

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 10, w maju 2021

Zadania

[Do zadań 1–6] Dane są obserwacje x_1, \dots, x_n pochodzące z niżej wymienionych rozkładów. Znaleźć estymator (metodą MLE) dla parametrów wymienionych poniżej:

1. Rozkład geometryczny $\text{Geom}(p)$, parametr p .
2. Rozkład Pareto, $f(x; a, k) = \frac{ka^k}{x^{k+1}}$, $x \in [a, \infty)$, znane k , parametr a .
3. Rozkład Pareto, $f(x; a, k) = \frac{ka^k}{x^{k+1}}$, znane a , parametr k .
4. Rozkład wykładniczy, $f(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)$, dla $x \in (0, \infty)$. Parametr to λ .
5. Rozkład Weibulla, $f(x; k, \lambda) = \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\}$, dla $x \in [0, \infty)$. Znane jest k , parametr λ .

[Do zadań 6–7] Niezależne zmienne losowe X, Y podlegają rozkładom (odpowiednio): $\chi^2(n), \chi^2(k)$.

6. Dane są punkty $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Szukamy krzywej regresji w postaci $y = a + bx + cx^2$. Uzasadnić, że parametry a, b, c są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}.$$

7. Dane są punkty $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$. Szukamy równania regresji w postaci $z = a + bx + cy$. Uzasadnić, że parametry a, b, c są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z_i \\ \sum x_i z_i \\ \sum y_i z_i \end{bmatrix}.$$

8. X jest zmienną losową taką, że $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Obliczyć k -ty moment zwykły zmiennej X oraz $\text{Var}(X)$.
9. $M_X(t) = \frac{1}{7}e^t + \frac{1}{7}e^{2t} + \frac{3}{7}e^{8t} + \frac{2}{7}e^{9t}$. Znaleźć rozkład zmiennej X .
10. $X \sim U(0, 3)$. Wyznaczyć postać $M_X(t)$ i obliczyć – korzystając z $M_X(t) - E(X)$.

-
11. **E2** Znaleźć prostą regresji Y względem X dla poniższych danych:

x_k	1	3	4	6	8	9	11	14
y_k	1	2	4	4	5	7	8	9

12. **E2** Poniższa tabela zawiera dane dotyczące ciśnienia P i objętości V pewnej stałej masy gazu. Równanie łączące te dwie wielkości ma postać $PV^k = C$, gdzie k, C są pewnymi stałymi.

Objętość V	54.3	61.8	72.4	88.7	118.6	194.0
Ciśnienie P	61.2	49.5	37.6	28.4	19.2	10.1

Stosując regresję liniową znaleźć wartości C oraz k . Jaka jest przewidywana wartość P dla $V = 100$?

13. **E2** $M_X(t) = \frac{e^t + e^{-t} + 4}{6}$. Obliczyć wartość k -tego momentu zwykłego $E(X^k)$.
14. **E2** Załóżmy, że $X \sim N(1, 2)$ oraz $Y \sim N(4, 7)$. Znaleźć $P(X + Y > 0)$, $P(X - Y < 2)$ oraz $P(3X + 4Y > 20)$.

Witold Karczewski