Devoir Maison 1 – Pour le 03 Novembre 2025

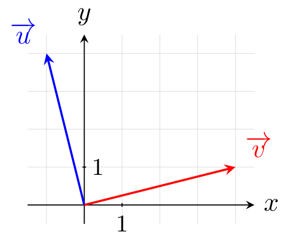
Il est attendu que les résultats soient sous forme simplifiée.

Exercice 1 (5 points) Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. Calculer la norme $\|\overrightarrow{u}\|$ du vecteur $\overrightarrow{u}$.
3. Calculer le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$.
4. Soit θ l'angle non-orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. θ est-il aigu, droit ou obtus ? Justifier.
5. Soit $\overrightarrow{z}$ le vecteur de coordonnées polaires $(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$. Calculer les coordonnées cartésiennes cartésiennes de $\overrightarrow{z}$.

Solution:

1. **(1 point)**



2. **(1 point)** La norme $\|\overrightarrow{u}\|$ du vecteur $\overrightarrow{u}$ vaut

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}.$$

3. **(1 point)** On a

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) - 2 \times 4 \\ 4 - 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. **(1 point)** Le produit scalaire entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vaut

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (-1) \times 4 + 4 \times 1 = 0.$$

Comme $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, l'angle θ non-orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est droit.

5. Le vecteur $\overrightarrow{z}$ de coordonnées polaires $(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$ a pour coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (5 points) Soient x et y deux nombres réels.

1. Simplifier l'expression
$$A = \frac{1}{4} - \frac{4}{6}.$$

2. Donner les valeurs de x et de y pour lesquelles l'expression
$$B = \frac{\frac{x}{y^2}}{\frac{y^2}{x}}.$$
est définie. Simplifier l'expression de B.

3. Donner les valeurs de x et de y pour lesquelles l'expression

$$C = \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}.$$

est définie. Simplifier l'expression de C.

Solution:

1. **(1 point)** On a
$$A = \frac{1}{4} - \frac{4}{6} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3}{12} - \frac{8}{12} = -\frac{5}{12}.$$

2. **(2 points)** L'expression B est bien définie quand $y^2 \neq 0$ et que $x \neq 0$, ainsi B est bien définie quand $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Dans ce cas,
$$B = \frac{\frac{x}{y^2}}{\frac{y^2}{x}} = \frac{x}{y^2} \times \frac{x}{y^2} = \frac{x^2}{y^4} = \frac{x^2}{y^4}.$$

3. **(2 points)** L'expression C est bien définie quand $y^4 \neq 0$ et que $\frac{x^2}{y^4} \geq 0$, ainsi C est bien définie quand $x \in \mathbb{R}$ et $y \neq 0$. Dans ce cas,
$$C = \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} = \frac{|x|}{y^2}.$$

Exercice 3 (3 points) En Égypte antique, plusieurs unités de mesures des distances coexistaient, dont le pas, le mille (qui équivaut à 1 800 pas) et le schène (qui équivaut à 4 milles). Combien y a-t-il de pas dans un schène ? Mettre le résultat sous forme scientifique et donner un ordre de grandeur.

Solution: Il y a $4 \times 1\,800 = 7\,200$ pas dans un schène, soit $7,2 \times 10^3 \simeq 7 \times 10^3$ pas dans un schène.

Exercice 4 (2 points) Pour compléter sa collection, Léa cherche désespérément une figurine. Malheureusement, le prix de cette figurine, qui était de 100 € à sa mise en vente, ne cesse d'augmenter.
Quand Iris est tombée sur le livre la première fois, le prix était 25 % plus cher qu'à sa mise en vente. Le temps de réunir l'argent pour l'acheter, le prix avait encore augmenté de 20 %.

1. De quel pourcentage le prix de la figurine a-t-il augmenté depuis sa mise en vente ? Justifier.
2. De quel pourcentage le prix de la figurine devrait-il diminuer afin de revenir au prix de sa mise en vente ? Justifier.

Solution:

1. **(1 point)** Le prix a augmenté de 25 % puis de 20 %. Pour déterminer la hausse totale du prix, il suffit de calculer $1,25 \times 1,20 = 1,5$. Ainsi le prix a augmenté de 50% depuis sa mise en vente.
2. **(1 point)** On cherche le pourcentage de diminution nécessaire pour que la figurine revienne à son prix d'origine après l'augmentation de 50%. Il suffit de calculer $\frac{1-1{,}5}{1{,}5} = \frac{-0{,}5}{1{,}5} = -\frac{1}{3}$. Ainsi le prix devrait diminuer de $\frac{1}{3} \simeq 33,33\%$ pour revenir au prix initial.

Exercice 5 (3 points) Soit x un nombre réel tel que $x \in [-2, 1]$. Donner le meilleur encadrement possible des expressions suivantes.

$$z_1 = x - 2, \quad z_2 = x^2 - 1.$$

Solution: Comme $-2 \leq x \leq 1$, on a $-4 \leq x - 2 \leq -1$.

De plus, pour $-2 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq x^2 \leq 4$ car $x \mapsto x^2$ décroît sur $[-2, 0]$ et croît sur $[0, 1]$. On en déduit que $-1 \leq x^2 - 1 \leq 3$.

Exercice 6 (3 points)

1. Rappeler les identités remarquables.
2. Soit $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Quelles sont les racines de f ? Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) \leq 0$?

Solution:

1. **(1 point)** Les identités remarquables sont :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad ; \quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad ; \quad x^2 - y^2 = (x+y)(x-y).$$

2. **(2 points)** $f(x)$ se met sous la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$. On note $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$. Comme $\Delta > 0$, le polynôme $x^2 + 2x - 3$ admet deux racines réelles

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1.$$

Vu que $a = 1 > 0$, $f(x)$ est négatif entre ses racines, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) \leq 0$ est $[-3; 1]$.