Contrôle Continu 1 – 10 Octobre 2025

Durée : 30 minutes

Les documents, calculatrices, téléphones et tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits.

Il est attendu que les résultats soient sous forme simplifiée.

Exercice 1 (6 points)

1. Rappeler les identités remarquables.
2. Soit x un nombre réel tel que $x \in [-1, 4]$. Donner le meilleur encadrement possible de
$$z_1 = x - 2.$$
3. Soit $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Quelles sont les racines de f ? Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) \leq 0$?

Solution:

1. **(3 points)** Les identités remarquables sont :
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad ; \quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad ; \quad x^2 - y^2 = (x+y)(x-y).$$
2. **(1 points)** Comme $-1 \leq x \leq 4$, on a $-3 \leq x - 2 \leq 2$.
3. **(2 points)** On note $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$. Comme $\Delta > 0$, le polynôme $x^2 - 2x - 3$ admet deux racines réelles
$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -1 \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 3.$$
Vu que $a = 1 > 0$, $f(x)$ est négatif entre ses racines, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) \leq 0$ est $[-1; 3]$.

Exercice 2 (6 points) Iris cherche une édition collector de son livre préféré. Malheureusement, le prix de ce livre, qui était de 150€ à sa mise en vente, ne cesse d'augmenter. Quand Iris est tombée sur le livre la première fois, le prix était 20% plus cher qu'à sa mise en vente. Le temps de réunir l'argent pour l'acheter, le prix avait encore augmenté de 25%.

1. Mettre le prix original du livre sous forme scientifique et donner un ordre de grandeur.
2. De quel pourcentage le prix du livre a-t-il augmenté depuis sa mise en vente ? Justifier.
3. De quel pourcentage le prix du livre devrait-il diminuer afin de revenir au prix de sa mise en vente ? Justifier.

Solution:

1. **(2 points)** Le prix original du livre est de 150€, soit $1,50 \times 10^2$€ $\simeq 2 \times 10^2$€.
2. **(2 points)** Le prix a augmenté de 20% puis de 25%. Pour déterminer la hausse totale du prix, il suffit de calculer $1,2 \times 1,25 = 1,5$. Ainsi le prix a augmenté de 50% depuis sa mise en vente.
3. **(2 points)** On cherche le pourcentage de diminution nécessaire pour que le livre revienne à son prix d'origine après l'augmentation de 50%. Il suffit de calculer $\frac{1-1,5}{1,5} = \frac{-0,5}{1,5} = -\frac{1}{3}$. Ainsi le prix devrait diminuer de $\frac{1}{3} \simeq 33,33\%$ pour revenir au prix initial.

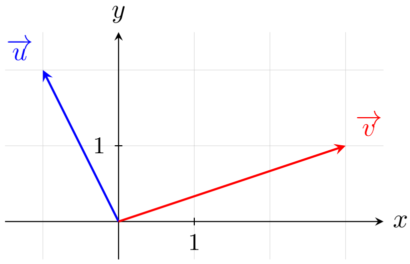
Exercice 3 (6 points) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Calculer la norme $\|\overrightarrow{u}\|$ du vecteur $\overrightarrow{u}$.
3. Calculer le vecteur $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.
4. Soit θ l'angle non-orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. θ est-il aigu, droit ou obtus ? Justifier.

Solution:

1. **(2 points)**



2. **(1 points)** La norme $\|\overrightarrow{u}\|$ du vecteur $\overrightarrow{u}$ vaut

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

3. **(1 points)** On a

$$\overrightarrow{w} = 2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times(-1)-3\\2\times 2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}.$$

4. **(2 points)** Le produit scalaire entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vaut

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = (-1)\times 3 + 2\times 1 = -1.$$

Comme $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} < 0$, l'angle θ non-orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est obtus.

Exercice 4 (4 points) Soient x et y deux nombres réels.

1. Simplifier l'expression

$$A = \frac{1}{3} - \frac{4}{8}.$$

2. Donner les valeurs de x et de y pour lesquelles l'expression

$$B = \frac{\frac{\sqrt{x}}{y^2}}{y^2}.$$

est définie. Simplifier l'expression de B.

Solution:

1. **(1 points)** On a

$$A = \frac{1}{3} - \frac{4}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}.$$

2. **(3 points)** L'expression B est bien définie quand $\sqrt{x}$ est bien défini et que $y^2 \neq 0$, ainsi B est bien définie quand $x \geq 0$ et $y \neq 0$. Dans ce cas,

$$B = \frac{\frac{\sqrt{x}}{y^2}}{y^2} = \frac{\sqrt{x}}{y^2}\times\frac{1}{y^2} = \frac{\sqrt{x}}{y^4}.$$