Formulaire de dérivation

Formules générales

$$
\begin{aligned}
(u(x)+v(x))' &= u'(x)+v'(x)\\
(u(x)\cdot v(x))' &= u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\\
\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}\\
(u(v(x)))' &= u'(v(x))\cdot v'(x)
\end{aligned}
$$

Dérivées des fonctions classiques

$$
\begin{aligned}
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}\\
\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' &= -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\\
(\mathrm{e}^x)' &= \mathrm{e}^x\\
(a^x)' &= \ln(a)\cdot a^x\\
(\ln(x))' &= \frac{1}{x}\\
(\sin(x))' &= \cos(x)\\
(\cos(x))' &= -\sin(x)
\end{aligned}
$$

Dérivées des fonctions composés

$$
\begin{aligned}
(u^\alpha)' &= \alpha\cdot u'\cdot u^{\alpha-1}\\
\left(\frac{1}{u^\alpha}\right)' &= -\frac{\alpha\cdot u'}{u^{\alpha+1}}\\
(\mathrm{e}^u)' &= u'\cdot \mathrm{e}^u\\
(\ln(u))' &= \frac{u'}{u}\\
(\sin(u))' &= u'\cos(u)\\
(\cos(u))' &= -u'\sin(u)
\end{aligned}
$$

L1 Portail BECV, Cours MAT1 – Groupe 14
Université de Rennes 2024-2025

Feuille 1 : Simplifications, fonctions classiques

Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\
(a+b)\cdot(a-b) &= a^2-b^2
\end{aligned}
$$

Ces trois égalités sont à connaître dans les deux sens ! Le savoir peut vous simplifier certains calculs : s'il n'est pas si clair de voir que x^2-2x+1 est positif, c'est beaucoup plus clair pour $(x-1)^2$ et pourtant ce sont les mêmes quantités !

Exercice 1.

Développez et simplifiez :

$$
\begin{gathered}
4(2x-5)-3(x-6)\\
(x+3)(4x-5)\\
(\sqrt{7}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})
\end{gathered}
$$

Solution 1.

On a :

$$
\begin{aligned}
4(2x-5)-3(x-6) &= (8x-20)-(3x-18)\\
&= 5x-2.
\end{aligned}
$$

On a également :

$$
\begin{aligned}
(x+3)(4x-5) &= 4x^2+(-5+12)x+(-15)\\
&= 4x^2+7x-15.
\end{aligned}
$$

On a à l'aide de la troisième identité remarquable :

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{7}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2}) &= (\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2\\
&= 5.
\end{aligned}
$$

Développer et réduire des produits de polynômes

Pour développer et réduire des produits de polynômes, on peut mettre en place deux méthodes.

La première méthode consiste à développer simplement et terme par terme chaque nombre puis de les ranger ensemble par degré. Par exemple dans l'exercice 1 de la feuille 1 :

$$\begin{aligned}(x+3)\cdot(4x-5) &= x\cdot 4x + x\cdot(-5) + 3\cdot 4x + 3\cdot(-5)\\ &= 4x^2 - 5x + 12x - 15\\ &= 4x^2 + 7x - 15\end{aligned}$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle n'est pas difficile à mettre en place. Cependant, on risque facilement de faire des erreurs de calculs au vu du nombre de termes à additionner qui apparaissent et qui peut être particulièrement grand.

La deuxième méthode agit de manière un peu plus fine. On sait que le produit de deux polynômes sera un polynôme dont le degré sera la somme de ceux dont on fait le produit. On connait donc déjà en avance la tête que prendre le calcul avant même de la faire ! En réfléchissant ainsi, on peut refaire l'exercice 1 d'une autre manière :

$$\begin{aligned}(x+3)\cdot(4x-5) &= (4)\cdot x^2 + (-5+3\cdot 4)\cdot x + 3\cdot(-5)\\ &= 4x^2 + 7x - 15\end{aligned}$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle limite le risque d'erreur de calcul après avoir considéré tous les termes en compte et qu'elle permet (quand les degrés des polynômes sont relativement grands) de gagner en place sur la feuille. Le désavantage est qu'elle demande de réfléchir plus que la première méthode lors des calculs.

Essayez d'utiliser les deux méthodes, et adoptez la méthode qui vous convient le mieux. Dans tous les cas, la bonne méthode pour vous est la méthode qui vous convient le mieux, que vous maîtrisez et avec laquelle vous êtes le plus à l'aise !

Exercice 2 : Règle de trois

Nous avons une solution de 16g de sel dans 60ml d'eau.

(a) Dans un autre verre, on a 33ml d'eau, et on veut y ajouter du sel pour obtenir une solution avec la même concentration. Quelle quantité de sel faut-il utiliser ?

(b) Un autre verre est vide, sauf qu'il y a 25g de sel au fond. Combien d'eau faut-il ajouter pour obtenir une solution avec encore la même concentration ?

Solution 2.

(a) Avec des notations évidentes, on cherche à avoir

$$\frac{m_{anc}}{V_{anc}} = C_{anc} = C_{new} = \frac{m_{new}}{V_{new}}.$$

Il faut donc

$$m_{new} = m_{anc}\cdot\frac{V_{new}}{V_{anc}} = 16\text{g}\cdot\frac{33\text{ml}}{60\text{ml}} = 8,8\text{g de sel.}$$

(b) On cherche toujours à avoir

$$\frac{m_{anc}}{V_{anc}} = \frac{m_{new}}{V_{new}}.$$

Il faut donc

$$V_{new} = V_{anc}\cdot\frac{m_{new}}{m_{anc}} = 60\text{ml}\cdot\frac{25\text{g}}{16\text{g}} = 93,75\text{ml d'eau.}$$

Exercice 3.

En chimie, on a une "solution mère" d'une certaine substance dans de l'eau, avec une certaine concentration $C_{\text{mère}}$. Par dilution, on veut obtenir une "solution fille", de concentration C_{fille}.

1. Plus précisément, je souhaite une quantité de 100ml de la solution fille, et que la concentration C_{fille} soit égale à 20% de $C_{\text{mère}}$. Quel volume de la solution mère et quel volume d'eau dois-je mélanger ?
2. Cette fois, supposons que j'ai $V_{\text{mère}} = 10$ml de la solution mère, et je veux simplement rajouter de l'eau pour la diluer à 30% de sa concentration originale. Quel volume d'eau V_{eau} dois-je rajouter ?

Solution 3.

Rappelons que le facteur de dilution F peut être exprimé de deux manières :

$$F = \frac{V_{fille}}{V_{mère}} = \frac{C_{mère}}{C_{fille}}.$$

(a) On a donc

$$V_{mère} = \frac{C_{fille}}{C_{mère}}\cdot V_{fille} = \frac{20}{100}\cdot 100\text{ml} = 20\text{ml}.$$

On doit donc mélanger 20ml de la solution mère dans 80ml d'eau pour obtenir la solution mère.
Plus intuitivement, on peut dire que 20% des 100ml de la solution fille doivent être remplis par la solution mère, on doit donc en prendre 20ml et compléter avec 80ml d'eau.

(b) Avant de calculer V_{eau}, on va chercher à calculer $V_{fille} = V_{mère} + V_{eau}$ ce qui donne $V_{eau} = V_{fille} - V_{mère}$.
On a

$$V_{fille} = \frac{C_{mère}}{C_{fille}}\cdot V_{mère},$$

d'où

$$\begin{aligned} V_{eau} &= V_{mère} \cdot \left(\frac{C_{mère}}{C_{fille}} - 1 \right) \\ &= 10\text{ml} \cdot \left(\frac{100}{30} - 1 \right) \simeq 23,3\text{ml}. \end{aligned}$$

Plus intuitivement, 30% du volume après dilution doivent être pris par les 10ml de la solution mère. Donc $V_{fille} \cdot \frac{3}{10} = 10$ml ie $V_{fille} \simeq 33,3$ml. Parmi ces 33,3ml il y en a 10 qui proviennent de la solution mère, il faut donc diluer avec 23,3ml d'eau.

Polynômes et fractions rationnelles

Racines de polynômes

En toute généralité, il n'existe pas de méthodes pour déterminer les racines d'un polynôme aussi facilement que pour un polynôme du second degré. Donc quand on cherche les racines d'un polynôme afin de le factoriser une certaine méthode se met en place :

1. On cherche des racines évidentes au polynômes P considéré. Il s'agit de calculer $P(0)$, $P(1)$ et $P(-1)$ (éventuellement $P(2)$ et $P(-2)$ également) et de voir les valeurs prises par ce polynômes, s'il l'une d'elles est 0, on a trouvé une racine évidente de P et on peut alors chercher à le factoriser.

2. Si la première méthode ne fonctionne pas mais que le polynôme est de degré 2 ie de la forme $ax^2 + bx + c$, une autre méthode s'offre à nous : le calcul du déterminant $\Delta = b^2 - 4ac$!
   - Si $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes $r_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et se met sous la forme $a(x - r_-)(x + r_+)$.
   - Si $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine double $r = \dfrac{-b}{2a}$ et se met sous la forme $a(x - r)^2$.
   - Si $\Delta < 0$ alors P n'admet pas de racines réelles et est de signe constant (qui est le même que celui de a).

Exercice 4.

Pour chacun des polynômes suivants :

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 \quad , \quad Q(x) = 2x^2 + 2x - 1,$$

on demande de :

(a) trouver les racines r_1 et r_2,
(b) factoriser en utilisant ses racines,
(c) déterminer le signe en fonction de x.

Solution 4.

- On a $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $P(2) = 4 - 6 + 2 = 0$ donc P a pour racines 1 et 2.
  Ainsi $P(x) = (x - 1)(x - 2)$.
  Pour le signe de $P(x)$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$x-2$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

  Ainsi la fonction P est positive sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ et est négative sur $[1, 2]$.
- Le discrimant de Q est $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 12 > 0$ donc Q a deux racines réelles qui sont $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
  Ainsi $Q(x) = 2\left(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$.
  Pour le signe de $Q(x)$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
$Q(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

  Ainsi la fonction Q est positive sur $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$ et est négative sur $\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

Exercice 5.

Soit $P(x) = x^3 - 13x - 12$.

(a) Trouver une racine "évidente" de P, que l'on notera ω.
(b) Trouver a, b, et c tels que $P(x) = (x-\omega)(ax^2+bx+c)$, puis donner toutes les racines de P.
(c) Donner le signe de P en fonction de x.

Solution 5.

(a) On a $P(-1) = -1 + 13 - 12 = 0$ donc -1 est un racine évidente de P.
(b) On a

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c \end{aligned}$$

et, par définition, $P(x) = x^3 - 13x - 12$.
En comparant les coefficients, on obtient

$$\begin{cases} a &= 1 \\ a + b &= 0 \\ b + c &= -13 \\ c &= -12 \end{cases}$$

Ainsi $a = 1, b = -1, c = -12$.
Donc $P(x) = (x+1)(x^2 - x - 12)$. On calcule les racines de $x^2 - x - 12$ et on trouve -3 et 4.
Donc $P(x) = (x+3)(x+1)(x-4)$ et les racines de P sont -3, -1 et 4.

(c) Pour le signe de $P(x)$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-4$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi la fonction P est positive sur $[-3,-1] \cup [4,+\infty[$ et est négative sur $]-\infty,-3] \cup [-1,4]$.

Exercice 6.

Soit $P(x) = x^3 - 1$. On observe d'abord que $P(1) = 0$. Il existe donc des nombres a, b, et c tels que :

$$x^3 - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

(a) Trouver a, b, et c.
(b) En déduire le signe de la fonction $x^3 - 1$ en fonction de x.

Solution 6.

(a) On a

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

et par définition $P(x) = x^3 - 1$. En comparant les coefficients, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b-a & = & 0 \\ c-b & = & 0 \\ c & = & 1 \end{array} \right.$$

Ainsi $a = b = c = 1$.

(b) Le polynôme $x^2 + x + 1$ est de discriminant $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ donc n'a pas de racines réelles et est positif pour tout x. Le signe de $P(x)$ se lit alors sur le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$	$\vert$	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Le fonction P est positive sur $[1,+\infty[$ et est négative sur $]-\infty,1]$.

Exercice 7.

Soit

$$f(x) = \frac{x}{(x+2)(x+1)}.$$

(a) Donner le signe de $f(x)$ en fonction de x.

(b) (Méthode de la décomposition en éléments simples) Trouver a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}.$$

Solution 7.

(a) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
x		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$P(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Ainsi la fonction f n'est pas définie en $x = -2$ et en $x = -1$, est positive sur $]-2,-1[\cup [0,+\infty[$ et est négative sur $]-\infty,-2[\cup]-1,0]$.

(b) Soient a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+2)(x+1)} &= \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} \\ &= \frac{a(x+1)}{(x+2)(x+1)} + \frac{b(x+2)}{(x+2)(x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x + (a+2b)}{(x+2)(x+1)}. \end{aligned}$$

Puisque des deux côtés de l'égalité, on trouve une fonction rationnelle dont les polynômes au dénominateur sont les mêmes, on peut identifier les deux polynômes au numérateur ie $x = (a+b)x + (a+2b)$ (pour le voir, il "suffit" de multiplier les deux côtés de l'égalité par le polynôme $(x+2)(x+1)$) d'où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a+b & = & 1 \\ a+2b & = & 0 \end{array} \right. .$$

Donc $a = 2$ et $b = -1$ c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Exercice 8.

Simplifier les expressions suivantes.

$$(3a^3b^3)(4ab^2)^2 \qquad \frac{3}{5}+\frac{7}{3} \qquad 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3$$
$$\frac{25^3}{5^6} \qquad \frac{x}{x^2} \qquad \frac{x^3+x}{x^2}$$
$$\frac{x}{x^3+x} \qquad \sqrt{32}-\sqrt{2} \qquad \ln(2x)-\ln(x)$$
$$(\mathrm{e}^x)^{-1} \qquad (\mathrm{e}^x)^2-3\mathrm{e}^{2x} \qquad \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}}$$
$$\frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{-x+2}}.$$

Solution 8.

On a les résultats suivants :

$$\begin{aligned}(3a^3b^3)(4ab^2)^2 &= (3a^3b^3)\left(4^2a^2(b^2)^2\right)\\ &= (3\cdot 14)(a^3a^2)(b^3b^4) = 48a^5b^7,\end{aligned}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{3}=\frac{9}{15}+\frac{35}{15}=\frac{44}{15},$$

$$6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 = 6\cdot(6^{-1})^3 = 6\cdot 6^{-3} = 6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36},$$

$$\frac{25^3}{5^6} = \frac{(5^2)^3}{5^6} = \frac{5^6}{5^6} = 1,$$

$$\frac{x}{x^2} = xx^{-2} = x^{-1} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{x^3+x}{x^2} = \frac{x(x^2+1)}{xx} = \frac{x^2+1}{x} = x+\frac{1}{x},$$

$$\frac{x}{x^3+x} = \frac{x}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\sqrt{32}-\sqrt{2} = \sqrt{2\cdot 16}-\sqrt{2} = (\sqrt{4^2}-1)\sqrt{2} = 3\sqrt{2},$$

$$\ln(2x)-\ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2),$$

$$(\mathrm{e}^x)^{-1} = \mathrm{e}^{-x},$$

$$(\mathrm{e}^x)^2-3\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{2x} = -2\mathrm{e}^{2x},$$

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x},$$

$$\frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{-x+2}} = \mathrm{e}^{3x+1}\mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{e}^{4x-1}.$$

Fonctions exponentielle et logarithme

Rappel du cours : Logarithme

Pour $a>0$, on appelle **logarithme en base** a la fonction définie par, pour $x>0$,

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Cette définition est la raison pour laquelle si l'on doit calculer $\log_a(x)$, on va chercher à mettre x sous la forme a^y et dans ce cas $\log_a(x)=y$ (cf (d) de l'exercice 9).

Quand $a=\mathrm{e}$, on écrit plutôt $\log_{\mathrm{e}} = \ln$.

On a les règles de calcul suivantes, pour $x,y>0$, b un nombre réel :

$$\begin{aligned}\log_a(xy) &= \log_a(x)+\log_a(y),\\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x)-\log_a(y),\\ \log_a(x^b) &= b\log_a(x).\end{aligned}$$

Exercice 9.

(a) Esquisser les graphes des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x\mapsto \ln(x)$ (limites, valeurs remarquables, etc.).

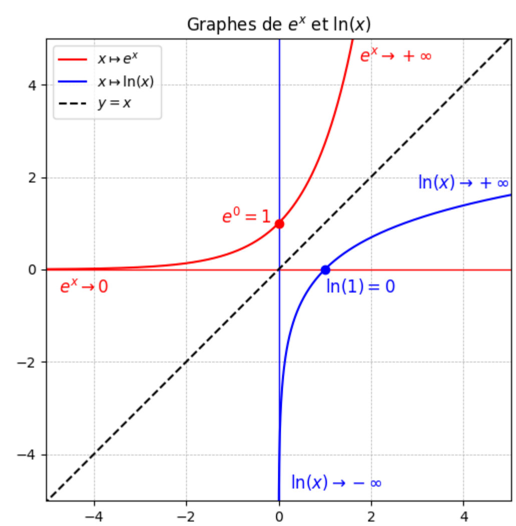
(b) Esquisser les graphes des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $x\mapsto -\ln(x)$ (limites, valeurs remarquables, etc.).

(c) Simplifier le nombre : $3\ln(2)-\ln(4)+\ln(1/e)$.

(d) Quelle est la valeur de $\log_{10}(10000)$? de $\log_2(64)$? de $\log_8(64)$?

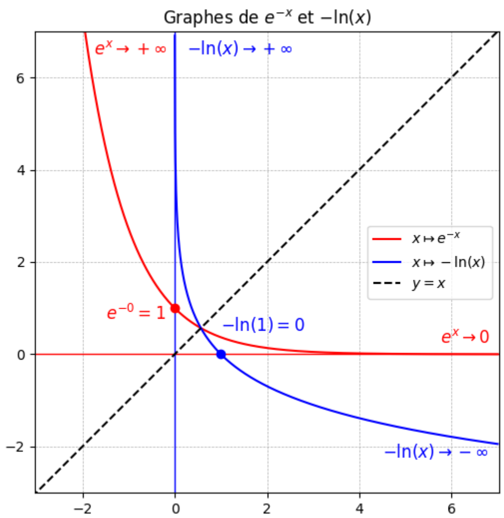
Solution 9.

(a) Voici les graphes demandés :



On observe que les graphes des fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^x$ et $x\mapsto\ln(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$, on voit bien qu'elles sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
Il est très important d'avoir en tête l'allure et le comportement de ce deux fonctions quand on les manipule, retenez donc ce dessin !

(b) Voici les graphes demandés :



De la même manière qu'en (a), on observe que les graphes des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto -\ln(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, elles sont aussi des fonctions réciproques l'une de l'autre.

(c) On va d'abord essayer de manipuler l'expression afin d'avoir des termes semblables que l'on peut combiner avant de faire des calculs. On a donc

$$\begin{aligned} 3\ln(2) - \ln(4) + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) &= \ln\left(2^3\right) - 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \\ &= \ln\left(2^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right) \\ &= \ln(2) - 1. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \log_{10}(10000) &= \log_{10}(10^4) = 4, \\ \log_2(64) &= \log_2(2^6) = 6, \\ \log_8(64) &= \log_8(8^2) = 2. \end{aligned}$$

Exercice 10.

Indiquer la bonne réponse, en justifiant.

(a) Le plus petit entier n solution de $2^n \geq 125$ est le plus petit entier n qui vérifie :

$$n \geq \ln\left(\frac{125}{2}\right) \quad , \quad n \geq \frac{125}{\ln(2)} \quad , \quad n \geq \frac{\ln(125)}{\ln(2)}.$$

(b) Quel est le nombre d'augmentations successives de 1% nécessaires pour qu'une valeur augmente de 50% ? Est-il

$$< 50\,? \qquad = 50\%\,? \qquad > 50\%\,?$$

Solution 10.

(a) On a la chaîne d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} 2^n \geq 125 &\Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(125) \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln(2) \geq \ln(125) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(125)}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on trouve $n \geq 6,97$ donc la plus petite solution entière est $n = 7$.

(b) On cherche le plus petit n solution de $(1,01)^n \geq 1,5$ ce qui équivaut à $n \geq \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,01)} \simeq 40,75$. On a donc besoin que de 41 augmentations.

Exercice 12.

Simplifier les expressions suivantes.

$$\frac{2+\sqrt{28}}{2} \qquad \frac{2^{10}}{8^3}$$
$$\ln(8) - \ln(2)$$
$$\left(3\alpha^2\beta^3\right)\left(3\alpha\beta\right)^2 \qquad \sqrt{200} - \sqrt{32} \qquad 4^x \cdot 2^{-x}.$$

Solution 12.

On a les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \frac{2+\sqrt{28}}{2} &= \frac{2+2\sqrt{7}}{2} = 1+\sqrt{7}, \\ \frac{2^{10}}{8^3} &= \frac{2^{10}}{2^9} = 2, \\ \ln(8) - \ln(2) &= \ln\left(\frac{8}{2}\right) = 2\ln(2), \\ \left(3\alpha^2\beta^3\right)\left(3\alpha\beta\right)^2 &= 27\alpha^4\beta^5, \\ \sqrt{200} - \sqrt{32} &= \sqrt{2}(\sqrt{100} - \sqrt{16}) = 6\sqrt{2}, \\ 4^x \cdot 2^{-x} &= 2^{2x} \cdot 2^{-x} = 2^x. \end{aligned}$$

Exercice 16.

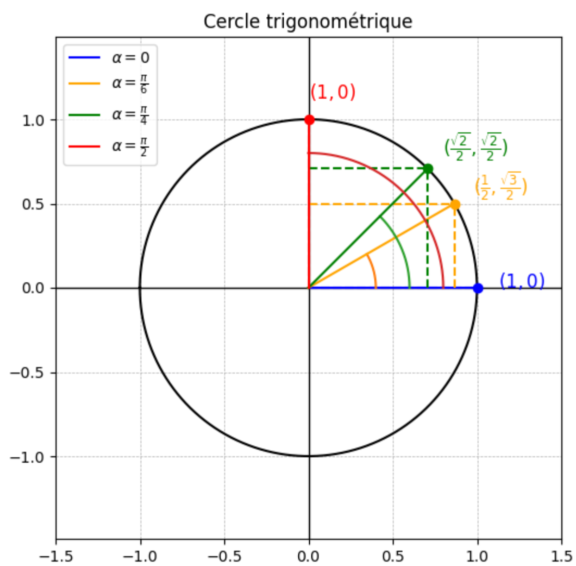
Vous devez connaître par cœur les valeurs particulières de sinus et de cosinus dans la première partie du tableau. Complétez le.

angle α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
$0 = 0°$	0	1
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2} = 90°$	1	0
$\pi = 180°$		
$\frac{\pi}{3} = 60°$		
$\frac{5\pi}{6} = 150°$		
$-\frac{3\pi}{4} = -135°$		

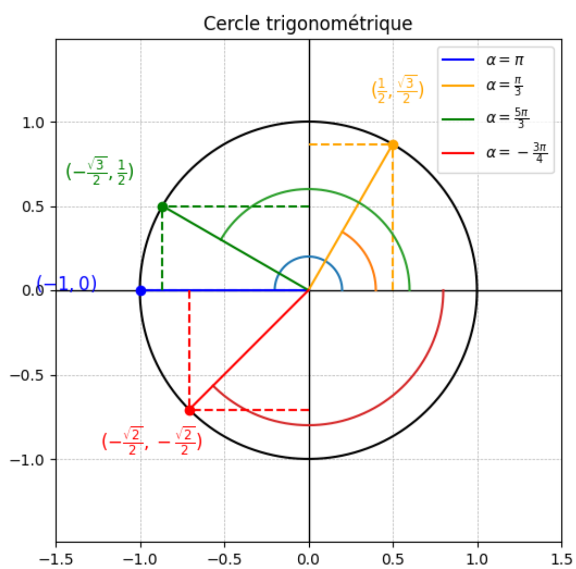
Solution 16.

L'objectif de cet exercice est de vous faire travailler sur le dessin du cercle trigonométrique. Avant de remplir le nouveau tableau, voici le dessin qui justifie les valeurs du premier tableau.

angle α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
$\pi = 180°$	0	-1
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6} = 150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{3\pi}{4} = -135°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$



À partir de ces valeurs, on cherche à trouver les nouvelles valeurs, il "sufffit" donc de dessiner le cercle, mettre l'angle pour lequel on cherche la valeur et de se ramener par des notions de symétrie au cercle précédent et aux valeurs que l'on connaît. Voici déjà le nouveau cercle :



Ainsi on peut remplir le tableau de cette manière :

L1 Portail BECV, Cours MAT1 – Groupe 14
Université de Rennes 2024-2025

Feuille 2 : Dérivations

Exercice 19.

Simplifiez les expressions

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^{-2}, \quad \tfrac{a^2b^3}{a^3b^2}, \quad \tfrac{1}{x(x^3-x)}, \quad \tfrac{x^2}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}},$$
$$\ln\left(\tfrac{1}{e^x}\right), \quad \left(\tfrac{e^{2x}}{e^{-x}}\right)^{-1}, \quad \ln(x)+\ln(x^{-1}), \quad \left(3^{-2}\right)^2.$$

Solution 19.

On a les résultats suivants :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4},$$

$$\frac{a^2b^3}{a^3b^2} = \frac{1}{a}\cdot b = \frac{b}{a},$$

$$\frac{1}{x(x^3-x)} = \frac{1}{x(x(x^2-1))} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)},$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{x^{1/2}\cdot x^{1/3}} = \frac{x^2}{x^{5/6}} = x^{7/6},$$

$$\ln\left(\frac{1}{e^x}\right) = \ln(e^{-x}) = -x,$$

$$\left(\frac{e^{2x}}{e^{-x}}\right)^{-1} = \left(e^{2x-(-x)}\right)^{-1} = \left(e^{3x}\right)^{-1} = e^{-3x},$$

$$\ln(x)+\ln(x^{-1}) = \ln(x)-\ln(x) = 0,$$

$$\left(3^{-2}\right)^2 = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}.$$

Exercice 21.

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions. Rappelez les formules de dérivation des fonctions

$$u\cdot v \quad \text{et} \quad \frac{u}{v}.$$

Ensuite, dérivez les fonctions suivantes :
(a) $f(x) = x\cdot\ln(x)$, $\quad g(x) = (x^2-3x+5)\cdot e^x$.
(b) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $\quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
(c) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1}$, $\quad g(x) = x\cdot\sin(x)$.

Solution 21.

Déjà, on a :

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.$$

(a) Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'\cdot\ln(x) + x\cdot(\ln(x))' \\ &= 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} \\ &= \ln(x)+1. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x^2-3x+5\right)'\cdot e^x + (x^2-3x+5)\cdot(e^x)' \\ &= (2x-3)\cdot e^x + (x^2-3x+5)\cdot e^x \\ &= (x^2-x+2)\cdot e^x. \end{aligned}$$

(b) Pour $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1)(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{0\cdot(x^2+1)-1\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(c) Pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(x^2+1)-\ln(x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(x) \\ &= \sin(x) + x\cos(x) \end{aligned}$$

Rappels multiples

Les rappels suivants sont notamment utiles pour l'exercice suivant. Pour f et g deux fonctions dérivables, on a :

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Quand on veut dériver une fonction composée, on indentifie quelle fonction est à l'intérieur de quelle autre. On dérive la fonction à l'extérieur en x puis on l'applique en la fonction intérieure et on multiplie le tout par la dérivée en x de la fonction à l'intérieur.

De plus, pour $a > 0$, on a

$$a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)} \quad \text{et} \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Ainsi

$$2^x = \mathrm{e}^{x\ln(2)} \quad \text{et} \quad \log_7(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(7)}.$$

Exercice 22.

Soit $u = u(x)$ une fonction. Rappelez les formules de dérivation des fonctions suivantes :

$$u^2, u^3, e^u, \ln(u), \cos(u), \sin(u), \frac{1}{u}, \sqrt{u}.$$

Ensuite, dérivez les fonctions suivantes :
(a) $f(x) = \cos(x^2)$, $g(x) = \cos^2(x)$,
(b) $f(x) = 5^x$, $g(x) = e^{x^2}$,
(c) $f(x) = \ln(x^2+1)$, $g(x) = \log_{10}(x)$,
(d) $f(x) = \sin(x) + x^2$, $g(x) = \sqrt{e^x+1}$.

Solution 22.

On a les résultats suivants :

$$\begin{aligned}(u^n)' &= n \cdot u^{n-1} \cdot u' \\ (e^u)' &= e^u \cdot u' \\ (\ln(u))' &= \frac{1}{u} \cdot u' \\ (\cos(u))' &= -\sin(u) \cdot u' \\ (\sin(u))' &= \cos(u) \cdot u' \\ \left(\frac{1}{u}\right)' &= -\frac{u'}{u^2} \\ (\sqrt{u})' &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'\end{aligned}$$

(a) Pour $f(x) = \cos(x^2)$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\sin(x^2) \cdot (x^2)' \\ &= -\sin(x^2) \cdot 2x\end{aligned}$$

Pour $g(x) = \cos^2(x)$:

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2 \cdot \cos(x) \cdot (\cos(x))' \\ &= 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= -2\cos(x)\sin(x)\end{aligned}$$

(b) Pour $f(x) = 5^x$:

$$f'(x) = 5^x \cdot \ln(5)$$

Pour $g(x) = e^{x^2}$:

$$\begin{aligned}g'(x) &= e^{x^2} \cdot (x^2)' \\ &= e^{x^2} \cdot 2x\end{aligned}$$

(c) Pour $f(x) = \ln(x^2+1)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' \\ &= \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\end{aligned}$$

Pour $g(x) = \log_{10}(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$$

(d) Pour $f(x) = \sin(x) + x^2$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sin(x))' + (x^2)' \\ &= \cos(x) + 2x\end{aligned}$$

Pour $g(x) = \sqrt{e^x+1}$:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{e^x+1}} \cdot (e^x+1)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^x+1}} \cdot e^x\end{aligned}$$

Exercice 23.

1. Regardons le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Soit $g(x)$ la fonction dont le graphe est la droite tangente au graphe de f au point $(4,2)$. Déterminer la fonction $g(x)$.
2. Même question pour la fonction $f(x) = x^3$ et la tangente au point $(2,8)$.

Solution 23.

1. Tout d'abord, $(4,2) = (4, f(4))$. La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

et donc $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. Ainsi la fonction g est définie par

$$\begin{aligned}g(x) &= f'(4)(x-4) + f(4) \\ &= \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{x}{4} + 1.\end{aligned}$$

2. Tout d'abord, $(2,8) = (2, f(2))$. La dérivée de f est

$$f'(x) = 3x^2$$

et donc $f'(2) = 3 * 2^2 = 12$. Ainsi la fonction g est définie par

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ &= 12(x-2) + 8 = 12x - 16. \end{aligned}$$

Exercice 24.

Trouver des primitives pour les fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x^2, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = \tfrac{10}{x},$$
$$k(x) = 2x \cdot e^{x^2}, \quad l(x) = x^2 + 2x^6, \quad m(x) = 3 \cdot \cos(3x)$$
$$n(x) = \tfrac{x}{(x+2)(x+1)}$$

Solution 24.

Une primitive de $f(x)$ est

$$F(x) = x^3.$$

Une primitive de $g(x)$ est

$$G(x) = e^x.$$

Une primitive de $h(x)$ est

$$H(x) = 10 \ln(x).$$

Une primitive de $k(x)$ est

$$K(x) = e^{x^2}.$$

Une primitive de $l(x)$ est

$$L(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^7}{7}.$$

Une primitive de $m(x)$ est

$$M(x) = \sin(3x).$$

Une primitive de $n(x)$ est

$$N(x) = 2\ln(x+2) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{(x+2)^2}{x+1}\right).$$

Exercice 26.

Calculer les dérivées partielles (par rapport à x_1 et x_2) des fonctions:
1. $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2^2 + x_1x_2 + 3$ et $g(x_1, x_2) = x_1^2 e^{2x_2}$,
2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \mathrm{e}^{x_1x_2}$ et $g(x_1, x_2) = \frac{1+x_1}{2x_1 - x_2}$.

Solution 26.

1. On a

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} f(x_1, x_2) &= 2 + x_2, \\ \partial_{x_2} f(x_1, x_2) &= 6x_2 + x_1, \\ \partial_{x_1} g(x_1, x_2) &= 2x_1 e^{2x_2}, \\ \partial_{x_2} g(x_1, x_2) &= 2x_1^2 e^{2x_2}. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} f(x_1, x_2) &= (2x_1 + x_1^3)\mathrm{e}^{x_1x_2}, \\ \partial_{x_2} f(x_1, x_2) &= x_1^3 \mathrm{e}^{x_1x_2}, \\ \partial_{x_1} g(x_1, x_2) &= \frac{-x_2 - 2}{(2x_1 - x_2)^2} \\ \partial_{x_2} g(x_1, x_2) &= \frac{1 + x_1}{(2x_1 - x_2)^2}. \end{aligned}$$