https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=318

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 7

18 listopada 2020 r.

Zajęcia 24 listopada 2020 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L7.1. 1 punkt Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

a)

x_k	-3	-1	0	1
y_k	-16	0	-16	32

,

b)

x_k	0	1	3	-1	-3
y_k	-16	32	560	0	-16

,

c)

x_k	-1	1	0	-3
y_k	0	-8	-16	-16

.

Uwaga. Jeśli chwilę pomyślisz, na pewno zauważysz, że rozwiązując podpunkty **b)** i **c)** nie musisz wykonywać wielu obliczeń.

L7.2. 1 punkt Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby dla danych parami różnych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ obliczyć ilorazy różnicowe

$$f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]? \tag{1}$$

Podaj pseudokod algorytmu wyznaczającego ilorazy różnicowe (1), którego złożoność pamięciowa wynosi $O(n)$.

L7.3. 1 punkt Korzystając z wiedzy z analizy matematycznej, znajdź takie wartości parametrów $a, b > 0$, by wyrażenia

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x-a)(x+a)|, \qquad \max_{x\in[-1,1]} |(x-b)x(x+b)|$$

przyjmowały najmniejszą możliwą wartość. Jakie i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.4. **Włącz komputer!** 1 punkt Przy pomocy programu umożliwiającego rysowanie wykresów funkcji, przygotuj wykresy wielomianów

$$p_{n+1}(x) := (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \qquad (n = 4, 5, \ldots, 20)$$

dla x_k ($0 \le k \le n$) będących węzłami równoodległymi w przedziale $[-1, 1]$. Następnie powtórz eksperyment dla *węzłów Czebyszewa*. Skomentuj wyniki porównując odpowiednie wykresy. Jakie i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.5. 1 punkt Funkcję $f(x) = \ln(2x + 3)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n + 1$ różnych punktach przedziału $[-1, 0]$. Znajdź wartość n, dla której

$$\max_{x\in[-1,0]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-6}.$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadających przedziałowi $[-1, 0]$?

L7.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Funkcję $f(x) = e^{x/3}$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w $n+1$ równoodległych punktach przedziału $[-1, 1]$. Znajdź **możliwie najmniejszą** wartość n, dla której

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-16} \text{ ?}$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy za węzły przyjmiemy zera wielomianu Czebyszewa T_{n+1}?

L7.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Język programowania `PWO++` ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się m.in. procedura `Interp_Newton(x,f)` znajdująca dla wektora `x`$:= [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ parami różnych liczb rzeczywistych i wektora `f`$:= [f_0, f_1, \ldots, f_n]$ współczynniki b_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_n \in \Pi_n$,

$$L_n(x) := b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

spełniającego warunki $L_n(x_i) = f_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie n **musi być mniejsze** niż 31. W jaki sposób, wykorzystując procedurę `Interp_Newton` **tylko raz**, można **szybko** wyznaczyć współczynniki postaci Newtona wielomianu $L_{31} \in \Pi_{31}$ spełniającego warunki

$$L_{31}(z_i) = h_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, 31;\ z_i \ne z_j \text{ dla } i \ne j)?$$

L7.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ W rzeczywistości procedura `Interp_Newton(x,f)` języka `PWO++` (patrz zadanie poprzednie) ma jeszcze jedno ograniczenie. Chodzi o to, że żaden z elementów wektorów `x` oraz `f` nie może być co do modułu większy niż 2020. Czy jeśli warunek ten nie jest spełniony, to procedura ta może być nadal użyteczna?

(–) Paweł Woźny