Egzamin z matematyki dyskretnej

11 lutego 2020

1. Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy proste o 6 wierzchołkach, 7 krawędziach i stopniu każego wierzchołka co najmniej 2. Które z nich mają a) cykl Eulera b) cykl Hamiltona? Jak wygląda dla każdego z nich optymalne kolorowanie wierzchołkowe? Potrzebne jest uzasadnienie.

2. Znajdź ogólną postać rozwiązania następującego równania rekurencyjnego za pomocą anihilatorów:

   $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + \frac{1}{\pi^n} + 7$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

3. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(1, 0, 1+7, 0, 1+7+7^2, 0, 1+7+7^2+7^3, \ldots)$.

4. Ile jest n-elementowych ciągów zerojedynkowych, w których liczba zer nie przekracza liczby jedynek?

5. Pewna grupa teatralna wystawia w sezonie 7 sztuk. W klubie jest 5 aktorek, z których każda jest obsadzona w 3 sztukach. Pokaż, że w jakiejś sztuce grają przynajmniej 3 aktorki.

6. Ile jest wyrazów n-elementowych składających się z liter a, b, c, d o następującej własności: liczby wystąpień dowolnych dwóch róznych liter w wyrazie są różne lub równe 0?

7. Niech $T = (V, E)$ będzie drzewem o parzystej liczbie wierzchołków. Pokaż, że istnieje dokładnie jeden podgraf drzewa T, w którym wszystkie wierzchołki mają stopień nieparzysty.

8. Niech Z będzie n-elementowym zbiorem. Pokaż, że jeśli wybierzemy więcej niż połowę jego wszystkich podzbiorów, to wśród nich jakieś dwa będą takie, że jeden jest podzbiorem drugiego.

   Wskazówka: zadanie to można zrobić przez indukcję.

9. Mamy dane dwie rodziny R i S podzbiorów zbioru Z. *Reprezentantem* podzbioru może być dowolny jego element. Każdy element zbioru Z może być reprezentantem tylko jednego podzbioru danej rodziny. *Reprezentacją* rodziny R nazywamy dowolny podzbiór $Z' \subseteq Z$ zawierający po jednym reprezentancie dla każdego podzbioru z R. Opracuj algorytm, który znajduje zbiór $X \subseteq Z$ będący jednocześnie reprezentacją rodziny R i S lub stwierdza, że taki zbiór nie istnieje. Zarówno rodziny R i S, jak i zbiór Z są skończone.

   Przykład: Niech $Z = \{A, B, C, D, E\}$, $R = \{\{A\}, \{A, B\}, \{A, B, C\}, \{A, D, E\}\}$, $S = \{\{B, C\}, \{A, B\}, \{C, D, E\}, \{A, D\}\}$. Wtedy zbiór $\{A, B, C, D\}$ jest zarówno reprezentacją R, jak i S.

   Wskazówka: przydatne mogą okazać się przepływy.

10. Dany jest graf prosty skierowany G. *Pokrycie cyklowe* grafu G to zbiór Z skierowanych cykli G taki, że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego z cykli z Z (cykle o długości 2 są dozwolone). Pokaż jak, mając do dyspozycji algorytm obliczania największego skojarzenia w grafie dwudzielnym nieskierowanym, skonstruować algorytm znajdujący pokrycie cyklowe G, o ile takowe istnieje.

    Wskazówka: Można rozszczepić każdy wierzchołek na dwie kopie.

Zadania $1 - 5$ są za 2 punkty, natomiast zadania $6 - 10$ za 4.

Powodzenia!