Punkty – $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$

Proste – $z = a + bx + cy$

Niech $R(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i - \hat{z}_i \right)^2$. Chcemy tak dobrać współczynniki a, b, c, aby kwadratowa odległość prostej $\hat{z}_i = (a + bx_i + cy_i)$ od wartości z_i była najmniejsza.

$$R(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i - \hat{z}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i - (a + bx_i + cy_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i - a - bx_i - cy_i \right)^2$$

$$= \sum z_i^2 + na^2 + b^2 \sum x_i^2 + c^2 \sum y_i^2 - 2a \sum z_i - 2b \sum x_i z_i - 2c \sum y_i z_i + 2ab \sum x_i + 2ac \sum y_i + 2bc \sum x_i y_i$$

$$\begin{bmatrix} R'_a(a,b,c) \\ R'_b(a,b,c) \\ R'_c(a,b,c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R'_a(a,b,c) \\ R'_b(a,b,c) \\ R'_c(a,b,c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2an - \sum z_i + 2b \sum x_i + 2c \sum y_i \\ 2b \sum x_i^2 - 2 \sum x_i z_i + 2a \sum x_i + 2c \sum x_i y_i \\ 2c \sum y_i^2 - 2 \sum y_i z_i + 2a \sum y_i + 2b \sum x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} an - \sum z_i + b \sum x_i + c \sum y_i \\ b \sum x_i^2 - \sum x_i z_i + a \sum x_i + c \sum x_i y_i \\ c \sum y_i^2 - \sum y_i z_i + a \sum y_i + b \sum x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} an + b \sum x_i + c \sum y_i - \sum z_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i y_i - \sum x_i z_i \\ a \sum y_i + b \sum x_i y_i + c \sum y_i^2 - \sum y_i z_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} an + b \sum x_i + c \sum y_i - \sum z_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i y_i - \sum x_i z_i \\ a \sum y_i + b \sum x_i y_i + c \sum y_i^2 - \sum y_i z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} an + b \sum x_i + c \sum y_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i y_i \\ a \sum y_i + b \sum x_i y_i + c \sum y_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z_i \\ \sum x_i z_i \\ \sum y_i z_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} an + b \sum x_i + c \sum y_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i y_i \\ a \sum y_i + b \sum x_i y_i + c \sum y_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n + \sum x_i + \sum y_i \\ \sum x_i + \sum x_i^2 + \sum x_i y_i \\ \sum y_i + \sum x_i y_i + \sum y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z_i \\ \sum x_i z_i \\ \sum y_i z_i \end{bmatrix}$$