Содержание

I Теоремы

1. Теорема о свойствах неопределённого интеграла

Теорема 1. *Пусть F — первообразная f на $\langle a, b\rangle$. Тогда:*

1. *$\forall C \in \mathbb{R} \quad F + C$ — тоже первообразная,*
2. *Если G — ещё одна первообразная f на $\langle a, b\rangle$, то $G - F = C \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Тривиально:

1. $(F + C)' = F' = f$,
2. $(G - F)' = 0 \Rightarrow G - F = C \in \mathbb{R}$ (так как $G - F$ возрастает и убывает одновременно).

□

Теорема 2. *Пусть f и g имеют первообразные на $\langle a, b\rangle$. Тогда:*

1. $\int (f+g) = \int f + \int g, \quad$ *для всех* $\alpha \in \mathbb{R} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f,$
2. *Пусть $\varphi\colon \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифференцируема. Тогда*
$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C,$$
3. $\int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C \quad$ *для всех* $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0,$
4. *Пусть f, g дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$ и пусть $f'g$ имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда fg' тоже имеет первообразную, и*
$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Доказательство. Для доказательства первых трёх свойств возьмём производную от обеих частей и увидим, что получилось одно и то же. Доказательство четвёртого свойства:
$$\left(fg - \int f'g\right)' = f'g + fg' - f'g = fg'.$$

□

Замечание (ко второму свойству). Пусть $x = \varphi(t)$ обратима, $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда
$$F(x) = \int f(x)dx = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Big|_{t:=\varphi^{-1}(x)}.$$

2. Лемма об ускоренной сходимости

Лемма. *Пусть* $f, g\colon D \subset X \to \mathbb{R}$, *$a$ — предельная точка D. Пусть также* $\exists U(a) \mid \forall x \in \dot{U}(a)\ f(x) \neq 0,\ g(x) \neq 0$ *и*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0. \tag{1}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall (x_n) : x_n &\to a, & \exists (y_n) : y_n &\to a, \\ x_n &\in D, & y_n &\in D, \\ x_n &\neq a & y_n &\neq a \end{aligned}$$

$$\text{такая, что } \lim_{n\to+\infty} \frac{g(y_n)}{g(x_n)} = 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n)}{g(x_n)} = 0.$$

Доказательство. Будем искать (y_n) как подпоследовательность (x_n): зафиксируем n и выберем в качестве y_n такое x_k, что

$$\left| \frac{g(x_k)}{g(x_n)} < \frac{1}{n} \right|,\ \left| \frac{f(x_k)}{g(x_n)} < \frac{1}{n} \right|.$$

В силу условия (1) такое x_k найдётся для всех n. □

Замечание. Если условие (1) заменить на

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = +\infty,$$

лемма останется верна.

Доказательство (авторское). Члены (y_n) опять будем искать в (x_n): зафиксируем n и положим $y_n = x_n$. Будем искать такое x_{n+p}, что

$$\left| \frac{g(x_n)}{g(x_{n+p})} < \frac{1}{n} \right|,\ \left| \frac{f(x_n)}{g(x_{n+p})} < \frac{1}{n} \right|.$$

После этого положим $y_{n+p} = y_{n+p-1} = \ldots = y_n = x_n$ и проделаем то же самое с y_{n+1}. □

3. Правило Лопиталя

Теорема. *Пусть* $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, *$f, g$ дифференцируемы на (a, b), где $a \in \overline{\mathbb{R}}$, и $g' \neq 0$ на (a, b). Пусть также*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right],\ \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и равен* L.

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ постоянного знака $\Rightarrow g$ монотонна.
Рассмотрим $(x_n) \mid x_n \to a,\ x_n \in (a,b)$ и проверим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$.
Для (x_n) построим (y_n) из **леммы об ускоренной сходимости**. По теореме Коши $\exists c_n \in (x_n, y_n)$ такое, что

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{g(x_n) - g(y_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Выразим отсюда $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(y_n)}{g(x_n)} + \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \left(1 - \frac{g(y_n)}{g(x_n)}\right).$$

В силу леммы об ускоренной сходимости $\dfrac{f(y_n)}{g(x_n)} \to 0$, $\dfrac{g(y_n)}{g(x_n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$. $\square$

4. «Теорема Гаусса»

Теорема.

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.
Запишем следующие выражения:

$$\left(x\frac{d}{dx}\right) f(x) = x + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^n,$$
$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = x + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^n,$$
$$\vdots$$
$$g(x) := \left(x\frac{d}{dx}\right)^k f(x) = 1^kx + 2^kx + 3^kx^2 + \ldots + n^kx^n.$$

ДОДЕЛАТЬ $\square$

5. Пример неаналитической функции

Пример. Приведём пример функции, которая не везде совпадает со своим разложением по Тейлору. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $f^{(k)}(0) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, ряд Тейлора этой функций при $x \to 0$ тождественно равны нулю. Однако, для любого $\varepsilon > 0$ в окрестности $U_\varepsilon(a)$ найдутся точки, в которых функция отлична от 0. Таким образом, эта функция не являются в точке 0 аналитическими.

Доказательство. Сначала рассмотрим $k = 1$ и проверим, существует ли производная в точке 0. Вычислим правую производную:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x^2}{e^{\frac{1}{x}}} \xlongequal[\text{правило Лопиталя}]{} \lim_{x\to 0+0} \frac{-2/x^3}{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1/x^2)} =$$
$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{2/x}{e^{\frac{1}{x}}} \xlongequal[\text{опять правило Лопиталя}]{} \lim_{x\to 0+0} \frac{-2/x^2}{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1/x^2)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

Аналогично $f'_-(0) = 0$. Теперь проверим, что для всех $k \in \mathbb{N}$ $f_+^{(k)}(0) = 0$ (равенство левой производной нулю проверяется аналогичным образом).

Легко видеть, что при $x > 0$ $f^{(k)} = P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$, где P — многочлен от $\frac{1}{x}$. Тогда достаточно проверить, что каждое слагаемое итогового выражения равно нулю:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x^n}\, e^{-\frac{1}{x}} = \left(\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{nx}}\right)^n.$$

Тогда рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{e^{\frac{1}{nx}}} \xlongequal[\text{снова правило Лопиталя}]{} \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x^2}{e^{\frac{1}{nx}} \cdot (-1/nx^2)} = 0.$$

И всё... $\square$

6. Теорема Штольца

Лемма (о смешной сумме)**.** *Пусть* $a, b, c, d, m, M > 0$, *пусть также*

$$m < \frac{a}{b} < M,$$
$$m < \frac{c}{d} < M.$$

Тогда $m < \dfrac{a+c}{b+d} < M$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{cases} mb < a < Mb \\ md < c < Md. \end{cases}$$

Сложим неравенства, разделим все части на $b + d$ и получим, что требовалось. □

Теорема. *Пусть* $(x_n), (y_n)$ — *вещественные последовательности,* $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, *причём* y_n *стремится монотонно. Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}^1.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

Доказательство. Рассмотрим различные значения a:

1. Пусть $0 < a < +\infty$ и, НУО[2], $x_n,\ y_n > 0$. Имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ (можно считать, что } \varepsilon < a) \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall N > N_\varepsilon \quad \forall n > N \ldots$$

$$\begin{aligned} \ldots a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon, \\ a - \varepsilon < \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < a + \varepsilon, \\ \ldots \\ a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Смешно сложим дроби и заметим, что сумма выходит телескопической. Получившееся неравенство будет иметь такой вид:

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon.$$

---

[1]Если $a = 0$, требуем, чтобы x_n тоже стремилось к нулю монотонно.

[2]Так как $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to a > 0$, по теореме о стабилизации знака $\exists K\ \forall N > K \ldots$ $\ldots \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 0$. В силу монотонности (y_n), (x_n) тоже монотонна, причём одинаково с y_n. А так как последовательности стремятся к нулю, с какого-то момента они имеют одинаковый знак. Если $x_n < 0$ и $y_n < 0$, сменим у обеих знак — их предела это не изменит.

Выполним предельный переход при $n \to \infty$. По условию $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, значит, имеем

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon.$$

Читаем цветной текст и видим определение предела.

2. Пусть теперь $-\infty < a < 0$. Это значит, что, НСНМ, либо $x_n > 0$ и $y_n < 0$, либо $x_n < 0$ и $y_n > 0$. Сменим знак отрицательной последовательности — она по-прежнему будет стремиться к нулю, а дробь $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ свой знак сменит (соответственно, a тоже). Таким образом, мы переходим к случаю 1.

3. Случай $a = +\infty$ аналогичен первому. Действительно, имеем

$$\forall E > 0 \quad \exists N_E \quad \forall N > N_E \quad \forall n > N \dots$$

$$\begin{aligned} \dots E &< \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \\ E &< \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \\ &\dots \\ E &< \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}. \end{aligned}$$

Опять смешно складываем дроби, выполняем предельный переход и получаем определение предела.

4. Случай $a = -\infty$ аналогичен третьему.

5. Пусть теперь $a = 0$. Так как в первой сноске мы дополнительно потребовали монотонность (x_n), можем говорить, что $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ стремится к нулю слева или справа. «Перевернём» её, поменяв числитель и знаменатель местами, и попадём либо в случай 3, либо в случай 4.

Итак, теорема доказана для всех значений a из $\overline{\mathbb{R}}$. $\square$

7. *Интегрирование неравенств, теорема о среднем*

Теорема 1. *Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$. Тогда если $f \leqslant g$, то*

$$\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g.$$

Доказательство. По определению

$$\int_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a,b])),$$
$$\int_a^b g = \sigma(\Pi\Gamma(g^+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(g^-, [a,b])).$$

Поскольку $f \leqslant g$, то $\Pi\Gamma(f^+, [a,b]) \subseteq \Pi\Gamma(g^+, [a,b])$. А значит, $\sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a,b])) \leqslant \sigma(\Pi\Gamma(g^+, [a,b]))$. С отрицательной срезкой наоборот, но в силу того, что её ослабленная площадь σ вычитается, неравенство остаётся справедливым. □

Теорема 2. *Пусть f непрерывны на $[a, b]$. Тогда*

$$\min(f) \cdot (b-a) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant \max(f) \cdot (b-a).$$[3]

Доказательство. Заметим, что, так как $\min(f)$ — константа,

$$\int\limits_a^b \min(f) = \min(f) \cdot (b-a).$$

Аналогично для $\max(f)$. Тогда проинтегрируем неравенство $\min(f) \leqslant f \leqslant \max(f)$ по $[a, b]$:

$$\int_a^b \min(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b \max(f)$$
$$\min(f) \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant \max(f) \cdot (b-a).$$

□

[3] В данной теореме обсуждаются минимум и максимум f на промежутке $[a, b]$.

8. Теорема Барроу

Теорема. *Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Введём на $[a,b]$ функцию Φ*[4]*:*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f.$$

Тогда Φ дифференцируема на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство (полуавторское). Если $x \neq b$, вычислим Φ'_+:

$$\Phi'_+ = \lim_{y\to x+0} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim_{y\to x+0} \frac{1}{y-x} \cdot \int_x^y f.$$

По теореме о среднем имеем:

$$\min_{[x,y]}(f) \leqslant \frac{1}{y-x} \cdot \int_x^y f \leqslant \max_{[x,y]}(f).$$

Теперь перейдём к пределу:

$$\lim_{y\to x+0} \min_{[x,y]}(f) = f(x) \leqslant \lim_{y\to x+0} \frac{1}{y-x} \cdot \int_x^y f \leqslant \lim_{y\to x+0} \max_{[x,y]}(f) = f(x).$$

Выходит, $\Phi'_+ = f$. Аналогично для левой производной при $x \neq a$. $\square$

9. *Формула Ньютона – Лейбница*

Теорема. *Пусть f непрерывна на $[a,b]$, F — первообразная f на $[a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Введём интеграл с переменным верхним пределом Φ. По теореме Барроу $\Phi'(x) = f(x)$ для любого x из $[a,b]$. Заметим, что $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$, а также что $\Phi(a) = 0$. Тогда имеем:

$$\int\limits_a^b f = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b) - F(a).$$

$\square$

[4] Функция Φ называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Замечание 1. Выходит, что определённый интеграл не зависит от выбора ослабленной площади σ.

Замечание 2. Приращение $F(b) - F(a)$ первообразной обычно записывают в виде $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ или в краткой форме $F(x\Big|_a^b$.

10. Свойства определённого интеграла

Теорема. *Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:*

1. $\displaystyle\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g,$

2. *Если к тому же f, g дифференцируемы на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g,$$

3. *Пусть $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \langle a, b \rangle$ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta \rangle$, пусть также $[p, q] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда*

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx.$$

Доказательство. Докажем свойства по отдельности:

1. Следует из того, что если F, G — первообразные f, g соответственно, то $\alpha F + \beta G$ — первообразная $\alpha f + \beta g$.

2. Имеем:

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$
$$\int_a^b fg' + \int_a^b f'g = fg\Big|_a^b$$
$$\int_a^b (fg' + f'g) = fg\Big|_a^b$$

Последнее равенство очевидно.

3. Пусть F — первообразная функции f на $[a,b]$. Так как $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi(t) = f(\varphi(t))\varphi(t)$, то $F(\varphi(t))$ — первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\langle\alpha,\beta\rangle$. Дважды использую формулу Ньютона – Лейбница, получим нужное равенство:

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(t)) =$$

$$= F(x)\Big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx.$$

□

11. Неравенство Чебышёва

Теорема. *Пусть f, g непрерывны на $[a,b]$ и монотонны, причём одинаково монотонны. Пусть I_f — **среднее значение** функции f. Тогда*

$$I_f \cdot I_g \leqslant I_{fg}.$$

Доказательство. Так как f, g монотонны одинаково, справедливо следующее:

$$\forall x, y \in [a,b] \quad (f(x) - f(y)) \cdot (g(x) - g(y)) \geqslant 0.$$

Раскроем скобки:

$$f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y) \geqslant 0.$$

Проинтегрируем неравенство по x на $[a,b]$:

$$\int_a^b fg - \int_a^b f \cdot g(y) - f(y) \cdot \int_a^b g + (b-a) \cdot f(y)g(y) \geqslant 0$$

и разделим на $b-a$:

$$I_{fg} - I_f \cdot g(y) - f(y) \cdot I_g + f(y)g(y) \geqslant 0.$$

Теперь проинтегрируем по y на том же промежутке и опять разделим на $b-a$:

$$I_{fg} - I_f \cdot I_g - I_f \cdot I_g + I_{fg} \geqslant 0.$$

Приведём подобные и получим требуемый результат. □

12. Иррациональность числа пи

Теорема. *Число пи иррационально.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность (H_n):

$$H_n = \frac{1}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)dt.$$

Нам интересно выразить n-й член последовательности через предыдущие. Сперва проинтегрируем H_n по частям: представим подынтегральное выражение как fg', где $f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n$, а $g' = \cos(t)$. Следовательно, $f' = -2t \cdot n \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1}$, а $g = \sin(t)$. Тогда

$$H_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin(t)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \sin(t)dt.$$

Первое слагаемое зануляется, оставшееся опять проинтегрируем по частям: на этот раз $f = t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1}$, а $g' = \sin(t)$. Следовательно,
$f' = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2t^2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$, а $g = -\cos(t)$. Немного подправим f' — во втором слагаемом вместо множителя t^2 запишем $\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{\pi^2}{4}$, то есть f' примет такой вид:

$$\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2\left(\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{\pi^2}{4}\right)(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2},$$
$$\text{или } \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + 2\left(\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right) - \frac{\pi^2}{4}\right)(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}.$$

Раскроем скобки:

$$\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + 2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2(n-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2},$$

и приведём подобные:

$$(2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - (n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}.$$

Запишем, наконец, результат интегрирования по частям $\left(fg\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right.$ снова занулится, поэтому его писать не будем $\left.\right)$:

$$\begin{aligned}
&H_n = -\frac{2}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}(-\cos(t))dt + \dots \\
&\dots + \frac{2}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}(-\cos(t))dt = \dots \\
&\dots = \frac{4n-2}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\cos(t)dt - \dots \\
&\dots - \frac{\pi^2}{(n-2)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}\cos(t)dt = \dots \\
&\dots = (4n-2)H_{n-1} + \pi^2 H_{n-2}.
\end{aligned}$$

Итак, мы нашли рекуррентную формулу для H_n. Теперь мы можем выразить любой член последовательности, кроме нулевого и первого. Вычислим их непосредственно (при вычислении H_1 придётся два раза проинтегрировать по частям):

$$\begin{aligned}
&H_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)dt = 2, \\
&H_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)\cos(t)dt = \left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)\sin(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2t\sin(t)dt = \dots \\
&\dots = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin(t)dt = -2t\cos(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos(t)dt = 4.
\end{aligned}$$

Используем же, наконец, всё это, чтобы доказать, что π (и даже π^2) иррационально. Заметим, что H_n — многочлен с целыми коэффициентами от π^2, причём степени не больше, чем n. Действительно, чтобы по полученной ранее рекурентной формуле разложить H_n до целых чисел H_0 и H_1, потребуется применить её $n-1$ раз, соответственно π^2 может входить в получившийся в результате разложения многочлен в степени уж точно не больше, чем n. Обозначим этот многочлен как $P_n(\pi^2)$.

Предположим теперь, что π^2 — рациональное число, то есть $\pi^2 = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Заметим, что тогда $q^n P_n(\pi^2)$ — целое число (так как домножением на q^n мы сократили все знаменатели). Мы также знаем, что

$P_n(\pi^2) = H_n > 0$, так как подынтегральная функция в H_n равна нулю в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ и положительна в остальных. Следовательно, $q^n P_n(\pi^2)$ — это как минимум единица. Запишем подробнее:

$$q^n P_n(\pi^2) = q^n H_n = \frac{q^n}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t) dt \geqslant 1.$$

Оценим нашу функцию сверху, пользуясь теоремой о среднем, только для простоты возьмём немного завышенный максимум: $\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right) \leqslant 4$ при любом t из $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Так как $|\cos(t)| \leqslant 1$, подынтегральное выражение не превосходит 4^n, а интеграл как интеграл константы не превосходит $4^n\pi$. Имеем следующее:

$$\frac{q^n}{n!} 4^n \pi \geqslant \frac{q^n}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t) dt \geqslant 1.$$

Так как это справедливо для любого натурального n, устремим его в бесконечность:

$$1 \leqslant \frac{q^n}{n!} 4^n \pi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Получили противоречие. $\square$

13. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Теорема. *Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, функция f дифференцируема $n+1$ раз на $\langle a, b\rangle$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Доказательство. Докажем индукцией по n. База — $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = f(x) - f(x_0).$$

Последнее равенство — формула Ньютона – Лейбница для $f'(x)$.

Индукционный переход от n к $n+1$ осуществляется интегрированием по частям n-го остатка, в результате которого мы получим $(n+1)$-й остаток и очередное слагаемое многочлена Тейлора. Возьмём $f^{(n+1)}(t)$ в качестве f и $(x-t)^n$ в качестве g':

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+1)}(t)\right)\Bigg|_{x_0}^{x} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt.$$

$\square$

14. Лемма о трёх хордах

Теорема. *Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Функция f выпукла на $\langle a,b\rangle$,*
2. *Для любых $x_1, x_2, x_3 \in \langle a,b\rangle$, таких, что $x_1 < x_2 < x_3$, справедливо:*
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Доказательство. Докажем равносильность сначала для левой части двойного неравенства, а потом для правой. Напомним определение выпуклости:

$$f(x) \leqslant \frac{x_3-x}{x_3-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_3-x_1}f(x_3), \quad x \in (x_1,x_3).$$

Подставим в него x_2 и получим

$$f(x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_3),$$

где $t = \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, $1-t = \dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$. Преобразуем неравенство двумя способами. С одной стороны,

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + (1-t)(f(x_3)-f(x_1)) = f(x_1) + (x_2-x_1)\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

что равносильно левой части двойного неравенства. С другой стороны,

$$f(x_2) \leqslant f(x_3) - t(f(x_3) - f(x_1)) = f(x_3) - (x_3 - x_2)\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

что равносильно правой части двойного неравенства. $\square$

15. Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

Теорема (версия Виноградова)**.** *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ существуют конечные $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, причём $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.*

Доказательство. Возьмём $x \in (a, b)$ и положим

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \qquad \xi \in \langle a, b\rangle \setminus \{x\}.$$

По лемме о трёх хордах g возрастает на $\langle a, b\rangle \setminus \{x\}$. Поэтому если $a < \xi < x < \eta < b$, то

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leqslant \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x}.$$

Следовательно, g ограничена на $\langle a, x)$ сверху, а на $(x, b\rangle$ — снизу. По теореме о пределе монотонной функции существуют конечные пределы $g(x-)$ и $g(x+)$, которые по определению являются односторонними производными $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$. Устремляя ξ к x слева, а η к x справа, получаем, что $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$. $\square$

Теорема (версия Кохася)**.** *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ существуют конечные $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, причём $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, где $x_1 < x_2$, справедливо*

$$f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2).$$

Доказательство. Проведём те же самые рассуждения, а потом найдем левую и правую производные в точках x_1, x_2. Получим

$$f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2).$$

Так как $f'_-(x_2)$ — это предел $g(x_2-)$, а $f'_+(x_1)$ — предел $g(x_1+)$, а также из того, что $x_1 < x_2$, очевидно, что

$$f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2).$$

$\square$

16. Описание выпуклости с помощью касательных

Теорема. *Пусть функция f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда график f лежит не ниже любой своей касательной, то есть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$:*

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{$*$}$$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность отдельно.

- $\Rightarrow$ Пусть f выпукла вниз, $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Если $x > x_0$, то по лемме о трёх хордах для любого $\eta \in (x_0, x)$

  $$\frac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0} \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

  Устремляя η к x_0, получаем неравенство

  $$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

  равносильное $(*)$.

  Если $x < x_0$, то по лемме о трёх хордах для любого $\xi \in (x, x_0)$

  $$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

  Устремляя ξ к x_0, получаем неравенство

  $$f'(x_0) \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

  равносильное $(*)$.

- $\Leftarrow$ Пусть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ верно неравенство $(*)$. Возьмём $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle \mid x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. Применяя неравенство $(*)$ дважды: сначала к точкам x_1 и x, а затем — к x_2 и x, получаем

  $$f(x_1) \geqslant f(x) + f'(x)(x_1 - x), \qquad f(x_2) \geqslant f(x) + f'(x)(x_2 - x),$$

  что равносильно

  $$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

  Крайние части составляют неравенство, равносильное неравенству из определения выпуклости. Действительно, домножим обе части на знаменатели, выразим $f(x)$ и получим требуемое неравенство.

$\square$

17. Дифференциальные критерии выпуклости

Теорема. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда:*

1. *Если f дифференцируема на (a, b), то f (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда f' (строго) возрастает на $\langle a, b\rangle$.*

2. *Если f дважды дифференцируема на (a, b), то f выпукла вниз в том и только том случае, когда $f''(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$.*

Доказательство. Докажем критерии по отдельности.

1. Докажем сперва необходимость, а потом достаточность.

   $\Rightarrow$ Возьмём $x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2$. Согласно описанию выпуклости с помощью касательных, имеем
   $$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2). \tag{2}$$
   Действительно, сначала запишем неравенство для касательной в точке x_1 и подставим в него x_2, получив левую часть, а потом запишем неравенство для касательной в точке x_2 и подставим в него x_1, получив правую часть. Но ведь получившееся неравенство и означает возрастание f'.

   $\Leftarrow$ Возьмём $x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2$ и $x \in (x_1, x_2)$. По теореме Лагранжа существуют такие $c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$, что
   $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$
   Тогда $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$, а f' по условию возрастает, поэтому $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, то есть
   $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \tag{3}$$
   что равносильно неравенству из определения выпуклости (аналогично ситуации в доказательстве описания выпуклости с помощью касательных).

   Если f строго выпукла вниз, то оба неравенства в (2) строгие. Обратно, если f' строго возрастает, то неравенство (3) строгое, что влечёт строгую выпуклость f.

2. По пункту 1 выпуклость f равносильна возрастанию f', которое по критерию монотонности равносильно неотрицательности f''.

□

18. *Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности*

Теорема. *Пусть* $\Phi\colon Segm\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *— аддитивная функция промежутка,* $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *— плотность* Φ*. Тогда*

$$\forall [p,q] \in Segm\langle a,b\rangle \quad \Phi([p,q]) = \int_p^q f.$$

Доказательство. Зафиксируем $[p,q] \in Segm\langle a,b\rangle$. Рассмотрим функцию F:

$$F(x) = \begin{cases} \Phi([p,x]), & p < x \leqslant q \\ 0, & x = p. \end{cases}$$

Теперь проверим, что F — первообразная f на $[p,q]$. Имеем:

$$F'_+(x) = \lim_{h\to+0} \frac{\Phi([p,x+h]) - \Phi([p,x])}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{\Phi([x,x+h])}{h}.$$

По определению плотности

$$h \cdot \inf_{[x,x+h]}(f) \leqslant \Phi([x,x+h]) \leqslant h \cdot \sup_{[x,x+h]}(f)$$

$$\inf_{[x,x+h]}(f) \leqslant \frac{\Phi([x,x+h])}{h} \leqslant \sup_{[x,x+h]}(f).$$

По теореме Вейерштрасса инфимум и супремум функции на отрезке достигаются, то есть неравенство равносильно

$$\min_{[x,x+h]}(f) \leqslant \frac{\Phi([x,x+h])}{h} \leqslant \max_{[x,x+h]}(f).$$

Перейдём к пределу при $h \to +0$:

$$f(x) \leqslant F'_+(x) \leqslant f(x).$$

Аналогично $F'_-(x) = f(x)$. Применим формулу Ньютона – Лейбница и получим требуемый результат:

$$\Phi([p,q]) = F(q) - F(p) = \int_p^q f.$$

ДОДЕЛАТЬ ПРО ТЕОРЕМУ О ПРОМЕЖУТОЧНОМ ЗНАЧЕНИИ И КОНЦЫ ПРОМЕЖУТКА □

19. Свойства верхнего и нижнего пределов

Теорема. *Пусть* (x_n) *— вещественная последовательность. Тогда:*

1. $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$,

2. *Если* $(\widetilde{x}_n)$ *— вещественная последовательность, причём для всех* n $x_n \leqslant \widetilde{x}_n$, *то* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$ *и* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$,

3. *Возьмём* $\lambda \geqslant 0$, *тогда* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *и* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$,[5]

4. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} -x_n = -\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} -x_n = -\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$,

5. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \widetilde{x}_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$ *и* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \widetilde{x}_n \geqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$, *где* $(\widetilde{x}_n)$ *— вещественная последовательность,*

6. *Если* (t_n) *— вещественная последовательность, стремящаяся к* $l \in \mathbb{R}$, *то* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + t_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + l$,

7. *Если* (t_n) *— вещественная последовательность, стремящаяся к* $l \in (0, +\infty)$, *то* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} t_n \cdot x_n = l \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство. Докажем эти свойства:

1. Следует из того, что для всех n $z_n \leqslant y_n$,

2. В силу того, что для всех n $y_n \leqslant \widetilde{y}_n$ и $z_n \leqslant \widetilde{z}_n$,

3. Так как для (λx_n) верхняя огибающая имеет вид (λy_n), а нижняя — (λz_n),

4. Обозначим как (y_n^-) верхнюю огибающую $(-x_n)$ и как (z_n^-) — нижнюю. Тогда
$$y_n^- = \sup(-x_n, -x_{n+1}, -x_{n+2}, \ldots).$$
По определению супремума
$$\forall k \geqslant n \quad y_n^- \geqslant -x_k, \text{ то есть } -y_n^- \leqslant x_k.$$
Получается, что $-y_n^- = \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$, что равносильно $y_n^- = -\inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) = -z_n$. Аналогично $z_n^- = -y_n$.

   Перейдём к пределу и получим требуемый результат.

[5]Заметим, что при этом выходит, что $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

5. ДОДЕЛАТЬ
6. По условию $t_n \to l \in \mathbb{R}$, то есть

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n > N_0 \quad l - \varepsilon < t_n < l + \varepsilon.$$

   Прибавим к неравенству x_n:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n > N_0 \quad x_n + l - \varepsilon < x_n + t_n < x_n + l + \varepsilon.$$

   Перейдём к супремуму в неравенстве (супремумом x_n является y_N, где $N_0 < N < n$):

$$y_N + l - \varepsilon < \sup(x_n + t_n, x_{n+1} + t_{n+1}, x_{n+2} + t_{n+2}, \ldots) < y_N + l + \varepsilon.$$

   Устремим N, а значит, и n тоже в бесконечность, а ε — к нулю, и получим нужный результат:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + l \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + t_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + l.$$

7. Без доказательства.

□

20. Техническое описание верхнего предела

Теорема. *Пусть* (x_n) *— вещественная последовательность. Тогда:*

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty \Leftrightarrow (x_n)$ *не ограничена сверху,*
2. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$*,*
3. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = l$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия:*
   (a) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n > N_0 \quad x_n < l + \varepsilon$*,*
   (b) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists$*бесконечно много* $n \quad l - \varepsilon < x_n$*.*

Доказательство. Докажем пункты по отдельности:

1. Очевидно:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \ \exists n \ \ E < y_n.$$

   А так как $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$, выражение выше равносильно тому, что (x_n) не ограничена сверху.

2. $\Rightarrow$ Тоже очевидно:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

В силу того, что для всех n $x_n \leqslant y_n$, $x_n \to -\infty$,

$\Leftarrow$ При $n \to \infty$ справедливо:

$$x_n \to -\infty \Rightarrow \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \to -\infty \Leftrightarrow y_n \to -\infty,$$

что и означает, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. $\Rightarrow$ Имеем, что $y_n \to l$ при $n \to \infty$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n > N_0 \quad l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon.$$

Так как для всех n $x_n \leqslant y_n$, получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n > N_0 \quad x_n < l + \varepsilon,$$

о чём и говорится в пункте (a). Пункт (b) следует из того, что $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ стремится к l.

$\Leftarrow$ Передём к супремуму в имеющихся неравенствах (напомним, что супремумом x_n при $n \to \infty$ является y_N, где $N_0 < N < n$). Получим, что $l - \varepsilon < y_N < l + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ (нижняя граница верна, потому что y_N — супремум обсуждаемого в условии бесконечного множества x_n). Устремим N в бесконечность и получим требуемый результат.

$\square$

21. Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

Теорема. *Пусть (x_n) — вещественная последовательность. Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность по отдельности:

- $\Rightarrow$ Имеем:

  $$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n, \quad \forall n \quad z_n \leqslant x_n \leqslant y_n.$$

  Получается, (x_n) «зажата» между двумя последовательностями с одинаковым пределом, а значит, по теореме о двух городовых она имеет тот же предел.

- $\Leftarrow$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} = l$, то есть

  $$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

  Теперь в неравенстве мы можем перейти к супремуму и получить, что верхний предел равен l, и к инфимуму, получив, что нижний предел равен l.

$\square$

22. Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

Теорема. *Пусть (x_n) — вещественная последовательность. Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l.$$

Доказательство. Предъявим подходящую подпоследовательность (x_{n_k}). По техническому определению предела имеем:

1. $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n > N_0 \quad x_n < l + \varepsilon$,
2. $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists$*бесконечно много* $n \quad l - \varepsilon < x_n$.

Будем выбирать такие x_n, чтобы для них выполнялись оба условия. Так как таких бесконечно много, мы получим подпоследовательность, стремящуюся к l. $\square$

23. Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

Теорема. *Пусть функция $f(\varphi)\colon [0, 2\pi] \to [0, +\infty]$ непрерывна. Назовём криволинейным сектором $[\alpha, \beta]$ (обозначать будем как Сектор(α, β)), где $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$, множество вида $\{(r, \varphi) \mid \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant r \leqslant f(\varphi)\}$. Тогда*

$$\sigma(\text{\textit{Сектор}}(\alpha, \beta)) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi. \tag{4}$$

Доказательство. Проверим, что $\frac{1}{2}f^2$ — плотность аддитивной функции промежутка $\Phi\colon Segm[0, 2\pi] \to [0, +\infty]$, где $\Phi([\alpha, \beta]) = \sigma(\text{Сектор}(\alpha, \beta))$. Тогда по теореме о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности мы могли бы сразу получить нужный результат.

Возьмём промежуток $\Delta \in Segm[0, 2\pi]$. Заметим, что криволинейный сектор Δ можно поместить в круговой сектор Δ с радиусом $\max\limits_{\Delta} f(\varphi)$ (обозначим его как $\text{Сектор}_{\max}(\Delta)$). А в сам криволинейный сектор, в свою очередь, можно поместить круговой сектор с радиусом $\min\limits_{\Delta} f(\varphi)$ (обозначим его как $\text{Сектор}_{\min}(\Delta)$). Минимум и максимум f достигаются по теореме Вейерштрасса, ведь мы рассматриваем непрерывную функцию на отрезке. Так как ослабленная площадь σ монотонна, выполняется неравенство

$$\sigma(\text{Сектор}_{\min}(\Delta)) \leqslant \sigma(\text{Сектор}(\Delta)) \leqslant \sigma(\text{Сектор}_{\max}(\Delta)),$$

то есть

$$\sigma(\text{Сектор}_{\min}(\Delta)) \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant \sigma(\text{Сектор}_{\max}(\Delta)),$$

Из школьной программы (!) знаем, что площадь кругового сектора $[\alpha, \beta]$ с радиусом r равна $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)r^2$. Наше неравенство принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} \cdot |\Delta| \cdot (\min_{\Delta} f(\varphi))^2 \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant \frac{1}{2} \cdot |\Delta| \cdot (\max_{\Delta} f(\varphi))^2.$$

Так как f неотрицательна, квадрат максимума/минимума можно заменить максимумом/минимумом квадрата:

$$|\Delta| \cdot \min_{\Delta} \frac{1}{2} f^2(\varphi) \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant |\Delta| \cdot \max_{\Delta} \frac{1}{2} f^2(\varphi).$$

Получили определение плотности. $\square$

Замечание. Формулу можно приспособить для применения к параметрической кривой.

Прежде заметим, что точка, которая в полярных координатах записывалась как (r, φ), в декартовых будет выглядеть как $(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$, то есть $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$. Также ясно, что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Пусть теперь мы имеем функции $x(t)$ и $y(t)$, задающие кривую. Тогда имеем $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ и $\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)}$. То есть, зная, как параметрически задаётся кривая в декартовых координатах, мы можем задать её параметрически уже в полярных координатах.

Возьмём имеющуюся формулу (4) и подставим туда $r(t)$ в качестве f и $\varphi(t)$ в качестве φ. Получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \left(x^2+y^2\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)' dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-x'y}{x^2}dt.$$

После всех сокращений получим следующую формулу:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} y'(t)x(t)-x'(t)y(t)dt.$$

24. Изопериметрическое неравенство

Пример. Пусть $G\subset\mathbb{R}^2$ — замкнутая, ограниченная, выпуклая фигура. Пусть также её диаметр $diam\ G=\sup\left(\rho(x,y)\mid x,y\in G\right)$[6] не превосходит единицы. Тогда $\sigma(G)\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

Доказательство. Заметим, что выпуклую фигуру G можно рассматривать как разность подграфиков функций $y_{\min}$ и $y_{\max}$, которые задаются следующим образом: спроецируем фигуру на ось абсцисс, возьмём точку x из проекции и начнём «двигаться вверх»; ордината первой точки нашей фигуры, на которую мы наткнёмся, будет значением функции $y_{\min}$ в точке x, а последней — значением $y_{\max}$ в точке x (пример на рисунке 1).

Понятно, что $y_{\min}$ выпукла вниз, а $y_{\max}$ — вверх (достаточно посмотреть на надграфик и подграфик соответственно). А значит, в каждой (за исключением, быть может, счётного числа) точке можно провести касательную. Сделаем это, а также проведём в точке касания прямую, перпендикулярную касательной. Эта прямая будет служить осью полярных координат с началом в точке касания. Далее мы будем рассматривать фигуру относительно этой системы координат.

Пусть фигура задаётся функцией $r(\varphi)$ (задание корректно, потому что луч, выходящий из точки начала координат под углом φ, пересекает фигуру всего один раз). Посчитаем её площадь:

$$\sigma(G)=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi.$$

[6] Супремум достигается, так как G — компакт, а ρ непрерывна.

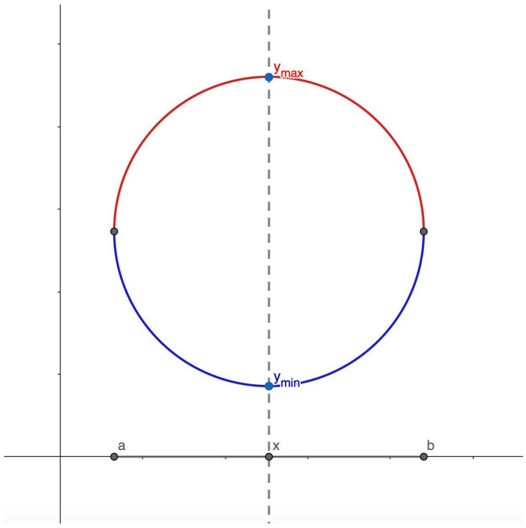

Рис. 1: Продемонстрируем на примере круга

И немного преобразуем нашу формулу:

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r^2(\varphi)d\varphi + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi\right).$$

Сделаем в первом интеграле замену переменных: пускай теперь $\varphi = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$. Пределы интегрирования изменятся соответственно на 0 и $\dfrac{\pi}{2}$. Получим следующее:

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)d\alpha + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi\right).$$

Букву α, кстати, можно заменить обратно на φ, потому что это всего лишь название переменной:

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)d\varphi + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi\right).$$

Объединим интегралы в один:

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + r^2(\varphi)d\varphi.$$

Попробуем теперь оценить площадь G. Для этого сделаем *фокус*: из начала координат проведём луч под каким-нибудь углом φ, а потом проведём перпендикулярный ему луч под углом $\varphi - \dfrac{\pi}{2}$.

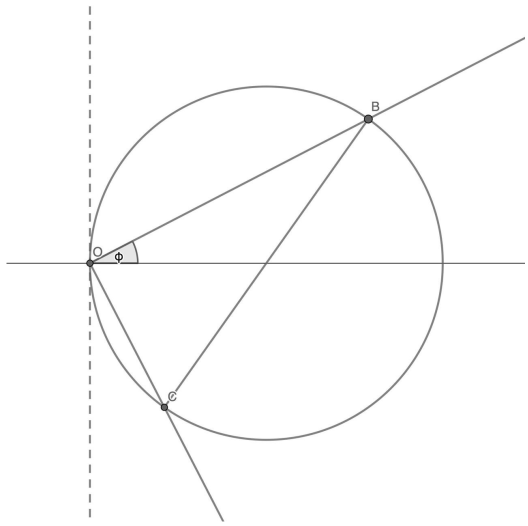

Рис. 2: Фокус

Тогда то, что на рисунке отмечено как OB, это не что иное, как $r(\varphi)$, а OC — это $r\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$. Но ведь OB и OC — катеты прямоугольного треугольника, а значит $OB^2 + OC^2 = BC^2$. А так как $BC \leqslant diam\ G \leqslant 1$, то и $r^2(\varphi) + r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1$. А это, в свою очередь, значит, что

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + r^2(\varphi)d\varphi \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

ДОДЕЛАТЬ ПРО ПОЧТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ (И МБ ПРО ВЫПУКЛЫЙ ПОДГРАФИК) $\square$

25. Обобщённая теорема о плотности

Теорема. *Пусть* $\Phi\colon Segm\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *— аддитивная функция промежутка, функция* $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *непрерывна. Возьмём произвольный отрезок* $\Delta \in Segm\langle a,b\rangle$ *и введём следующие обозначения:* $m_\Delta \leqslant \inf\limits_{x\in\Delta} f(x)$ *и* $M_\Delta \geqslant \sup\limits_{x\in\Delta} f(x)$*. Тогда если выполняются следующие условия:*

1. $m_\Delta|\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant M_\Delta|\Delta|$,

2. $\forall x \in \Delta \quad m_\Delta \leqslant f(x) \leqslant M_\Delta$,

3. $\forall \Delta \mid |\Delta| \to 0 \quad M_\Delta - m_\Delta \to 0$[7],

то f — плотность функции Φ, то есть

$$\forall [p,q] \in Segm\langle a,b\rangle \qquad \Phi([p,q]) = \int\limits_p^q f.$$

Доказательство. Доказательство (как и теорема) очень-очень похоже на доказательство теоремы о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности.

Зафиксируем $[p,q] \in Segm\langle a,b\rangle$. Рассмотрим функцию F:

$$F(x) = \begin{cases} \Phi([p,x]), & p < x \leqslant q \\ 0, & x = p. \end{cases}$$

Теперь проверим, что F — первообразная f на $[p,q]$. Имеем:

$$F'_+(x) = \lim_{h\to+0} \frac{\Phi([p,x+h]) - \Phi([p,x])}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{\Phi([x,x+h])}{h}.$$

Согласно пункту 1, $|\Delta|\cdot m_\Delta \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant |\Delta|\cdot M_\Delta$, то есть $m_\Delta \leqslant \dfrac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant M_\Delta$, или

$$m_{[x,x+h]} \leqslant \frac{\Phi([x,x+h])}{h} \leqslant M_{[x,x+h]}. \tag{5}$$

Согласно пункту 2, для всех x из Δ справедливо $m_\Delta \leqslant f(x) \leqslant M_\Delta$, то есть $m_{[x,x+h]} \leqslant f(x) \leqslant M_{[x,x+h]}$, или $-M_{[x,x+h]} \leqslant -f(x) \leqslant -m_{[x,x+h]}$. Сложим это неравенство с неравенством (5):

$$m_{[x,x+h]} - M_{[x,x+h]} \leqslant \frac{\Phi([x,x+h])}{h} - f(x) \leqslant M_{[x,x+h]} - m_{[x,x+h]},$$

Наконец, согласно пункту 3, для любого $\Delta \to [x,x]$ справедливо, что $M_\Delta - m_\Delta \to 0$, то есть мы можем перейти к пределу:

$$\lim_{h\to0} m_{[x,x+h]} - M_{[x,x+h]} \leqslant \lim_{h\to0} \frac{\Phi([x,x+h])}{h} - f(x) \leqslant \lim_{h\to0} M_{[x,x+h]} - m_{[x,x+h]}.$$

То есть $F'_+(x) \to f(x)$ при $h \to 0$.

Аналогично $F'_-(x) = f(x)$. Применим формулу Ньютона – Лейбница и получим требуемый результат:

$$\Phi([p,q]) = F(q) - F(p) = \int_p^q f.$$

□

[7] То есть в контексте теоремы m_Δ — это слегка заниженный инфимум f, а M_Δ — слегка завышенный супремум f.

26. Объём фигур вращения

Теорема. *ДОДЕЛАТЬ*

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ □

27. Вычисление длины гладкого пути

Теорема. *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий путь, причём инъективный. Тогда*

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt.$$

Доказательство. Зафиксируем $\Delta \in Segm[a,b]$ и рассмотрим функцию Φ, такую, что $\Phi(\Delta) = l(\gamma|_\Delta)$. Заметим, что согласно аксиоме 2 Φ — аддитивная функция промежутка. Тогда если мы докажем, что функция $||\gamma'||$ — плотность Φ, то, применив **обобщённую теорему о плотности**, мы докажем нашу теорему.

Для этого мы должны проверить три условия из теоремы. Сделаем это: для начала нужно предъявить слегка заниженный инфимум (минимум) m_Δ и слегка завышенный супремум (максимум) M_Δ. Введём следующие обозначения:

$$m_{i\Delta} = \min_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|, \qquad M_{i\Delta} = \max_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|,$$

$$m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_{i\Delta}^2}, \qquad M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_{i\Delta}^2},$$

где $i \in 1 : m$.[8] Теперь начнём проверять необходимые условия:

1. Проверим справедливость верхней границы, справедливость нижней проверяется аналогичным образом. Введём $\widetilde{\gamma}\colon \Delta \to \mathbb{R}^m$, такой, что $\widetilde{\gamma}(t) = (M_{1\Delta} \cdot t, M_{2\Delta} \cdot t, \ldots, M_{m\Delta} \cdot t)$. Тогда $C_{\gamma|_\Delta}$ и $C_{\widetilde{\gamma}}$ — носители наших путей. Рассмотрим отображение $T\colon C_{\gamma|_\Delta} \to C_{\widetilde{\gamma}}$, которое переводит $\gamma(t)$ в $\widetilde{\gamma}(t)$. Проверим, что это растяжение: для любых $t_0, t_1 \in \Delta$ справедливо

$$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} = \ldots$$

[8]Минимум и максимум достигаются по теореме Вейерштрасса, так как функция $|\gamma_i'(t)|$ непрерывна как композиция непрерывных функций, а рассматриваем мы её на отрезке.

Заметим, что по теореме Лагранжа

$$\gamma_i(t_0)-\gamma_i(t_1) = \frac{\gamma_i(t_0)-\gamma_i(t_1)}{t_0-t_1}(t_0-t_1) = \gamma_i'(c_i)\cdot(t_0-t_1), \text{ где } c_i \in (t_0,t_1).$$

Продолжим:

$$\ldots = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\gamma_i'(c_i)\cdot(t_0-t_1))^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(M_{i\Delta}(t_0-t_1))^2} = \rho(\widetilde{\gamma}(t_0),\widetilde{\gamma}(t_1)).$$

Мы доказали, что T — растяжение, а сейчас нам полезно записать результат немного иным образом: для любых $t_0, t_1 \in \Delta$ справедливо

$$\rho(\gamma(t_0),\gamma(t_1)) \leqslant \rho(\widetilde{\gamma}(t_0),\widetilde{\gamma}(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(M_{i\Delta}(t_0-t_1))^2} = M_\Delta|t_0-t_1|.$$

Теперь мы можем выбрать любое дробление отрезка Δ — пусть $\eta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ — и записать для него следующее неравенство:

$$\sum_{i=0}^{n}\rho(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1})) \leqslant \sum_{i=0}^{n} M_\Delta|t_i-t_{i+1}| = M_\Delta\sum_{i=0}^{n}|t_i-t_{i+1}|.$$

Если перейти к пределу при ранге дробления, стремящемся к нулю, неравенство выглядит так:

$$\Phi(\Delta) \leqslant M_\Delta|\Delta|,$$

а это как раз то, что мы хотели получить.

2. Очевидно следует из определения введённых нами m_Δ и M_Δ: при всех $t \in \Delta$
$$m_\Delta \leqslant ||\gamma'(t)|| \leqslant M_\Delta.$$

3. Так как при $|\Delta| \to 0$ $\max\limits_{t\in\Delta}|\gamma_i'(t)| - \min\limits_{t\in\Delta}|\gamma_i'(t)| \to 0$ для всех $i \in 1:m$, то и $M_\Delta - m_\Delta \to 0$.

$\square$

28. Теорема о функциях ограниченной вариации

Теорема. *Пусть* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — ***функция ограниченной вариации***. *Тогда существуют монотонные функции* $p, q\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *такие, что для всех* $x \in [a,b]$ $f(x) = p(x) - q(x)$.

Доказательство. Возьмём такие $p(x), q(x)$, что

$$2 \cdot p(x) = \bigvee_a^x f + (f(x) - f(a)),$$
$$2 \cdot q(x) = \bigvee_a^x f - (f(x) - f(a)).$$

Тогда имеем равенство $f(x) - f(a) = p(x) - q(x)$. В принципе, это нам подходит, потому что $f(a)$ — константа, и мы можем прибавить её к $p(x)$ или $q(x)$, чтобы получить нужное равенство.

Проверим теперь, что p и q возрастают, то есть что $\bigvee_a^x f$ растёт быстрее, чем $f(x)$. Пусть $x < y$, запишем

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \bigvee_x^y f.$$

Заметим, что функция Φ, переводящая $[u,v]$ в $\bigvee_u^v f$, является аддитивной функцией промежутка (ДОДЕЛАТЬ). Тогда

$$2 \cdot p(y) - 2 \cdot p(x) = \bigvee_x^y f + f(y) - f(x) \geqslant 0, \quad \text{то есть} \quad p(y) \geqslant p(x),$$
$$2 \cdot q(y) - 2 \cdot q(x) = \bigvee_x^y f + f(x) - f(y) \geqslant 0, \quad \text{то есть} \quad q(y) \geqslant q(x).$$

Ну, вот и всё...

И, *кстати*, $p(x) + q(x) = \bigvee_a^x f$. □

29. *Интеграл как предел интегральных сумм*

Теорема. *Пусть функция* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^n \mid \textit{ранг } \tau < \delta \quad \forall \textit{оснащения } \{\xi_i\}_{i=1}^n \ldots$$
$$\ldots \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как f непрерывна на отрезке, по теореме Кантора она равномерна непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \mid |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Зафиксируем ε и подберём соответствующее δ. Возьмём дробление τ, ранг которого меньше δ.

Теперь немного поработаем над нашими интегралом и суммой. Представим интеграл как сумму интегралов по отрезкам $[x_{i-1}, x_i]$, а слагаемые интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ представим как интегралы константы $f(\xi_i)$ по промежутку $[x_{i-1}, x_i]$. Получим следующее:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i) - f(x)dx.$$

То есть имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i) - f(x)dx \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(\xi_i) - f(x)|\, dx \leqslant \ldots$$

Так как мы подобрали дробление с таким рангом, что для всех $x \in [x_{i-1}, x_i]$ и для любого оснащения $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ $|f(\xi_i) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, можем продолжить цепочку неравенств:

$$\ldots \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon.$$

□

30. Теорема об интегральных суммах центральных прямоугольников и трапеций

Теорема. *Пусть $f \in C^2[a,b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ — дробление отрезка $[a,b]$ с рангом δ. Выберем оснащение $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$, где $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leqslant \frac{\delta^2}{8} \int\limits_a^b |f''(x)|dx, \tag{6}$$

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) \right| \leqslant \frac{\delta^2}{8} \int\limits_a^b |f''(x)|dx. \tag{7}$$

Доказательство неравенства (7). Рассмотрим интеграл на отрезке дробления и преобразуем его:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)d(x-\xi_i) = \ldots$$

Проинтегрируем его по частям:

$$\ldots = f(x)(x-\xi_i)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x-\xi_i)dx = \ldots$$

Воспоминаем, что $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$:

$$\ldots = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x-\xi_i)dx = \ldots$$

Введём функцию $\psi(x) = (x_i - x)(x - x_{i-1})$ и рассмотрим её производную $\psi'(x) = -(x - x_{i-1}) + (x_i - x) = -2x + x_{i-1} + x_i$. Заметим, что $-\dfrac{1}{2}\psi'(x) = x - \xi_i$. Тогда продолжим:

$$\ldots = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\cdot\psi'(x)dx = \ldots$$

Опять проинтегрируем по частям:

$$\begin{gathered}\ldots = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) + \ldots \\ \ldots + \frac{f'(x)\cdot\psi(x)}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\cdot\psi(x)dx = \ldots \\ \ldots = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\cdot\psi(x)dx\end{gathered}$$

Начнём разбираться с нашим неравенством:

$$\left|\int\limits_a^b f - \sum_{i=1}^n \textit{слагаемое}_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f - \sum_{i=1}^n \textit{слагаемое}_i\right| = \ldots$$
$$\ldots = \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f - \textit{слагаемое}_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f - \textit{слагаемое}_i\right|.$$

Воспользуемся нашими наработками:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})-\frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\cdot\psi(x)dx-\textit{слагаемое}_i\right|=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\cdot\psi(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f''(x)\cdot\psi(x)\right|dx=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{2}\int_a^b\left|f''(x)\cdot\psi(x)\right|dx.$$

Теперь оценим $\psi(x)$. Рассмотрим $\psi(\xi_i)=(x_i-\xi_i)(\xi_i-x_{i-1})$:

$$\psi(\xi_i)=\left(x_i-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}-x_{i-1}\right)=\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\right)^2.$$

Так как ранг дробления τ равен δ, справедливо:

$$\psi(\xi_i)\leqslant\frac{\delta^2}{4}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\int_a^b\left|f''(x)\cdot\psi(x)\right|dx\leqslant\frac{\delta^2}{8}\int_a^b\left|f''(x)\right|dx.$$

$\square$

31. Формула Эйлера – Маклорена, асимптотика степенных сумм

Теорема. *Пусть $f\in C^2[m,n]$, где $m,n\in\mathbb{Z}$. Тогда*

$$\int\limits_m^n f(x)dx=\sum_{i=m}^{n} f(i)-\frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})dx,$$

причём *первое и последнее слагаемые в сумме $\sum\limits_{i=m}^{n} f(i)$ входят в неё с весом $\frac{1}{2}$.*

Доказательство. В процессе доказательства формулы трапеций мы установили (сразу перед итоговой оценкой через δ), что

$$\int\limits_a^b f(x)dx-\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})=-\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\cdot\psi(x)dx$$

(у правой части здесь опять появляется минус, который в прошлой теореме был съеден модулем). Выберем дробление на отрезки вида $[i-1, i]$, где $i \in (m+1) : n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{f(i-1)+f(i)}{2} = \dots$$

$$\dots = \frac{f(m)}{2} + \frac{f(m+1)}{2} + \frac{f(m+1)}{2} + \dots + \frac{f(n-1)}{2} + \frac{f(n)}{2} = \sum_{i=m}^{n} f(i),$$

причём первое и последнее слагаемые входят в сумму с весом $\frac{1}{2}$, как нам и нужно.

Теперь вспомним, что $\psi(x) = (x_i - x)(x - x_{i-1})$. Так как в нашем случае x_i и x_{i-1} — это соседние целые числа, получаем как раз $\psi(x) = \{x\}(1-\{x\})$. Теорема доказана, осталось только всё красиво записать. $\square$

Пример.

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^p}{2} + \frac{n^{p+1}}{p+1} + O(\max(1, n^{p-1})) \text{ при } p > -1.$$

Доказательство. Рассмотрим $f(x) = x^p$. По формуле Эйлера – Маклорена

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx.$$

Возьмём интеграл x^p:

$$\int_1^n x^p dx = \frac{n^{p+1}-1}{p+1}$$

и оценим второй интеграл:

$$0 \leqslant \int_1^n x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx \leqslant \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n^{p-1}-1}{p-1}\right).$$

Справедливость нижней границы очевидна, так как мы рассматриваем положительные x, а справедливость верхней следует из того, что максимум функции $\{x\}(1-\{x\})$ достигается в точке $x = \frac{1}{2}$, так как это, как говорилось выше, лишь частный случай функции $\psi(x) = (x_i - x)(x - x_{i-1})$, где x_i и x_{i-1} — соседние целые числа.

Понятно, что при при $p > 1$ правая часть превращается в $O(n^{p-1})$, а при $-1 < p < 1$ — в $O(1)$, тогда наш интеграл — $O(\max(1, n^{p-1}))$. Отметим, что при $p = 1$, рассуждения заканчиваются в самом начале, так как $\frac{p(p-1)}{2} = 0$. Закинем под O все имеющиеся константы и получим, что нужно. $\square$

32. Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

Пример.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1) \text{ при } \gamma\in\left[\frac{4}{8},\frac{5}{8}\right].$$

Доказательство. Рассмотрим $f(x)=\dfrac{1}{x}$. По формуле Эйлера – Маклорена

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\int_1^n\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\int_1^n\frac{1}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx.$$

Как и в прошлый раз, возьмём интеграл $\dfrac{1}{x}$:

$$\int_1^n\frac{1}{x}dx=\ln n.$$

Заметим, что второй интеграл возрастает при увеличении n (подынтегральное выражение положительно, а промежуток интегрирование увеличивается) и оценим его:

$$0\leqslant\int_1^n\frac{1}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx\leqslant\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\leqslant\frac{1}{8}.$$

Так как имеющаяся у нас $\dfrac{1}{2n}$ стремится к нулю при $n\to\infty$, получаем:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1).$$

В константу γ мы записали $\dfrac{1}{2}$ и значение интеграла, то есть $\gamma\in\left[\dfrac{4}{8},\dfrac{5}{8}\right]$, а $o(1)$ — это $\dfrac{1}{2n}$, стремящаяся к нулю при $n\to\infty$. □

Замечание. Константа γ называется *постоянной Эйлера* и равняется примерно $0,577\ldots$

33. Формула Валлиса

Лемма. *Если $n\in\mathbb{Z}_+$, то*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } n \text{ чётно,}\\ 1, & \text{если } n \text{ нечётно.}\end{cases}$$

Доказательство. Обозначим $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. Легко проверить, что $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. При $n-1 \in \mathbb{N}$ проинтегрируем по частям:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d(-\cos x) = -\sin^{n-1} x\,\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\ + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\cos^2 x\,dx.$$

Учтём, что двойная подстановка обнуляется, и применим формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$):

$$I_n = (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\right) = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Выражая I_n, получим рекуррентное соотношение

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Теперь, применив его несколько раз, мы можем выразить I_n через I_0, если n чётно, или через I_1, если n нечётно. Чётность/нечётность числителя и знаменателя будет сохраняться. $\square$

Теорема.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Доказательство. При всех $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $0 < \sin x < 1$, поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

а тогда и

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}.$$

Применяя лемму, получаем двойное неравенство

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

что равносильно

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Обозначим $x_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$. Двойное неравенство принимает вид

$$\frac{n}{2n+1}x_n < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x_n.$$

Из правой части получаем, что $\pi < x_n$, из левой — что $x_n < \dfrac{2n+1}{2n}\pi$. Отсюда имеем $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$. □

34. *Формула Стирлинга*

Теорема.

$$n! \sim n^n\, e^{-n}\sqrt{2\pi n} \ \ \textit{при}\ n \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим $f(x) = \ln x$. По формуле Эйлера – Маклорена

$$\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \int_1^n \ln x\,dx + \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{2}\int_1^n \frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})\,dx.$$

Интегрированием по частям находим $\displaystyle\int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - n + 1$. Заметим, что второй интеграл возрастает с увеличением n и оценим его:

$$0 \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})\,dx \leqslant \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Получаем

$$\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C + o(1).$$

В константу $C + o(1)$ мы записали 1 и значение интеграла, $o(1)$ отражает погрешность.

Так как $\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \ln(n!)$, возьмём от этого всего экспоненту и получим

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\, e^{C+o(1)}.$$

Выражение $e^{C+o(1)}$ стремится к какой-то константе, которую мы обозначим за C'. Выясним, чему она равна. Из формулы Валлиса имеем

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}.$$

Преобразуем эту формулу:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{(2n-1)!!}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2^n\cdot n!\cdot(2n)!!}{(2n)!}=\frac{(2^n\cdot n!)^2}{\sqrt{n}\cdot(2n)!}.$$

Теперь можем воспользоваться нашими наработками:

$$\frac{(2^n\cdot n!)^2}{\sqrt{n}\cdot(2n)!}=\frac{(2^n\cdot n^n e^{-n}\sqrt{n}\,C')^2}{\sqrt{n}\cdot(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}\,C'}=\frac{C'}{\sqrt{2}}.$$

То есть $\sqrt{\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C'}{\sqrt{2}}=\frac{C'}{\sqrt{2}}$, откуда $C'=\sqrt{2\pi}$ и $n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

□

35. Три леммы о сверхограниченных множествах

Лемма. *Множество D сверхограниченно в X тогда и только тогда, когда D сверхограниченно в себе.*

Доказательство. Достаточность очевидна, докажем необходимость.

Построим множество $E_X=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}\subset X$ — конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для D. То есть имеем:

$$\forall y\in D\quad \exists x_i\in E_X\quad \rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В кажом шаре $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ выберем какое-нибудь y_i. Тогда множество $E_Y=\{y_0,y_1,\ldots,y_m\}\subset D$, где $m\leqslant n$, — ε-сеть для D, так как

$$\forall y\in D\quad \exists y_i\in E_Y\quad \rho(y,y_i)\leqslant\rho(y_i,x_i)+\rho(x_i,y)<\varepsilon.$$

□

Лемма. *Сверхограниченность сохраняется при равномерно непрерывном отображении.*

Доказательство. Пусть f — равномерно непрерывное отображение. Запишем, что это значит:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x,x_i\in D\quad\rho(x,x_i)<\delta\quad\rho(f(x),f(x_i))<\varepsilon.$$

А из этого напрямую следует, что если мы возьмём δ-сеть для D, то её образ будет являться ε-сетью для $f(D)$. □

Лемма. *Если D сверхограниченно, то и его замыкание $Cl(D)$ сверхограниченно.*

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ □

Лемма. *Множество D сверхограниченно тогда и только тогда, когда любая последовательность из D содержит фундаментальную подпоследовательность.*

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность:

⇒ Вспомним определение фундаментальной подпоследовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \rho(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Построим $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для D. Рассмотрим последовательность (y_n). Так как наша сеть конечная, понятно, что в каком-то шаре $B_\varepsilon(x_i)$ содержится бесконечно много членов последовательности. Но тогда расстояние между ними всеми меньше ε, а значит они и составляют искомую подпоследовательность.

⇐ Пусть для какого-то ε не существует конечной ε-сети. Тогда есть такая последовательность, что в каждом шаре содержится только конечное число её членов. А из этого напрямую следует отрицание определения фундаментальной последовательности:

$$\forall N \quad \exists n, m > N \quad \rho(y_n, y_m) \geqslant \varepsilon.$$

□

36. Компактность и конечные эпсилон-сети

Теорема. *Пусть $D \subset X$, где X — полное метрическое пространство. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *D компактно,*
2. *D сверхограниченно и замкнуто.*

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность:

⇒ В метрическом пространстве компактность равносильна секвенциальной компактности. То есть из любой последовательности мы можем извлечь сходящуюся, а значит, и фундаментальную, подпоследовательность, что равносильно сверхограниченности. Замкнутость следует из компактности.

$\Leftarrow$ Так как D сверхограниченно, любая последовательность содержит фундаментальную подпоследовательность, которая в силу полноты X сходится к элементу из X. То есть из любой последовательности мы можем извлечь сходящуюся подпоследовательность, что означает секвенциальную компактность D, которая в метрическом пространстве равносильна компактности.

$\square$

37. Простейшие свойства несобственного интеграла

Теорема. *Пусть функция $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ допустима. Тогда:*

1. *Для любого $c \in (a,b)$ сходимость $\int_a^{\to b} f$ равносильна сходимости $\int_c^{\to b} f$ и, если интегралы сходятся,*

$$\int_a^{\to b} f = \int_a^c f + \int_c^{\to b} f.$$

2. *Если g допустима, интегралы $\int_a^{\to b} f$ и $\int_a^{\to b} g$ сходятся, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ интегралы $\int_a^{\to b} \lambda f$ и $\int_a^{\to b} f \pm g$ также сходятся, причём:*

   (a) $\displaystyle\int_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int_a^{\to b} f,$

   (b) $\displaystyle\int_a^{\to b} f \pm g = \int_a^{\to b} f \pm \int_a^{\to b} g.$

3. *Если g допустима, интегралы $\int_a^{\to b} f$ и $\int_a^{\to b} g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ (необязательно сходятся) и $f \leqslant g$ на $[a,b)$, то*

$$\int_a^{\to b} f \leqslant \int_a^{\to b} g.$$

4. *Если f, g дифференцируемы на $[a,b)$ и f', g' допустимы, то*

$$\int_a^{\to b} f'g = fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} fg'.$$

   Это надо понимать так: если существуют два конечных предела из трёх, то третий предел также существует и конечен, причём имеет место вышеизложенное равенство.

5. *Если* $\varphi\colon [\alpha, \beta) \to \langle A, B \rangle$, φ' *допустима, то*
$$\int_a^{\to b} f(\varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f.$$
Это надо понимать так: если существует один из интегралов, то существует и другой и имеет место вышеизложенное равенство.

Доказательство. Все свойства доказываются почти одинаковым образом.

1. Для любого $A \in (c, b)$ по свойству аддитивности определённого интеграла
$$\int_a^A f = \int_a^c f + \int_c^A f.$$
При $A \to b-$ предел обеих частей равенства существует или нет одновременно. Перейдём к пределу и получим, что требуется.

2. Для любого $A \in [a, b)$ по свойству линейности определённого интеграла
$$\int_a^A f \pm g = \int_a^A f \pm \int_a^A g \qquad \text{и} \qquad \int_a^A \lambda f = \lambda \int_a^A f.$$
Тогда соответствующие интегралы сходятся, а после предельного перехода получаются необходимые равенства.

3. Для любого $A \in [a, b)$ из интегрирования неравенств
$$\int_a^A f \leqslant \int_a^A g.$$
Перейдём к пределу и получим, что нужно.

4. Для любого $A \in [a, b)$ справедливо
$$\int_a^A f'g = fg\Big|_a^A - \int_a^A fg'.$$
Сделаем предельный переход и посмотрим, что вышло.

5. Не будем доказывать, потому что тогда придётся всё аккуратно расписывать, а мы не хотим.

□

Замечание. Так как мы только что убедились, что свойства несобственного интеграла один в один похожи на свойства определённого, *стрелочку* писать больше *не будем.*

38. *Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла*

Лемма. *Пусть функция f допустима на $[a, b)$, $f \geqslant 0$. Обозначим $\Phi(A) = \displaystyle\int_a^A f(x)\,dx$, где $A \in [a, b)$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится,*
2. $\Phi(A)$ *ограничена.*

Доказательство. Нужно проверить, что конечный предел $\lim\limits_{A \to b-} \Phi(A)$ существует тогда и только тогда, когда $\Phi(A)$ ограничена. Понятно, что если предел существует, то функция ограничена. Также очевидно, что $\Phi(A)$ возрастает. Значит, по теореме о пределе монотонной функции, её предел существует и конечен. $\square$

Теорема. *Пусть функции f, g допустимы на $[a, b)$, $f, g \geqslant 0$. Тогда справедливы утверждения:*

1. *Пусть $f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда:*
   (a) $\int_a^b g$ *сходится* $\Rightarrow$ $\int_a^b f$ *сходится,*
   (b) $\int_a^b f$ *расходится* $\Rightarrow$ $\int_a^b g$ *расходится.*
2. *Пусть* $\lim\limits_{x \to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$. *Тогда:*
   (a) *Если $l = +\infty$, то:*
      i. $\int_a^b f$ *сходится* $\Rightarrow$ $\int_a^b g$ *сходится,*
      ii. $\int_a^b g$ *расходится* $\Rightarrow$ $\int_a^b f$ *расходится.*
   (b) *Если $l = 0$, то:*
      i. $\int_a^b g$ *сходится* $\Rightarrow$ $\int_a^b f$ *сходится,*
      ii. $\int_a^b f$ *расходится* $\Rightarrow$ $\int_a^b g$ *расходится.*
   (c) *Если $l \in (0, +\infty)$, то $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. Докажем утверждения, которые мы наплодили.

1. Очевидно следует из леммы.

2. (a) Если $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, то, НСНМ, $g\leqslant f$. Отсылаем к пункту 1.
   (b) Если $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то, НСНМ, $f\leqslant g$. Опять отсылаем к пункту 1.
   (c) Существует такое $c\in[a,b)$, что для всех $x\in[c,b)$ выполняется, например,
$$\frac{1}{2}\,l<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3}{2}\,l,$$
   то есть
$$\frac{1}{2}\,l\cdot g(x)<f(x)<\frac{3}{2}\,l\cdot g(x).$$
   Учитывая, что сходимость на $[a,b)$ равносильна сходимости на $[c,b)$, по пункту 1 из правой части получаем, что если $\int_a^b g$ сходится, то и $\int_a^b f$ сходится, а из левой — что если $\int_a^b f$ сходится, то и $\int_a^b g$ сходится. Получили равносильность.

$\square$

39. Изучение сходимости интеграла $\int_{10}^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$

Пример. Исследуем интеграл $\displaystyle\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$ на сходимость.

Рассотрим, как на сходимость влияет α:

1. Пусть $\alpha>1$. Запишем $\alpha=1+2a$, где $a>0$. Тогда
$$\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}=\frac{1}{x^{1+a}}\cdot\frac{1}{x^a(\ln x)^\beta}.$$
   Ясно, что $\dfrac{1}{x^a(\ln x)^\beta}\to 0$ при $x\to\infty$. Почему? При положительном a выражение $x^a\to\infty$ при $x\to\infty$, а логарифм не сможет этому помешать: при $\beta\geqslant 0$ он тоже стремится к бесконечности, а при $\beta<0$ логарифм просто недостаточно быстро растёт — проверить это можно, вычислив по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)^{-\beta}}{x^a}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{a}{\beta}}}\right)^{-\beta}$. Тогда, НСНМ,
$$\frac{1}{x^{1+a}}\cdot\frac{1}{x^a(\ln x)^\beta}\leqslant\frac{1}{x^{1+a}}.$$
   Интеграл $\displaystyle\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{x^{1+a}}$ сходится как **эталонный**, а значит и рассматриваемый интеграл тоже сходится.

2. Пусть теперь $\alpha < 1$. Запишем $\alpha = 1 - 2b$, где $b > 0$. Тогда

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1-b}} \cdot \frac{x^b}{(\ln x)^\beta}.$$

Интеграл от $\dfrac{1}{x^{1-b}}$ расходится, а $\dfrac{x^b}{(\ln x)^\beta}$ этому не мешает, так как стремится к бесконечности при $x \to \infty$ (опять потому что логарифм растёт медленнее степенной функции). Тогда, НСНМ,

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \geqslant \frac{1}{x^{1-b}}.$$

Интеграл $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^{1-b}}$ расходится как эталонный, а значит и рассматриваемый интеграл тоже расходится.

3. Пусть $\alpha = 1$, то есть мы исследуем интеграл

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$$

Сделаем замену $y = \ln x$:

$$\int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{d(e^y)}{e^y y^\beta} = \int_{\ln 10}^{+\infty} \frac{d(y)}{y^\beta}.$$

Это эталонный интеграл, а значит он сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leqslant 1$.

40. Интеграл Эйлера – Пуассона

Теорема.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Доказательство. Из выпуклости функции e^x следует, что $e^x \geqslant 1 + x$ (просто провели касательную в точке 0), откуда, в свою очередь, следует неравенство

$$1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}$$

(левая часть очевидна, правая следует из того, что $e^{x^2} \geqslant 1 + x^2$).

Возведём левую часть в n-ю степень и проинтегрируем на отрезке $[0,1]$:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx,$$

а правую тоже возведём в степень n и проинтегрируем уже на $[0,+\infty]$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx.$$

Так как функция e^x положительна, можем объединить эти два неравенства следующим образом:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx.$$

Левый центальный интеграл опустим, он не пригодится:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx.$$

Теперь посчитаем получившиеся интегралы:

1. В левом сделаем замену $x=\cos t$:

   $$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1}\,dt;$$

   по лемме из формуле Валлиса

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1}\,dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

2. В правом сделаем замену $x=\operatorname{tg} t$:

   $$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n-2}\,dt;$$

   опять по лемме из формуле Валлиса

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n-2}\,dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

3. В центральном сделаем замену $x=\dfrac{t}{\sqrt{n}}$:

   $$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Имеем
$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$
Домножим неравенство на $\sqrt{n}$:
$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \sqrt{n} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{n}.$$
Иначе говоря,
$$\frac{n}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$
Так как неравентсво справедливо для любого n, устремим его в бесконечность. По формуле Валлиса получим, что выражения слева и справа стремятся к $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ при $n \to \infty$. А значит, наш интеграл равен $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

41. *Гамма-функция Эйлера, простейшие свойства*

Теорема. *Изучим* $\Gamma(t)$ *на предмет наличия всяких замечательных свойств:*

1. $\Gamma(t)$ *сходится при* $t > 0$ *и расходится в противном случае,*
2. $\Gamma(t)$ *выпукла,*
3. $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$,
4. *График,*
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Доказательство. Докажем:

1. Заметим, что при $x \to 0$ подынтегральное выражение $x^{t-1}e^{-x}$ эквивалентно $x^{t-1} = \dfrac{1}{x^{1-t}}$. Соответственно, при $1 - t \geqslant 1$, то есть при $t \leqslant 0$ интеграл расходится.

   Проверим, при всех ли других значениях t он сходится. Запишем подынтегральное выражение $x^{t-1}e^{-x}$ как $x^{t-1}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$. Так как показательная функция $e^{-\frac{x}{2}}$ при росте x убывает быстрее, чем растёт степенная x^{t-1}, выражение $x^{t-1}e^{-\frac{x}{2}}$ стремится к нулю, а значит
   $$x^{t-1}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}} \leqslant e^{-\frac{x}{2}}.$$

Интеграл от $e^{-\frac{x}{2}}$ сходится как эталонный, а значит по признаку сравнения $\Gamma(t)$ тоже сходится.

2. Рассмотрим подыинтегральное выражение $x^{t-1}e^{-x}$ относительно t. При любом x оно представляет собой показательную функцию x^{t-1} с каким-то коэффициентом e^{-x}. Показательная функция выпуклая, то есть по определению для любых t_1, t_2 и $\alpha \in (0,1)$

$$x^{\alpha t_1+(1-\alpha)t_2-1}e^{-x} \leqslant \alpha x^{t_1-1}e^{-x} + (1-\alpha)x^{t_2-1}e^{-x}.$$

Проинтегрируем неравенство по x на промежутке $(0,+\infty)$:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha t_1+(1-\alpha)t_2-1}e^{-x}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \int_0^{+\infty} x^{t_1-1}e^{-x}\,dx + (1-\alpha)\int_0^{+\infty} x^{t_2-1}e^{-x}\,dx,$$

что является уже определением выпуклости, записанным для $\Gamma(t)$.

Замечание. Из выпуклости функции Γ следует её непрерывность и даже почти дифференцируемость.

3. Проинтегрируем $\Gamma(t+1)$ по частям:

$$\int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} x^t\,d(-e^{-x}) = -x^t e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + t\cdot\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx.$$

Двойная подстановка зануляется, так как выражение $-A^t e^{-A}$ стремится к нулю при $A \to \infty$, а значит, получаем

$$\Gamma(t+1) = t\cdot\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx = t\cdot\Gamma(t).$$

Замечание. Легко проверить, что $\Gamma(1) = 1$. Отсюда получаем, что $\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n) = n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1) = \ldots = n!$.

4. Пользуясь соображениями из предыдущего замечания, а также тем фактом, что $\Gamma(t) = \dfrac{\Gamma(t+1)}{t}$ ведёт себя как $\dfrac{1}{t}$ при $t \to 0$, построим график.

ДОДЕЛАТЬ ГРАФИК

5. Запишем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx$$

и сделаем замену $x = y^2$:

$$\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{2y}{y}\, e^{-y^2}\, dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy.$$

Получили интеграл Эйлера – Пуассона, то есть $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$.

$\square$

42. Теорема об абсолютно сходящихся рядах и интегралах

Теорема 1. *Пусть функция f допустима на $[a, b)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$\int_a^b f$ абсолютно сходится,*
2. *$\int_a^b |f|$ сходится,*
3. *$\int_a^b f^+$ и $\int_a^b f^-$ сходятся.*

Доказательство. Докажем переходы:

$1 \Rightarrow 2$**:** По определению абсолютно сходящегося интеграла.

$2 \Rightarrow 3$**:** Так как по определению $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$, то $f^+ \leqslant |f|$, $f^- \leqslant |f|$, по **признаку сравнения** из сходимости $\int_a^b |f|$ следует сходимость интегралов от f^+, f^-.

$3 \Rightarrow 1$**:** Так как $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$, то по **простейшим свойствам несобственного интеграла** из сходимости $\int_a^b f^+, \int_a^b f^-$ следует сходимость интегралов $\int_a^b f, \int_a^b |f|$.

$\square$

Теорема 2 (из будущего)**.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Ряд $\sum a_k$ абсолютно сходится,*
2. *Ряд $\sum |a_k|$ сходится,*
3. *Ряды $\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$ сходятся*

*($\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$ определены как в доказательстве **теоремы о перестановке слагаемых**).*

Доказательство. Докажем переходы:

$1 \Rightarrow 2$**:** По определению абсолютно сходящегося ряда.

$2 \Rightarrow 3$**:** Так как по определению $a_k^+ = \max(a_k, 0)$, $a_k^- = \max(-a_k, 0)$, то $a_k^+ \leqslant |f|$, $a_k^- \leqslant |f|$, по **признаку сравнения** из сходимости $\sum |a_k|$ следует сходимость интегралов от a_k^+, a_k^-.

$3 \Rightarrow 1$**:** Так как $\sum a_k = \sum a_k^+ - \sum a_k^-$, $\sum |a_k| = \sum a_k^+ + \sum a_k^-$, то по **свойствам рядов** из сходимости $\sum a_k^+, \sum a_k^-$ следует сходимость интегралов $\sum a_k, \sum |a_k|$.

$\square$

43. Изучение интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ на сходимость и абсолютную сходимость

Пример. Выясним, при каких $p \in \mathbb{R}$ интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ сходится и абсолютно сходится.

Сначала о сходимости. Проверим, что при $p > 0$ интеграл сходится. Проинтегрируем его по частям:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, d(-\cos x) = -\frac{\cos x}{x^p}\Big|_1^\infty - p \cdot \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}}\, dx.$$

Двойная подстановка стремится к нулю, а интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}}\, dx$ абсолютно сходится: так как $\left|\dfrac{\cos x}{x^{p+1}}\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{x^p}\right|$, по **признаку сравнения** при $p > 1$ из сходимости второго следует сходимость первого. Значит, рассматриваемый интеграл сходится, но об абсолютной сходимости говорить нельзя, так как его мы рассматривали не по модулю.

Теперь покажем, что при $p \leqslant 0$ интеграл расходится. Воспользуемся **критерием Больцано – Коши**: если мы предъявим такую последовательность чисел $A_k, B_k \to +\infty$, что $\displaystyle\int_{A_k}^{B_k} \frac{\sin x}{x^p} \not\to 0$ при $k \to \infty$, то докажем, что интеграл расходится.

Такая последовательность есть: пусть $A_k = 2\pi k, B_k = 2\pi k + \pi$, тогда

$$\int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \frac{\sin x}{x^p}\, dx \geqslant \frac{1}{(2\pi k)^p} \int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin x\, dx = \frac{2}{(2\pi k)^p} \not\to 0.$$

Теперь об абсолютной сходимости. Так как $\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{x^p}\right|$, по признаку сравнения при $p > 1$ интеграл абсолютно сходится.

Проверим, что происходит при $p \leqslant 1$. Опять воспользуемся критерием Больцано – Коши и докажем, что интеграл не абсолютно сходится. Пусть $A_k = \pi k, B_k = 2\pi k$, тогда

$$\int_{\pi k}^{2\pi k} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \, dx \geqslant \int_{\pi k}^{2\pi k} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \, dx \geqslant \frac{1}{2\pi k} \int_{\pi k}^{2\pi k} |\sin x| \, dx = \frac{2k}{2\pi k} \not\to 0.$$

44. Признак Абеля – Дирихле сходимости несобственного интеграла

Теорема. *Пусть функция f допустима на $[a, b)$. Обозначим $F(A) = \int_a^A f$, где $A \in [a, b)$. Тогда:*

Признак Дирихле: *Пусть $F(A)$ ограничена, то есть*

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall A \in [a, b) \quad |F(A)| < C_1.$$

Пусть также функция g непрерывно дифференцируема на $[a, b)$, $g(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0$, $g(x)$ монотонна. Тогда $\int_a^b fg$ сходится.

Признак Абеля: *Пусть $\int_a^b f$ сходится. Пусть также g непрерывно дифференцируема на $[a, b)$ и ограничена, то есть*

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall x \in [a, b) \quad |g(x)| < C_2.$$

Тогда $\int_a^b fg$ сходится.

Доказательство. Докажем признаки:

Признак Дирихле Зафиксируем B и проинтегрируем $\displaystyle\int_a^B f(x)g(x) \, dx$ по частям (напомним, что по **теореме Барроу** $F'(x) = f(x)$):

$$\int_a^B f(x)g(x) \, dx = \int_a^B g(x) \, d(F) = F(x)g(x)\Big|_a^B - \int_a^B F(x)g'(x) \, dx =$$
$$= F(B)g(B) - F(a)g(a) - \int_a^B F(x)g'(x) \, dx.$$

Теперь устремим B к b и посмотрим, как поведёт себя выражение: двойная подстановка имеет предел, так как в силу того, что по условию $F(A)$ ограничена, а $g(x) \xrightarrow[x\to b-0]{} 0$, выражение $F(B)g(B)$ стремится к нулю. Разберёмся с интегралом: в силу монотонности $g(x)$ её производная $g'(x)$ постоянного знака. Но тогда наш интеграл сходится, и, более того, абсолютно сходится:

$$\int_a^B |F(x)g'(x)|\,dx \leqslant C_1 \int_a^b |g'(x)|\,dx = \pm C_1 \int_a^b g'(x)\,dx = g(x)\Big|_a^b.$$

Двойная подстановка имеет предел, так как $g(x) \xrightarrow[x\to b-0]{} 0$.

Признак Абеля Пусть $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = l$. Так как $g(x)$ ограничена и монотонна, он существует и конечен. Тогда рассмотрим:

$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g-l) + \int_a^b f\cdot l.$$

Тогда наш интеграл сходится, так как $\int_a^b f\cdot l$ сходится по условию, а также легко проверить, что $\int_a^b f(g-l)$ сходится по признаку Дирихле.

$\square$

45. Интеграл Дирихле

Теорема.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим сумму $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$. Домножим на $2\sin\frac{x}{2}$ и, воспользовавшись формулой произведения синуса на косинус $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$, получим телескопическую сумму. Обратно поделим всё на $2\sin\frac{x}{2}$ и получим

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Проинтегрируем это равенство на промежутке $[0,\pi]$:

$$0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx - \frac{\pi}{2}.$$

Иными словами,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь получше приглядимся к такому интегралу:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx \xlongequal[y=\left(n+\frac{1}{2}\right)x]{} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Правая часть при $n \to \infty$ — это как раз интеграл Дирихле. Теперь, если мы докажем, что разность

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx =$$
$$= \int_0^{\pi} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \cdot \left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}\right)dx$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, мы докажем теорему.

Сделаем наблюдение:

$$\int_0^{\pi} \sin Nx \cdot f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,d\left(-\frac{\cos Nx}{N}\right) =$$
$$= -\frac{\cos Nx}{N} \cdot f(x)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{N}\int_0^{\pi} \cos Nx \cdot f'(x)\,dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Условный $\sin Nx$ у нас имеется, теперь, если мы докажем, что то, что у нас играет роль $f(x)$, подходит для интегрирования по частям, то есть непрерывно дифференцируемо, то искупаемся в шоколаді.

К непрерывности вопросов не возникает нигде, кроме окрестности нуля. Однако и там функция непрерывна — это легко видеть, если привести к общему знаменателю и заменить в нём $\sin\frac{x}{2}$ на эквивалентную $\frac{x}{2}$, а в числителе разложить его в ряд Тейлора до второго порядка.

Осталось показать, что производная тоже непрерывна (к ней вопросы также только в окрестности нуля): для этого рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ — по следствию из теоремы Лагранжа, если он существует, то равен как раз значению производной в нуле. Чтобы показать, что он существует, опять приведём к общему знаменателю, заменим все синусы и косинусы на эквивалентные и получим в числителе и знаменателе выражения порядка x^4.

Получается, что наша функция непрерывно дифференцируема, а значит, теорема доказана. $\square$

46. Две леммы об интегрировании асимптотических равенств

Теорема. *ДОДЕЛАТЬ*

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ □

47. Иррациональность e^2

Теорема. *ДОДЕЛАТЬ*

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ □

48. Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необходимое условие сходимости, критерий Больцано – Коши

Теорема. *Некоторые свойства рядов:*

1. *Пусть ряды* $\sum a_k, \sum b_k$ *сходятся. Тогда ряд* $\sum c_k$*, где* $c_k = a_k + b_k$*, тоже сходится, причём* $\sum c_k = \sum a_k + \sum b_k$.

2. *Пусть ряд* $\sum a_k$ *сходится. Тогда для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ряд* $\sum \lambda a_k$ *тоже сходится, причём* $\sum \lambda a_k = \lambda \sum a_k$.

3. *Если ряд* $\sum a_k$ *сходится, то любой его остаток* R_N *тоже сходится.*

4. *Если какой-то остаток* R_N *ряда* $\sum a_n$ *сходится, то и сам ряд сходится.*

5. *Ряд* $\sum a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда* $R_N \to 0$ *при* $N \to \infty$.

Доказательство. Ну-с:

1. Очевидно, что для любого N $S_N^c = S_N^a + S_N^b$. Делаем предельный переход при $N \to \infty$ — предел левой части существует, так как существует предел правой.

2. Опять-таки очевидно, что для любого N $S_N^{\lambda a} = \lambda S_N^a$. Делаем предельный переход, и всё.

3. Пусть $n > m$. Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k$$

и перейдём к пределу при $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k.$$

Тогда из существования предела левой части следует существование предела правой, а из существования предела правой — существование предела левой.

4. Очевидно из доказательства предыдущего пункта.

5. Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + R_N.$$

Допустим, ряд сходится. Тогда выражение $\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k$ стремится к сумме ряда при $N \to \infty$, а значит, R_N стремится к нулю.

В обратную сторону доказывать вообще ничего не нужно: мы уже доказали, что если R_N сходится, то и ряд тоже.

$\square$

Следствие (необходимое условие сходимости)**.** *Если ряд $\sum a_k$ сходится, то $a_k \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Очевидно из того, что $a_N = R_N - R_{N+1}$. $\square$

Теорема (критерий Больцано – Коши)**.** *Ряд $\sum a_k$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство. В силу того, что $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n|$, доказывать тут, строго говоря, нечего, так как мы просто записали определение существования предела частичных сумм. $\square$

49. *Признак сравнения сходимости положительных рядов*

Лемма. *Пусть $a_n \geqslant 0$. Тогда следующие утверждения эквиваленты:*

1. *Ряд (A) сходится,*
2. *Последовательность частичных сумм (S_n) ограничена.*

Доказательство. В силу того, что (S_n) монотонна, по теореме о пределе монотонной функции существование предела последовательности (а это и означает сходимость ряда) эквивалентна её ограниченности. $\square$

Теорема. *Пусть $(A), (B)$ — положительные ряды. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть для любого n $a_n \leqslant b_n$. Тогда:*
   (a) *(B) сходится $\Rightarrow$ (A) сходится,*
   (b) *(A) расходится $\Rightarrow$ (B) расходится.*
2. *Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$. Тогда:*
   (a) *Если $l = +\infty$, то:*
      i. *(A) сходится $\Rightarrow$ (B) сходится,*
      ii. *(B) расходится $\Rightarrow$ (A) расходится.*
   (b) *Если $l = 0$, то:*
      i. *(B) сходится $\Rightarrow$ (A) сходится,*
      ii. *(A) расходится $\Rightarrow$ (B) расходится.*
   (c) *Если $l \in (0, +\infty)$, то (A) и (B) сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. Можно почти что скопировать доказательство аналогичной теоремы об интегралах:

1. Очевидно из леммы.
2. (a) Если $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = +\infty$, то, НСНМ, $b_k \leqslant a_k$. Отсылаем к пункту 1.
   (b) Если $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 0$, то, НСНМ, $a_k \leqslant b_k$. Опять отсылаем к пункту 1.

(c) Существует такое N, что для всех $n > N$ выполняется, например,
$$\frac{1}{2}\,l < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\,l,$$
то есть
$$\frac{1}{2}\,l \cdot b_n < a_n < \frac{3}{2}\,l \cdot b_n.$$
Учитывая, что из сходимости остатка следует сходимость ряда, по пункту 1 из правой части получаем, что если (B) сходится, то и (A) сходится, а из левой — что если (A) сходится, то и (B) сходится. Получили равносильность.

□

50. *Признак Коши сходимости положительных рядов (noob)*

Теорема. *Пусть (A) — положительный ряд. Обозначим $K_n = \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:*

1. *Если существует $q < 1$, такое, что, НСНМ, $K_n \leqslant q$, то ряд (A) сходится.*
2. *Если $K_n \geqslant 1$ для бесконечного числа номеров n, то ряд (A) расходится.*

Доказательство. Доказательство:

1. Пусть $K_n \leqslant q$, то есть $a_n \leqslant q^n$. Ряд $\sum q_n$ сходится как эталонный, а значит, и ряд (A) также сходится.
2. Пусть $K_n \geqslant 1$ для бесконечного числа номеров n. Это значит, что $a_n \geqslant 1$ также для бесконечного числа номеров n, а это означает, что $a_n \not\to 0$, что противоречит **необходимому условию сходимости**.

□

51. Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)

Теорема. *Пусть (A) — положительный ряд. Обозначим $K_n = \sqrt[n]{a_n}$, $K = \varlimsup\limits_{n\to\infty} K_n$. Тогда:*

1. *Если $K < 1$, то ряд (A) сходится,*

2. *Если $K > 1$, то ряд (A) расходится.*

Доказательство. Доказательство (pro):

1. Воспользуемся **техническим описанием верхнего предела**: имеем
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad K_n < K + \varepsilon.$$
Возьмём какое-нибудь $q \in (K, 1)$ и назначим $\varepsilon = q - K$. Тогда, НСНМ, $K_n < K + \varepsilon$, то есть $K_n < q$. Согласно пункту 1 **версии признака Коши для нубов** ряд (A) сходится.

2. Опять воспользуемся техническим описанием верхнего предела: имеем
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \textit{бесконечно много } n \quad K - \varepsilon < K_n.$$
Возьмём $\varepsilon = K - 1$. Тогда для бесконечного числа номеров n справедливо $K - \varepsilon < K_n$, то есть $1 < K_n$. Согласно уже пункту 2 версии признака Коши для нубов ряд (A) расходится.

□

Замечание. Если оказалось, что $K = 1$, то признак не работает, так как можно привести примеры и сходящегося, и расходящегося рядов, для которых $K = 1$: это, например, ряды $\sum \frac{1}{n^2}$ и $\sum \frac{1}{n}$ соответственно.

52. Признак Даламбера сходимости положительных рядов

Теорема (noob)**.** *Пусть (A) — положительный ряд. Обозначим $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тогда:*

1. *Если существует $q < 1$, такое, что, НСНМ, $D_n < 1$, то ряд (A) сходится,*

2. *Если, НСНМ, $D_n \geqslant 1$, то ряд (A) расходится.*

Доказательство. Докажем:

1. Имеем:
$$\exists N \quad \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q.$$

Зафиксируем какое-нибудь число $N+k$ и запишем:

$$\begin{aligned} \frac{a_{N+1}}{a_N} &< q, \\ \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} &< q, \\ &\vdots \\ \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} &< q. \end{aligned}$$

Перемножим все эти неравенства: сократится всё, кроме знаменателя первой дроби и числителя последней. Получим:

$$\frac{a_{N+k}}{a_N} < q^k,$$

или

$$a_{N+k} < q^k a_N.$$

Ряд $\sum q^k a_N$ сходится как эталонный: $q < 1$, a_N — просто константа. Значит, и остаток $\sum a_{N+k}$, а значит, и ряд (A), тоже сходятся.

2. Имеем, что, НСНМ, $a_{n+1} \geqslant a_n$. Отсюда $a_n \not\to 0$, что противоречит **необходимому условию сходимости**.

$\square$

Теорема (pro)**.** *Пусть* (A) *— положительный ряд. Обозначим* $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$*. Пусть также существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$*. Тогда:*

1. *Если* $D < 1$*, то ряд* (A) *сходится.*

2. *Если* $D > 1$*, то ряд* (A) *расходится.*

Доказательство. Докажем (pro):

1. Возьмём какое-нибудь $q \in (D, 1)$. Тогда по определению предела D имеем:

$$\exists N \quad \forall n > N \quad D_n < q.$$

Следовательно, по пункту 1 версии признака для нубов ряд (A) сходится.

2. По определению предела D

$$\exists N \quad \forall n > N \quad D_n > 1.$$

Иными словами, НСНМ, $a_{n+1} > a_n$, откуда по пункту 2 версии признака для нубов следует расходимость ряда (A).

$\square$

Замечание. Аналогично признаку Коши, если оказалось, что $D = 1$, то признак не работает, так как можно привести примеры и сходящегося, и расходящегося рядов, для которых $K = 1$: это, например, всё те же ряды $\sum \frac{1}{n^2}$ и $\sum \frac{1}{n}$ соответственно.

53. Признак Раабе сходимости положительных рядов

Лемма. *Пусть* $(A), (B)$ *— строго положительные ряды, причём, НСНМ,* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. *Тогда:*

1. (B) *сходится* $\Rightarrow$ (A) *сходится,*

2. (A) *расходится* $\Rightarrow$ (B) *расходится.*

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство признака Даламбера. Имеем:

$$\exists N \quad \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Зафиксируем какое-нибудь число $N + k$ и запишем:

$$\begin{gathered}
\frac{a_{N+1}}{a_N} < \frac{b_{N+1}}{b_N}, \\
\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}, \\
\vdots \\
\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} < \frac{b_{N+k}}{b_{N+k-1}}.
\end{gathered}$$

Перемножим эти неравенства:

$$\frac{a_{N+k}}{a_N} < \frac{b_{N+k}}{b_N},$$

или

$$a_{N+k} < b_{N+k}\,\frac{a_N}{b_N}.$$

Так как $\dfrac{a_N}{b_N}$ — просто константа, по признаку сравнения из сходимости ряда (B) следует сходимость (A), а из расходимости ряда (A) — расходимость (B). $\square$

Теорема (noob)**.** *Пусть (A) — строго положительный ряд. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если, НСНМ, $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r > 1$, то ряд (A) сходится,*
2. *Если, НСНМ, $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$, то ряд (A) расходится.*

Доказательство. Сделаем наблюдение, а именно рассмотрим ряд $\sum \frac{1}{n^p}$ и вычислим для него величину $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$:

$$n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^p - 1\right) = n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} p.$$

Теперь используем его для доказательства наших утверждений:

1. Имеем $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant \dfrac{r}{n}$, то есть $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1 + \dfrac{r}{n}$. Воспользуемся наблюдением: возьмём $p \in (1, r)$, тогда, НСНМ, $n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right) < r$, то есть
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{r}{n} \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$
Иными словами, мы получили, что
$$\frac{1/n^p}{1/(n+1)^p} < \frac{a_n}{a_{n+1}},$$
что равносильно
$$\frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} > \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
Отсюда по лемме из сходимости ряда $\sum \frac{1}{n^p}$ (что выполняется при $p > 1$) следует сходимость (A).

2. Теперь имеем $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$, или $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \dfrac{n}{n+1}$, что равносильно
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{1/(n+1)}{1/n}.$$
Отсюда по лемме из расходимости ряда $\sum \frac{1}{n}$ следует расходимость (A).

□

Следствие (pro-версия)**.** *Пусть* (A) *— строго положительный ряд. Пусть также существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R$. *Тогда:*

1. *Если* $R > 1$, *то ряд* (A) *сходится,*
2. *Если* $R < 1$, *то ряд* (A) *расходится.*

Доказательство. Упражнение... (МОЖЕТ БЫТЬ, ДОДЕЛАТЬ) □

Замечание. Аналогично двум предыдущим признакам, если оказалось, что $R = 1$, то признак не работает, так как можно привести примеры и сходящегося, и расходящегося рядов, для которых $R = 1$: это, например, ряды $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ и $\sum \frac{1}{n \ln n}$ соответственно (сходимость первого и расходимость второго доказываются с помощью **интегрального признака Коши**).

54. Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

Теорема. *Пусть функция* $f\colon [1, +\infty) \to [0, \infty)$ *непрерывна и монотонна. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ *и интеграл* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ РИСУНОК
На рисунке показано, что
$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) - \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant |f(1) - f(n)|.$$
Это значит, что
$$S_n = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx + \Delta_n, \quad \text{где } |\Delta_n| \leqslant |f(1) - f(n)|. \tag{8}$$

Случай $f(x) \to +\infty$ тривиален, другие же случае предполагают, что функция f ограничена.

Из рисунка очевидно, что величина Δ_n с ростом n увеличивается по модулю, а также что она постоянного знака: в случае убывающей функции отрицательная, в случае возрастающей — положительная. Из её ограниченности следует, что Δ_n имеет предел при $n \to \infty$.

А это значит, что пределы левой и правой частей равенства (8) существуют или не существуют одновременно.

МБ ДОДЕЛАТЬ ФОРМАЛЬНО $\square$

55. *Признак Лейбница*

Теорема. *Пусть* $\sum(-1)^n c_k$ *— знакопеременный ряд. Пусть также* $c_k \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Тогда ряд* $\sum(-1)^n c_k$ *сходится.*

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ $\square$

56. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

Теорема. *Рассмотрим ряд вида* $\sum a_k b_k$. *Обозначим* $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. *Тогда справедливы утверждения:*

Признак Дирихле. *Если последовательность* (A_n) *ограничена, то есть* $\exists C_A > 0\ \forall n\ |A_n| \leqslant C_A$, *а последовательность* (b_k) *монотонно стремится к нулю, то ряд* $\sum a_k b_k$ *сходится.*

Признак Абеля. *Если ряд* $\sum a_k$ *сходится, а последовательность* (b_k) *монотонна и ограничена, то есть* $\exists C_b > 0\ \forall k\ |b_k| \leqslant C_b$, *то ряд* $\sum a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. Сделаем наблюдение (можно назвать это суммированием по частям, но вообще это *преобразование Абеля*):

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = A_N b_N + \sum_{k=1}^{N-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \tag{9}$$

(справедливость можно проверить, посмотрев, что каждое b_k входит в левую и правую части с одинаковыми коэффициентами: слева это a_k, справа это $A_k - A_{k-1} = a_k$). Применим его для доказательства признаков:

Признак Дирихле. В равенстве (9) перейдём к пределу при $N \to \infty$. В силу того, что $A_N \leqslant C_A$, а $b_N \to 0$, выражение $A_N b_N \to 0$.

Мы также заявляем, что ряд $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ абсолютно сходится. Почему? Проверим, что последовательность частичных сумм ряда $\sum |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}|$ ограничена (из этого в силу монотонности этой последовательности будет следовать существование конечного предела).

Заметим, что в силу монотонности (b_k) выражение $b_k - b_{k+1}$ постоянного знака. Отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^{N-1} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| \leqslant C_A \sum_{k=1}^{N-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm C_A \sum_{k=1}^{N-1} (b_k - b_{k+1}).$$

Получили телескопическую сумму, равную $\pm C_A(b_1 - b_N)$. Из того, что $b_N \to 0$ при $N \to \infty$, очевидно, что последовательность $\pm C_A(b_1 - b_N)$ ограничена. Отсюда получаем, что ряд $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ абсолютно сходится, а значит, исходный ряд сходится.

Признак Абеля. Так как последовательность (b_k) монотонна и ограничена, у неё существует конечный предел β. Запишем

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = \beta \sum_{k=1}^{N} a_k - \sum_{k=1}^{N} a_k(b_k - \beta)$$

(просто прибавили и вычли β одинаковое количество раз). При переходе к пределу при $N \to \infty$ выражение $\beta \sum a_n$ имеет конечный предел.

Выражение же $\sum a_k(b_k - \beta)$ сходится по вышедоказанному признаку Дирихле, так как из сходимости ряда $\sum a_n$ следует ограниченность (A_n), а $(b_k - \beta)$ очевидно монотонно стремится к нулю при $k \to \infty$.

□

57. Теорема о группировке слагаемых

Теорема. *Рассмотрим ряд* $(A) = (a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$ *Обозначим* $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$. *Тогда справедливы утверждения:*

1. *Если ряд* (A) *сходится, то ряд* (B) *сходится и имеет ту же сумму,*

2. *Если (A) — положительный ряд, то $S^a = S^b$ (или суммы рядов равны бесконечности).*

Доказательство. Тривиально: из того, что $S^b_m = S^a_{n_m}$, в первом случае получаем, что S^b_m стремится к сумме ряда (A), а во втором — что они сходятся к одному конечному значению или к бесконечности одновременно (ситуация, в которой предела не существует, исключена, так как наши ряды положительны). $\square$

МБ ДОДЕЛАТЬ ЗАМЕЧАНИЯ

58. Теорема о перестановке слагаемых

Теорема. *Рассмотрим ряд $\sum a_k$ и его перестановку $\sum b_k$. Тогда если ряд $\sum a_k$ абсолютно сходится, то ряд $\sum b_k$ абсолютно сходится к той же сумме.*

Доказательство. Рассмотрим разные случаи:

1. Пусть $\sum a_k$ — положительный ряд. По определению частичная сумма $S^b_k = a_{\omega(1)} + \ldots + a_{\omega(k)} \leqslant S^b_M$, где $M = \max(\omega(1), \ldots, \omega(k))$. Так как $M \to \infty$ при $k \to \infty$, а пределы частичных сумм существуют (так как $a_k \geqslant 0$), получаем, что $S^b \leqslant S^a$. А из того, что существует обратное отображение ω^{-1}, путём аналогичных рассуждений получаем, что $S^a \leqslant S^b$. Отсюдо следует равенство.

2. Уберём условие положительности ряда $\sum a_k$. Рассмотрим ряды $\sum a^+_k, \sum b^+_k$, где $a^+_k = \max(a_k, 0)$, $b^+_k = \max(b_k, 0)$. Тогда ряд $\sum b^+_k$ — перестановка $\sum a^+_k$, которая задаётся той же биекцией ω, и по пункту 1 они сходятся к одному значению.

   Аналогично определим $a^-_k = \max(-a_k, 0)$, $b^-_k = \max(-b_k, 0)$. Эти ряды тоже являются перестановками друг друга и тоже сходятся к одному значению. А из того, что $\sum a_k = \sum a^+_k + \sum a^-_k$ (аналогичное, очевидно, справедливо и для $\sum b_k$), следует утверждение теоремы.

$\square$

59. Теорема о произведении рядов

Теорема. *Пусть ряды $\sum a_k, \sum b_k$ абсолютно сходятся и их суммы равны S^a и S^b соответственно. Тогда для любой биекции $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, которая переводит x в $(\varphi(x), \psi(x))$, произведение рядов $\sum a_k, \sum b_k$ — абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S^a \cdot S^b$.*

Доказательство. Обозначим $\sum |a_k| = S_*^a, \sum |b_k| = S_*^b$ и исследуем произведение рядов на абсолютную сходимость:

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{\varphi(k)}| \cdot |b_{\psi(k)}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \sum_{k=1}^{m} |b_k| \leqslant S_*^a \cdot S_*^b,$$

где $n = \max(\varphi(1), \ldots, \varphi(N)),\ m = \max(\psi(1), \ldots, \psi(N))$. Получаем, что множество частичных сумм нашего произведения (где каждое слагаемое взято по модулю) ограничено, а значит, оно сходится (то есть произведение сходится абсолютно).

Но ведь мы можем взять вместо γ какую-нибудь другую биекцию $\widetilde{\gamma}$. Очевидно, что полученное с её помощью произведение $\sum a_{\widetilde{\varphi}(k)} b_{\widetilde{\psi}(k)}$ — перестановка произведения $\sum a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$. А значит, оба этих произведения сходятся к той же сумме.

Возьмём в качестве γ «нумерацию по квадратам».

ДОДЕЛАТЬ РИСУНОК

Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} S^a \cdot S^b.$$

□

60. *Неравенство Йенсена для сумм, формулировка для рядов*

Теорема. *Пусть функция f выпукла на $\langle a, b\rangle$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n$ из $\langle a, b\rangle$ и любых неотрицательных $\alpha_1, \ldots, \alpha_2$, таких, что $\sum \alpha_i = 1$ выполняется*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

Доказательство. Сначала покажем, что выражения, участвующие в неравенстве, корректны, то есть что $x^* = \sum \alpha_k x_k$ лежит в $\langle a, b\rangle$. Заменим все x_k на $x_M = \max(x_1, \ldots, x_n)$, тогда

$$x^* \leqslant (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\, x_M = x_M \in \langle a, b\rangle.$$

Аналогично x^* больше минимального из x_k, откуда получаем, что $x^* \in \langle a, b\rangle$.

В точке x^* проведём опорную прямую $y = px + q$ к графику функции f. Тогда

$$f(x^*) = px^* + q = p\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k + q\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(px_k + q).$$

Так как $(px_k + q)$ — это точка на опорной прямой с абсциссой x_k, в силу выпуклости f (опорная прямая лежит не выше графика) $px_k + q \leqslant f(x_k)$. Получаем

$$f(x^*) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(px_k + q) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(x_k).$$

□

ДОДЕЛАТЬ ФОРМУЛИРОВКУ ДЛЯ РЯДОВ

61. Неравенство Йенсена для интегралов

Теорема. *Пусть функция f выпукла на $\langle A, B\rangle$. Введём непрерывные функции $x\colon [a,b] \to \langle A, B\rangle$, $\alpha\colon [a,b] \to [0, +\infty)$, причём $\int_a^b \alpha(t)\,dt = 1$. Тогда*

$$f\left(\int_a^b \alpha(t)x(t)\,dt\right) \leqslant \int_a^b \alpha(t)f(x(t))\,dt.$$

Доказательство. Для начала проверим, что $x^* = \int_a^b \alpha(t)x(t)\,dt$ вообще лежит на $\langle A, B\rangle$. Обозначим $m = \inf\limits_{[a,b]} x(t)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} x(t)$. Тогда

$$m = m\int_a^b \alpha(t)\,dt \leqslant x^* \leqslant M\int_a^b \alpha(t)\,dt = M.$$

Отдельно оговорим, что случаи $x^* = M = B$ или $x^* = m = A$ не реализуются на промежутке вида $\langle A, B)$ или $(A, B\rangle$ соответственно, так как их реализация предполагает, что функция $x(t)$ равна B или A соответственно, а значит, они включены в область определения.

Теперь, собственно, доказательство. В точке x^* проведём опорную прямую $y = p\xi + q$ к графику функции f. Тогда

$$f(x^*) = px^* + \beta = p\int_a^b \alpha(t)x(t)\,dt + \int_a^b \beta\cdot\alpha(t) = \int_a^b \alpha(t)\cdot(px(t) + \beta)\,dt.$$

Так как $(px(t) + \beta)$ — это точка на опорной прямой с абсциссой x_k в силу того, что f выпукла, $px(t) + \beta \leqslant f(x(t))$. Получаем

$$f(x^*) = \int_a^b \alpha(t)\cdot(px(t) + \beta)\,dt \leqslant \int_a^b \alpha(t)f(x(t))\,dt.$$

□

62. Неравенство Коши (для сумм и интегралов)

Теорема 1. *Для любых* $a_1, \ldots, a_n > 0$ *выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Доказательство. Запишем **неравенство Йенсена** для выпуклой вверх (знак неравенства изменится на противоположный) функции $\ln x$ и $\alpha_k = \frac{1}{n}$ для всех k:

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln a_k = \frac{1}{n}\,\ln(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = \ln\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Возьмём экспоненту от левой и правой частей и получим требуемый результат. □

Теорема 2. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[a, b]$. *Пусть также* $f > 0$. *Тогда*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \geqslant \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right).$$

Доказательство. Запишем **интегральное неравенство Йенсена** (знак неравенства изменится на противоположный) для выпуклой вверх функции $\ln x$ и $\alpha(t) \equiv \dfrac{1}{b-a}$:

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(t)\,dt.$$

Возьмём экспоненту от левой и правой частей и получим требуемый результат. □

МБ ДОДЕЛАТЬ ЧЕРЕЗ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

63. Неравенство Гёльдера для сумм

Теорема. *Возьмём* $p > 1$ *и подберём число* q *такое, что* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *то есть* $q = \dfrac{p}{p-1}$. *Тогля для любых* $a_1, \ldots, a_n > 0$ *и* $b_1, \ldots, b_n > 0$ *выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} [9].$$

[9] При $p = q = 2$ это просто неравенство Коши – Буняковского.

Доказательство. Запишем **неравенство Йенсена** для функции x^p (выпуклой при $p > 1$):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^p. \tag{10}$$

В качестве α_k возьмём выражение $\dfrac{b_i^q}{\sum b_i^q}$, а в качестве x_k — выражение $a_k b_k^{-\frac{1}{p-1}} \sum b_i^q$. Тогда

$$\alpha_k x_k = \frac{b_k^q}{\sum b_i^q} \cdot a_k b_k^{-\frac{1}{p-1}} \sum b_i^q = a_k b^{q-\frac{1}{p-1}} = a_k b_k,$$
$$\alpha_k x_k^p = \frac{b_k^q}{\sum b_i^q} \cdot a_k^p b_k^{-\frac{p}{p-1}} \left(\sum b_i^q\right)^p = a_k^p \left(\sum b_i^q\right)^{p-1}.$$

То есть неравенство (10) теперь имеет вид

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{p-1}.$$

Теперь возведём обе части в степень $1/p$ и получимый необходимый результат. $\square$

Замечание. Равенство достигается в случае $x_1 = x_2 = \ldots x_n$, то есть в случае, когда выражение $a_k b_k^{-\frac{1}{p-1}}$ не зависит от i. Это равносильно тому, что $a_k^p = b_k^q \cdot C$, где C — некая константа, которой и равно выражение.

64. *Неравенство Гёльдера для интегралов*

Теорема. *Пусть функции f, g непрерывны на $[a, b]$, причём $f, g \geqslant 0$. Возьмём $p > 1$ и подберём число q такое, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то есть $q = \dfrac{p}{p-1}$. Тогда*

$$\int_a^b fg \leqslant \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Возьмём дробление $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ и оснащение с точками вида $\xi_k = x_k = a + \frac{b-a}{n} k$, тогда $\Delta_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, то есть мы разбили $[a, b]$ на n равных отрезков и взяли за ξ_k их левый конец.

Запишем неравенство для сумм:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} \tag{11}$$

и обозначим $a_k = f(x_k) \cdot \Delta_k^{1/p}$, $b_k = g(x_k) \cdot \Delta_k^{1/q}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) g(x_k) \Delta_k^{1/p+1/q} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) g(x_k) \Delta_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b fg,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} f^p(x_k)\Delta_k\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{n} g^q(x_k)\Delta_k\right)^{1/q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\int_a^b g^q\right)^{1/p}.$$

И мы уже получили, что требовалось. □

65. Неравенство Минковского

Теорема 1. *Отображение* $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ *при* $p \geqslant 1$ *является нормой. То есть оно невырожденно, однородно (это легко проверить), а также для него выполняется неравенство треугольника, то есть*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$$

(что, собственно, и является утверждением теоремы и называется неравенством Минковского).

Доказательство. Заметим, что при $p = 1$ утверждение очевидно, так как превращается в самое обычное неравенство треугольника для самой обычной нормы $|x|$. Рассмотрим $p > 1$.

Рассмотрим выражение $\sum |a_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1}$ и запишем для него неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Аналогично

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \\ = \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Сложим получившиеся неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|) \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \leqslant \\ \leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

В силу неравенства треугольника для $|x|$ справедливо

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|) \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \leqslant \\ \leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

И теперь разделим неравенство на $\left(\sum |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

□

Теорема 2. *Пусть функции f, g непрерывны на $[a, b]$. Тогда при $p \geqslant 1$ справедливо*

$$\left(\int_a^b |f + g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Упражнение... □

МБ ДОДЕЛАТЬ ИНТЕГРАЛЬНУЮ ВЕРСИЮ

66. Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения

Теорема. *Рассмотрим* $\prod(1+a_k)$. *Справедливы утверждения:*

1. *Если, НСНМ,* $a_k > 0$, *то сходимость* $\prod(1+a_k)$ *равносильна сходимости* $\sum a_k$.

2. *Если ряды* $\sum a_k$ *и* $\sum a_k^2$ *сходятся, то* $\prod(1+a_k)$ *тоже сходится.*

Доказательство. Докажем, опираясь на свойства бесконечного произведения:

1. Так как $a_k > 0$, сходимость $\prod(1+a_k)$ равносильна сходимости $\sum \ln(1+a_k)$. А это, в свою очередь, равносильно сходимости ряда $\sum a_k$ (просто заменили на эквивалентную, ведь при сходимости $a_k \to 0$).

2. Рассмотрим ряд $\sum \ln(1+a_k)$ на сходимость. Разложим логарифм в ряд Маклорена: $\sum \ln(1+a_k) = \sum a_k - \dfrac{a_k^2}{2} + o(a_k^2)$. Тогда если ряды $\sum a_k$ и $\sum a_k^2$ сходятся, то сходится и ряд $\sum \ln(1+a_k)$, а значит, и соответствующее произведение.

□

67. Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом

ДОДЕЛАТЬ

68. Формула Эйлера для Г-функции

ДОДЕЛАТЬ

69. Формула Вейерштрасса для Г-функции

ДОДЕЛАТЬ

70. Вычисление произведений с рациональными сомножителями

ДОДЕЛАТЬ

71. Лемма о представлении синуса в виде конечного произведения

Лемма. *Для всех* $x \in \mathbb{R}$ *и для всех* $n \in \mathbb{N}$

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right).$$

Доказательство. Обозначим $m = 2n+1$ и выскочим в комплексную плоскость. По формулам Эйлера и Муавра имеем

$$e^{im\varphi} = (\cos z + i\sin z)^m = \cos mz + i\sin mz.$$

С другой стороны,

$$(\cos z + i\sin z)^m = \sum_{k=1}^{m} C_m^k \cdot (\cos z)^{m-k} \cdot (i\sin z)^k.$$

Сравним мнимые части:

$$\sin mz = m \cdot (\cos z)^{m-1} \cdot \sin z - C_m^3 \cdot (\cos z)^{m-3} \cdot (\sin z)^3 + \ldots$$

Так как m — нечётное число, косинусы везде стоят в чётных степенях. Заменим везде $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$ и получим

$$\sin mz = \sin z \cdot P(\sin^2 z), \tag{12}$$

где P — многочлен степени n, зависящий от $\sin^2 x$.

Теперь выберем $z = \frac{\pi}{m}$, потом $z = \frac{2\pi}{m}$ и так до $z = \frac{n\pi}{m}$ (заметим, что все эти числа лежат в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$). Во всех этих случаях $\sin mz = 0$, а $\sin z \neq 0$. Значит, для всех выбранных z $\sin^2 z$ — корень многочлена P. Так как многочлен имеет степень n, мы можем его разложить:

$$P(u) = C \cdot \left(u - \sin^2\frac{\pi}{m}\right) \cdot \left(u - \sin^2\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \left(u - \sin^2\frac{n\pi}{m}\right),$$

где C — какая-то константа. Или мы можем записать это так:

$$P(x) = C \cdot \left(1 - \frac{u}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right) \cdot \left(1 - \frac{u}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{u}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}\right).$$

Теперь, если мы подставим вместо u ноль, поймём, что $C = P(0)$, что, в свою очередь, равно $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin mz}{\sin z} = m$ (заменим синус на эквивалентную). Обозначим $x = mz = (2n+1)z$ и из (12) сразу получим требуемую формулу. $\square$

72. Разложение синуса в бесконечное произведение

Теорема. *Для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что для $x = \pi l$ при $l \in \mathbb{Z}$ утверждение выполняется. Рассмотрим все прочие x. Вспомним лемму:

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right). \tag{13}$$

Устремим n к бесконечности и рассмотрим k-ю скобку:

$$1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}} \to 1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}.$$

Тогда (13) можно записать как

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi l}{2n+1}}\right) \cdot \prod_{l=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi l}{2n+1}}\right).$$

Введём обозначения:

$$u_k^n = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} \cdot \prod_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi l}{2n+1}}\right),$$
$$V_k^n = \prod_{l=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi l}{2n+1}}\right).$$

Получаем, что $u_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \cdot \prod\limits_{l=1}^{k} \left(1 - \dfrac{x^2}{\pi^2 l^2}\right)$. Обозначим этот предел u_k. Значит, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} V_k^n$, обозначим его V_k. Получаем, что $\sin x = u_k \cdot V_k$.

Пусть теперь $k \to \infty$. Очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = x \cdot \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$. Осталось проверить, что $V_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$.

Заметим, что $\dfrac{2}{\pi} \cdot \varphi \leqslant \sin\varphi \leqslant \varphi$ (ДОДЕЛАТЬ) при $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда ясно, что

$$1 \geqslant 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi l}{2n+1}} \geqslant 1 - \frac{\frac{x^2}{(2n+1)^2}}{\frac{4\pi^2 l^2}{\pi^2 (2n+1)^2}} = 1 - \frac{x^2}{4\pi^2},$$

а следовательно,

$$1 \geqslant V_k^n \geqslant \prod_{l=k+1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{4l^2}\right)$$

(здесь n и k должны быть достаточно большими, чтобы условное φ лежало в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ДОДЕЛАТЬ). Теперь устремим n в бесконечность и получим

$$1 \geqslant V_k \geqslant \prod_{l=k+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4l^2}\right) \to 1.$$

$\square$

73. Теорема о двойных и повторных пределах

ДОДЕЛАТЬ

74. Единственность производной

II Определения и формулировки

1. *Первообразная, неопределённый интеграл*

Определение 1. Пусть $F, f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция F называется *первообразной* f на $\langle a,b\rangle$, если

$$\forall x \in \langle a,b\rangle \quad F'(x) = f(x).$$

Определение 2. Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. *Неопределённым интегралом* функции f на $\langle a,b\rangle$ (обозначается как $\int f$ или $\int f(x)dx$) называется множество её первообразных, то есть

$$\int f = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\},$$

где F — первообразная f на $\langle a,b\rangle$.

2. Теорема о существовании первообразной

Теорема. *Всякая непрерывная на промежутке функция имеет на нём первообразную.*

3. *Таблица первообразных*

1. $\displaystyle\int x^a = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} = \ln|x|$,
3. $\displaystyle\int e^x = e^x$,
4. $\displaystyle\int a^x = \frac{a^x}{\ln a}$,
5. $\displaystyle\int \sin x = -\cos x$,
6. $\displaystyle\int \cos x = \sin x$,
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$,
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$,
9. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$,
10. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$,
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$,
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$.

4. Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

Определение 1. Назовём *фигурой* ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^2$. Пусть ε — множество всех фигур. Функция $\sigma\colon \varepsilon \to [0;+\infty)$ называется *площадью*, если выполнены следующие условия:

1. Аддитивность: если $A = A_1 \sqcup A_2$, то $\sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$,
2. Нормировка: $\sigma([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$.

Замечание. Некоторые свойства σ:

1. σ монотонна: $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leqslant \sigma(B)$,
2. A — вертикальный отрезок $\Rightarrow \sigma(A) = 0$.

Доказательство. Докажем свойства по отдельности:

1. Поскольку $B = A \sqcup (B \setminus A)$, то $\sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A) \geqslant \sigma(A)$,
2. Рассмотрим A как $[a,b] \times [c,d]$, где $\forall \varepsilon > 0$ $(b-a) < \varepsilon$. Значит, $(b-a) = 0 \Rightarrow \sigma(A) = 0$.

$\square$

Определение 2. Назовём функцию $\sigma\colon \varepsilon \to [0;+\infty)$ *ослабленной площадью*, если выполняются следующие условия:

1. Монотонность: если $A \subset B$, то $\sigma(A) \leqslant \sigma(B)$,
2. Нормировка: $\sigma([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$,
3. Ослабленная аддитивность. Пусть $A \in \varepsilon$, l — вертикальный промежуток, $A_{\text{Л}}$ — часть A в левой полуплоскости, $A_{\text{П}}$ — часть A в правой полуплоскости (заметим, что $A = A_{\text{Л}} + A_{\text{П}}$ и $A_{\text{Л}} \cap A_{\text{П}} \subset l$). Тогда $\sigma(A) = \sigma(A_{\text{Л}}) + \sigma(A_{\text{П}})$.

5. Положительная и отрицательная срезки

Определение. Пусть $f\colon \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$. Назовём функцию $f^+ = \max(f,0)$ *положительной срезкой*, а функцию $f^- = \max(-f,0)$ — *отрицательной срезкой*. Заметим также, что $f = f^+ - f^-$ и $|f| = f^+ + f^-$.

6. *Определённый интеграл*

Определение 1. Пусть $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$. Назовём *подграфиком* f на $[a,b]$ (обозначается как $\Pi\Gamma(f,[a,b])$) следующее множество:

$$\{(x,y) \mid x \in [a,b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Определение 2. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, σ — ослабленная площадь. *Определённым интегралом* f на $[a,b]$ (обозначается как $\int_b^a f(x)\,dx$ или $\int_b^a f$) называется

$$\sigma(\Pi\Gamma(f^+,[a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-,[a,b])).$$

Замечание. Некоторые свойства и соглашения:

1. Если $f \geqslant 0$, то $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$,
2. Если $f \equiv c \in \mathbb{R}$, то $\displaystyle\int_a^b f = c\cdot(b-a)$,
3. $\displaystyle\int_a^b (-f) = -\int_b^a f$,
4. Можно считать, что $\displaystyle\int_a^a f = 0$,
5. Для всех c из $[a,b]$ $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Доказательство. Небольшие пояснения:

1. В силу того, что $f^- \equiv 0$,
2. Так как подграфик f — прямоугольник,
3. Поскольку $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$,
4. Потому что подграфик f — вертикальный отрезок,
5. В силу ослабленной аддитивности.

□

7. Среднее значение функции на промежутке

Определение. Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Тогда

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$$

называется *средним значением* функции f на промежутке $[a,b]$.

8. *Выпуклая функция*

Определение. Функция $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ называется:

- *выпуклой вниз* на $\langle a,b\rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ и $t \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2);$$

- *строго выпуклой вниз* на $\langle a,b\rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ и $t \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Если выполняются противоположные неравенства, то функция f называется соответственно *выпуклой вверх* или *сторого выпуклой вверх* на $\langle a,b\rangle$.

Часто функции, которые только что были названы выпулыми вниз, называют просто *выпуклыми*, а те, что были названы выпуклыми вверх, — *вогнутыми.*

Поясним геометрический смысл производной. Пусть $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ и, НУО[10], $x_1 < x_2$. Положим $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Тогда

$$t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{и} \quad 1 - t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

При этом, если $x \in (x_1, x_2)$, то $t \in (0,1)$, и обратно. Неравенство, определяющее выпуклую функцию, переписывается в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad x \in (x_1, x_2).$$

[10]Неравенства в определении не меняются при перемене x_1 и x_2 местами.

Правая часть этого неравенства при $x \in [x_1, x_2]$ задаёт уравнение хорды, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ на графике f. Таким образом, выпуклость функции вниз означает, что график функции лежит не выше любой хорды, соединяющей две его точки. Строгая выпуклость вниз означает, что график лежит ниже любой хорды, за исключением концевых точек. Выпуклость функции вверх, напротив, означает, что график функции лежит не ниже любой хорды.

9. Выпуклое множество

Определение. Множество A в $\mathbb{R}^m$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми точками x, y ему также принадлежит отрезок $[x, y]$[11], соединяющий их.

10. Надграфик

Определение. *Надграфиком* функции f на $\langle a, b\rangle$ называется такое множество:

$$\{(x, y) \mid x \in \langle a, b\rangle,\ y \geqslant f(x)\}.$$

Замечание. Функция f выпукла на $\langle a, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ надграфик f на $\langle a, b\rangle$ — выпуклое множество.

Доказательство. Функция f выпукла на $\langle a, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ любая хорда принадлежит надграфику f на $\langle a, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ надграфик f — выпуклое множество (если работает для хорд, сработает и для остальных отрезков, соединяющих две точки надграфика, потому что эти точки «выше» точек графика). $\square$

11. Опорная прямая

Определение. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Прямая, задаваемая уравнением $y = \ell(x)$, называется *опорной* для функции f в точке x_0, если

$$f(x_0) = \ell(x_0) \quad \text{и} \quad f(x) \geqslant \ell(x) \quad \text{для всех } x \in \langle a, b\rangle.$$

Если же

$$f(x_0) = \ell(x_0) \quad \text{и} \quad f(x) > \ell(x) \quad \text{для всех } x \in \langle a, b\rangle \setminus \{x_0\},$$

то прямая называется *строго опорной* для функции f в точке x_0.

[11] $[x, y] = \{x + t(y - x),\ t \in [0, 1]\}$.

Другими словами, прямая называется опорной к f в точке x_0, если она проходит через точку $(x_0, f(x_0))$ и лежит не выше графика функции. Строго опорная прямая лежит ниже графика функции во всех точках, кроме $(x_0, f(x_0))$.

Замечание. Далее мы также будем называть (строго) опорной прямой такую прямую, для которой выполняются аналогичные неравенства, но с противоположными знаками.

12. Кусочно-непрерывная функция, интеграл от неё

Определение 1. Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-непрерывной*, если она непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, в которых имеет разрывы первого рода.

Определение 2. Пусть f — кусочно-непрерывная функция, $\widetilde{f_k}$ — её сужение на промежуток $[x_{k-1}, x_k]$, то есть

$$\widetilde{f_k} = f\big|_{[x_{k-1},x_k]} = \begin{cases} f(x_{k-1}+0), & x = x_{k-1} \\ f(x), & x \in (x_{k-1}, x_k) \\ f(x_k - 0), & x = x_k. \end{cases}$$

Тогда выражение

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{f_k}$$

называется *интегралом кусочно-непрерывной функции* f.

13. Почти первообразная

Определение. Пусть $F, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Функция F называется *почти первообразной* f на $[a,b]$, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,b]$, кроме конечного числа.

Замечание 1. Если f — кусочно-непрерывная функция, у неё существует почти первообразная.

Доказательство. Пусть F_k — первообразная $\widetilde{f_k}$ на $[x_{k-1}, x_k]$.

ДОДЕЛАТЬ □

Замечание 2. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — кусочно-непрерывная функция, F — почти первообразная f на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{f}_k = \sum_{k=1}^{n} F_k(x_k) - F_k(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}).$$

Получили телескопическую сумму, после приведения подобных равную $F(a) - F(b)$. □

14. Функция промежутка, аддитивная функция промежутка

Определение. Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Обозначим как $Segm\langle a, b\rangle$ множество вида $\{[p, q] \mid [p, q] \subset \langle a, b\rangle\}$. Тогда:

1. Функция $\Phi\colon Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется *функцией промежутка*,
2. Функция $\Phi\colon Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\forall [p, q] \in Segm\langle a, b\rangle \quad \forall \in (p, q) \quad \Phi([p, q]) = \Phi([p, c]) + \Phi([c, q]),$$

   называется *аддитивной функцией промежутка.*

15. Плотность аддитивной функции промежутка

Определение. Пусть $\Phi\colon Segm\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка, тогда функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется *плотностью* Φ на $\langle a, b\rangle$, если

$$\forall \Delta \in Segm\langle a, b\rangle \quad |\Delta| \cdot \inf_{\Delta}(f) \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant |\Delta| \cdot \sup_{\Delta}(f).$$

Пример. Если функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$, то f — плотность функции Φ, такой, что

$$\Phi([p, q]) = \int\limits_a^b f.$$

Действительно, по теореме о среднем имеем

$$\inf_{[p,q]}(f) \cdot (q - p) \leqslant \int\limits_p^q f \leqslant \max_{[p,q]}(f) \cdot (q - p).$$

16. *Верхний и нижний пределы последовательности*

Определение 1. Пусть (x_n) — вещественная последовательность. Тогда последовательность (y_n), где $y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$, называется *верхней огибающей* (x_n), а (z_n), где $z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$, — *нижней огибающей* (x_n).

Замечание. Некоторые свойства огибающих:

1. Для всех n $z_n \leqslant x_n \leqslant y_n$,

2. Так как $y_n \geqslant y_{n+1} \geqslant y_{n+2} \geqslant \ldots$ и $z_n \leqslant z_{n+1} \leqslant z_{n+2} \leqslant \ldots$, то для всех n $z_1 \leqslant y_n$ и $z_n \leqslant y_1$.

Определение 2. Пусть (x_n) — вещественная последовательность, (y_n) — её верхняя огибающая, а (z_n) — нижняя. Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}}$$

называется *верхним пределом* (x_n), а

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n \in \overline{\mathbb{R}} \text{ —}$$

нижним пределом.

Пример. Если $x_n = (-1)^n$, то $y_n \equiv 1$, $z_n \equiv -1$, то есть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} = -1$.

17. Частичный предел

Определение. Пусть (x_n) — последовательность в (метрическом пространстве) X. Тогда $l \in X$ называется *частичным пределом* (x_n), если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел (n_k), такая, что $x_{n_k} \to l$ при $k \to \infty$.

Пример. Если $x_n = (-1)^n$, то 1 и -1 — частичные пределы (x_n).

18. Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Определение. Введём следующие понятия:

Дроблением отрезка $[a, b]$ называется возрастающий набор x_i, принадлежащих отрезку $[a, b]$. Пусть для определённости $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b$. Тогда эти x_i разбивают $[a, b]$ на n соприкасающихся подотрезков $[x_i, x_{i+1}]$.

Рангом дробления называется длина наибольшего подотрезка $[x_i, x_{i+1}]$, то есть $\max(x_{i+1} - x_i)$, где $i \in 0 : n$.

Оснащением называется набор точек ξ_i, принадлежащих отрезку $[a, b]$, где $i \in 1 : n$ и каждая ξ_i принадлежит уникальному подотрезку дробления.

19. Кривая Пеано

Пример. ДОДЕЛАТЬ

20. Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

Определение. Введём следующие понятия:

Гладким путём называется путь[12] $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$, каждая из координатных функций γ_i которого непрерывно дифференцируема.

Вектором скорости называется производная функция пути.

Носителем пути C_γ называется образ пути γ.

21. Длина гладкого пути

Определение. Функция l, заданная на множестве всех гладкий путей, называется *длиной гладкого пути*, если она обладает следуюшими свойствами:

1. $l \geqslant 0$,
2. l — аддитивна, то есть если мы возьмём произвольный путь $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$ и произвольную точку $c \in (a, b)$ и рассмотрим функции γ_1 — сужение γ на отрезок $[a, c]$, и γ_2 — сужение γ на отрезок $[c, b]$, то
$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$
3. Если носитель $C_{\widetilde{\gamma}}$ пути $\widetilde{\gamma}$ является образом сжатия носителя C_γ какого-то пути γ, то длина $\widetilde{\gamma}$ не больше длины γ, то есть если
$$\exists T\colon C_\gamma \underset{\text{на}}{\longrightarrow} C_{\widetilde{\gamma}},\ \textit{такая, что}\ \forall x, y \in C_\gamma \quad \rho(x, y) \geqslant \rho(T(x), T(y)),$$
то $l(\widetilde{\gamma}) \leqslant l(\gamma)$.

[12]Напомним, что *путём* из A в B, где A и $B \in \mathbb{R}^m$, называется непрерывная функция $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$ такая, что $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$.

4. Нормировка: если $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$ — линейный путь из A в B, то есть $\gamma(t) = (1-t)A + tB$, то $l(\gamma) = \rho(A, B)$.

Замечание. Отметим некоторые свойства длины:

1. Из аксиомы 3 следует, что длина дуги больше длины хорды,
2. При растяжении длина растёт,
3. При движении длина пути не меняется.

22. Вариация функции на промежутке

Определение. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Выберём дробление $\tau = \{t_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a,b]$. *Вариацией* функции f на отрезке $[a,b]$ называется величина

$$\bigvee_a^b f = \sup_\tau \sum_{i=0}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Замечание. Если $\bigvee\limits_a^b f < +\infty$, то f называется функцией *ограниченной вариации.*

23. Эпсилон-сеть, сверхограниченное множество

Определение 1. Множество $E \subset X$ *ε-сетью* для D, если

$$\forall x \in D \quad \exists y \in E \quad \rho(x,y) < \varepsilon.$$

Определение 2. Множество D называется *сверхограниченным* в X, если для любого положительного ε существует конечная ε-сеть.

24. *Несобственный интеграл, сходимость, расходимость*

Определение. Рассмотрим функцию $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, которая является кусочно-непрерывной на отрезке $[a,A]$ для любого $A \in (a,b)$ (назовём такую функцию *допустимой*). Символ $\int_a^{\to b} f$ называют *несобственным интегралом.* По определению

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{A \to b-0} \int_a^A f,$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$. Если предел принадлежит $\mathbb{R}$, говорят, что несобственный интеграл *сходится*; в противном случае говорят, что он *расходится.*

25. Критерий Больцано – Коши сходимости несобственного интеграла

Теорема. *Пусть функция f допустима. Интеграл $\int_a^b f$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (a, b) \quad \forall A, B \in (\delta, b) \quad \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon.$$

26. *Гамма-функция Эйлера*

Определение. Функция $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx$ называется *гамма-функцией Эйлера* (причём интеграл сходится при $t > 0$).

27. *Абсолютно сходящиеся интеграл, ряд*

Определение 1. Пусть функция f допустима на $[a, b)$. Интеграл $\int_a^{\to b} f$ называется *абсолютно сходящимся*, если выполяются следующие условия:

1. $\int_a^{\to b} f$ сходится,
2. $\int_a^{\to b} |f|$ тоже сходится.

Определение 2. Аналогично ряд $\sum a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если:

1. Ряд $\sum a_k$ сходится,
2. Ряд $\sum |a_k|$ тоже сходится.

28. *Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость*

Определение. Введём следующие понятия:

Числовым рядом называется выражение вида $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ (иногда для краткости будем писать $\sum a_k$ или даже (A)). Такой объект также называют *формальным рядом.*

Частичной суммой ряда называется выражение вида $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k$ (иногда, если хотим отметить, каким символом обозначаем слагаемое ряда, будем писать S_N^a).

Сходящимся называют ряд, для которого существует конечный предел частичных сумм $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S$ (тогда S называют *суммой ряда*).

Расходящимся называют ряд, для которого справедливо обратное, то есть предела частичных сумм либо не существует, либо он равен бесконечности.

Замечание 1. Начинать нумерацию можно не с единицы, а с любого целого числа A. Тогда переопределим *частичную сумму* как $S_N = \sum\limits_{k=A}^{N} a_k$.

Замечание 2. Очевидно, что $S_N - S_{N-1} = a_N$. Это значит, что подбирать слагаемые, чтобы получить ряд с нужной частичной суммой, очень просто!

29. N-й остаток ряда

Определение. Выражение вида $R_N = \sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ называется *N-м остатком ряда* $\sum a_k$.

30. Критерий Больцано – Коши сходимости числового ряда

Теорема. *Ряд* $\sum a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

31. Произведение рядов, отсортированное произведение

Определение 1. Возьмём биекцию $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, которая переводит x в $(\varphi(x), \psi(x))$. *Произведением* рядов $\sum a_k$, $\sum b_k$ называется ряд вида $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$.

Определение 2. Пусть $\sum a_k \cdot \sum b_k = \sum c_k$, где $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$. Тогда ряд $\sum c_k$ называется *отсортированным произведением*.

32. Перестановка ряда

Определение. Рассмотрим биекцию $\omega\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ряд $\sum b_k$ называется *перестановкой* ряда $\sum a_k$, если для всех k $b_k = a_{\omega(k)}$.

33. Бесконечное произведение

Определение. Выражение $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ называется *бесконечным произведением*. Обозначим $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, то говорят, что произведение *сходится*; если $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$, говорят, что оно расходится к нулю. Во всех остальных случаях (предел равен бесконечности или не существует) говорят, что произведение расходится.

Замечание. Пусть для всех k $a_k \neq 0$. Обозначим $\Pi_n = \prod\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ и отметим некоторые свойства бесконечного произведения:

1. $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \prod\limits_{k=1}^{n-1} a_k \cdot \Pi_n$, и сходимость левой части равносильна сходимости правой для всех n,
2. $\prod a_k$ сходится $\Rightarrow \Pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$,
3. $\prod a_k$ сходится $\Rightarrow a_k \to 1$,
4. Сходимость $\prod a_k$ возможна только если, НСНМ, $a_k > 0$,
5. Пусть $a_k > 0$. Тогда $\prod a_k$ сходится $\Leftrightarrow$ ряд $\sum \ln a_k$ сходится. Причём если $\sum \ln a_k = S$, то $\prod a_k = e^S$.

Доказательство. Докажем, но не очень подробно:

1. Просто перейдём к пределу при $n \to \infty$. Если предел слева существует, то и справа тоже, и наоборот,
2. Следует из того, что $\Pi_n = \frac{\prod a_k}{P_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$,
3. Так как $a_k = \frac{P_k}{P_{k-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$,
4. По теореме о стабилизации знака,

5. Очевидно из того, что

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P,$$
$$\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln P.$$

$\square$

34. Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в $\mathbb{R}^m$

Определение. Напомним, что $\mathbb{R}^m$ — линейное пространтсво вида $\{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Также напомним некоторые понятия:

Скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^m$ называется выражение вида $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Евклидовой нормой $||x||$ вектора $x \in \mathbb{R}^m$ называется выражение вида $\sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$.

Метрикой ρ в $\mathbb{R}^m$ будем называть отображение вида $\rho(x, y) = ||x - y||$.

Замечание (принцип экономии палочек). Далее норму вектора x будем обозначать как $|x|$, а не $||x||$.

35. Окрестность точки в $\mathbb{R}^m$, открытое множество

Определение. Введём следующие понятия:

Шаром $B_r(a)$ с центром в точке a и радиусом r называется множество вида $\{x \mid \rho(x, a) < r\}$.

Эпсилон-окрестностью $U(a)$ точки aназывается шар $B_\varepsilon(a)$.

Открытым множеством назовём множество, каждая точка которого является *внутренней*, то есть входит в него с некоторой окрестностью.

36. *Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$, покоординатная сходимость*

Определение. Последовательность $(x^{(n)})$ (нижний индекс зарезервируем для номера координаты) *сходится* к a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon.$$

Это, очевидно, равносильно *покоординатной сходимости $x^{(n)}$ к a*, то есть тому, что для любого $k \in 1 : m$ $x_k^{(n)} \to a_k$.

37. *Предельная точка, замкнутое множество, замыкание*

Определение. Точка a называется *предельной точкой множества F*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \dot{B}_\varepsilon(a) \cap F \neq \varnothing.$$

Множество называется *закрытым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Замыканием множества G называется минимальное по включению закрытое множество, содержащее G.

38. Координатная функция

Определение. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ следующего вида: $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Функции $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ называются *координатными.*

Замечание. Сходимость и *покоординатная сходимость* функции f определяются привычным образом.

39. Двойной предел, повторный предел

Определение. Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2. Обозначим $D \supset (D_1 \setminus \{a_1\}) \times (D_2 \setminus \{a_2\})$.

Теперь рассмотрим функцию $f\colon D \to \mathbb{R}$. Тогда:

1. Если
$$\forall x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\} \quad \exists \varphi(x_1) := \lim_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2) \in \mathbb{R},$$
то $\lim\limits_{x_1 \to a_1} \varphi(x_1)$ называется *повторным пределом.*

2. Аналогично если

$$\forall x_2 \in D_2 \setminus \{a_2\} \quad \exists \psi(x_2) := \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2) \in \mathbb{R},$$

то $\lim\limits_{x_2 \to a_2} \psi(x_2)$ также называется *повторным пределом.*

3. Если

$$\forall U(L) \quad \exists V_1(a_1), V_2(a_2) \quad \begin{array}{l} \forall x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1, \\ x_2 \in \dot{V}_2(a_2) \cap D_2 \end{array} \quad f(x_1, x_2) \in U(L),$$

то L называется *двойным пределом.*

40. Предел по направлению, предел вдоль пути

Определение 1. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Предел $\lim\limits_{t \to +0} f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = \lim\limits_{x \to a} f(x)|_L$, где L — луч с началом в точке a и вектором v, называется *пределом f по направлению.*

Определение 2. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и гладкий путь γ, причём для любого t $\gamma(t) \neq 0$. Предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)|_{C_\gamma}$, где C_γ — носитель пути γ, называется *пределом f вдоль пути.*

A Приложение

1. Эталонные интегралы

Лемма. *Справедливы утверждения:*

1. *Интеграл* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится в противном случае,*
2. *Интеграл* $\displaystyle\int_{\to 0}^{a} \frac{1}{x^p}$ *сходится при* $p < 1$ *и расходится в противном случае.*
3. *Интеграл* $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-px}$ *сходится при* $p > 0$ *и расходится в противном случае.*

Доказательство. По пунктам:

1. Имеем
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \frac{1}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \left(\begin{cases} \dfrac{1}{1-p} \cdot \dfrac{1}{x^{p-1}}, & \text{если } p \neq 1, \\ \ln x, & \text{если } p = 1 \end{cases} \right) \Bigg|_a^A.$$
Отсюда ясно, что при $p - 1 > 0$ конечный предел существует, а в противном случае предел равен бесконечности.

2. Имеем
$$\int_{\to 0}^{a} \frac{1}{x^p} = \lim_{A\to 0} \int_A^a \frac{1}{x^p} = \lim_{A\to 0} \left(\begin{cases} \dfrac{1}{1-p} \cdot \dfrac{1}{x^{p-1}}, & \text{если } p \neq 1, \\ \ln x, & \text{если } p = 1 \end{cases} \right) \Bigg|_A^a.$$
Отсюда ясно, что при $p - 1 < 0$ конечный предел существует, а в противном случае предел равен бесконечности.

3. Очевидно, если посмотреть на первообразную.

□

Замечание. Назовём вышеописанные интегралы *эталонными*.

2. Эталонные ряды

Лемма. *Справедливы утверждения:*

1. *Ряд* $\sum \dfrac{1}{n^p}$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится в противном случае,*

2. *Ряд* $\sum q^n$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится в противном случае.*

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ $\square$

Замечание. Назовём вышеописанные ряды *эталонными*.