$\varphi_g(x) = gxg^{-1}$

$\varphi_g : G \to G$

- Pokażę, że $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$

$$\varphi_{ab}(x) = abx(ab)^{-1} \overset{L13.22}{=} abxb^{-1}a^{-1} = \varphi_a(bxb^{-1}) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a \circ \varphi_b(x)$$

- Pokażę, że φ_a jest izomorfizmem z G w G, czyli, że φ_a jest homomorfizmem oraz bijekcją.

$\varphi_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \varphi_a(x)\varphi_a(y) \to$ homomorfizm

$\varphi_a(x) = \varphi_a(x) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y \to$ injekcja

$z = \varphi_a(t) = ata^{-1} \Rightarrow t = a^{-1}za \to$ surjekcja

(injekcja, surjekcja) $\to$ bijekcja

- Pokażę $H \leq G \Rightarrow \varphi_a(H) \leq G$.

$\varphi_a(H) = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$

Weźmy dowolny $aha^{-1} \in \varphi_a(H)$ i sprawdźmy, czy jego element odwrotny należy do $\varphi_a(H)$

$$(aha^{-1})^{-1} \overset{L13.22}{=} (a^{-1})^{-1}h^{-1}a^{-1} = ah^{-1}a^{-1} \in \varphi_a(H)$$

$h \in H$, więc
$h^{-1} \in H$, ponieważ $H \leq G$

Weźmy dowolne $ah_1a^{-1}, ah_2a^{-1} \in \varphi_a(H)$, wtedy

$$ah_1a^{-1}ah_2a^{-1} = a\underbrace{h_1h_2}_{\in H}a^{-1} \in \varphi_a(H).$$

Czyli $\varphi_a(H)$ jest zamknięte na działanie i ~~zawiera~~ zawiera element odwrotny, więc jest podgrupą.