Z 4

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{cases}$$

a) $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

b) $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + 0 \cdot x^{n-1} + R_n$

Indukcja:

- Baza: $(n = 1, 2)$

$T_1(x) = 2^0 x + 0 x^0$ ✓ $\qquad T_n(x) = 2^{n-1}x^n + 0 \cdot x^{n-1} + R_n$

$T_2(x) = 2^1 x + 0 x^0$ ✓

- Krok: $\left(\begin{matrix} T_{n-1}(x) = 2^{n-2}x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + R_{n-1} \\ T_n(x) = 2^{n-1}x^n + 0 \cdot x^{n-1} + R_n \end{matrix} \Rightarrow T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + 0 \cdot x^n + R_{n+1} \right)$

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \overset{\text{z zał.}}{=} 2x\left(2^{n-1}x^n + 0x^{n-1} + R_n\right) - 2^{n-2}x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + R_{n-1}$$
$$= 2^n x^{n+1} + 0\, x^n + 2x R_n - 2^{n-2}x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + R_{n-1} \quad ✓$$

c) $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$

i) $|T_n(x)| \leqslant 1 \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1,\ n \geq 0)$

$|\cos(n \cdot \arccos x)| \in [0, 1]$

$\cos\alpha \in [-1, 1]$
$|\cos\alpha| \in [0, 1]$

ii) $|T_n(x)| = 1$, $x \in [-1, 1]$

$|T_n(x)| = |\cos(n \cdot \arccos x)| = 1$

$$\boxed{\begin{gathered} \cos(n \cdot \arccos x) = 1 \\ \Downarrow \\ n \cdot \arccos x = 2k\pi \\ \arccos x = \frac{2k\pi}{n} \\ x = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{gathered}} \qquad \boxed{\begin{gathered} \cos(n \cdot \arccos x) = -1 \\ \Downarrow \\ n \cdot \arccos x = \pi + 2k\pi \\ \arccos x = \frac{\pi + 2k\pi}{n} \\ x = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right) \end{gathered}}$$

Czyli $x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $x \in [-1, 1]$

$-1 \leqslant \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqslant 1$

$0 \leqslant k \leqslant n \Rightarrow k \in [0, n]$

iii) $x \in (-1, 1) \quad T_{n+1}(x) = 0$

$T_{n+1}(x) = \cos\left((n+1) \cdot \arccos(x)\right) = 0$

$\Downarrow$

$(n+1)\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\arccos(x) = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n+1}$$

$$x = \cos\Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n+1}}\ \pi}_{\alpha}\Bigg) \text{ dla } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Wszystkie miejsca zerowe $\in [-1, 1]$, ponieważ $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$

Jest niecałkowite, więc $x \neq 1 \wedge x \neq -1$

Jeżeli $k = n + a$:

$A := \left\lfloor \frac{n+a}{n+1} \right\rfloor \qquad R := n + a \bmod n + 1$

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + (n+a)\pi}{n+1}\right) =$$

$$\cos\left(A\pi + \frac{\frac{\pi}{2} + R\pi}{n+1}\right) =$$

$$\pm\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + R\pi}{n+1}\right),\ R \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Wiemy, że $T_{n+1}(x)$ ma co najmniej $n + 1$ miejsc zerowych.
Skoro stopień tego wielomianu jest co najwyżej $n + 1$, to liczba miejsc zerowych jest również nie większa niż $n + 1$.
Wynika z tego, że miejsc zerowych jest dokładnie $n + 1$