Szukamy rozkładu $M = \frac{n}{\sigma^2}(\bar{X}-\mu)^2$

Wiemy, że X_k są niezależne oraz $X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Korzystając z zadania 4 na liście 6 mamy $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Niech $M_{\bar{X}}(t)$ będzie funkcją generującą momenty zmiennej $\bar{X}$, wtedy

z wykładu wiemy, że $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow M_{\bar{X}}(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$.

W dalszej części rozwiązania korzystam z następujących faktów z wykładu:

(1) $M_{X+b}(t) = e^{tb} M_X(t)$

(2) $M_{aX}(t) = M_X(at)$

$$M = \frac{n}{\sigma^2}(\bar{X}-\mu)^2 = n\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 = \left((\bar{X}-\mu)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)^2$$

$$M_{\bar{X}}(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$$

$$M_{\bar{X}-\mu}(t) \overset{(1)}{=} e^{-\mu t} e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}} = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$$

$$M_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu)}(t) \overset{(2)}{=} e^{\frac{\cancel{\sigma^2} t^2}{2\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{\cancel{\sigma^2}}} = e^{t^2/2}$$

W takim razie $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu) \sim N(0,1)$

Możemy zatem skorzystać z notatki 5 do wykładu, w której pokazane jest, że

$U \sim N(0,1) \Rightarrow U^2 \sim Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, żeby stwierdzić, że

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu)\right)^2 \sim Gamma(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

Zatem $M = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu)\right)^2 \sim Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$