Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 2

14 października 2020 r.

Zajęcia 20 października 2020 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L2.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Ustalmy liczbę $B \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

L2.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znajdź wszystkie liczby zmiennopozycyjne, które można przedstawić w postaci

$$x = \pm(0.1e_{-2}e_{-3}e_{-4})_2 \cdot 2^{\pm c}, \qquad e_{-2}, e_{-3}, e_{-4}, c \in \{0, 1\}, \tag{1}$$

gdzie $(\ldots)_2$ oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział $[A, B]$, zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w $[A, B]$ (wykonaj odpowiedni rysunek)? Co z tego wynika?

L2.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ *Zaokrągleniem* niezerowej liczby rzeczywistej $x = sm2^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, c jest liczbą całkowitą, a $m \in [\frac{1}{2}, 1)$, jest liczba zmiennopozycyjna $\operatorname{rd}(x) = sm_t^r 2^c$, gdzie $m_t^r \in [\frac{1}{2}, 1)$ oraz $\mid m - m_t^r \mid \le \frac{1}{2} 2^{-t}$. Wykaż, że

$$\frac{|\operatorname{rd}(x) - x|}{|x|} \le 2^{-t}.$$

L2.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Przeczytaj tekst dostępny pod adresem http://www-users.math.umn.edu/~arnold//disasters/patriot.html mówiący o tym, że niefrasobliwe używanie arytmetyki zmiennopozycyjnej może prowadzić do prawdziwej tragedii (szczegóły patrz raport GAO/IMTEC-92-26). Streść, własnymi słowami, opisane tam zdarzenie i przedstaw istotę opisanego problemu.

L2.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zapoznaj się ze standardem IEEE 754[1] reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych. Omów go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.

L2.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że x, y są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości $d := \sqrt{x^2 + y^2}$ algorytmem postaci

```
u:=x*x;
u:=u+y*y;
d:=sqrt(u)
```

[1] Patrz np. http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość d należy do zbioru X_{fl}. Następnie zaproponuj `algorytm` wyznaczania d pozwalający unikać zjawiska nadmiaru, jeśli $\sqrt{2}\max(|x|,|y|) \in X_{\mathrm{fl}}$. Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

L2.7. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{2 punkty}}$ Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $x^3 - \sqrt{x^6 + 2020}$, **b)** $x^{-4}(\cos x - 1 + x^2/2)$, **c)** $\log_5 x - 6$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposoby obliczenia wyniku dokładniejszego. Pokaż, że sposoby te **działają w praktyce**.

L2.8. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = 4040\dfrac{\sqrt{x^{11}+1}-1}{x^{11}}$. Jak już wiadomo z zadania **L1.1**, obliczanie przy pomocy komputera (tryb podwójnej precyzji) wartości $f(0.001)$ daje niewiarygodny wynik. Wytłumacz dlaczego tak się dzieje i zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego. **Przeprowadź odpowiednie eksperymenty** numeryczne.

L2.9. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Można wykazać, że przy $x_1 = 2$ ciąg

$$x_{k+1} = 2^k\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-(x_k/2^k)^2}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

jest zbieżny do π. Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska. Przeprowadź odpowiednie **testy obliczeniowe**.

(–) Paweł Woźny