Contrôle Continu 2 – 23 Novembre 2025

Durée : 45 minutes

Les documents, calculatrices, téléphones et tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits.

Il est attendu que les résultats soient sous forme simplifiée et les réponses justifiées.

Exercice 1 (4 points)

1. Rappeler le domaine de définition et la dérivée de la fonction ln.
2. Dériver la fonction
$$\varphi(x) = x\ln(x) - x$$
et en déduire une primitive de ln.
3. Soit u une fonction dérivable et strictement positive. Dériver la fonction
$$\phi(x) = u(x)\ln(u(x)) - u(x)$$
et en déduire une primitive de $u'\ln(u)$.

Exercice 2 (7 points) On considère, dans cet exercice, les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = -x^5 + 3x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Donner le domaine de définition D_f de f et le domaine de définition D_g de g.
2. Donner une primitive F de f et une primitive G de g.
3. En déduire la valeur de l'intégrale
$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 (9 points) Chez les sportifs, le taux d'acide lactique pendant un effort évolue en fonction du temps $t \in \mathbb{R}_+$ (exprimé en heures) selon la fonction suivante :

$$L(t) = l_0(t^2\mathrm{e}^{-2t+3} + 1),$$

où $l_0 > 0$ est le taux résiduel d'acide lactique au repos.

1. Calculer la dérivée L' de la fonction L et vérifier que, pour tout $t \geq 0$,
$$L'(t) = 2l_0 \times t(1-t)\mathrm{e}^{-2t+3}.$$
2. En déduire le tableau de variations de la fonction L. L admet-elle un maximum ? Si oui, donner sa valeur en fonction de l_0.

On cherche à contrôler le taux d'acide lactique pour qu'il ne dépasse pas le seuil $l_C > 0$, qui est la valeur critique au-delà de laquelle les performances du sportif sont altérées.

3. Donner une relation entre l_0 et l_C pour que le taux d'acide lactique ne dépasse pas le seuil l_C. En déduire les valeurs possible de l_0 en fonction de l_C pour lesquelles à aucun moment le taux d'acide lactique ne dépasse pas le seuil l_C.
4. On suppose que $l_0 = 2$ et $l_C = 6$. Les performances du sportif seront-elles altérées dans ce cas ? *(On pourra utiliser le fait que* $2,7 \leq \mathrm{e} \leq 2,8$*).*

L'Exercice 4 n'est à faire qui si vous avez du temps en plus ou que vous êtes complètement bloqué·e sur les exercices précédents. Il ne sera pas noté.

Exercice 4 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer si possible $A^2, A^3, A \times B, B \times A$. En cas d'impossibilité, expliquer pourquoi le calcul est impossible.
2. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.