Z1

Weźmy optymalnie pokolorowany graf $G=(V,E)$.
Podzielmy jego wierzchołki na podzbiory P_k, w których wszystkie wierzchołki są koloru k $(k \in \{1,2,3,\dots,\chi(G)\})$.

Przyjmijmy kolejność kolorowania $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_{\chi(G)})$ i pokażmy, że jest ona optymalna.

Udowodnijmy indukcyjnie własność W dla k-tego kolorowania
$W(k) :=$ k jest maksymalnym kolorem w P_k.

- Baza $(k=1)$:
  Algorytm koloruje wszystkie wierzchołki na kolor 1. ✓

- Krok $(W(i)$ dla $i \leq k \Rightarrow W(k+1))$:

  Wiemy, że w użyciu mogą być tylko kolory $\{1,2,\dots,k\}$.
  Ponieważ algorytm wybiera kolor najmniejszy możliwy to dla danego $v \in P_{k+1}$ może wybrać spośród kolorów $\{1,2,\dots,k\}$ lub, jeśli v ma krawędzie do wszystkich tych kolorów to musi dostać kolor $k+1$.
  Zauważmy, że v nie dostanie nigdy koloru większego niż $k+1$ (gdyby tak było to v ma krawędzie do kolorów $\{1,2,\dots,k,k+1\}$, ale $k+1$ narazie występuje jedynie w P_{k+1}, którego wierzchołki nie mają wspólnych krawędzi - wniosek z monochromatyczności zbioru P_{k+1} w grafie optymalnie pokolorowanym). ✓

Czyli po pokolorowaniu P_k w kolejności $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_{\chi(G)})$ użyliśmy dokładnie $\chi(G)$ kolorów (jeśli moglibyśmy użyć mniej, to G był optymalnie pokolorowany ↯). Zatem osiągnęliśmy kolorowanie optymalne stosując algorytm sekwencyjny.

Created with IDroo.com