Contrôle Continu 2 – 23 Novembre 2025

Durée : 45 minutes

Les documents, calculatrices, téléphones et tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits.

Il est attendu que les résultats soient sous forme simplifiée et les réponses justifiées.

Exercice 1 (4 points)

1. Rappeler le domaine de définition et la dérivée de la fonction ln.
2. Dériver la fonction
$$\varphi(x) = x\ln(x) - x$$
et en déduire une primitive de ln.
3. Soit u une fonction dérivable et strictement positive. Dériver la fonction
$$\phi(x) = u(x)\ln(u(x)) - u(x)$$
et en déduire une primitive de $u'\ln(u)$.

Solution:

1. **(1 point)** La fonction ln est définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
2. **(1,5 points)** La fonction φ a pour dérivée
$$\varphi'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x).$$
Ainsi une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$.
3. **(1,5 points)** La fonction ϕ vérifie pour tout x, $\phi(x) = \varphi(u(x))$, et a donc pour dérivée
$$\phi'(x) = (\varphi(u(x)))' = u'(x)\varphi'(u(x)) = u'(x)\ln(u(x)).$$
Ainsi une primitive de $u'\ln(u)$ est $u\ln(u) - u$.

Exercice 2 (7 points) On considère, dans cet exercice, les deux fonctions suivantes :
$$f(x) = -x^5 + 3x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Donner le domaine de définition D_f de f et le domaine de définition D_g de g.
2. Donner une primitive F de f et une primitive G de g.
3. En déduire la valeur de l'intégrale
$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Solution:

1. **(3 points)** La fonction f étant un polynôme, on a $D_f = \mathbb{R}$.
La fonction g est définie tant que $1 - x^2 \geq 0$ et $\sqrt{1-x^2} \neq 0$, c'est-à-dire $1 - x^2 > 0$, ainsi $D_g =]-1, 1[$.
2. **(3 points)** Une primitive F de f est $F(x) = -\frac{x^6}{6} + \frac{3}{2}x^2 + 3x$.
On a pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \times \underbrace{(-2x)}_{u'} \times \underbrace{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{u^{-\frac{1}{2}}},$$

ainsi une primitive G de g est

$$G(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -\sqrt{1-x^2}.$$

3. **(1 points)** On a

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) \mathrm{d}x = [G(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\left[\sqrt{1-x^2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}} - \sqrt{1-\frac{1}{4}}\right),$$

d'où $I = 0$.

Exercice 3 (9 points) Chez les sportifs, le taux d'acide lactique pendant un effort évolue en fonction du temps $t \in \mathbb{R}_+$ (exprimé en heures) selon la fonction suivante :

$$L(t) = l_0(t^2 \mathrm{e}^{-2t+3} + 1),$$

où $l_0 > 0$ est le taux résiduel d'acide lactique au repos.

1. Calculer la dérivée L' de la fonction L et vérifier que, pour tout $t \geq 0$,
$$L'(t) = 2l_0 \times t(1-t)\mathrm{e}^{-2t+3}.$$
2. En déduire le tableau de variations de la fonction L. L admet-elle un maximum ? Si oui, donner sa valeur en fonction de l_0.

On cherche à contrôler le taux d'acide lactique pour qu'il ne dépasse pas le seuil $l_C > 0$, qui est la valeur critique au-delà de laquelle les performances du sportif sont altérées.

3. Donner une relation entre l_0 et l_C pour que le taux d'acide lactique ne dépasse pas le seuil l_C. En déduire les valeurs possible de l_0 en fonction de l_C pour lesquelles à aucun moment le taux d'acide lactique ne dépasse pas le seuil l_C.
4. On suppose que $l_0 = 2$ et $l_C = 6$. Les performances du sportif seront-elles altérées dans ce cas ? *(On pourra utiliser le fait que* $2,7 \leq \mathrm{e} \leq 2,8$*).*

Solution:

1. **(3 points)** On a pour $t \geq 0$,
$$L'(t) = l_0(2t \times \mathrm{e}^{-2t+3} + t^2 \times (-2)\mathrm{e}^{-2t+3}) = 2l_0(t-t^2)e^{-2t+3} = 2l_0 \times t(1-t)e^{-2t+3}.$$
2. **(3 points)** On a le tableau suivant

t	0		1	
Signe de $2l_0t$	0	$+$		$+$
Signe de $(1-t)$		$+$	0	$-$
Signe de e^{-2t+3}		$+$		$+$
Signe de $L'(t)$	0	$+$	0	$-$
Variations de L	$L(0)$	$\nearrow$	$L(1)$	$\searrow$

avec $L(0) = l_0 \cdot (0^2 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot 0+3} + 1) = l_0$. La fonction L admet donc un maximum en 1 valant $L(1) = l_0(\mathrm{e}+1)$.

3. **(2 points)** Pour que le taux d'acide lactique ne dépasse pas le seuil l_C, il faut que pour tout $t \geq 0$, $L(t) \leq l_C$. Or L a pour valeur maximale $L(1) = l_0(\mathrm{e}+1)$. Ainsi, pour que le taux d'acide lactique ne dépasse pas le seuil l_C, il faut que l'on ait $l_0(\mathrm{e}+1) \leq l_C$.
   Ainsi les valeurs possibles de l_0 pour lesquelles à aucun moment le taux d'acide lactique ne dépasse pas le seuil l_C forment l'ensemble $\left]0, \frac{l_C}{\mathrm{e}+1}\right]$.

4. **(1 point)** Comme $2,7 \leq \mathrm{e} \leq 2,8$, on a $l_0(\mathrm{e}+1) \geq 7,4 > 6 = l_C$. Les performances du sportif seront altérées dans ce cas.

Exercice 4 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer si possible $A^2, A^3, A \times B, B \times A$. En cas d'impossibilité, expliquer pourquoi le calcul est impossible.
2. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Solution:

1. On a :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix},$$
$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 81 \\ 54 & 118 \end{pmatrix},$$
$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 2 & 10 & -8 \end{pmatrix}.$$

   Le calcul $B \times A$ n'est pas possible car B a trois colonnes tandis que A a deux lignes, ce qui rend la multiplication impossible dans ce sens.

2. A est inversible car son déterminant vaut $1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$ et son inverse est alors

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \times 4 - 2 \times 3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$