Equation de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \epsilon u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \mu\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0$$

On a (1) :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \epsilon u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \mu\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0$$

(2) On pose $\xi = x - ct$

$$u(x,t) = z(x-ct) = z(\xi)$$

Calcul des dérivées :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} = -c\frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} = \frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 u = \frac{d^3 z}{d\xi^3}$$

On substitue (2) à (1) et on obtient :

$$-c\frac{dz(\xi)}{d\xi} + \epsilon z(\xi)\frac{dz(\xi)}{d\xi} + \mu\frac{d^3 z(\xi)}{d\xi^3} = 0$$

Transformation de la dérivée totale en dérivée partielle (intégration) :

$$C_1 = -c\int dz + \epsilon\int z dz + \mu\int\frac{d^3 z(\xi)}{d^3\xi}d\xi$$

$$C_1 = -cz + \frac{\epsilon}{2}z^2 + \mu\frac{d^2 z(\xi)}{d\xi^2}$$

On a donc :

$$C_1 = -cz + \mu\frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{\epsilon}{2}z^2$$

On multiplie par $\frac{dz}{d\xi}$:

$$C_1\frac{dz}{d\xi} = -cz\frac{dz}{d\xi} + \frac{\epsilon}{2}z^2\frac{dz}{d\xi} + \mu\frac{d^2 z}{d\xi^2}\cdot\frac{dz}{d\xi}$$

$$C_1 dz = -czdz + \frac{\epsilon}{2}z^2 dz + \mu\frac{d^2 z}{d\xi^2}dz$$

On intègre des deux côtés et on pose une constante d'intégration C_2 :

$$C_1\int dz = -c\int zdz + \frac{\epsilon}{2}\int z^2 dz + \mu\int\frac{d^2 z}{d\xi^2}dz$$

$$C_1 z + C_2 = -\frac{c}{2} z^2 + \frac{\epsilon}{6} z^3 + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2$$

Lorsque $x \to \pm\infty$ on a $C_1 = C_2 = 0$
On a donc :

$$0 = -\frac{c}{2} z^2 + \frac{\epsilon}{6} z^3 + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}\mu \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = -\frac{c}{2} z^2 + \frac{\epsilon}{6} z^3$$

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = \frac{c}{\mu} z^2 - \frac{\epsilon}{3\mu} z^3$$

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = z^2 \left(\frac{c}{\mu} - \frac{\epsilon}{3\mu} z\right)$$

On utilise la méthode de la séparation des variables :

A finir ! Ou va le mu ??? jsp