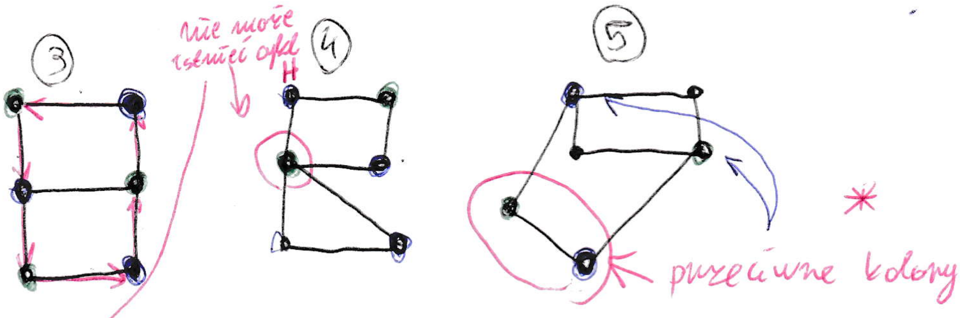
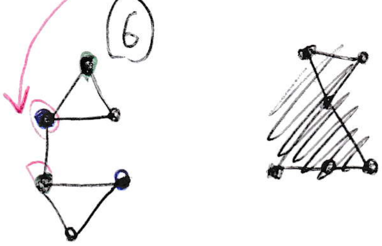
Jakub Skolski 314007 Zadanie 1

⬠)

□)



△)



a) cykl ~~[illegible]~~ Eulera mają: (4) (parzyste stopnie wierzchołków)

b) cykle Hamiltona mają: (1), (3) *

c) $\chi(G)$ ← liczba chromatyczna

(1) zawiera klikę K_3, czyli potrzeba co najmniej 3 kolorów, przy czym reszta grafu leży na nieparzystym cyklu, więc wystarczą 3 kolory, $\chi(1) = 3$

(2) => $\chi(2) = 3$ (mamy nieparzysty cykl - łatwo dobrać kolory dla reszty)

(3) => $\chi(3) = 2$ (nie da się mniej bo są krawędzie ☺)

(4) => $\chi(4) = 3$ (bo K_3)

(5) => $\chi(5) = 3$ (*)

(6) => $\chi(6) = 3$ (bo K_3)

Jakub Skolski 314007 Zadanie 2

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + \frac{1}{\pi^n} + 7$$

$$E^2\langle a_n\rangle - 3E\langle a_n\rangle + 2\langle a_n\rangle - \left(\frac{1}{\pi}\right)^n - 7 = 0$$

$$\langle a_n\rangle(E^2-3E+2) - \underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\right)^n}_{(E-\frac{1}{\pi})} - \underbrace{7}_{(E-1)} = 0$$

Anihilator: $(E^2-3E+2)(E-\frac{1}{\pi})(E-1) = (E-2)(E-\frac{1}{\pi})(E-1)^2$

$(E-2) \Rightarrow \alpha 2^n$

$(E-\frac{1}{\pi}) \Rightarrow \beta\left(\frac{1}{\pi}\right)^n$

$(E-1)^2 \Rightarrow \gamma n + \delta$

Postać ogólna:

$\alpha 2^n + \beta\left(\frac{1}{\pi}\right)^n + \gamma n + \delta$

Jakub Skalski 314007 Zadanie 3

$a_n := 7^n$

$A(x) = \frac{1}{1-7x}$

$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_i) x^i =$$

$$= a_0 x^0 + a_0 x^1 + a_1 x^1 + a_0 x^2 + a_1 x^2 + a_2 x^2 + \dots =$$

$$= a_0(x^0 + x^1 + x^2 + \dots) + a_1(x^1 + x^2 + x^3 + \dots) + a_2(x^2 + x^3 + x^4 + \dots) =$$

$$= \cancel{a_2}\, a_0 (x^0 + x^1 + x^2 + \dots) + a_1 x^1 (x^0 + x^1 + x^2 + \dots) +$$

$$a_2 x^2 (x^0 + x^1 + x^2 + \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \underbrace{(x^0 + x^1 + x^2 + \dots)}_{\frac{1}{1-x}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right) \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \frac{A(x)}{1-x}$$

Chcemy mieć przerwy między wyrazami; czyli wynikowa tworząca

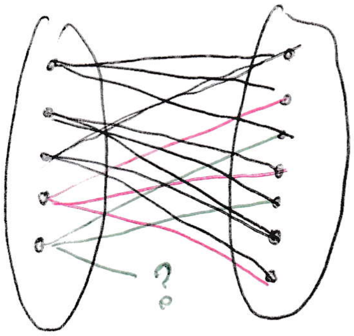
$$W(x) = S(x^2) = \frac{A(x^2)}{1-x^2} = \frac{1}{(1-7x^2)(1-x^2)}$$

Jakub Skalski 314007 Zadanie 4

z - liczba zer

$$\sum_{z=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{z}$$

Jakub Skalski 314007 Zadanie 5



Sklonujemy aktorki - każda aktorka ma 3 klony.

Chcemy umieścić 15 klonów w 7 sztukach.

Trzeba tutaj zaznaczyć, że da się wykonać taki rozkład klonów po sztukach, w którym klony tej samej aktorki nie są w tej samej sztuce (aktorka nie może brać w sztuce udziału wielokrotnie ☺)

Zatem z zasady szufladkowej Dirichleta rozmieszczając 15 klonów w 7 sztukach w którejś sztuce są 3 klony (różne!).

Jakub Skolski 314007 Zadanie 6

$\Omega = 4^n$ (wszystkie ustawienia a, b, c, d w ciąg)

włączenia - wyłączenia

$$S_2 = \binom{4}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \left(\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} \left(\sum_{i=0}^{n-2k} \binom{n-2k}{i} \right) \right)$$

2 litery występują w równej ilości

$$S_3 = \binom{4}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\binom{n-2k}{k}$$

3 litery równe

$$S_4 = \cancel{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\binom{n-2k}{k}\binom{n-3k}{k}, \quad k := \frac{n}{4}$$

Rozwiązanie:

$$\Omega - S_2 + 2 \cdot S_3 - 3 \cdot S_4$$

tylko jeśli n jest podzielne przez 4

Jakub Skolski 314007 Zadanie 8

Dowód indukcyjny po n dla $W(Z_n)$, gdzie $W(S)$ oznacza, że zbiór S spełnia warunki zadania zawierania podzbiorów.

- Baza ($n=1$):

  $P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

  wybieramy ponad połowę, czyli 2,

  mamy $\emptyset \subseteq \{1\}$ ✓

- Krok ($W(Z_n) \Rightarrow W(Z_{n+1})$):

Mamy zbiór Z_{n+1}, wyróżnijmy w nim jakiś element (nazwijmy go x).

x należy do połowy zbiorów Z_{n+1}, czyli mamy

A	B
P_1	$P_1 \cup \{x\}$
P_2	$P_2 \cup \{x\}$
P_3	$P_3 \cup \{x\}$
$\vdots$	$\vdots$
P_{2^n}	$P_{2^n} \cup \{x\}$
2^n	2^n

Chcemy wybrać ponad połowę tych podzbiorów, czyli co najmniej 2^n+1

Jeśli weźmiemy ponad połowę zbioru A, to ~~z~~ zał. ind. $W(Z_{n+1})$. Czyli bierzemy $k \leq 2^{n-1}$.

Skoro tak to ze zbioru B należy dobrać $2^n + 1 - k$ elementów. Jeśli weźmiemy ich więcej niż 2^{n-1} to wtedy $W(Z_{n+1})$ (ponieważ x zawsze należy, więc można zredukować problem do zawierania P_i, P_j).

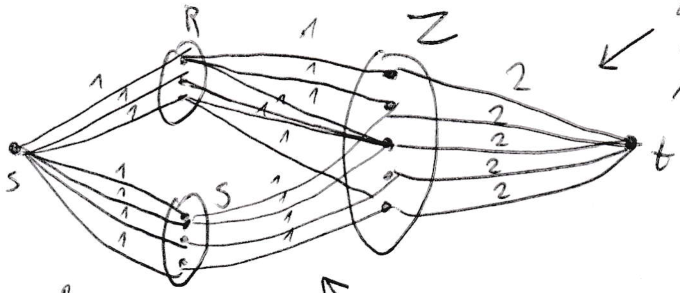
Czyli z zarówno A i B wybieramy 2^{n-1} elementów.

Trzeba jeszcze dobrać jeden element (do sumy $2 \cdot 2^{n-1}+1$)

Na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, ~~...~~ z któregoś ze zbiorów A, B wzięliśmy ponad połowę elementów, czyli dwa z nich podlegają warunkowi zawierania

Jakub Skalski 314007 Zadanie 9

Budujemy sieć



każdy reprezentant może być użyty maksymalnie 2 razy.

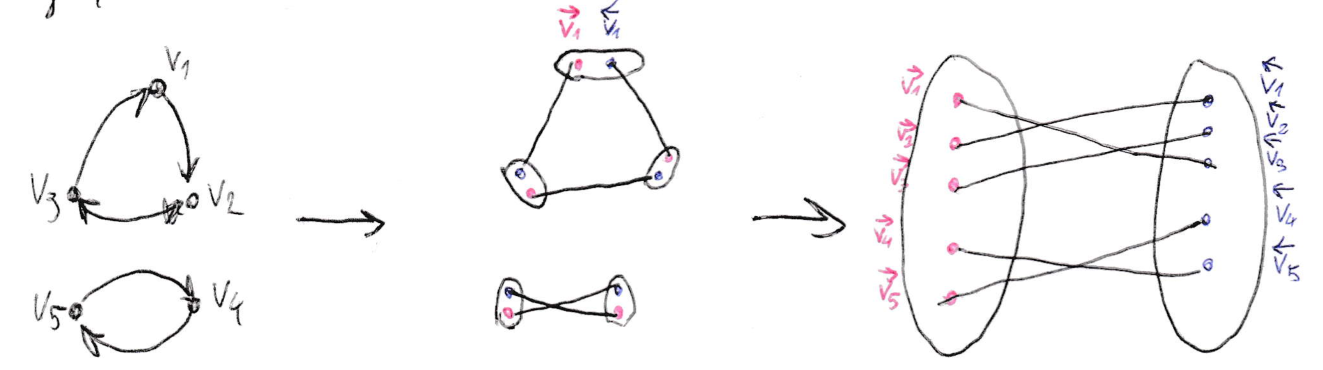
chcemy, aby każdy podzbiór miał reprezentanta

„wybierany" reprezentanta (krawędzie odzwierciedlają tutaj realny stan rzeczy tj. jeśli podzbiór ma 3 elementy to ma krawędzie do 3 wierzchołków w Z)

Jakub Skalski 314007 Zadanie 10

Dzielimy każdy wierzchołek na dwa wierzchołki wejście i wyjście

Graf można ~~podzielić~~ przedstawić w następujący sposób:



Czyli wystarczy znaleźć algorytmem ~~ma~~ największe skojarzenie. Wtedy w takim skojarzeniu ~~dzieląc wierzchołki na grupy~~ jeśli jakiś wierzchołek nie ma wierzchołka do pary tj. z jego wejścia coś wychodzi, ale nic nie wchodzi i na odwrót to znaczy, że pokrycie cyklowe nie istnieje wpp. każdy wierzchołek leży na cyklu i mamy pokrycie.