Створення кернелів.

Нехай:

- $K_1 \text{та} K_2$ — кернели над векторами $R_n \times R_n$.
- $a \in R^+$ — дійсне додатне значення.
- $f : R^n \longmapsto R$ — функція, що проектує вектор розмірністю n на дійсне число.
- $\phi : R^n \longmapsto R^d$ — функція, що проектує вектор розмірністю n на вектор розмірністю d.
- K_3 — кернел над векторами $R^d \times R^d$.
- $p(x)$ — многочлен зі змінною x та тільки додатними коефіцієнтами.

---

a) $K(x, z) = K_1(x, z) + K_2(x, z)$

Необхідна і достатня умова для того, щоб бути правильним кернелом - функція $K(x, z)$ може бути виражена як внутрішній добуток в деякому просторі ознак, а саме:

$\int_x \int_z k(x, z)g(x)g(z)dxdz \geq 0$

Оскільки K_1, K_2 задані як кернели над векторами
$\int_x \int_z K_1(x, z)g(x)g(z)dxdz \geq 0, \int_x \int_z K_2(x, z)g(x)g(z)dxdz \geq 0$

Тому, $\int_x \int_z (K_1(x, z) + K_2(x, z))g(x)g(z)dxdz = \int_x \int_z K_1(x, z)g(x)g(z)dxdz + \int_x \int_z K_2(x, z)g(x)g(z)dxdz \geq 0$

Є кернелом

---

b) $K(x, z) = K_1(x, z) - K_2(x, z)$

$\int_x \int_z (K_1(x, z) - K_2(x, z))g(x)g(z)dxdz = \int_x \int_z K_1(x, z)g(x)g(z)dxdz - \int_x \int_z K_2(x, z)g(x)g(z)dxdz \geq 0,$
лише при умові $K_1 \geq K_2$

Є кернелом за умовою $K_1 \geq K_2$

---

c) $K(x, z) = a * K_1(x, z)$

$\int_x \int_z aK_1(x, z)g(x)g(z)dxdz = a \int_x \int_z K_1(x, z)g(x)g(z)dxdz \geq 0$, оскільки a — дійсне додатне значення.

Є кернелом

---

d) $K(x, z) = -a * K_1(x, z)$

$\int_x \int_z -aK_1(x, z)g(x)g(z)dxdz = -a \int_x \int_z K_1(x, z)g(x)g(z)dxdz \leq 0$, оскільки a — дійсне додатне значення.

Не є кернелом

---

e) $K(x, z) = K_1(x, z) * K_2(x, z)$

Позначимо K_1 як a, та K_2 як b

$K_1(x, z) = a(x)^\top * a(z)$

$K_2(x, z) = b(x)^\top * b(z)$

$K(x, z) = K_1(x, z) * K_2(x, z) = (\sum_{m=1}^{M}(a_m(x) * a_m(z))(\sum_{n=1}^{N}(b_n(x) * b_n(z)) =$

$= \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N}[a_m(x) * b_n(x)][a_m(z) * b_n(z)] = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} c_{mn}(x)c_{mn}(z) = c(x)^\top c(z)$

Є кернелом

---

f) $K(x, z) = f(x)f(z)$

Оскільки, $\phi : x \to f(x) \in R, \phi : z \to f(z) \in R$ 1-вимірні вектори

Є кернелом

-

g) $K(x, z) = K_3(\phi(x)\phi(z))$

Так як K_3 є кернелом, то матриця $K_3(\phi(x)\phi(z))$ є також невід'ємною

Є кернелом

h) $K(x, z) = p(K_1(x, z))$

Оскільки p - многочлен зі змінною x та тільки додатними коефіцієнтами, то $K(x, z) = p(K_1(x, z)) \geq 0$, що випливає з того, що суми та добуток кернелів також є кернелом (приклади a, e)

Є кернелом