Lista nr 13 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij uogólnienie wzoru Eulera dla grafu planarnego z k składowymi spójności.
2. Wykaż, że graf i jego graf dopełniający nie mogą być jednocześnie grafami planarnymi, jeśli graf G ma co najmniej 11 wierzchołków.
3. Dla jakich wartości k, kostka Q_k jest grafem planarnym? Odpowiedź uzasadnij.
4. Narysuj graf K_6 (pełny na 6-ciu wierzchołkach) na płaszczyźnie z możliwie najmniejszą liczbą przecięć. Niech H oznacza graf powstały z grafu K_6 przez usunięcie z niego trzech krawędzi, z których żadne dwie nie mają wspólnych wierzchołków. Czy graf H jest planarny? Uzasadnij swoją odpowiedź odpowiednim rysunkiem.
5. Niech G będzie spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach ($n \geq 3$) i niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w grafie G, dla $i \geq 0$.
   (a) Wykaż nierówność: $\sum_{i \in N}(6-i)t_i \geq 12$.
   (b) Wywnioskuj stąd, że graf G ma co najmniej trzy wierzchołki o stopniach 5 lub mniej.
6. Pokaż, że graf G^* dualny do grafu planarnego jest planarny.
7. Niech G będzie grafem spójnym planarnym. Pokaż, że $(G^*)^* = G$ ($(G^*)^*$ to graf dualny do grafu dualnego).
8. Czy w dowodzie wzoru Eulera można by ściągnąć do jednego wierzchołka końce jakiejś krawędzi e, ale e nie usuwać?
9. Niech $G = (V, E)$ oznacza graf, w którym $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ i $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_1, v_7), (v_7, v_6), (v_6, v_8), (v_8, v_1), (v_3, v_8), (v_4, v_7)\}$. Czy G jest dwudzielny? Jeśli nie jest, to znajdź jego podgraf dwudzielny o największej liczbie krawędzi. Udowodnij, że podany graf jest podgrafem dwudzielnym o maksymalnej liczbie krawędzi. Czy G zawiera cykl Hamiltona i Eulera? Jeśli nie zawiera któregoś z tych cykli, to ile minimalnie krawędzi trzeba dodać, aby powstały graf był hamiltonowski/eulerowski?

10. Niech H oznacza graf o wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, 15\}$, w którym wierzchołki i i j są połączone krawędzią, jeśli $NWD(i, j) > 1$. Znajdź optymalne kolorowanie wierzchołkowe H. Potrzebne jest uzasadnienie.

11. Niech $G_n = (V, E)$ oznacza n-wierzchołkowy graf, w którym $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $E = \{(v_i, v_j) : i - j \text{ nie jest podzielne przez } 3\}$. Dla każdego naturalnego $n > 2$ znajdź optymalne kolorowanie wierzchołkowe G_n. Potrzebne jest uzasadnienie. Dla jakich n graf G_n posiada cykl Eulera? A dla jakich n jest on dwudzielny?

12. Pokaż, że dla każdego nieparzystego naturalnego n istnieje turniej n-wierzchołkowy, w którym każdy wierzchołek jest *królem*. Wierzchołek jest królem, jeśli można z niego dojść do każdego innego wierzchołka w grafie po ścieżce skierowanej o długości co najwyżej 2.

13. Zbiór wierzchołków jest *niezależny* w grafie G, jeśli żadne dwa wierzchołki nie są w nim połączone krawędzią. Zbiór wierzchołków jest *pokryciem wierzchołkowym* grafu G, jeśli każda krawędź ma przynajmniej jeden z końców w tym zbiorze. Niech $\alpha(G)$ i $\beta(G)$ oznaczają odpowiednio moc największego zbioru niezależnego G i moc najmniejszego pokrycia wierzchołkowego G. Pokaż, że $\alpha(G) + \beta(G) = n$, gdzie n to liczba wierzchołków grafu G.

    Pokaż, jak obliczyć $\alpha(G)$, gdy G jest dwudzielny.