

Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem borelowskim takim, że $\lambda_1(\Omega) < \infty$, to prawdopodobieństwo na $(\Omega, \mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ jest rodziną wszystkich podzbiorów borelowskich zbioru Ω, może zostać zdefiniowane przy pomocy wzoru

$$P(A) = \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_1(\Omega)} = \frac{\text{`długość } A\text{'}}{\text{`długość } \Omega\text{'}}.$$

Analogicznie postępujemy w wyższych wymiarach, tzn. można wykazać istnienie miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}^2$ (a nawet na $\mathbb{R}^3$), czyli funkcji zbioru, która dla dowolnego prostokąta $B = [a, b]\times[c, d]$ spełnia

$$\lambda_2(B) = (b - a)(d - c).$$

Wówczas kładziemy

$$P(A) = \frac{\lambda_2(A)}{\lambda_2(\Omega)} = \frac{\text{`pole } A\text{'}}{\text{`pole } \Omega\text{'}}.$$

Podobnie w $\mathbb{R}^3$:

$$P(A) = \frac{\lambda_3(A)}{\lambda_3(\Omega)} = \frac{\text{`objętość } A\text{'}}{\text{`objetość } \Omega\text{'}}.$$

Przykład. Losujemy dwie liczby z przedziału $[0, 1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich suma będzie większa niż $1/2$? Jakie jest prawdopodobieństwo, że będą sobie równe?

Możliwe wyniki naszego doświadczenia to pary liczb (x, y) takie, że $x, y \in [0, 1]$. Możemy zatem przyjąć, że $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ (tzn. kwadrat jednostkowy) oraz $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, a prawdopodobieństwo dane jest wzorem

$$P(A) = \frac{\lambda_2(A)}{\lambda_2(\Omega)} = \frac{\text{`pole } A\text{'}}{\text{`pole } \Omega\text{'}}$$

Pierwsze ze zdarzeń, o które pytamy, to $A = \{(x, y) \in \Omega : x + y > 1/2\}$. Aby wyznaczyć szukane prawdopodobieństwo, wystarczy zatem zrobić rysunek i obliczyć pole zbioru A. W przypadku bardziej skomplikowanych zdarzeń losowych pomocna może się tu okazać całka oznaczona.

A ile wynosi prawdopodobieństwo drugiego ze zdarzeń, o które pytamy?