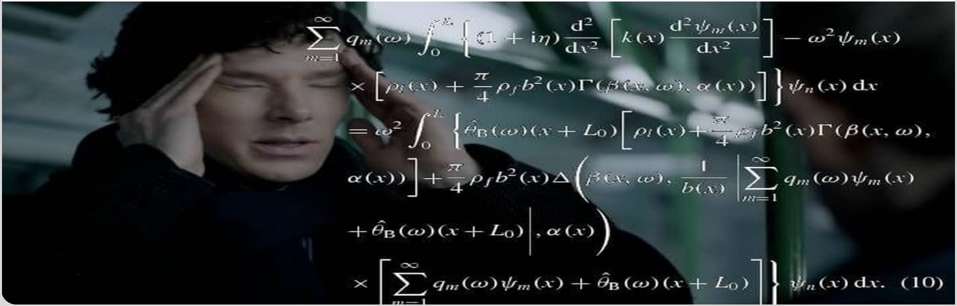
Karlsruher Institut für Technologie

Mathe 1

Charlotte P., Lena W., Vera C., Christian K. | 19. Juni 2018

ITI WAGNER & IPD TICHY



Gliederung

Big integer

- die maximale Zahl ist größer als integer?
- nehme long long
- die Zahl ist größer als long long
- ?????????????????????????????????? (Panik)

Big integer - Java nutzen

- import java.math.BigInteger
- Konstruktor: BigInteger(String val)
- Methoden:
  - BigInteger add(BigInteger val)
  - BigInteger multiply(BigInteger val)
  - BigInteger subtract(BigInteger val)
  - ...

Laufzeiten

Karlsruher Institut für Technologie

- Addition, Subtraktion in $\mathcal{O}(n)$
- Multiplikation in $\Theta(n^{log_2 3})$ (Karatsuba)

C++? Selbst implementieren!

- Addition: Die Tafel ist da $\longrightarrow$
- Multiplikation (z.B. Karazuba-Multiplikation)

Karatsuba-Ofman Multiplikation[1962]

Beobachtung: $(a_1 + a_0)(b_1 + b_0) = a_1 b_1 + a_0 b_0 + a_1 b_0 + a_0 b_1$

Function recMult(a, b)
  assert a und b haben n Ziffern, sei $k = \lceil n/2 \rceil$
  if $n = 1$ **then return** $a \cdot b$
  Schreibe a als $a_1 \cdot B^k + a_0$
  Schreibe b als $b_1 \cdot B^k + b_0$
  $c_{11} :=$ recMult(a_1, b_1)
  $c_{00} :=$ recMult(a_0, b_0)
  return
    $c_{11} \cdot B^{2k} +$
    $(\text{recMult}((a_1 + a_0), (b_1 + b_0)) - c_{11} - c_{00})B^k$
    $+ c_{00}$

Naive Exponentiation

Bei ICPC gehen wir davon aus, dass Multiplikation zweier Zahlen in $\mathcal{O}(1)$ liegt, also naive Exponentiation in $\mathcal{O}(n)$

Algorithm 1 Bereche $y = x^n$ naiv

Require: $n \geq 0 \vee x \neq 0$
Ensure: $y = x^n$

```
y ← 1
if n < 0 then
    X ← 1/x
    N ← −n
else
    X ← x
    N ← n
end if
while N ≠ 0 do
    if N is even then
        X ← X × X
        N ← N/2
    else {N is odd}
        y ← y × X
        N ← N − 1
    end if
end while
```

Idee

Beobachtung:

$$x^n = \begin{cases} (x^2)^{n/2} & \text{für n gerade} \\ x * (x^2)^{(n-1)/2} & \text{für n ungerade} \end{cases} \tag{1}$$

Exponentiation by squaring, Laufzeit

Da Multiplikation konstant viel Zeit benötigt, liegt die Exponentiation in $\mathcal{O}(log(n))$

Algorithm 2 Exponentiation(n, x) (rekursiv)

```
if n < 0 then
    return Exponentiation(-n, 1/x)
else if n = 0 then
    return 1
else if n = 1 then
    return x
else if n modulo 2 = 0 then
    return Exponentiation(n/2, x · x)
else
    return x · Exponentiation((n − 1)/2, x · x)
end if
```

Algorithm 3 Exponentiation(n, x) (rekursiv)

```
if n < 0 then
    n = −n
    x = 1/x
end if
if n = 0 then
    return 1
    y = 1
end if
while n > 1 do
    if n modulo 2 = 0 then
        x = x · x
        n = n/2
    else
        y = y · x
        x = x · x
        n = (n − 1)/2
    end if
end while
```

Kombinatorik

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

”Combinatorics is a branch of discrete mathematics concerning the study of countable discrete structures“[a]

[a] Competitive Programming 3

Bei ICPC-Aufgaben erkennbar an:

- ”Wie viele Moeglichkeiten gibt es, ..?”
- ”Berechne die Anzahl an X..”
- Alles, was mit Zaehlen zu tun hat

Aufgabe - Mauerbau

- Baue eine Mauer aus bestimmten Ziegeln.
- jeder Ziegel ist 2 Einheiten breit und 1 Einheit hoch und kann beliebig gedreht werden.
- jede Mauer ist 2 Einheiten hoch und m Einheiten breit ($0 < m <= 50$).
- Aufgabe: Wie viele Kombinationen an Ziegelsteinen gibt es?

Fibonacci

Definition:

$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$n > 1 : f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

Also: $0, 1, 1, 2, 3, 4, 8, 13, 21, 34, 55, 89...$
Sollte man erkennen!

Fibonacci - Implementierung

- Mit DP in O(n)
- Binet's Formel:
  $f(n) = \frac{(\phi^n - (-\phi)^{-n})}{\sqrt{5}}$
  $\phi :=$ goldener Schnitt
  $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$
  ϕ gerundet nutzen. Anzahl der Nachkommastellen entscheidet ber Genauigkeit!
- oder vorberechnen!
- Achtung: Wird sehr schnell sehr gro.

Der Mathetest

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe

Lisa macht ein Austauschsemester in Australien. Um für einen Mathetest zu lernen, löst sie Rechen-Aufgaben, die ihr eine Kommilitonin diktiert hat. Leider hat die Kommilitonin nicht gesagt, wie die Aufgaben geklammert sind.
Gegeben die Anzahl an Faktoren, wie viele verschiedene Wege gibt es diese zu klammern?

Beispiel:

- Gegeben: $\{a, b, c, d\}$
- Gesucht: Möglichkeiten für Klammerung
- $a\,(b\,(cd))$, $(ab)\,(cd)$, $((ab)\,c)\,d$, $(a\,(bc))\,d$, $a\,((bc)\,d)$

Binomialkoeffizient

Wie viele Moeglichkeiten gibt es, *k* Objekte aus einer Menge von *n* verschiedenen Objekten zu ziehen?

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

Rekursive Definition:

$$C(n,0) = C(n,n) = 1$$
$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$$

Binomialkoeffizient

Tipps:

- Meist interessieren nicht alle Werte von $C(n, k)$
  - Implementierung deshalb mit top-down
- Fakultät kann sehr gro werden
  - benutze BigInteger
  - bei groem k: $C(n, k) = C(n, n-k)$

Catalan Nummern

Definition:

$$\begin{aligned} Cat\,(n) &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)\times n!\times n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\times n!} \\ Cat\,(n+1) &= \frac{(2n+2)\times(2n+1)}{(n+2)\times(n+1)}\times Cat\,(n) \end{aligned}$$

Catalan Nummern

$Cat\,(n)$ entspricht zum Beispiel:

- Anzahl verschiedener Binär-Bäume mit n Knoten
- Anzahl korrekter Klammerausdruecke mit n Klammerpaaren
- Anzahl verschiedener Möglichkeiten, $n + 1$ Faktoren korrekt zu klammern

Der Mathetest

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe

Lisa macht ein Austauschsemester in Australien. Um für einen Mathetest zu lernen, löst sie Rechen-Aufgaben, die ihr eine Kommilitonin diktiert hat. Leider hat die Kommilitonin nicht gesagt, wie die Aufgaben geklammert sind.
Gegeben die Anzahl an Faktoren, wie viele verschiedene Wege gibt es diese zu klammern?

Lösung:

- Sei n die Anzahl an Faktoren
- $Cat\left(n-1\right)$ löst die Aufgabe

Zusammenfassung - Kombinatorik bei ICPC

Die Lösung für eine Kombinatorik-ICPC-Aufgabe ist meist eine kurze rekursive Formel, oft in Verbindung mit Greedy oder DP. Der Aufwand liegt nicht in der Implementierung, sondern im Aufstellen der Formel.

- Kombinatorik-Aufgaben von **einer** Person bearbeiten lassen
  - bestenfalls mit guten mathematischen Kenntnissen
- Sobald die Formel fertig ist, Lösung coden und abgeben!

Zusatz-Tipp!

Gänige Formeln sollte man kennen...
...oder ausprobieren!

Zusatz-Tipp!

On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Unter http://oeis.org/ kann man die ersten Lösungen für kleine Probleminstanzen eingeben und so prüfen, ob bereits eine Formel für diese Folge existiert.

Spieltheorie allgemein

Karlsruher Institut für Technologie

- Nullsummenspiel
- Genau ein Gewinner
- Alle spielen perfekt
- Gibt es eine Gewinnstrategie?

Beispielspiel

simples Beispielspiel

Alice und Bob haben sechs Münzen in der Mitte liegen und nehmen abwechselnd je eine bis drei davon. Wer die letzte Münze nimmt, gewinnt.

- Spielbaum benutzen

Spielbaum

Karlsruher Institut für Technologie

- Knoten: aktueller Spieler und Spielsituation
- Kanten: legale Spielzüge
- Wurzel: Spielsituation beim Start
- Blätter: Geben Bewertung (-1 oder 1) an

Min-Max-Strategie

- Min-Max-Strategie: Gewinn mit größtem Unterschied

$$minmax(s,k) = \begin{cases} k.Bewertung & \text{fr k Blatt-Knoten} \\ min\left\{minmax(k')|k'Kindknoten\right\} & \text{falls s = min} \\ max\left\{minmax(k')|k'Kindknoten\right\} & \text{falls s = max} \end{cases} \tag{2}$$

- Spieler-IDs können auch weggelassen werden:

$$minmax(k) = \begin{cases} k.Bewertung & \text{für k Blatt-Knoten} \\ -min\left\{minmax(k')|k'Kindknoten\right\} & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Min-Max-Strategie

- Min-Max-Strategie: Gewinn mit größtem Unterschied

$$minmax(s,k) = \begin{cases} k.Bewertung & \text{fr k Blatt-Knoten} \\ min\,\{minmax(k')|k'\,Kindknoten\} & \text{falls s = min} \\ max\,\{minmax(k')|k'\,Kindknoten\} & \text{falls s = max} \end{cases} \tag{2}$$

- Spieler-IDs können auch weggelassen werden:

$$minmax(k) = \begin{cases} k.Bewertung & \text{für k Blatt-Knoten} \\ -min\,\{minmax(k')|k'\,Kindknoten\} & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Implementierung

- wie gewohnt als Baum

```
struct Node {
  vector<int> children
  int Bewertung
}
```

- Spieler-IDs können weggelassen werden

```
int minmax(Zustands-Knoten k):
  if(k ist Blatt){
    return k.getBewertung
  } else {
  for(alle Kindknoten kind von k){
    res = - min(res, Bewertung(k))
    }
  }
```

manchmal Optimierung

- Beispiel: Zahlen abwechselnd mit 2-9 multiplizieren
- erster über n (Grenze) gewinnt
- je acht Kinder: Viel zu viel
- optimal: Immer abwechselnd 9 und 2

Nim-Spiel

- mehrere Haufen mit Objekten
- zwei Spieler nehmen abwechselnd von einem Haufen
- Wer das letzte Objekt nimmt, gewinnt
- Für ein oder zwei Haufen mit Baum möglich

Nim-Spiel: Optimalstrategie

- Anzahl Objekte in Haufen binär mit xor verknüpfen
- Summe auf Null bringen, um zu gewinnen
- Immer möglich

Beispiel

5 Haufen: 6, 3, 5, 2, 7 Elemente
Binär: 110 xor 011 xor 101 x 010 x 111 = 101 $\neq$ 0
Also Gewinnstrategie für Beginnspieler

Grundy-Zahlen

- Theorem von Sprague-Grundy: Jedes neutrale Spiel äquivalent zu Standard-Nim-Spiel
- Grundy-Zahlen: kleinste Zahl, die nicht Grundy-Zahl von Nachfolgerstellung ist
- Gewinnstrategie: Grundy-Zahl möglichst immer auf 0 bringen
- Bei einem Haufen mit n Elementen ist die Grundy-Zahl n
- Im Beispiel: Grundy-Zahl 5

Grundy-Zahlen

- Theorem von Sprague-Grundy: Jedes neutrale Spiel äquivalent zu Standard-Nim-Spiel
- Grundy-Zahlen: kleinste Zahl, die nicht Grundy-Zahl von Nachfolgerstellung ist
- Gewinnstrategie: Grundy-Zahl möglichst immer auf 0 bringen
- Bei einem Haufen mit n Elementen ist die Grundy-Zahl n
- Im Beispiel: Grundy-Zahl 5