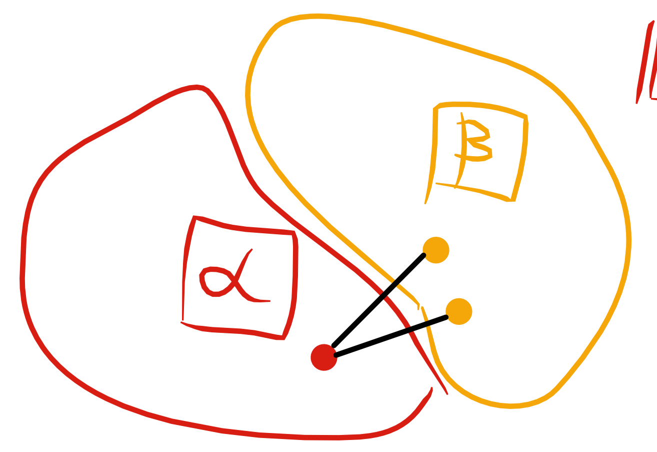
Z13

Weźmy dowolne najmniejsze pokrycie wierzchołkowe $\boxed{\beta}$.

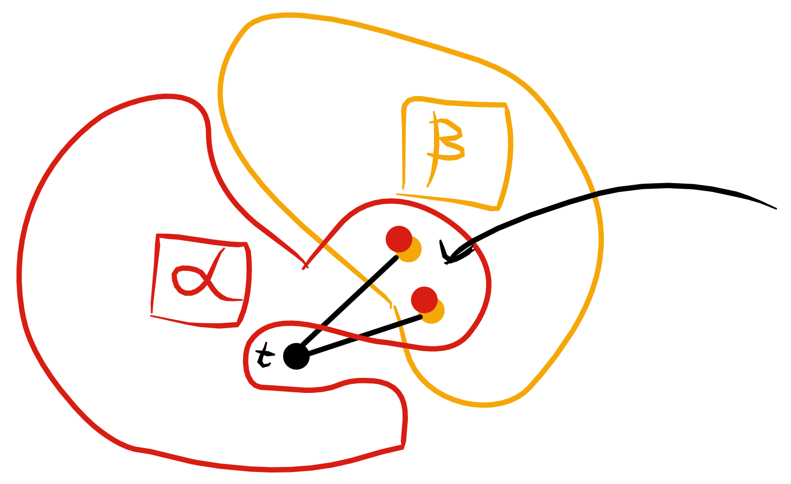
Usuńmy je z grafu (razem z krawędziami).
Zauważmy, że nie usunięte wierzchołki stanowią zbiór niezależny, nazwijmy go $\boxed{\alpha}$. Gdyby tak nie było to istniałaby krawędź między jakąś parą wierzchołków z $\boxed{\alpha}$, z których żaden nie należałby do $\boxed{\beta}$, czyli łącząca je krawędź byłaby nie pokryta, czyli $\boxed{\beta}$ nie jest pokryciem ↯

Pokażmy teraz, że $\boxed{\alpha}$ jest maksymalne.
Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. To znaczy, że istnieje wierzchołek $v \notin \boxed{\alpha}$ niezależny względem $\boxed{\alpha}$. Wiemy, że wszystkie takie wierzchołki są w $\boxed{\beta}$, czyli $v \in \boxed{\beta}$.
Jeśli tak to v ma krawędź (v,x) $x \notin \boxed{\beta}$. Gdyby tak nie było to znaczy, że wszystkie jego krawędzie idą do $\boxed{\beta}$, czyli $\boxed{\beta}$ nie jest minimalne (v nie jest potrzebny, bo wszystkie krawędzie są i tak pokryte). Wiemy również, że taka krawędź nie może prowadzić do $\boxed{\alpha}$, bo v nie byłby niezależny, no ale nie ma już innych wierzchołków ↯

Pokażmy jeszcze, że jeśli istnieje inny zbiór wierzchołków niezależnych to jest on co najwyżej równoliczny.
Jeśli taki zbiór istnieje to można go utworzyć z $\boxed{\alpha}$ wyrzucając jego wierzchołki i dobierając wierzchołki z $\boxed{\beta}$.
Zgodnie z tym co udowodniliśmy wyżej nie możemy po prostu brać z $\boxed{\beta}$. Czyli, dla każdego podzbioru $p \in \boxed{\beta}$, który chcielibyśmy włączyć do $\boxed{\alpha}$ musimy wyrzucić co najmniej jeden wierzchołek.



$|\boxed{\alpha}| + \beta = n$



Nie mają krawędzi między sobą ani do żadnego wierzchołka w α. Jeśli tak to pokrywają tylko krawędzie do t (pozostałe są już pokryte przez inne wierzchołki). Zatem β to nie minimalne pokrycie, bo wtedy t można dać do $\boxed{\beta}$, a zaznaczone wierzchołki z $\boxed{\beta}$ wyrzucić ↯

Czyli da się jedynie „wymieniać” wierzchołki w $\boxed{\alpha}$ za równą ich ilość w $\boxed{\beta}$, czyli $\boxed{\alpha}$ jest maksymalnym niezależnym. $|\boxed{\alpha}| = \alpha \Rightarrow \alpha + \beta = n$

Z twierdzenia Koeniga wiemy, że $\beta(G) = |M_{max}|$ dla grafu dwudzielnego G, gdzie M_{max} to maksymalne skojarzenie. Wystarczy znaleźć $|M_{max}|$, wtedy

$$\alpha = n - \beta = n - |M_{max}|$$

Created with IDroo.com