# Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2020

# Najkrótsze ścieżki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym.

Jak znaleźć najkrótszą ścieżkę z $s$ do $t$?
Jak znaleźć najkrótszą ścieżkę z $s$ do $v$ dla każdego wierzchołka $v \in V$?

# Najkrótsze ścieżki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \to R \geq 0$.
Waga ścieżki $P$ to suma wag krawędzi leżących na $P$.
Najlżejsza / najkrótsza (względem $c$) ścieżka z $s$ do $t$ to ta ze ścieżek z $s$ do $t$, która ma najmniejszą wagę.

Jak znaleźć najkrótszą (wzgl. $c$) ścieżkę z $s$ do $t$?
Jak znaleźć najkrótszą (wzgl. $c$) ścieżkę z $s$ do $v$ dla każdego wierzchołka $v \in V$?

# Najkrótsze ścieżki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \to R \geq 0$,
a $s$ ustalonym wierzchołkiem z $V$.

Niech $S \subseteq V$. Ścieżka $P$ z $s$ do $v$ jest prawie $S$-owa / osiągalna bezpośrednio z $S$ jeśli wszystkie wierzchołki na $P$ oprócz $v$ są w $S$.
$d(v)$ - waga najkrótszej ścieżki z $s$ do $v$
$t(v)$ - waga najkrótszej prawie $S$-owej ścieżki z $s$ do $v$; jeśli takiej scieżki nie ma, to $t(v) = \infty$

# Algorytm Dijkstry

$G = (V, E)$ - graf spójny; $c : E \to R \geq 0$, $s \in V$

$d(v)$ - waga najkrótszej ścieżki z $s$ do $v$
$t(v)$ - waga najkrótszej prawie $S$-owej ścieżki z $s$ do $v$; jeśli takiej scieżki nie ma, to $t(v) = \infty$

$S \leftarrow \{s\},\ d(s) \leftarrow 0$
dla każdego sąsiada $v$ wierzchołka $s$: $t(v) \leftarrow c(s, v)$
dla pozostałych wierzchołków: $t(v) \leftarrow \infty$
dopóki $S \neq V$ wykonaj:

    $u \leftarrow \ argmin\{t(u) : u \notin S\}$
    dodaj $u$ do $S$
    zaktualizuj wartości $t(v)$:
    dla każdego sąsiada $v \notin S$ wierzchołka $u$:
    $t(v) \leftarrow \min\{t(v), d(u) + c(u, v)\}$

# Algorytm Dijkstry

Jak zmodyfikować algorytm Dijkstry, by znajdować najkrótsze ścieżki a nie tylko wagi najkrótszych ścieżek?

Czy algorytm ten działa również:

- w grafach skierowanych?
- gdy wagi krawędzi mogą być ujemne?

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem a $W \subseteq V$ podzbiorem wierzchołków. Sąsiedztwo $W$ oznaczane jako $N(W)$ definujemy jako zbiór $\{v \in V : \exists_{w \in W} \{v, w\} \in E\}$.

Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

**Warunek Halla**

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$.

# Skojarzenie doskonałe w grafie dwudzielnym

Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

## Warunek Halla

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$.

## Skojarzenie doskonałe w grafie dwudzielnym

Graf dwudzielny $G$ zawiera skojarzenie doskonałe wtw, gdy spełniony jest w nim warunek Halla.

# Pokrycie wierzchołkowe

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem.
Pokrycie wierzchołkowe grafu $G$ to dowolny podzbiór $V' \subseteq V$ taki, że kaażda krawędź z $E$ ma przynajmniej jeden z końców w $V'$.

Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe grafu $G$ to to spośród pokryć wierzchołkowych $G$, które zawiera najmniej wierzchołków.

# Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem.
Pokrycie wierzchołkowe grafu $G$ to dowolny podzbiór $V' \subseteq V$ taki, że kaażda krawędź z $E$ ma przynajmniej jeden z końców w $V'$.

Niech $M$ będzie jakimś skojarzeniem $G$ a $W$ jakimś pokryciem wierzchołkowym.
Czy możemy jakoś porównać $|M|$ i $|W|$? $|M| \leq |W|$? $|M| \geq |W|$

# Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem.
Niech $M$ będzie jakimś skojarzeniem $G$ a $W$ jakimś pokryciem wierzchołkowym.

Wtedy $|M| \leq |W|$.

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem.
Niech $M_{max}$ będzie największym skojarzeniem $G$ a $W_{min}$ najmniejszym pokryciem wierzchołkowym.

Wtedy $|M_{max}| \leq |W_{min}|$.
A może zachodzi równość?

# Twierdzenie Koeniga

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem dwudzielnym, $M_{max}$ największym skojarzeniem $G$ a $W_{min}$ najmniejszym pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M_{max}| = |W_{min}|$.