Corrections d'exercice 1 – 05 Décembre 2025

Exercice 45 Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang puis est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité $s(t)$ de substance contenue dans la sang à un instant $t \geq 0$ est donnée approximativement par

$$s(t) = q \cdot \left(\mathrm{e}^{-0,5t} - \mathrm{e}^{-t}\right)$$

où t représente le temps, exprimé en heures, et q la quantité de substance injectée.

1. Calculer $s'(t)$ et étudier le signe de $s'(t)$. (Indication : mettre en facteur $\mathrm{e}^{-0,5t}$.) En déduire le tableau de variation de s.
2. On désire contrôler les effets de cette substance (cas d'un médicament). Pour cela, il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre deux valeurs, à savoir entre $s_E = 1,2$ le seuil d'efficacité et $s_T = 2,6$ le seuil de toxicité. D'après le tableau de variation de s, calculer les valeurs de q telles qu'à aucun moment la quantité de substance ne dépasse le seuil s_T.
3. On suppose que $q = 10$. Expliquer comment déterminer graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.

Solution:

1. On a pour $t \geq 0$,

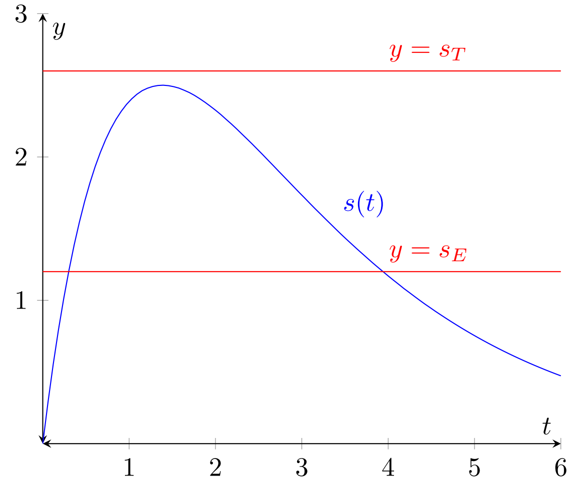
$$s'(t) = q \cdot \left(-0,5\mathrm{e}^{-0,5t} - (-1)\mathrm{e}^{-t}\right) = q \cdot \left(\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t/2}\right) = q\mathrm{e}^{-t/2} \cdot \left(\mathrm{e}^{-t/2} - \frac{1}{2}\right).$$

Ainsi, on obtient

t	0		$2\ln(2)$	
Signe de $q\mathrm{e}^{-t/2}$		$+$		$+$
Signe de $\mathrm{e}^{-t/2} - \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$
Signe de $s'(t)$		$+$	0	$-$
Variations de s	$s(0)$	$\nearrow$	$s(2\ln(2))$	$\searrow$

avec $s(0) = 0$ et $s(2\ln(2)) = q \cdot \left(\mathrm{e}^{-0,5\times 2\ln(2)} - \mathrm{e}^{-2\ln(2)}\right) = q\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{q}{4}$.

2. D'après le tableau de variation de s, la fonction s admet un maximum en $t = 2\ln(2)$ qui vaut alors $s(2\ln(2)) = \frac{q}{4}$. Ainsi pour que la quantité de substance ne dépasse jamais s_T, il faut que $s_T > \frac{q}{4}$. Les valeurs de q telles qu'à aucun moment la quantité de substance ne dépasse le seuil s_T sont données par $]0, 4s_T[$.
3. Le médicament est efficace quand la quantité de ce médicament dans le sang est plus grand que le seuil d'efficacité ie pour les instants $t \geq 0$ tels que $s(t) \geq s_E$. Graphiquement, si l'on est en mesure de tracer le graphe de $s(t)$, il s'agit de regarder pour quelles valeurs de t le graphe de la fonction dépasse la droite d'ordonnée constante $y = s_E$ et de reporter ces valeurs sur l'axe des abscisses (voir l'image suivante).



Exercice 55 Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_2^3 4t^2 \mathrm{d}t \qquad J = \int_{-1}^3 (4t^2 - 5t - 1)\mathrm{d}t \qquad K = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}t}{t^5} \qquad L = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}}$$

$$M = \int_0^1 t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t \qquad P = \int_0^1 \frac{2}{3t+1}\mathrm{d}t \qquad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t(\cos t)^2 \mathrm{d}t$$

Solution:

- Une primitive de l'intégrande $t \mapsto 4t^2$ est donnée par la fonction

$$t \mapsto 4 \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{4}{3}t^3$$

ainsi l'intégrale I est donnée par

$$I = \left[\frac{4}{3}t^3\right]_2^3 = \frac{4}{3} \cdot 3^3 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \cdot 27 - \frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{76}{3}.$$

- Une primitive de l'intégrande $t \mapsto 4t^2 - 5t - 1$ est donnée par la fonction

$$t \mapsto 4 \cdot \frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} - t = \frac{4}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - t$$

ainsi l'intégrale J est donnée par

$$J = \left[\frac{4}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - t\right]_{-1}^3 = \left(\frac{4}{3} \cdot 3^3 - \frac{5}{2}3^2 - 3\right) - \left(\frac{4}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{5}{2}(-1)^2 - (-1)\right) = \frac{40}{3}.$$

- Une primitive de l'intégrande $t \mapsto \frac{1}{t^5} = t^{-5}$ est donnée par la fonction

$$t \mapsto \frac{t^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4t^4}$$

ainsi l'intégrale K est donnée par

$$K = \left[-\frac{1}{4t^4}\right]_1^5 = \left(-\frac{1}{4 \cdot 5^4}\right) - \left(-\frac{1}{4 \cdot 1^4}\right) = \frac{156}{625}.$$

- Une primitive de l'intégrande $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-1/2}$ est donnée par la fonction

$$t \mapsto \frac{(1+t)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1+t}$$

ainsi l'intégrale L est donnée par

$$L = \left[2\sqrt{1+t}\right]_0^3 = 2.$$

- Une primitive de l'intégrande $t \mapsto te^{2t^2} = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{4t}_{u'} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{2t^2}}_{\mathrm{e}^u}$ est donnée par la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2t^2}$$

ainsi l'intégrale M est donnée par

$$M = \left[\frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right).$$

- Une primitive de l'intégrande $t \mapsto \frac{2}{3t+1} = \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{3}{3t+1}}_{\frac{u'}{u}}$ est donnée par la fonction

$$t \mapsto \frac{2}{3} \cdot \ln(3t+1)$$

ainsi l'intégrale P est donnée par

$$P = \left[\frac{2}{3} \cdot \ln(3t+1)\right]_0^1 = \frac{2}{3}\ln(4) = \frac{4}{3}\ln(2).$$

- Une primitive de l'intégrande $t \mapsto 3 \cdot \underbrace{\sin t}_{u'} \cdot \underbrace{(\cos t)^2}_{u^2}$ est donnée par la fonction

$$t \mapsto 3 \cdot \frac{(\cos(t))^3}{3} = \cos(t)^3$$

ainsi l'intégrale Q est donnée par

$$Q = \left[cos(t)^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Exercice 63 Préciser si les suites suivantes sont arithmétiques, géométriques, ou bien non.

$$u_n = 3 + 5n \qquad v_n = -\frac{1}{n^2} \qquad w_n = 2 \cdot 5^n \qquad t_n = -3n + 2.$$

Solution: Toute suite arithmétique u se met sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + rn.$$

Toute suite géométrique u se met sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 \cdot q^n.$$

Ainsi on en déduit que

- la suite u est arithmétique de raison 5 ;

- la suite v n'est ni arithmétique, ni géométrique ;
- la suite w est géométrique de raison 5 ;
- la suite t est arithmétique de raison -3.

Exercice 77 Le 1er septembre 2015, le groupe scolaire Youri Gagarine compte 3000 élèves. Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre 10% de l'effectif quitte l'établissement et 250 nouveaux élèves s'inscrivent. On cherche à modéliser cette situation par une suité u où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2015 + n$.

1. Justifier que l'on peut modéliser la situation par la suite u telle que $u0 = 3000$ et pour tout entire naturel n, $u_{n+1} = 0,9 \cdot u_n + 250$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2500$.
   (a) Démontrer que v est une suite géométrique de raison $0,9$. Préciser v_0.
   (b) Exprimer, pour tout n entier naturel, v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \cdot (0,9)^n + 2500$.
3. En déduire le sens de variation de u. Préciser comment va évoluer l'effectif du groupe scolaire Youri Gagarine dans le futur.

Solution:

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, puisqu'entre l'année $2015 + n$ et l'année $2015 + (n + 1)$, l'effectif baisse de 10% puis augmente de 250, on a

$$u_{n+1} = (1 - 10\%) \cdot u_n + 250 = 0,9 \cdot u_n + 250.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2500 = 0,9 \cdot u_n + 250 - 2500 = 0,9 \cdot (u_n - 2500) = 0,9 \cdot v_n.$$

   Donc la suite v est une suite géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2500 = 500$.

   (b) Comme v est une suite géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = 500$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = 500 \cdot (0,9)^n,$$

   et comme $v_n = u_n - 2500$, $u_n = v_n + 2500$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + 2500 = 500 \cdot (0,9)^n + 2500.$$

3. Comme $0,9 < 1$, la suite u décroît et l'effectif du groupe Youri Gagarine va décroître jusqu'atteindre un effectif de 2500 élèves.