

Lista nr 7 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić $(n + 2)$ -kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n - 1$ nie-przecinających się przekątnych jest równa n -tej liczbie Catalana.
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.
3. Ile nie krzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?
4. Z macierzy $n \times n$ usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na n prostokątów?
5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots)$.
6. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciąg a_n . Pokaż, że funkcją tworzącą ciągu b_n postaci $(0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$, takiego, że $b_{k+i} = a_i$ oraz $b_0 = \dots = b_{k-1} = 0$ jest funkcja $x^k A(x)$.
A jak otrzymać funkcję tworzącą ciągu c_n postaci (a_k, a_{k+1}, \dots) , czyli takiego, że $c_i = a_{k+i}$?
7. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
 - (a) na dowolne składniki,
 - (b) na różne składniki nieparzyste,
 - (c) na składniki mniejsze od m ,
 - (d) na różne potęgi liczby 2.
8. Niech p_n oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej n , w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbą razy a każdy parzysty parzystą, np. $p_4 = 2$, bo interesujące nas podziały to $1 + 3$ i $2 + 2$. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu p_n .

9. (-) Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.
10. (-) Niech a i b będą całkowite. Pokaż, że $a^3|b^2 \Rightarrow a|b$.