

Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2020

Marszruta, ścieżka, droga

Marszrutą o długości k jest ciąg $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ taki, że $\forall 0 \leq i < k \ \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

Droga to marszruta, w której żadna krawędź nie występuje dwukrotnie, tzn. $\forall 1 \leq i < j \leq k - 1$ krawędzie $\{v_i, v_{i+1}\}, \{v_j, v_{j+1}\}$ są różne.

Ścieżka to marszruta, w której żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.

Cykl to marszruta, w której pierwszy wierzchołek jest taki sam jak ostatni, a poza tym, żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.

Marszruta, ścieżka, droga

Marszrutą o długości k jest ciąg $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ taki, że $\forall_{0 \leq i < k} \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

$u - v$ -marszruta to marszruta taka, że $v_0 = u$ i $v_k = v$.

Analogicznie definiujemy **$u - v$ -drogę** i **$u - v$ -ścieżkę**.

Marszruta/droga jest **zamknięta**, jeśli $v_0 = v_k$.

Zamknięta ścieżka to **cykl**.

Nieskierowany graf $G = (V, E)$ jest **spójny**, jeśli "z każdego wierzchołka da się dojść do każdego innego", tzn. $\forall u, v \in V$ w G istnieje $u - v$ -ścieżka (ścieżka łącząca u i v).

Podgrafem grafu $G = (V, E)$ jest dowolny graf $H = (V', E')$ taki, że $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$.

Podgraf H jest *właściwy*, jeśli $G \neq H$.

Spójna składowa grafu G to dowolny podgraf spójny $H = (V', E')$ grafu G , który jest maksymalny ze względu na zawieranie tzn. taki, że nie istnieje podgraf spójny H' , którego podgrafem właściwym jest H .

Graf $G = (V, E)$ jest **acykliczny**, jeśli nie zawiera żadnego cyklu.

Las to acykliczny graf.

Drzewo to acykliczny graf spójny.

Spójne składowe lasu to drzewa.

Las składa się z drzew.

Pokażemy:

Drzewo to najmniejszy graf spójny: jeśli chcemy zbudować graf spójny G na zbiorze wierzchołków V , to G musi być drzewem.

Graf $G = (V, E)$ jest **acykliczny**, jeśli nie zawiera żadnego cyklu.

Las to acykliczny graf.

Drzewo to acykliczny graf spójny.

Liść to wierzchołek o stopniu 1.

Czy każdy liść znajduje się na drzewie?

Czy drzewo składa się z liści?

Ile liści ma drzewo?

Drzewo to acykliczny graf spójny.

Liść to wierzchołek o stopniu 1.

Dowolne drzewo o $n \geq 2$ wierzchołkach ma przynajmniej dwa liście.

Czy urywając z drzewa liść otrzymujemy drzewo?

Charakteryzacja drzewa

Niech $G = (V, E)$ będzie n -wierzchołkowym grafem nieskierowanym ($n \geq 1$). Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne:

- 1 G jest spójny i acykliczny (G jest drzewem),
- 2 G jest spójny i ma $n - 1$ krawędzi.
- 3 G jest acykliczny i ma $n - 1$ krawędzi.
- 4 $\forall_{u,v \in V}$ G zawiera dokładnie jedną $u - v$ -ścieżkę.

Most to krawędź, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych grafu.

Żaden most nie leży na cyklu.

Graf $G = (V, E)$ jest **dwudzielny** wtw, gdy istnieje podział zbioru wierzchołków V na zbiory A i B taki, że $\forall_{e \in E}$ jeden koniec e należy do A , a drugi do B .

Podział wierzchołków nie zawsze jest jednoznaczny.

Graf $G = (V, E)$ jest **dwudzielny** wtw, gdy istnieje podział zbioru wierzchołków V na zbiory A i B taki, że $\forall e \in E$ jeden koniec e należy do A , a drugi do B .

Czy dwudzielny graf G może zawierać cykl o nieparzystej długości?

Graf dwudzielny

Graf $G = (V, E)$ jest dwudzielny wtw, gdy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości.

Lemat

Każda zamknięta marszruta o nieparzystej długości zawiera cykl o nieparzystej długości.

Grafy o minimalnym stopniu k

Grafy o minimalnym stopniu k

Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k . Wówczas G zawiera ścieżkę o długości k . Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k + 1$.