# Corrections d'exercices 2 – Pour le 12 Décembre 2025

**Exercice 1** On cherche à étudier $N(t)$ la taille d'une population animale à un instant $t \geq 0$ où $t$ représente le temps, exprimé en mois. Le modèle de Verlhulst dit que la fonction est donnée approximativement par

$$N(t) = \frac{K}{1 + a\mathrm{e}^{-rt}},$$

où $K > 0$ est la capacité d'accueil de l'environnement, $a > 0$ et $r > 0$ sont donnés par la vitesse de croissance de la population.

1. Calculer $N'(t)$ et étudier le signe de $N'(t)$. En déduire le tableau de variation de $N$.
2. Justifier que la fonction $N$ prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[\frac{K}{1+a}, K\right]$ ie que pour tout $t \geq 0$,
$$\frac{K}{1+a} \leq N(t) \leq K.$$
3. Déterminer l'instant $t_{1/2}$ en fonction de $r$ à partir duquel la population animale dépasse $\frac{K}{1+\frac{a}{2}}$ ie tel que pour tout $t \geq t_{1/2}$,
$$N(t) \geq \frac{K}{1 + \frac{a}{2}}.$$
4. On suppose que $N(0) = 1\,000$, $N(t_{1/2}) = 1\,500$ et que $t_{1/2} = 6$. Quelles sont les valeurs de $K > 0$, $a > 0$ et $r > 0$ telles que l'on peut écrire pour $t \geq 0$, $N(t) = \frac{K}{1+a\mathrm{e}^{-rt}}$ ? (Indication: on pourra d'abord chercher à écrire $K$, $r$ et $a$ en fonction de $N(0)$ et de $t_{1/2}$)

**Exercice 2** Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^1 t^7 \,\mathrm{d}t \qquad J = \int_{-1}^1 t^3 \mathrm{e}^{-t^4} \,\mathrm{d}t \qquad K = \int_0^{\ln(\pi/2)} \mathrm{e}^t \cos\left(\mathrm{e}^t\right) \,\mathrm{d}t \qquad L = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\ln(t))t}$$

**Exercice 3** Pour les suites suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 7 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{rcl} v_0 & = & 5 \\ v_{n+1} & = & 3u_n \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{rcl} w_0 & = & 5 \\ w_{n+1} & = & 2w_n - 1 \end{array}\right.$$

donner leur nature (arithmétique, géométrique, arithméticogéométrique) et donner en fonction de $n$ entier naturel l'expression de chacune des suites. (Indication: pour l'étude de $w$, on pourra poser, pour tout $n$, $t_n = w_n - 1$.)

**Exercice 4** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer si possible les matrices suivantes:
$$A^2 \qquad A \times B \qquad B \times C \qquad C^2 \qquad C \times A.$$
En cas d'impossibilité, expliquer pourquoi le calcul est impossible.
2. $A$ est-elle inversible ? Si oui, calculer $A^{-1}$.
3. $B$ est-elle inversible ? Si oui, calculer $B^{-1}$.