Z9

Turniej z treści zadania jest grafem $(n-1)$-regularnym. Skoro każdy zawodnik może rozegrać partię raz dziennie to turniej musi trwać co najmniej tyle dni ile partii zawodnik musi rozegrać, czyli $n-1$.
Pokażmy, że potrzeba dokładnie $n-1$ dni dla turniejów o parzystej liczbie zawodników oraz n dla liczby nieparzystej.

- n jest parzyste

  Wiemy, że w grafie dwudzielnym k-regularnym istnieje skojarzenie doskonałe (każdy zawodnik rozegrywa partię). *(dowód na dole pracy)
  Usunięcie dowolnego skojarzenia doskonałego da nam graf $(k-1)$-regularny (każdy wierzchołek traci dokładnie jedną krawędź). Zatem każdego dnia $(n-i)$ znajdujemy skojarzenie doskonałe grafu $(n-i)$-regularnego.
  Odliczając od $n-1$ do 1 mamy $n-1$ dni.

- n jest nieparzyste

  Ponieważ mamy nieparzystą liczbę zawodników to każdy zawodnik nie zagra co najmniej jednego dnia.
  Dodajemy do turnieju zawodnika ε.
  Jeżeli zawodnik v rozgrywa partię z ε to znaczy, że v nie bierze tego dnia udziału w turnieju.
  Mamy więc parzystą $(n+1)$ liczbę zawodników.
  Przeprowadzając to samo rozumowanie co w pierwszym punkcie dostajemy, że turniej można rozegrać w n dni.

Graf $=(X \cup Y, V)$ k-regularny zawiera skojarzenie doskonałe

Zauważmy, że $|X| = |Y|$ skoro z X i Y wychodzi odpowiednio $|X|k$ i $|Y|k$ krawędzi (liczba krawędzi wychodzących z jednego zbioru musi być równa liczbie krawędzi wchodzących do zbioru przeciwnego).
Weźmy $\tilde{X} \subseteq X$. Z $\tilde{X}$ wychodzi dokładnie $|\tilde{X}|k$ krawędzi.
Każda z tych krawędzi wchodzi do $N(\tilde{X}) \subseteq Y$.
Gdyby $|N(\tilde{X})|\cancel{k} < |\tilde{X}|\cancel{k}$ to by znaczyło, że $\exists_{v \in N(\tilde{x})} \deg(v) > k$ co jest sprzeczne z założeniem o k-regularności grafu.
Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla $\tilde{Y} \subseteq Y$.
Na mocy tw. Halla graf zawiera skojarzenie doskonałe.