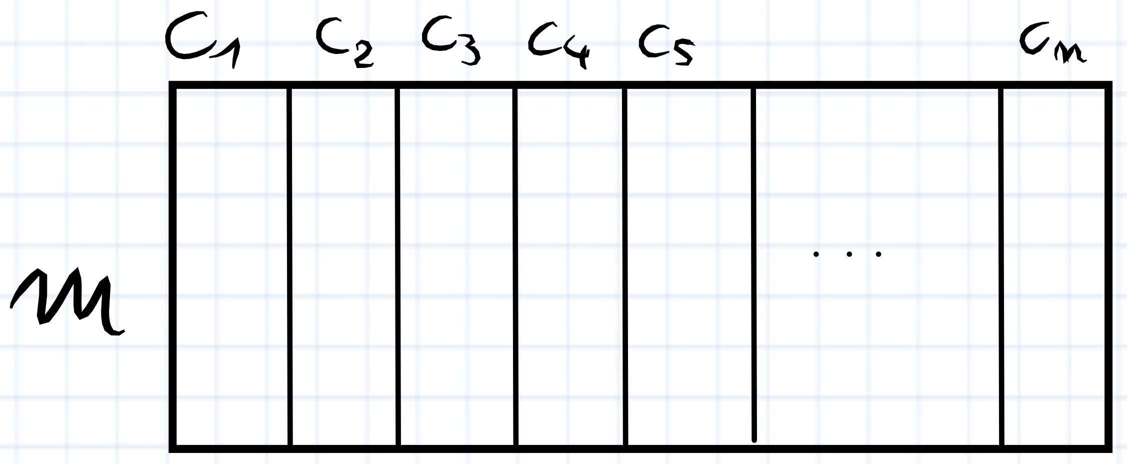
Z10

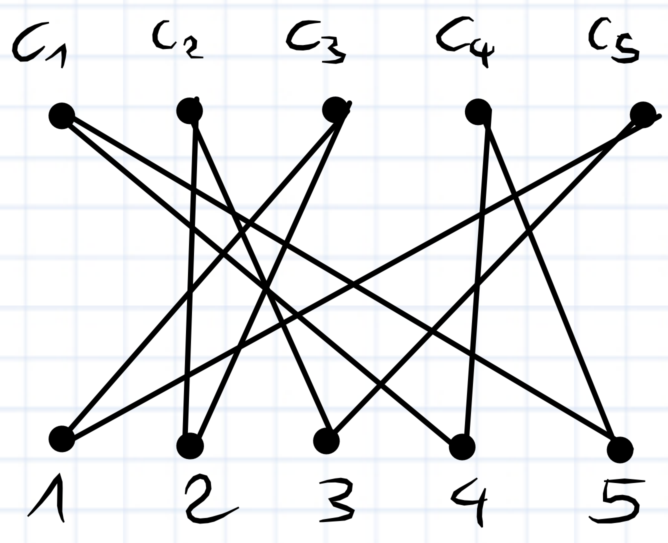


Prostokąt łaciński

C_i - kolumny

Rozważmy przypadek $n=5$, $m=3$.

Prostokąt 5×3 możemy przedstawić jako graf, w którym krawędzie łączą kolumny z liczbami ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które można jeszcze do tych kolumn dodać.



$n - m$

Jeśli w takim grafie istnieje skojarzenie doskonałe, to znaczy, że każdej kolumnie możemy przyporządkować liczbę, której w niej wcześniej nie było przy czym każda kolumna dostaje ponadto inną liczbę. Razem te liczby tworzą nowy wiersz dla rozszerzonego prostokąta.

Udowodnijmy, że istnieje skojarzenie doskonałe dla prostokątu $n \times m$ (tw. Halla).

- Wiemy, że w każdej kolumnie c_i jest m różnych liczb, zatem c_i ma $(n-m)$ krawędzi
- Wiemy, że wszystkich wystąpień danej liczby jest m (po jednej na wiersz), czyli jest dokładnie $(n-m)$ kolumn bez tej liczby

Czyli mamy do czynienia z grafem $(n-m)$-regularnym.

Mamy zbiór kolumn i liczb.
Bez straty ogólności wybierzmy jeden z nich i nazwijmy go C.

Weźmy podzbiór $C' \subseteq C$.

Z C' oraz $N(C')$ wychodzi odpowiednio

$(n-m)|C'|$ i $(n-m)|N(C')|$ krawędzi.

Zauważmy, że zbiór krawędzi od $N(C')$ zawiera krawędzie od C'.

Czyli $|N(C')| \geq |C'|$ co oznacza, że warunek Halla jest spełniony i istnieje skojarzenie doskonałe.

Created with IDroo.com