Wyznacznik macierzy – definicja i własności

Autorzy: Agnieszka Kowalik

2019







Publikacja udostępniona jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa - Na tych samych warunkach 3.0 Polska. Pewne prawa zastrzeżone na rzecz autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej. Zezwala się na dowolne wykorzystanie treści publikacji pod warunkiem wskazania autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej jako autorów oraz podania informacji o licencji tak długo, jak tylko na utwory zależne będzie udzielana taka sama licencja. Pełny tekst licencji dostępny na stronie http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/pl/.

Autor: Agnieszka Kowalik

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 1: Definicja wyznacznika

Z każdą macierzą kwadratową A związana jest liczba (rzeczywista lub zespolona) nazywana **wyznacznikiem macierzy** A, oznaczana symbolem

 $\det A$

. Wyznacznik definiujemy indukcyjnie, w następujący sposób:

- 1. jeżeli macierz $A=(a_{11})$ jest stopnia 1, to ${
 m det} A=a_{11}$;::
- 2. jeżeli macierz $A=\left(a_{ij}
 ight)$ jest stopnia n, gdzie n>1, to

$$\det A = \det egin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \ & & \ddots & & \ddots \ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1},$$

gdzie

 A_{i1}

oznacza podmacierz stopnia n-1 otrzymaną z macierzy

 \boldsymbol{A}

poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz pierwszej kolumny.

Wyznacznik macierzy będziemy również oznaczać, stosując następujący zapis:

$$\det A = egin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \ & & & & & \ & & & & \ & & & & \ & & & & \ & & & & \ & & & & \ & & & \ & & & & \ & & & \ & & & \ & & & \ & & & \ & & \ & & \ & & \ & & \ & & \ & & \ & & \ & \ & & \ & & \ &$$

Warto zapamiętać, że wyznaczniki liczymy tylko dla macierzy kwadratowych.



PRZYKŁAD

Przykład 1:

Zgodnie z definicją, wyznacznikiem macierzy składającej się z jednego elementu jest wartość tego elementu, tj.

$$\det(7) = 7$$

 $|-27| = -27.$

Przykład 2:

Obliczmy wyznacznik macierzy stopnia 2. Niech zatem

$$A=\left(egin{array}{cc} 2 & -1 \ 3 & 2 \end{array}
ight).$$

Zgodnie z definicją obliczamy

$$\det A = \det egin{pmatrix} 2 & -1 \ 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot 2 + (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot (-1) = 7.$$

W przypadku obliczania wyznaczników macierzy stopnia 2 można zastosować prostszą metodę mnożenia .



PRZYKŁAD

Przykład 3:

Zajmijmy się następnie obliczeniem wyznacznika macierzy stopnia 3. Mamy daną macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mamy:

$$\det A = \det egin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \ -1 & 1 & 1 \ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det A_{11} + (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \det A_{21} + (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot A_{31}.$$

Obliczamy:

$$egin{aligned} \det A_{11} &= \det egin{pmatrix} 1 & 1 \ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2, \ \det A_{21} &= \det egin{pmatrix} 3 & 0 \ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0, \ \det A_{31} &= \det egin{pmatrix} 3 & 0 \ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \end{aligned}$$

skąd ostatecznie

$$\det A = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-1)^3 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1)^4 \cdot 3 \cdot 3 = -4 + 9 = 5.$$

W przypadku obliczania wyznaczników macierzy stopnia 3 można zastosować prostszą metodę tzw.

Twierdzenie 1: Własności wyznacznika macierzy

Niech A będzie macierzą kwadratową.

- 1. Jeżeli macierz A zawiera wiersz (kolumnę) składającą się z samych zer, to $\det A=0$;
- 2. Jeżeli zamienimy miejscami dwa wiersze (kolumny) macierzy A, to wyznacznik zmieni znak na przeciwny;
- 3. Jeżeli macierz A zawiera dwa jednakowe wiersze (kolumny), to $\det A=0$;
- 4. Jeżeli do każdego z elementów pewnego wiersza (kolumny) macierzy A dodamy pomnożone przez tę samą liczbę odpowiednie elementy innego wiersza (kolumny) tej macierzy (tj. dodajemy elementy leżące w tych samych kolumnach (wierszach)), to wyznacznik macierzy A nie zmieni się.
 - Ogólnie, wyznacznik macierzy A nie zmieni się, jeżeli do pewnego wiersza (kolumny) tej macierzy dodamy kombinację liniową innych wierszy (kolumn) macierzy A;
- 5. Jeżeli wszystkie elementy pewnego wiersza (kolumny) macierzy A pomnożymy przez liczbę α , to wyznacznik otrzymanej macierzy będzie równy $\alpha \cdot \det A$;
- 6. Transpozycja macierzy A nie zmienia jej wyznacznika, tj. ${
 m det} A={
 m det} A^T$;
- 7. Jeżeli macierze A i B są tych samych stopni, to

 $\det(A\cdot B)=\det A\cdot \det B$ (prawo Cauchy'ego).

Przykład 4:

Obliczmy wyznacznik macierzy

$$A = egin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mamy:

$$\mathrm{det} A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \mathrm{det} egin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \ 0 & 3 & 4 & 5 \ 0 & 0 & 4 & 5 \ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

skąd

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det egin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \ 0 & 4 & 5 \ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \dots$$

i dalej analogicznie

$$\ldots = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \\ (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot (-1)^{4+4} \cdot 4 \cdot (-1)^{5+5} \cdot 5$$

skąd ostatecznie otrzymujemy

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Powyższy przykład ilustruje następujące



TWIERDZENIE

Twierdzenie 2: Wyznacznik macierzy trójkątnej

Wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów leżących na głównej przekątnej.

Jest to podstawowy fakt z teorii macierzy, wyznaczników i układów równań liniowych. Stanowi on podstawę dla tzw. metody Gaussa.

Publikacja udostępniona jest na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa - Na tych samych warunkach 3.0 Polska. Pewne prawa zastrzeżone na rzecz autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej. Zezwala się na dowolne wykorzystanie treści publikacji pod warunkiem wskazania autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej jako autorów oraz podania informacji o licencji tak długo, jak tylko na utwory zależne będzie udzielana taka sama licencja. Pełny tekst licencji dostępny na stronie



Data generacji dokumentu: 2019-04-15 10:10:31

 $Oryginalny\ dokument\ dostępny\ pod\ adresem:\ https://epodreczniki.open.agh.edu.pl/openagh-permalink.php?\\ link=461438f6a488621526c2982f4fe058b0$

Autor: Agnieszka Kowalik