$$X \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\right), \quad \rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

$$Y_1 = 2X_1 - 3X_2, \quad Y_2 = 4X_1 + 2X_2, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Z wykładu wiemy, że $X \sim (\mu, \Sigma)$, gdzie $\Sigma = \begin{bmatrix} V(X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & V(X_2) \end{bmatrix}$

oraz, że $X \sim N(\mu, \Sigma) \wedge Y = AX \Rightarrow Y \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad A\Sigma A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 38 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 91 & 142 \\ -22 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 248 & 320 \\ 320 & 544 \end{bmatrix},$$

$$Y \sim N\left(A\mu, \begin{bmatrix} 248 & 320 \\ 320 & 544 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = 320, \quad V(Y_1) = 248 \quad V(Y_2) = 544$$

$$\rho_{Y_1, Y_2} = \frac{320}{\sqrt{248}\sqrt{544}}$$