RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA, WYDZIAŁ ELEKTRONIKI (16 III 2021)

LISTA 1. PRZESTRZEŃ PROBABILISTYCZNA I KOMBINATORYKA

1. Wiedząc, że
$$A_n = [-n^2, -n), \quad B_n = [-2 + 2/n, 3 - 1/n], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
wyznacz
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

2. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Korzystając z aksjomatów prawdopodobieństwa wykaż, że dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzi
$$\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$
oraz jeżeli $A \subseteq B$, to
$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

3. Z talii 52 kart wybrano losowo 13. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie 7 kart jednego koloru? Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie 6 kart jednego koloru?

4. W pudełku znajduje się 6 śrubek dobrych i 2 złe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wyborze 4 śrubek wybierze się 3 dobre i 1 złą?

5. Rzucamy 2021 razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymamy parzystą liczbę orłów?

6. W małym schronisku są 3 pokoje: czteroosobowy, trzyoosobowy i dwuosobowy. W pustym schronisku pojawia się grupa 6 studentów i natychmiast zajmuje miejsca całkowicie losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeden pokój pozostanie wolny?

7. Rzucamy 6 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie dokładnie 4 razy?

8. Rzucamy symetryczną monetą do momentu wypadnięcia orła. Opisz przestrzeń probabilistyczną modelującą to doświadczenie losowe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba wykonanych rzutów będzie mniejsza niż 7 i jednocześnie większa niż 2?

9. Losujemy liczbę naturalną dodatnią. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby k wynosi
$$p_k = 1/2^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$
Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej? Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby większej niż 5?

10. Jacek i Placek umówili się między $16 : 00$ a $17 : 00$ w centrum miasta. Komunikacja miejska w tych godzinach ma dość duże opóźnienia. Osoba, która przyjdzie pierwsza, czeka na drugą 20 minut. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania? Opisz dokładnie przestrzeń probabilistyczną zastosowaną do modelowania tej sytuacji.

11. Z koła $x^2 + y^2 < 4$ wybieramy losowo punkt (x, y). Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie bedzie on należał do kwadratu $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$? Jakie jest prawdopodobieństwo, że $y \geqslant x^2$?

12. Losujemy dwie liczby z przedziału $[0, 2]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będą różne? Jaka jest szansa, że jedna z nich będzie naturalna? Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma ich kwadratów będzie większa od 1?

Podstawowe wzory kombinatoryczne

1. **Kombinacją** k-elementową zbioru n-elementowego nazywamy nieuporządkowany k-elementowy podzbiór wyjściowego zbioru n-elementowego. Innymi słowy: ze bioru n-elementowego wybieramy k-elementów i nie dbamy o ich kolejność.

   - Jeżeli nie dopuszczamy powtórzeń (tak jak w Lotto), to liczba takich **kombinacji bez powtórzeń** wynosi
   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$
   - Gdy dopuszczamy możliwość powtórzeń, to liczba takich **kombinacji z powtórzeniami** wynosi
   $$\binom{n+k-1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

2. **Wariacją** k-elementową zbioru n-elementowego nazwamy uporządkowany ciąg k-elementowy złożony z elementów wyjściowego zbioru n-elementowego. Innymi słowy: ze bioru n-elementowego wybieramy k-elementów, jednak kolejność wyboru ma znaczenie.

   - Jeżeli nie dopuszczamy powtórzeń, to liczba takich **wariacji bez powtórzeń** wynosi
   $$\frac{n!}{(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$
   Gdy $k = n$, to mamy do czynienia z **permutacją zbioru n-elementowego** i liczba takich permutacji wynosi
   $$n!$$
   Przypomnienie: $0! = 1$.
   - Gdy dopuszczamy powtórzenia, to liczba takich **wariacji z powtórzeniami** wynosi
   $$n^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$