TEORIA MIARY

Matematyka, rok II

Wykład 1

NAJBLIŻSZY CEL: Nauczyć się mierzyć wielkość zbiorów.
Pierwsze przymiarki:

- liczność (moc) zbioru - słabo działa dla zbiorów nieskończonych: czy $[0, 1]$ powinien mieć taką samą miarę jak $\mathbb{R}$? Czy powinien mieć miarę większą, czy mniejszą niż $[1, 2]$? To może zależeć od sytuacji. Poza tym, możemy chcieć mierzyć zbiory zgodnie z jakimś rozkładem prawdopodobieństwa, np. rzucamy monetą tak długo aż wypadnie orzeł. Rozpatrzmy zdarzenie, że orzeł wypadł w pierwszym rzucie oraz zdarzenie, że wypadł później niż w pierwszym rzucie. Oba mają prawdopodobieństwo $\frac{1}{2}$ choć jeden ma jeden element, a drugi nieskończenie wiele.

- relacja zawierania (względne porównania zamiast bezwzględnych): jak porównać rozłączne zbiory? Przecież intuicyjnie zbiór $\{0\}$ zazwyczaj uważamy za mniejszy niż $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a samo korzystanie z zawierania nie pozwala nam tego stwierdzić.

- dla przedziałów na prostej długość wydaje się sensowną propozycją mierzenia wielkości. Ale co zrobić w przypadku innych zbiorów niż przedziały, np. suma przedziałów rozłącznych, $\mathbb{Q}$, zbiór Cantora, inne „niewyobrażalne" konstrukcje?

Chcemy umieć mierzyć zbiory tak jak np. ważymy worki kartofli. Stawiając na wagę dwa worki mamy zważyć tyle, ile wynosi suma wag pojedynczych worków (czyli spodziewamy się, że miara sumy mnogościowej zbiorów będzie sumą ich miar). Jeśli odyspiemy trochę kartofli z większego worka do mniejszego worka, to waga uszczuplonego worka = waga początkowa - waga tego co odsypaliśmy (czyli miara różnicy ma się sensownie zachowywać). Jeśli na całej przyczepie są 3 tony kartofli i zabraliśmy z tego wór, który waży 20kg, to na przyczepie zostało 2980kg (czyli chcemy zadbać o miarę dopełnienia). Zero kartofli waży 0kg (czyli miara zbioru pustego ma być równa zero). Nasze zadanie to skonstruować taką wagę-miarę dla bardziej abstrakcyjnych przestrzeni niż przyczepa kartofli.

Prosta rozszerzona

Uzupełniamy zbiór liczb rzeczywistych przez dodanie liczb $+\infty$ i $-\infty$.

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Działania i porządek zgodne z intuicją: $-\infty$ jest liczbą najmniejszą, a $+\infty$ największą. $a + \infty = \infty + a = \infty$ dla $a \neq -\infty$, $\infty - a = \infty$ dla $a \neq \infty$, $a - \infty = -\infty$ dla $a \neq \infty$, zaś suma $a + b$ jest nieokreślona, gdy a i b są nieskończonościami o przeciwnych znakach (podobnie $a - b$, gdy a i b są nieskończonościami o jednakowych znakach).
UWAGA: Mnożenie i dzielenie również zachowuje się zgodnie z intuicją, ale przyjmujemy dodatkowo konwencję $0 \cdot \infty = 0$. To inaczej niż w badaniu granic w analizie rzeczywistej.

Operacje na zbiorach

Zwykle rozważamy podzbiory pewnej ustalonej przestrzeni („dużego zbioru”) X:
Uogólniona suma:

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{x \in X \colon \exists t \in T \ x \in A_t\}$$

Uogólniony przekrój:

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{x \in X \colon \forall t \in T \ x \in A_t\}$$

Uwaga: Zazwyczaj będą nas interesować sumy i przekroje skończone lub co najwyżej przeliczalne: $\bigcup_{n=1}^{N} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
Różnica symetryczna:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Różnica symetryczna jest łączna i przemienna, $A \triangle A = \varnothing$ oraz $A \triangle B = A \setminus B$, gdy $B \subset A$.
Produkt (kartezjański):

$$X \times Y = \{(x, y) \colon x \in X, \ y \in Y\}$$

$$X_1 \times ... \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, ..., x_n) \colon \forall i = 1, ..., n \ x_i \in X_i\}$$

$$X_1 \times X_2 \times ... = \prod_{i=1}^{\infty} X_i = \{(x_1, x_2, ...) \colon \forall i = \mathbb{N} \ x_i \in X_i\}$$

Uwaga: Nieprzeliczalnych produktów kartezjańskich będziemy na razie unikać, chociaż...

Granica dolna i górna ciągu zbiorów

Rozpatrujemy ciąg zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicja 1. *Granica dolna* ciągu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ to zbiór $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, a *granica górna* to $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Rozpisując tę definicję przy użyciu kwantyfikatorów otrzymujemy:

- $x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \iff x$ należy do prawie wszystkich wyrazów ciągu A_n
- $x \in \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \iff x$ należy do nieskończenie wielu wyrazów ciągu A_n

Stąd, oczywiście, $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$. Jeśli zachodzi równość, to mówimy, że ciąg zbiorów A_n jest zbieżny.

Przykład:

1. Dla $A_n = [0, 1 + (-1)^n] \subset \mathbb{R}$ mamy $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{0\}$, a $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = [0, 2]$.
2. Dla $A_n = \{1, ..., n\} \subset \mathbb{N}$ mamy $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \mathbb{N}$.

σ-ciało zbiorów

Niech X będzie ustalonym zbiorem, a $\mathcal{P}(X)$ rodziną wszystkich jego podzbiorów.

Definicja 2. Rodzina $\mathcal{A}$ jest *σ-ciałem (σ-algebrą) podzbiorów* X, gdy

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$,
2. dopełnienie A^c każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$ należy do $\mathcal{A}$ (mówimy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest zamnkięta na branie dopełnień),
3. dla każdego ciągu zbiorów $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ suma $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ należy do $\mathcal{A}$ (tzn. $\mathcal{A}$ jest zamknięta na przeliczalne sumy).

W poniższych faktach niech $\mathcal{A}$ będzie σ-ciałem.

Fakt 1. $X \in \mathcal{A}$

Dowód.

$$\varnothing \in \mathcal{A} \Longrightarrow X = \varnothing^c \in \mathcal{A}$$

□

Fakt 2. Jeśli $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, to $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ należy do $\mathcal{A}$.

Dowód. Z definicji σ-algebry dopełnienia ${A_i}^c$ zbiorów A_i należą do $\mathcal{A}$, więc $\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)^c$ należy do $\mathcal{A}$, zaś na mocy prawa de Morgana dopełnieniem tej sumy jest $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. □

Fakt 3. Jeśli $A, B \in \mathcal{A}$, to $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $A \triangle B$ należą do $\mathcal{A}$.

Dowód. Niech $A, B \in \mathcal{A}$.

- Aby sprawdzić, że $A \cup B \in \mathcal{A}$, wystarczy przyjąć $A_1 = A$, $A_i = B$ dla $i \geqslant 2$ i zauważyć, że zgodnie z definicją σ-ciała $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
- Aby sprawdzić, że $A \cap B \in \mathcal{A}$, wystarczy przyjąć $A_1 = A$, $A_i = B$ dla $i \geqslant 2$ i zauważyć, że zgodnie z poprzednim faktem $A \cap B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
- $A \setminus B \in \mathcal{A} = A \cap B^c \in \mathcal{A}$, bo $B^c \in \mathcal{A}$ na mocy definicji, a przekrój nie wyprowadza poza σ-ciało na mocy poprzedniego punktu.
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, a wobec poprzednich punktów, ani suma, ani różnica nie wyprowadzają poza σ-ciało.

□

Przykłady

1. Dla dowolnego zbioru X rodzina $\mathcal{P}(X)$ wszystkich jego podzbiorów jst σ-algebrą. Jest to największa (w sensie zawierania) σ-algebra podzbiorów X.
2. Dla dowolnego X najmniejszą (w sensie zawierania) σ-algebrą podzbiorów X jest *σ-algebra trywialna* $\mathcal{A} = \{\varnothing, X\}$.

3. Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym. Wtedy rodzina

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : |A| \leqslant \aleph_0 \text{ lub } |A^c| \leqslant \aleph_0\}$$

jest σ-algebrą. Zbiory spełniające warunek $|A^c| \leqslant \aleph_0$ nazywamy *koprzeliczalnymi.* (Zauważmy, że gdyby X był przeliczalny, to rodzina $\mathcal{A}$ byłaby σ-algebrą wszystkich podzbiorów X).

Dowód. Zbiór pusty spełnia $|\varnothing| \leqslant \aleph_0$, więc należy do $\mathcal{A}$.

Sprawdźmy zamkniętość na branie dopełnień. Niech $A \in \mathcal{A}$. Jeśli A jest przeliczalny, to A^c jest koprzeliczalny, więc należy so $\mathcal{A}$. Jeśli zaś A jest nieprzeliczalny, to, skoro należy do A, musi być zbiorem koprzeliczalnym. Zatem A^c jest przeliczalny i należy do $\mathcal{A}$.

Sprawdźmy zamkniętość na przeliczalne sumy. Jeśli w ciągu $A_1, A_2, ...$ mamy same zbiory przeliczalne, to $\bigcup_n A_n$ jest przeliczalny więc należy do $\mathcal{A}$. Jeśli zaś w tym ciągu mamy przynajmniej jeden zbiór koprzeliczalny, to suma jest też koprzeliczalna, a w konsekwencji należy do $\mathcal{A}$. $\square$

Definicja 3. Parę $(X, \mathcal{F})$, gdzie X jest dowolnym zbiorem (przestrzenią), a $\mathcal{F}$ wyróżnionym σ-ciałem podzbiorów X nazywamy *przestrzenią mierzalną.*

Generowanie σ-ciała

W powyższych przykładach opisywaliśmy σ-ciało podając pełną charakteryzację jego elementów (w przykładzie 3 nawet wyliczyliśmy wszystkie elementy). Niestety, często jest tak, że zbiory, którymi chcielibyśmy się posługiwać nie tworzą σ-ciała, a jawny opis σ-ciała zawierającego rodzinę zbiorów, na której nam zależy, nie jest możliwy. Musimy więc umieć wygenerować σ-ciało z zadanej rodziny zbiorów. Definicję operacji generowania poprzedzimy następującym lematem

Lemat 1. Niech $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, będą σ-ciałami podzbiorów pewnego ustalonego zbioru X. Wtedy przekrój $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{A}_\alpha$ jest także σ-ciałem.

Dowód. Sprawdzimy aksjomaty σ-ciała.

Oczywiście, każda rodzina $\mathcal{A}_\alpha$ zawiera zbiór pusty, więc $\varnothing \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{A}_\alpha$.

Niech $A \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{A}_\alpha$. To oznacza, że $A \in \mathcal{A}_\alpha$ dla każdej wartości $\alpha \in \Lambda$. Stąd wobec faktu, że $\mathcal{A}_\alpha$ są σ-ciałami, $A^c \in \mathcal{A}_\alpha$ dla każdej α, czyli $A^c \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{A}_\alpha$.

Niech teraz $A_1, A_2, ... \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{A}_\alpha$, tzn. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}_\alpha$ dla każdej $\alpha \in \Lambda$. Wtedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_\alpha$ dla każdej α, a stąd $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{A}_\alpha$. $\square$

Niech $\mathcal{F}$ będzie pewną rodziną podzbiorów X. Chcielibyśmy optymalnie rozszerzyć tę rodzinę do σ-ciała. Zauważmy, że rodzina $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów X jest σ-ciałem i zawiera $\mathcal{F}$, ale zapewne nie jest to zbyt oszczędny wybór. Wprowadzamy więc następującą definicję, której poprawność uzasadnia poprzedni lemat.

Definicja 4. Przekrój wszystkich σ-ciał zawierających $\mathcal{F}$ nazywamy *σ-ciałem generowanym przez $\mathcal{F}$* i oznaczamy $\sigma(\mathcal{F})$. Innymi słowy, σ-ciało generowane przez $\mathcal{F}$ to najmniejsze σ-ciało zawierające $\mathcal{F}$.

Lemat 2. Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem, to $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. W szczególności, dla dowolnej rodziny zbioróf $\mathcal{A}$ mamy $\sigma(\sigma((\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$.

Dowód. $\sigma(\mathcal{F}) \supset \mathcal{F}$ z definicji, a skoro jest najmniejszym σ-ciałem o tej własności, to jest równe $\mathcal{F}$. Drugie zdanie wynika z pierwszego, bo $\sigma(\mathcal{A})$ jest σ-ciałem. $\square$

Lemat 3. Jeśli $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, to $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.

Dowód. Mamy $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{B})$. Zatem $\sigma(\mathcal{B})$ jest pewnym σ-ciałem zawierającym $\mathcal{A}$. Z definicji generowania, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$. $\square$

Zbiory borelowskie na prostej

Bardzo ważnym przykładem zastosowania operacji generowania σ-ciała jest σ-ciało zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ podzbiorów prostej $\mathbb{R}$. Jest to σ-ciało generowane przez wszystkie odcinki otwarte, tzn. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O})$, gdzie $\mathcal{O}$ jest rodziną wszystkich odcinków otwartych. Oznaczmy również przez $\mathcal{D}$ rodzinę wszystkich odcinków domkniętych oraz

$$\mathcal{PO}^+ = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{PO}^- = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{PD}^+ = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{PD}^- = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$$

Okazuje się, że

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{PO}^+) = \sigma(\mathcal{PO}^-) = \sigma(\mathcal{PD}^+) = \sigma(\mathcal{PD}^-) \qquad \text{itp.}$$

Udowodnijmy równość $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{D})$. Najpierw pokażemy $\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathcal{D})$. Do tego wystarczy, by $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{D})$. Istotnie, każdy odcinek otwarty (a, b) możemy zapisać w postaci sumy przeliczalnie wielu odcinków domkniętych jako $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$, więc $(a, b) \in \sigma(\mathcal{D})$, co kończy tę część dowodu. Na odwrót rozumowanie jest podobne: pokazujemy tylko, że $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{O})$, a to wynika z równości $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$.

σ-ciało borelowskie zawiera wszystkie podzbiory, z którymi mamy do czynienia w praktyce. Nie są to jednak wszystkie podzbiory $\mathbb{R}$; wszystkich jest znacznie więcej. Niemniej warto zauważyć, że wszystkie podzbiory jednoelementowe są borelowskie, bo

$$\{x\} = \Big(\underbrace{(-\infty, x)}_{\text{otwarty}} \cup \underbrace{(x, \infty)}_{\text{otwarty}}\Big)^c.$$

Ogólniej, wszystkie podzbiory skończone lub przeliczalnie nieskończone są borelowskie jako przeliczalne sumy zbiorów borelowskich (jednoelementowych), np. zbiór liczb wymiernych (a więc przez dopełnienie także niewymiernych) jest borelowski.

Zbiory borelowskie można też zdefiniować na dowolnej przestrzeni metrycznej X. Niech $\tau(X)$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów otwartych (tzn. topologię) przestrzeni X. Wtedy definiujemy

$$\mathcal{B}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\left(\tau(X)\right).$$

Inne rodziny zbiorów

Definicja 5. *Ciałem (algebrą) podzbiorów* przestrzeni X nazywamy każdą rodzinę $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ spełniającą warunki

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. jeśli $A, B \in \mathcal{A}$, to $A \cup B \in \mathcal{A}$
3. jeśli $A \in \mathcal{A}$, to $A^c \in \mathcal{A}$.

Definicja 6. *Pierścieniem podzbiorów* przestrzeni X nazywamy każdą rodzinę $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ spełniającą warunki

1. $\varnothing \in \mathcal{R}$
2. jeśli $A, B \in \mathcal{R}$, to $A \cup B \in \mathcal{R}$
3. jeśli $A, B \in \mathcal{R}$, to $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Definicja 7. *σ-pierścieniem podzbiorów* przestrzeni X nazywamy każdą rodzinę $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ spełniającą warunki

1. $\varnothing \in \mathcal{S}$
2. jeśli $A_1, A_2, ... \in \mathcal{S}$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$
3. jeśli $A, B \in \mathcal{S}$, to $A \setminus B \in \mathcal{S}$.

Fakt 4. Każde σ-ciało jest ciałem. Każde ciało jest pierścieniem. Każde σ-ciało jest σ-pierścieniem.

Przykłady

1. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Zdefiniujmy rodzinę zbiorów
$$\mathcal{A} = \{A \subset X \colon |A| < \aleph_0 \ \vee \ |A^c| < \aleph_0\}.$$
Wówczas $\mathcal{A}$ jest ciałem (dowód na ćwiczeniach).

2. Niech $X = [0,1]$. Każdy zbiór postaci (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, gdzie $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a \leqslant b$, nazywamy *przedziałem.* Niech
$$\mathcal{A} = \{I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_k \colon k \in \mathbb{N},\ I_1, ..., I_k \text{ są przedziałami}\}.$$
Wówczas $\mathcal{A}$ jest ciałem.

Niech $\mathcal{D} \subset X$. Najmniejsza rodzina zbiorów $\mathcal{A}$ zawierająca $\mathcal{F}$ i będąca algebrą nazywa się algebrą generowaną przez $\mathcal{F}$ i oznaczana będzie $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Najmniejszy pierścień zawierający $\mathcal{F}$ (*pierścień generowany przez* $\mathcal{F}$) będziemy oznaczać przez $\mathcal{R}(\mathcal{F})$, a najmniejszy σ-pierścień zawierający $\mathcal{F}$ (*σ-pierścień generowany przez* $\mathcal{F}$) przez $\mathcal{S}(\mathcal{F})$.

Fakt 5. $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$ oraz $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$

Dowód. Wynika z faktu 4. □