Rachunek Prawdopodobieństwa

Wydział Elektroniki

WYKŁAD II

1. Prawdopodobieństwo warunkowe

1.1. **Definicja i własności.** Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną.

Definicja. Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B, gdzie $A, B \in \mathcal{F}$ oraz $\mathbb{P}(B) > 0$, definiujemy wzorem

$$\mathbb{P}(A|B) \overset{def}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Uwaga. Dla ustalonego zdarzenia B powyższy wzór definiuje nowe prawdopodobieństwo na $(\Omega, \mathcal{F})$

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B).$$

Uwaga. Wartość $\mathbb{P}(A)$ można interpretować jako prawdopodobieństwo zdarzenia A zanim zaszło zdarzenie B, zaś $\mathbb{P}_B(A)$ to prawdopodobieństwo zdarzenia A, gdy już wiemy, że zaszło zdarzenie B.

Przykład. Wykonujemy dwa rzuty symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

(a) dwukrotnie wypadł orzeł?
(b) dwukrotnie wypadł orzeł, jeśli za drugim razem wypadł orzeł?
(c) dwukrotnie wypadł orzeł, jeśli wypadł przynajmniej jeden orzeł?

Niech $\Omega = \{(O,O), (O,R), (R,O), (R,R)\}$, tzn. zdarzenia elementarne mogą być tutaj bezpośrednio utożsamione z możliwymi wynikami doświadczenia. Wszystkie te cztery wyniki są oczywiście jednakowo prawdopodobne, stąd odpowiedzią do (a) jest $\mathbb{P}(\{(O,O)\}) = 1/4$. Odpowiedzią w punkcie (b) jest

$$\mathbb{P}(\{(O,O)\} \,|\, \{(O,O), (R,O)\}) = \frac{\mathbb{P}(\{(O,O)\})}{\mathbb{P}(\{(O,O), (R,O)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

podczas gdy w punkcie (c) otrzymujemy

$$\mathbb{P}(\{(O,O)\} \,|\, \{(O,O), (O,R), (R,O)\}) = \frac{\mathbb{P}(\{(O,O)\})}{\mathbb{P}(\{(O,O), (O,R), (R,O)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe jest jednym z najważniejszych pojęć teorii prawdopodobieństwa. Znajduje ono zastosowanie przy opisie wielu rożnorodnych sytuacji w naszym życiu. Na progu nowego roku mogę na przykład zastanawiać się, jakie są moje szanse, że szczęśliwie dożyję do jego końca. Jak wiemy, odpowiedź na to pytanie zależy od wielu różnych czynników: mojego wieku, płci, trybu życia, zamiłowania do sportów wysokiego ryzyka, nałogów, przebytych chorób i innych. Wiedzą o tym także towarzystwa ubezpieczeniowe – standardowy kwestionariusz uzupełniany podczas tworzenia oferty ubezpieczenia na życie zawiera wiele szczegółowych pytań, a wysokość składki istotnie zależy od udzielonych przez nas odpowiedzi.

Własności prawdopodobieństwa warunkowego. Niech $A, B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B) > 0$. Wtedy

- Jeżeli $A \subset B$, to $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
- Jeżeli $B \subset A$, to $\mathbb{P}(A|B) = 1$, w szczególności $\mathbb{P}(B|B) = 1$.
- Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $\mathbb{P}(A|B) = 0$.
- Jeżeli $\mathbb{P}(B) = 1$, to $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
- Jeżeli $\mathbb{P}(A) > 0$, to

$$\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B).$$

Uwaga. Warunek $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$ oznacza, że zajście zdarzenia B zwiększa prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A. Powyższa równoważność oznacza zatem, że jeżeli B zwiększa szansę zajścia A, to A zwiększa szansę zajścia B.

1.2. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa.

Definicja. Rozbiciem zbioru Ω nazywamy rodzinę zbiorów $(B_n)_{n\in T}$, gdzie $T \subset \mathbb{N}$ (skończony lub nieskończony) takich, że B_n

- są parami rozłączne, tzn. $B_j \cap B_i = \emptyset$ dla $i \neq j$;
- sumują się do całej przestrzeni, tzn.

$$\bigcup_{n\in T} B_n = \Omega.$$

Przykład. Rodzina $B_n = [n, n+1)$ dla $n = 0, 1, \ldots$ jest rozbiciem zbioru $[0, \infty)$.
Rodzina $B_1 = \{0, 2\}$, $B_2 = \{1, 3, 4\}$, $B_3 = \{5, 6, 7, \ldots\}$ jest rozbiciem zbioru $\mathbb{N}$.

Poniższy wzór pozwala wyznaczać prawdopodobieństwa zdarzeń, które mogą zajść w wyniku realizacji innych zdarzeń, np. w doświadczeniach wieloetapowych.

Twierdzenie 1 (O prawdopodobieństwie całkowitym)**.** *Niech $(B_n)_{n\in T}$ będzie rozbiciem przestrzeni Ω takim, że $\mathbb{P}(B_n) > 0$ dla każdego $n \in T$. Wtedy dla każdego $A \in \mathcal{F}$ zachodzi równość*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in T} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n).$$

Przykład. Przy pojedynczym strzale pocisk trafia do celu z prawdopodobieństwem $1/2$. Jakie jest prawdopodobieństwo zniszczenia celu po oddaniu 10 strzałów, jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo zniszczenia celu w przypadku, gdy dokładnie n, $0 \le n \le 10$, strzałów było celnych wynosi $1 - (1/3)^n$?

Oznaczmy przez A zdarzenie losowe, że cel został zniszczony po oddaniu 10 strzałów, a przez B_n zdarzenia, że dokładnie n spośród oddanych 10 strzałów było celnych. Wiemy, że

$$\mathbb{P}(A|B_n) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n = 0, 1, \ldots, 10.$$

Aby skorzystać z powyższego wzoru, musimy jeszcze wyznaczyć $\mathbb{P}(B_n)$. Prawdopodobieństwo, że ustalone n spośród 10 strzałów było celnych wynosi $(1/2)^n(1-1/2)^{10-n}$. Ponieważ n celnych strzałów spośród 10 możemy wybrać na $\binom{10}{n}$ sposobów, otrzymujemy

$$\mathbb{P}(B_n) = \binom{10}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{10}{n}, \quad n = 0, 1, \ldots, 10.$$

We wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy zatem

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{10} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \sum_{n=0}^{10}\binom{10}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\sum_{n=0}^{10}\binom{10}{n} - \sum_{n=0}^{10}\binom{10}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Wykorzystując znany wzór z algebry $\sum_{n=0}^{10}\binom{10}{n}x^n y^{10-n} = (x+y)^{10}$, ostatecznie dostajemy

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left((1+1)^{10} + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{10}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}.$$

Kolejny wzór staje się niezwykle użyteczny w sytuacji, gdy znamy wynik doświadczenia i pytamy o jego przebieg.

Twierdzenie 2 (Wzór Bayesa)**.** *Niech $(B_n)_{n\in T}$ będzie rozbiciem przestrzeni Ω takim, że $\mathbb{P}(B_n) > 0$ dla każdego $n \in T$. Wtedy dla każdego $A \in \mathcal{F}$ takiego, że $\mathbb{P}(A) > 0$ i każdego $n \in T$ zachodzi wzór*

$$\mathbb{P}(B_n|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Przykład (Paradoks Monty'ego Halla)**.** W latach 1997-2001 w jednej z ogólnopolskich telewizji można było oglądać bardzo popularny teleturniej *Idź na całość*, wzorowany na amerykańskim programie o nazwie *Let's Make a Deal*, który był prowadzony przez Monty'ego Halla. Finał tego teleturnieju polegał na wyborze jednej z trzech zakrytych „bramek”. Zazwyczaj w jednej z bramek znajdował się samochód, a dwie pozostałe bramki były puste. Zaznaczmy, że prowadzący program wiedział, w której bramce ukryty jest samochód.

Przypuśćmy, że gracz wybrał wstępnie bramkę numer 1. Prowadzący odsłonił pustą bramkę numer 3 i zaproponował graczowi zmianę wyboru na bramkę numer 2. Czy w tej sytuacji gracz powinien dokonać zmiany czy pozostać przy swoim pierwotnym wyborze?

Intuicyjnie wydaje się, że nie ma znaczenia czy gracz pozostanie przy swoim wyborze czy też nie, ponieważ szanse na wygraną są jednakowe. Czy jednak na pewno?

Wyznaczmy odpowiednie prawdopodobieństwa. Oznaczmy przez A_n, $n = 1, 2, 3$, zdarzenie, że samochód znajduje się w bramce numer n, a przez B_n zdarzenie, że prowadzący odsłonił bramkę numer n. Dla każdego $n = 1, 2, 3$ mamy $\mathbb{P}(A_n) = 1/3$. Ponadto, $\mathbb{P}(B_3|A_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(B_3|A_2) = 1$, $\mathbb{P}(B_3|A_3) = 0$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

$$\mathbb{P}(B_3) = \sum_{n=1}^{3} \mathbb{P}(B_3|A_n)\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2}.$$

Wzór Bayesa daje więc

$$\mathbb{P}(A_1|B_3) = \frac{\mathbb{P}(B_3|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Z drugiej strony $\mathbb{P}(A_3|B_3) = 0$ oraz

$$\mathbb{P}(A_1|B_3) + \mathbb{P}(A_2|B_3) + \mathbb{P}(A_3|B_3) = \mathbb{P}(\Omega|B_3) = 1$$

(bo zdarzenia A_1, A_2 i A_3 są rozbiciem Ω). Stąd

$$\mathbb{P}(A_2|B_3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Mamy zatem

$$\mathbb{P}(A_2|B_3) = \frac{2}{3} > \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A_1|B_3),$$

tzn. zmiana decyzji na bramkę numer 2 powiększa szansę wygranej dwukrotnie!

Jak wytłumaczyć ten paradoks?

2. Niezależność zdarzeń

Kolejnym ważnym pojęciem teorii prawdopodobieństwa jest niezależność zdarzeń losowych.

Definicja. Mówimy, że dwa zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Mówimy, że zdarzenia A, B, C są niezależne, jeżeli

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),\\
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\\
\mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),\\
\mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).
\end{aligned}$$

Powiemy też, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne, jeżeli dla dowolnych $k = 2, \ldots, n$ oraz $1 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k \le n$ zachodzi równość

$$\mathbb{P}(A_{t_1} \cap \ldots \cap A_{t_k}) = \mathbb{P}(A_{t_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{t_k}).$$

Własności zdarzeń niezależnych.

- Jeżeli A i B są niezależne oraz $\mathbb{P}(B) > 0$, to $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, tzn. zajście zdarzenia B nie zmienia prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A.
- Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to niezależne są także zdarzenia

$$A^c, B$$
$$A, B^c$$
$$A^c, B^c$$

- Jeżeli $\mathbb{P}(A) = 1$ lub $\mathbb{P}(A) = 0$, to A jest niezależne od każdego innego zdarzenia B.