Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 3

21 października 2020 r.

Zajęcia 27 października 2020 r.
Zaliczenie listy **od 7 pkt.**

L3.1. Włącz komputer! | 2 punkty Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $4\cos^2 x - 3$, **b)** $x^{-3}(\pi/2 - x - \operatorname{arcctg}(x))$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposoby obliczenia wyniku dokładniejszego. Pokaż, że sposoby te **działają w praktyce**.

L3.2. Włącz komputer! | 1 punkt Podaj (w miarę) bezpieczny numerycznie `algorytm` obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. **Przeprowadź testy** dla odpowiednio dobranych wartości a, b i c pokazujące, że Twój algorytm jest lepszy od *metody szkolnej* bazującej jedynie na dobrze znanych wzorach $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$.

L3.3. Włącz komputer! | 2 punkty Miejsce zerowe wielomianu $x^3 + 3qx - 2r = 0$, gdzie $r, q > 0$, można obliczyć następującym wzorem Cardano-Tartaglii:

$$x = \left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{1/3} + \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{1/3}.$$

Pokaż na przykładach, że bezpośrednie użycie tego wzoru w obliczeniach zmiennopozycyjnych może skutkować błędnymi wynikami. Co jest tego przyczyną? Spróbuj przekształcić wzór tak, aby uniknąć problemów. Czy obliczenia można zorganizować w taki sposób, aby tylko raz wyznaczać pierwiastek trzeciego stopnia?

L3.4. 1 punkt Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x.

L3.5. 2 punkty Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli:

a) $f(x) = x^3 + 2020$, **b)** $f(x) = x^{-1}\ln(x)$, **c)** $f(x) = \cos(5x)$,

d) $f(x) = (\sqrt{x^4 + 2020} + x)^{-1}$.

L3.6. 2 punkty Załóżmy, że dla każdego $x \in X_{fl}$ zachodzi $\mathrm{fl}(\ln(x)) = \ln(x)(1 + \varepsilon_{ln,x})$, gdzie $|\varepsilon_{ln,x}| \leq 2^{-t}$, natomiast t oznacza liczbę bitów przeznaczoną na zapamiętanie mantysy. Niech dane będą liczby maszynowe y_1, y_2, y_3, y_4 oraz taka liczba maszynowa x, że $x \cdot 2^{-8}$ też jest liczbą maszynową. Sprawdź czy poniższy algorytm jest numerycznie poprawny:

```
S:=0;

  for i from 1 to 4
    do
      S:=S+y[i]*ln(4^(-i)*x)
    od;

Return(S).
```

L3.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdź czy następujący algorytm obliczania wartości wyrażenia $w(x) := x + x^{-1}$ $(x \neq 0)$ jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```
u:=x;
v:=1/x;

Return(u+v)
```

W rozważaniach przyjmij, że x jest liczbą maszynową.

L3.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Zbadaj czy podany niżej algorytm wyznaczania iloczynu liczb maszynowych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (zakładamy zatem, że $\mathrm{rd}(x_k) = x_k$, $1 \leq k \leq n$) jest algorytmem numerycznie poprawnym.

```
I:=x[1];

  for k=2 to n
    do
      I:=I*x[k]
    end;

return(I)
```

Czy sytuacja zmieni się, jeśli założymy, że dane nie są liczbami maszynowymi (wtedy mamy $\mathrm{rd}(x_k) = x_k(1 + \epsilon_k)$, gdzie $|\epsilon_k| \leq 2^{-t}$, $1 \leq k \leq n$)?

L3.9. $\boxed{\textbf{Dodatkowe zadanie programistyczne} \text{ (do 15 listopada; do 5 punktów)}}$ [1]

W zadaniu **L1.8** przedstawiono dwa sposoby aproksymowania pochodnej funkcji:

$$(1) \qquad f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \qquad f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} \qquad (h \text{ – małe}).$$

Przybliżenia pochodnej funkcji znajdują zastosowanie m.in. w numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych, w tym tzw. *równań ruchu*. Znając położenie i prędkość obiektu w chwili t (w wypadku drugiego wzoru, odpowiednio, $t - h$ oraz t), jak również działające na niego siły, z użyciem powyższych wzorów można **przybliżyć** jego położenie oraz prędkość w chwili $t + h$.

[1] Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

Rozpatrujemy ruch układu ciał oddziałujących wzajemnie na siebie poprzez siłę grawitacji (przyda się znane ze szkoły prawo powszechnego ciążenia Newtona: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$). Celem jest określenie, na podstawie początkowego położenia ciał i ich prędkości w chwili t, jaki będzie stan układu w kolejnych ustalonych chwilach, np. $t+h, t+2h, t+3h, \ldots$

(a) Wyprowadź układ równań ruchu dla **dwóch** ciał wzajemnie się przyciągających.

(b) Sprawdź na przykładzie dwóch ciał, które z powyższych przybliżeń pochodnej lepiej sprawdza się w praktyce (dla tego samego h).

Wskazówka nr 1. Bardzo dobrze będzie to widać, jeżeli układ przypomina planetę krążącą wokół słońca.

Wskazówka nr 2. Metodę wykorzystującą pierwszy z wzorów (1) można znaleźć w literaturze pod nazwą *metody Eulera* przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych.

(c) Choć dla dwóch przyciągających się ciał znane jest jawne rozwiązanie analityczne, to w wypadku trzech (tzw. **problem trzech ciał**) lub więcej obiektów — wzorów takich nie ma. Zadanie można rozwiązywać wyłącznie w sposób przybliżony stosując metody numeryczne. Korzystając z podanych możliwości aproksymowania pochodnej, znajdź przybliżone rozwiązanie problemu trzech (lub więcej) ciał dla kilku istotnie różnych układów (np. układ Słońce-Ziemia-Księżyc, planeta krążąca wokół gwiazdy podwójnej, wykorzystanie zjawiska asysty grawitacyjnej, ...).

Autor zadania: *Filip Chudy*.

(–) Paweł Woźny