https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=318

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 14

20 stycznia 2021 r.

Zajęcia 2 lutego 2021 r.
Zaliczenie listy **od 3 pkt.**

L14.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie

$$A := \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{x} := \begin{bmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{bmatrix}, \quad \widehat{x} := \begin{bmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wektory reszt $\widetilde{r} := A\widetilde{x} - b$, $\widehat{r} := A\widehat{x} - b$ oraz wektory błędów $\widetilde{e} := \widetilde{x} - x$, $\widehat{e} := \widehat{x} - x$, gdzie x jest rozwiązaniem układu $Ax = b$. Który z wektorów $\widetilde{x}$, $\widehat{x}$ jest lepszym przybliżeniem rozwiązania rozważanego układu równań liniowych? Jaki stąd wniosek?

L14.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znajdź rozkład LU macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 5 \\ -10 & 12 & -24 & 9 \end{bmatrix},$$

a otrzymany wynik wykorzystaj do obliczenia wartości jej wyznacznika oraz macierzy A^{-1}.

L14.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Stosując metodę faktoryzacji rozwiąż układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ -1 & -3 & 0 & 11 \\ -2 & -10 & 5 & 25 \\ -3 & -13 & -16 & 25 \end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 31 \\ -13 \end{bmatrix}, \qquad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

L14.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij następujące twierdzenia:

(a) Iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) jest macierzą trójkątną dolną (górną).

(b) Jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

L14.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponuj algorytm odwracania nieosobliwej macierzy trójkątnej górnej. Jaka jest jego złożoność?

L14.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Opracuj oszczędny algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy trójprzekątniowej, przy założeniu, że rozkład ten istnieje.

L14.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dana będzie macierz $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ & a_2 & & & & \\ & & a_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_{n-1} & \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Załóżmy, że istnieje rozkład LU macierzy A_n. Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania tego rozkładu. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

(–) Paweł Woźny