$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}}, \quad f(x_1,x_2)=\frac{1}{\pi} \quad \text{dla} \quad 0<x_1^2+x_2^2<1$$

$$\operatorname{Cov}(X_1,X_2) = E\left[(X_1-E(X_1))(X_2-E(X_2))\right]$$

Skoro $0<x_1^2+x_2^2<1$ to znaczy, że działamy na kole jednostkowym.

Uzależniając x_2 od x_1 mamy $x_2 \in \left(-\sqrt{1-x_1^2}, \sqrt{1-x_1^2}\right)$.

$$EX_1 = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\pi}\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\pi}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t=1-x^2 \\ dt=-2x\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{0}\sqrt{t}\,dt = \frac{-1}{\pi}\cdot 0 = 0$$

Tak samo $EX_2=0$.

Podstawiając do wzoru otrzymujemy

$$\operatorname{Cov}(X_1,X_2) = E\left[(X_1-E(X_1))(X_2-E(X_2))\right] = E\left[(X_1-0)(X_2-0)\right] =$$

$$= E(X_1X_2) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,\frac{1}{\pi}\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{x}{\pi}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi}\,dx$$

$$= \begin{bmatrix} t=1-x^2 \\ dt=-2x\,dx \\ -dt=2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{-1}{\pi}\int_{0}^{0}\sqrt{t}\,dt = 0$$

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(x_1,x_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \frac{0}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = 0$$

Zmienne są niezależne wtw $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$

Z zad. 6 wiemy, że $f_1(x)=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$, $f_2(y)=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$

Stąd $f(x,y)=\frac{1}{\pi} \neq \frac{4\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{\pi} = f_1(x)f_2(y)$ dla np. $x=y=1$.

Czyli zmienne są zależne.

Created with IDroo.com