Lista nr 9 z matematyki dyskretnej

1. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m+n)$.

2. Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1, liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2?

3. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wiezchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

4. (2 punkty) Niech $d(u,v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v, czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v. Dla każdego wierzchołka v grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v,u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w, dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G, a liczba $r(G) = r(w)$ – *promieniem* grafu G.

   (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.

   (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m+n)$.

5. Niech $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. *Uwaga:* w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.

6. Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

7. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v : v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.

8. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.

9. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów $G = (V, E)$ i $\bar{G}$ ($\bar{G}$ jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie $\bar{G} = (V, E')$ grafu G zdefiniowane jest jako graf (V, E') taki, że $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$.

10. Udowodnij następujące twierdzenie:

    Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k. Wówczas G zawiera scieżkę o długości k. Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k + 1$.