Содержание

I Теоремы

1. Теорема о свойствах неопределённого интеграла

Теорема. *Пусть F — первообразная f на $\langle a, b\rangle$. Тогда:*

1. $\forall C \in \mathbb{R} \quad F + C$ *— тоже первообразная,*
2. *Если G — ещё одна первообразная f на $\langle a, b\rangle$, то $G - F = C \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Тривиально:

1. $(F + C)' = F' = f$,
2. $(G - F)' = 0 \Rightarrow G - F = C \in \mathbb{R}$ (так как $G - F$ возрастает и убывает одновременно).

□

Теорема. *Пусть f и g имеют первообразные на $\langle a, b\rangle$. Тогда:*

1. $$\int (f + g) = \int f + \int g, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f,$$
2. *Пусть $\varphi\colon \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифференцируема. Тогда*
$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C,$$
3. $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0 \quad \int f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C,$$
4. *Пусть f, g дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$ и пусть $f'g$ имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда fg' тоже имеет первообразную, и*
$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Доказательство. Для доказательства первых трёх свойств возьмём производную от обеих частей и увидим, что получилось одно и то же. Доказательство четвёртого свойства:

$$\left(fg - \int f'g\right)' = f'g + fg' - f'g = fg'.$$

□

Замечание (ко второму свойству). Пусть $x = \varphi(t)$ обратима, $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда

$$F(x) = \int f(x)dx = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Bigg|_{t:=\varphi^{-1}(x)}.$$

2. Лемма об ускоренной сходимости

Лемма. *Пусть* $f, g \colon D \subset X \to \mathbb{R}$, *$a$ — предельная точка D. Пусть также* $\exists U(a) \mid \forall x \in \dot{U}(a)\ f(x) \neq 0,\ g(x) \neq 0$ *и*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0. \tag{$*$}$$

Тогда

$$\forall (x_n) \mid \begin{matrix} x_n \to a, \\ x_n \in D, \\ x_n \neq a \end{matrix}\ \exists (y_n) \mid \begin{matrix} y_n \to a, \\ y_n \in D, \\ y_n \neq a \end{matrix}\ \text{такая, что}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{g(y_n)}{g(x_n)},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n)}{g(x_n)}.$$

Доказательство. Будем искать (y_n) как подпоследовательность (x_n): зафиксируем n и выберем в качестве y_n такое x_k, что

$$\left|\frac{g(x_k)}{g(x_n)} < \frac{1}{n}\right|,\ \left|\frac{f(x_k)}{g(x_n)} < \frac{1}{n}\right|.$$

В силу условия $(*)$ такое x_k найдётся для всех n. $\square$

Замечание. Если условие $(*)$ заменить на

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = +\infty,$$

лемма останется верна.

Доказательство (авторское). Члены (y_n) опять будем искать в (x_n): зафиксируем n и положим $y_n = x_n$. Будем искать такое x_{n+p}, что

$$\left|\frac{g(x_n)}{g(x_{n+p})} < \frac{1}{n}\right|,\ \left|\frac{f(x_n)}{g(x_{n+p})} < \frac{1}{n}\right|.$$

После этого положим $y_{n+p} = y_{n+p-1} = \ldots = y_n = x_n$ и проделаем то же самое с y_{n+1}. $\square$

3. Правило Лопиталя

Теорема. *Пусть* $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, f, g *дифференцируемы на* (a,b), *где* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *и* $g' \neq 0$ *на* (a,b). *Пусть также*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right], \ \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и равен* L.

Доказательство. $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ постоянного знака $\Rightarrow g$ монотонна.
Рассмотрим $(x_n) \mid x_n \to a, \ x_n \in (a,b)$ и проверим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$.
Для (x_n) построим (y_n) из леммы об ускоренной сходимости. По теореме Коши $\exists c_n \in (x_n, y_n)$ такое, что

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{g(x_n) - g(y_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Выразим отсюда $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(y_n)}{g(x_n)} + \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \left(1 - \frac{g(y_n)}{g(x_n)}\right).$$

В силу леммы об ускоренной сходимости $\dfrac{f(y_n)}{g(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\dfrac{g(y_n)}{g(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Тогда $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$. $\square$

4. «Теорема Гаусса»

Теорема. *Справедливо следующее равенство:*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство.

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\left(x\frac{d}{dx}\right) f(x) = x + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^n$$

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = x + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^n$$

$$\ldots$$

$$g(x) := \left(x\frac{d}{dx}\right)^k f(x) = 1^kx + 2^kx + 3^kx^2 + \ldots + n^kx^n$$

ДОДЕЛАТЬ □

5. Пример неаналитической функции

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0$.

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ □

6. Теорема Штольца

Теорема. *Пусть* $(x_n), (y_n)$ *— вещественные последовательности,* $x_n \to 0$*,* $y_n \to 0$*, причём* y_n *стремится монотонно. Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}.$$[1]

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$*.*

Лемма (о смешной сумме)**.** *Пусть* $a, b, c, d, m, M > 0$*, пусть также*

$$m < \frac{a}{b} < M,$$
$$m < \frac{c}{d} < M.$$

Тогда $m < \dfrac{a+c}{b+d} < M$*.*

[1] Если $a = 0$, требуем, чтобы x_n тоже стремилось к нулю монотонно.

Доказательство леммы. Имеем

$$\begin{cases} mb < a < Mb \\ md < c < Md. \end{cases}$$

Сложим неравенства, разделим все части на $b+d$ и получим, что требовалось. $\square$

Доказательство теоремы. Рассмотрим различные значения a:

1. Пусть $0 < a < +\infty$ и, НУО[2], $x_n,\ y_n > 0$. Имеем

   $$\forall \varepsilon > 0 \text{ (можно считать, что } \varepsilon < a) \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall N > N_\varepsilon \quad \forall n > N \dots$$

   $$\begin{aligned} \dots a - \varepsilon &< \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon, \\ a - \varepsilon &< \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < a + \varepsilon, \\ &\dots \\ a - \varepsilon &< \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

   Смешно сложим дроби и заметим, что сумма выходит телескопической. Получившееся неравенство будет иметь такой вид:

   $$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon.$$

   Выполним предельный переход при $n \to \infty$. По условию $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, значит, имеем

   $$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon.$$

   Читаем цветной текст и видим определение предела.

[2] Так как $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to a > 0$, по теореме о стабилизации знака $\exists K\ \forall N > K \dots$
$\dots \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 0$. В силу монотонности (y_n), (x_n) тоже монотонна, причём одинаково с y_n. А так как последовательности стремятся к нулю, с какого-то момента они имеют одинаковый знак. Если $x_n < 0$ и $y_n < 0$, сменим у обеих знак — их предела это не изменит.

2. Пусть теперь $-\infty < a < 0$. Это значит, что, НСНМ, либо $x_n > 0$ и $y_n < 0$, либо $x_n < 0$ и $y_n > 0$. Сменим знак отрицательной последовательности — она по-прежнему будет стремиться к нулю, а дробь $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ свой знак сменит (соответственно, a тоже). Таким образом, мы переходим к случаю 1.

3. Случай $a = +\infty$ аналогичен первому. Действительно, имеем

$$\forall E > 0 \quad \exists N_E \quad \forall N > N_E \quad \forall n > N \ldots$$

$$\begin{aligned} \ldots E &< \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \\ E &< \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \\ &\ldots \\ E &< \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}. \end{aligned}$$

   Опять смешно складываем дроби, выполняем предельный переход и получаем определение предела.

4. Случай $a = -\infty$ аналогичен третьему.

5. Пусть теперь $a = 0$. Так как в первой сноске мы дополнительно потребовали монотонность (x_n), можем говорить, что $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ стремится к нулю слева или справа. «Перевернём» её, поменяв числитель и знаменатель местами, и попадём либо в случай 3, либо в случай 4.

Итак, теорема доказана для всех значений a из $\overline{\mathbb{R}}$. □

7. *Интегрирование неравенств, теорема о среднем*

Теорема. *Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$. Тогда если $f \leqslant g$, то*

$$\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g.$$

Доказательство. По определению

$$\int_a^b f = \delta(\Pi\Gamma(f^+, [a,b])) - \delta(\Pi\Gamma(f^-, [a,b])),$$
$$\int_a^b g = \delta(\Pi\Gamma(g^+, [a,b])) - \delta(\Pi\Gamma(g^-, [a,b])).$$

Поскольку $f \geqslant g$, то $\Pi\Gamma(f^+, [a,b]) \subseteq \Pi\Gamma(g^+, [a,b])$. А значит, $\delta(\Pi\Gamma(f^+, [a,b])) \leqslant \delta(\Pi\Gamma(g^+, [a,b]))$. С отрицательной срезкой наоборот, но в силу того, что её ослабленная площадь δ вычитается, неравенство остаётся справедливым. □

Теорема. *Пусть f непрерывны на $[a,b]$. Тогда*

$$\min(f) \cdot (b-a) \leqslant \int\limits_a^b \leqslant \max(f) \cdot (b-a).$$[3]

Доказательство. Заметим, что, так как $\min(f)$ — константа,

$$\int\limits_a^b \min(f) = \min(f) \cdot (b-a).$$

Аналогично для $\max(f)$. Тогда проинтегрируем неравенство $\min(f) \leqslant f \leqslant \max(f)$ по $[a,b]$:

$$\int_a^b \min(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b \max(f)$$
$$\min(f) \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant \max(f) \cdot (b-a).$$

□

8. Теорема Барроу

Теорема. *Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Введём на $[a,b]$ функцию Φ*[4]*:*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f.$$

Тогда Φ дифференцируема на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]$ $\Phi'(x) = f(x)$.

[3] В данной теореме обсуждаются минимум и максимум f на промежутке $[a,b]$.
[4] Функция Φ называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Доказательство (полуавторское). Если $x \neq b$, вычислим Φ'_+:

$$\Phi'_+ = \lim_{y \to x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y - x} \cdot \int_x^y f.$$

По теореме о среднем имеем:

$$\min_{[x,y]}(f) \leqslant \frac{1}{y - x} \cdot \int_x^y f \leqslant \max_{[x,y]}(f).$$

Теперь перейдём к пределу:

$$\lim_{y \to x+0} \min_{[x,y]}(f) = f(x) \leqslant \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y - x} \cdot \int_x^y f \leqslant \lim_{y \to x+0} \max_{[x,y]}(f) = f(x).$$

Выходит, $\Phi'_+ = f$. Аналогично для левой производной при $x \neq a$. □

9. *Формула Ньютона – Лейбница*

Теорема. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$, F — первообразная f на $[a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Введём интеграл с переменным верхним пределом Φ. По теореме Барроу $\Phi'(x) = f(x)$ для любого x из $[a, b]$. Заметим, что $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$, а также что $\Phi(a) = 0$. Тогда имеем:

$$\int\limits_a^b f = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

□

Замечание. Выходит, что определённый интеграл не зависит от выбора ослабленной площади δ.

Замечание. Приращение $F(b) - F(a)$ первообразной обычно записывают в виде $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ или в краткой форме $F(x)\Big|_a^b$.

10. Свойства определённого интеграла

Теорема. *Пусть f, g непрерывны на $[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:*

1. $$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g,$$

2. *Если к тому же f, g дифференцируемы на $[a, b]$, то*
$$\int_a^b f g' = f g\Big|_a^b - \int_a^b f' g,$$

3. *Пусть $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \langle a, b \rangle$ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta \rangle$, пусть также $[p, q] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда*
$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx.$$

Доказательство. Докажем свойства по отдельности:

1. Следует из того, что если F, G — первообразные f, g соответственно, то $\alpha F + \beta G$ — первообразная $\alpha f + \beta g$.

2. Имеем:
$$\begin{aligned} \int_a^b f g' &= f g\Big|_a^b - \int_a^b f' g \\ \int_a^b f g' + \int_a^b f' g &= f g\Big|_a^b \\ \int_a^b (f g' + f' g) &= f g\Big|_a^b \end{aligned}$$
Последнее равенство очевидно.

3. Пусть F — первообразная функции f на $[a, b]$. Так как $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi(t) = f(\varphi(t))\varphi(t)$, то $F(\varphi(t))$ — первообразная

$f(\varphi(t))\varphi(t)$ на $\langle\alpha,\beta\rangle$. Дважды использую формулу Ньютона – Лейбница, получим нужное равенство:

$$\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(t)) = \ldots$$
$$\ldots = F(x)\Big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx.$$

□

11. Неравенство Чебышёва

Теорема. *Пусть f, g непрерывны на $[a,b]$ и монотонны, причём одинаково монотонны. Пусть I_f — среднее значение функции f. Тогда $I_f \cdot I_g \leqslant I_{fg}$.*

Доказательство. Так как f, g монотонны одинаково, справедливо следующее:

$$\forall x, y \in [a,b] \quad (f(x) - f(y)) \cdot (g(x) - g(y)) \geqslant 0.$$

Раскроем скобки:

$$f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y) \geqslant 0.$$

Проинтегрируем неравенство по x на $[a,b]$:

$$\int_a^b fg - \int_a^b f \cdot g(y) - f(y) \cdot \int_a^b g + (b-a) \cdot f(y)g(y) \geqslant 0$$

и разделим на $b-a$:

$$I_{fg} - I_f \cdot g(y) - f(y) \cdot I_g + f(y)g(y) \geqslant 0.$$

Теперь проинтегрируем по y на том же промежутке и опять разделим на $b-a$:

$$I_{fg} - I_f \cdot I_g - I_f \cdot I_g + I_{fg} \geqslant 0.$$

Приведём подобные и получим требуемый результат. □

12. Иррациональность числа пи

Теорема. *Число пи иррационально.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность (H_n):

$$H_n = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos(t)dt.$$

Нам интересно выразить n-й член последовательности через предыдущие. Сперва проинтегрируем H_n по частям: представим подынтегральное выражение как fg', где $f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n$, а $g' = \cos(t)$. Следовательно, $f' = -2t \cdot n \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1}$, а $g = \sin(t)$. Тогда

$$H_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \sin(t)dt.$$

Первое слагаемое зануляется, оставшееся опять проинтегрируем по частям: на этот раз $f = t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1}$, а $g' = \sin(t)$. Следовательно, $f' = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2t^2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$, а $g = -\cos(t)$. Немного подправим f' — во втором слагаемом вместо множителя t^2 запишем $\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{\pi^2}{4}$, то есть f' примет такой вид:

$$\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2\left(\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{\pi^2}{4}\right)(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2},$$

$$\text{или } \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + 2\left(\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right) - \frac{\pi^2}{4}\right)(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}.$$

Раскроем скобки:

$$\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + 2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2(n-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2},$$

и приведём подобные:

$$(2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - (n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}.$$

Запишем, наконец, результат интегрирования по частям $\Big(fg\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ снова занулится, поэтому его писать не будем $\Big)$:

$$
\begin{aligned}
&H_n = -\frac{2}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}(-\cos(t))dt + \dots \\
&\dots + \frac{2}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}(-\cos(t))dt = \dots \\
&\dots = \frac{4n-2}{(n-1)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\cos(t)dt - \dots \\
&\dots - \frac{\pi^2}{(n-2)!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}\cos(t)dt = \dots \\
&\dots = (4n-2)H_{n-1} + \pi^2 H_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Итак, мы нашли рекуррентную формулу для H_n. Теперь мы можем выразить любой член последовательности, кроме нулевого и первого. Вычислим их непосредственно (при вычислении H_1 придётся два раза проинтегрировать по частям):

$$
\begin{aligned}
&H_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)dt = 2, \\
&H_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)\cos(t)dt = \left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)\sin(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(t)dt = \dots \\
&\dots = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt = -2t\cos(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(t)dt = 4.
\end{aligned}
$$

Используем же, наконец, всё это, чтобы доказать, что π (и даже π^2) иррационально. Заметим, что H_n — многочлен с целыми коэффициентами от π^2, причём степени не больше, чем n. Действительно, чтобы по полученной ранее рекурентной формуле разложить H_n до целых чисел H_0 и H_1, потребуется применить её $n-1$ раз, соответственно π^2 может входить в получившийся в результате разложения многочлен в степени уж точно не больше, чем n. Обозначим этот многочлен как $P_n(\pi^2)$.

Предположим теперь, что π^2 — рациональное число, то есть $\pi^2 = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Заметим, что тогда $q^n P_n(\pi^2)$ — целое число (так как домножением на q^n мы сократили все знаменатели). Мы также знаем, что $P_n(\pi^2) = H_n > 0$, так как подынтегральная функция в H_n равна нулю в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ и положительна в остальных. Следовательно, $q^n P_n(\pi^2)$ —

это как минимум единица. Запишем подробнее:

$$q^nP_n(\pi^2)=q^nH_n=\frac{q^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\cos(t)dt\geqslant 1.$$

Оценим нашу функцию сверху, пользуясь теоремой о среднем, только для простоты возьмём немного завышенный максимум: $\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)\leqslant 4$ при любом t из $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Так как $|\cos(t)|\leqslant 1$, подынтегральное выражение не превосходит 4^n, а интеграл как интеграл константы не превосходит $4^n\pi$. Имеем следующее:

$$\frac{q^n}{n!}4^n\pi\geqslant\frac{q^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\cos(t)dt\geqslant 1.$$

Так как это справедливо для любого натурального n, устремим его в бесконечность:

$$1\leqslant\frac{q^n}{n!}4^n\pi\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Получили противоречие. $\square$

13. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Теорема. *Пусть $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, функция f дифференцируема $n+1$ раз на $\langle a,b\rangle$, $x_0\in\langle a,b\rangle$. Тогда*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^nf^{(n+1)}(t)dt.$$

Доказательство. Докажем индукцией по n. База — $n=0$:

$$f(x)=f(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}f'(t)dt$$

$$\int\limits_{x_0}^{x}f'(t)dt=f(x)-f(x_0).$$

Последнее равенство — формула Ньютона – Лейбница для $f'(x)$.

Индукционный переход от n к $n+1$ осуществляется интегрированием по частям n-го остатка, в результате которого мы получим $(n+1)$-й остаток и очередное слагаемое многочлена Тейлора. Возьмём $f^{(n+1)}(t)$ в качестве f и $(x-t)^n$ в качестве g':

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+1)}(t)\right)\Bigg|_{x_0}^{x} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt.$$

□

14. Лемма о трёх хордах

Теорема. *Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Функция f выпукла на $\langle a,b\rangle$,*
2. *Для любых $x_1, x_2, x_3 \in \langle a,b\rangle$, таких, что $x_1 < x_2 < x_3$, справедливо:*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Доказательство. Докажем равносильность сначала для левой части двойного неравенства, а потом для правой. Напомним определение выпуклости:

$$f(x) \leqslant \frac{x_3-x}{x_3-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_3-x_1}f(x_3), \quad x \in (x_1,x_3).$$

Подставим в него x_2 и получим

$$f(x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_3),$$

где $t = \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, $1-t = \dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$. Преобразуем неравенство двумя способами. С одной стороны,

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + (1-t)(f(x_3)-f(x_1)) = f(x_1) + (x_2-x_1)\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

что равносильно левой части двойного неравенства. С другой стороны,

$$f(x_2) \leqslant f(x_3) - t(f(x_3) - f(x_1)) = f(x_3) - (x_3 - x_2)\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

что равносильно правой части двойного неравенства. $\square$

15. Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

Теорема. *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ существуют конечные $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, причём $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.*

Доказательство. Возьмём $x \in (a, b)$ и положим

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \qquad \xi \in \langle a, b\rangle \setminus \{x\}.$$

По лемме о трёх хордах g возрастает на $\langle a, b\rangle \setminus \{x\}$. Поэтому если $a < \xi < x < \eta < b$, то

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leqslant \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x}.$$

Следовательно, g ограничена на $\langle a, x)$ сверху, а на $(x, b\rangle$ — снизу. По теореме о пределе монотонной функции существуют конечные пределы $g(x-)$ и $g(x+)$, которые по определению являются односторонними производными $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$. Устремляя ξ к x слева, а η к x справа, получаем, что $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$. $\square$

ВОЗМОЖНО, ПЕРЕПИСАТЬ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

16. Описание выпуклости с помощью касательных

Теорема. *Пусть функция f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда график f лежит не ниже любой своей касательной, то есть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$:*

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{$*$}$$

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность отдельно.

- $\Rightarrow$ Пусть f выпукла вниз, $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Если $x > x_0$, то по лемме о трёх хордах для любого $\eta \in (x_0, x)$

$$\frac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0} \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

  Устремляя η к x_0, получаем неравенство

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

  равносильное $(*)$.

  Если $x < x_0$, то по лемме о трёх хордах для любого $\xi \in (x, x_0)$

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

  Устремляя ξ к x_0, получаем неравенство

$$f'(x_0) \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

  равносильное $(*)$.

- $\Leftarrow$ Пусть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ верно неравенство $(*)$. Возьмём $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle \mid x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. Применяя неравенство $(*)$ дважды: сначала к точкам x_1 и x, а затем — к x_2 и x, получаем

$$f(x_1) \geqslant f(x) + f'(x)(x_1 - x), \qquad f(x_2) \geqslant f(x) + f'(x)(x_2 - x),$$

  что равносильно

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

  Крайние части составляют неравенство, равносильное неравенству из определения выпуклости. Действительно, домножим обе части на знаменатели, выразим $f(x)$ и получим требуемое неравенство.

$\square$

ВОЗМОЖНО, ДОДЕЛАТЬ ПРО СЛЕДСТВИЕ

17. Дифференциальные критерии выпуклости

Теорема. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда:*

1. *Если f дифференцируема на (a, b), то f (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда f' (строго) возрастает на $\langle a, b\rangle$.*

2. *Если f дважды дифференцируема на (a, b), то f выпукла вниз в том и только том случае, когда $f''(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$.*

Доказательство. Докажем критерии по отдельности.

1. Докажем сперва необходимость, а потом достаточность.

   $\Rightarrow$ Возьмём $x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2$. Согласно описанию выпуклости с помощью касательных, имеем

   $$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2). \tag{1}$$

   Действительно, сначала запишем неравенство для касательной в точке x_1 и подставим в него x_2, получив левую часть, а потом запишем неравенство для касательной в точке x_2 и подставим в него x_1, получив правую часть. Но ведь получившееся неравенство и означает возрастание f'.

   $\Leftarrow$ Возьмём $x_1, x_2 \in (a, b) \mid x_1 < x_2$ и $x \in (x_1, x_2)$. По теореме Лагранжа существуют такие ${}_1 \in (x_1, x)$ и ${}_2 \in (x, x_2)$, что

   $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

   Тогда $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$, а f' по условию возрастает, поэтому $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, то есть

   $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \tag{2}$$

   что равносильно неравенству из определения выпуклости (аналогично ситуации в доказательстве описания выпуклости с помощью касательных).

   Если f строго выпукла вниз, то оба неравенства в (1) строгие. Обратно, если f' строго возрастает, то неравенство (2) строгое, что влечёт строгую выпуклость f.

2. По пункту 1 выпуклость f равносильна возрастанию f', которое по критерию монотонности равносильно неотрицательности f''.

$\square$

II Определения и формулировки

1. *Первообразная, неопределённый интеграл*

Определение. Пусть $F, f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция F называется *первообразной* f на $\langle a, b\rangle$, если

$$\forall x \in \langle a, b\rangle \quad F'(x) = f(x).$$

Определение. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. *Неопределённым интегралом* функции f на $\langle a, b\rangle$ (обозначается как $\int f$ или $\int f(x)dx$) называется множество её первообразных, то есть

$$\int f = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\},$$

где F — первообразная f на $\langle a, b\rangle$.

2. Теорема о существовании первообразной

Теорема. *Всякая непрерывная на промежутке функция имеет на нём первообразную.*

3. *Таблица первообразных*

ДОДЕЛАТЬ

4. Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

Определение. Назовём *фигурой* ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^2$. Пусть ε — множество всех фигур. Функция $\delta\colon \varepsilon \to [0; +\infty)$ называется *площадью*, если выполнены следующие условия:

1. Аддитивность: если $A = A_1 \sqcup A_2$, то $\delta(A) = \delta(A_1) + \delta(A_2)$,
2. Нормировка: $\delta([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$.

Замечание. Некоторые свойства δ:

1. δ монотонна: $A \subset B \Rightarrow \delta(A) \leqslant \delta(B)$,
2. A — вертикальный отрезок $\Rightarrow \delta(A) = 0$.

Доказательство. Докажем свойства по отдельности:

1. Поскольку $B = A \sqcup (B \setminus A)$, то $\delta(B) = \delta(A) + \delta(B \setminus A) \geqslant \delta(A)$,

2. Рассмотрим A как $[a,b] \times [c,d]$, где $\forall \varepsilon > 0$ $(b-a) < \varepsilon$. Значит, $(b-a) = 0 \Rightarrow \delta(A) = 0$.

$\square$

Определение. Назовём функцию $\delta\colon \varepsilon \to [0;+\infty)$ *ослабленной площадью*, если выполняются следующие условия:

1. Монотонность: если $A \subset B$, то $\delta(A) \leqslant \delta(B)$,

2. Нормировка: $\delta([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$,

3. Ослабленная аддитивность. Пусть $A \in \varepsilon$, l — вертикальный промежуток, $A_{\text{Л}}$ — часть A в левой полуплоскости, $A_{\text{П}}$ — часть A в правой полуплоскости (заметим, что $A = A_{\text{Л}} + A_{\text{П}}$ и $A_{\text{Л}} \cap A_{\text{П}} \subset l$). Тогда $\delta(A) = \delta(A_{\text{Л}}) + \delta(A_{\text{П}})$.

5. Положительная и отрицательная срезки

Определение. Пусть $f\colon \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$. Назовём функцию $f^+ = \max(f,0)$ *положительной срезкой*, а функцию $f^- = \max(-f,0)$ — *отрицательной срезкой*. Заметим также, что $f = f^+ - f^-$ и $|f| = f^+ + f^-$.

6. *Определённый интеграл*

Определение. Пусть $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$. Назовём *подграфиком* f на $[a,b]$ (обозначается как $\Pi\Gamma(f,[a,b])$) следующее множество:

$$\{(x,y) \mid x \in [a,b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Определение. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, δ — ослабленная площадь. *Определённым интегралом* f на $[a,b]$ называется

$$\delta(\Pi\Gamma(f^+,[a,b])) - \delta(\Pi\Gamma(f^-,[a,b])).$$

Обозначается как

$$\int\limits_b^a f(x)dx \text{ или } \int\limits_b^a f.$$

Замечание. Некоторые свойства и соглашения:

1.
$$\text{Если } f \geqslant 0, \text{ то } \int_a^b f \geqslant 0,$$

2.
$$\text{Если } f \equiv c \in \mathbb{R}, \text{ то } \int_a^b f = c \cdot (b-a),$$

3.
$$\int_a^b (-f) = -\int_b^a f,$$

4.
$$\text{Можно считать, что } \int_a^a f = 0,$$

5.
$$\forall c \in [a,b] \qquad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Доказательство. Небольшие пояснения:

1. В силу того, что $f^- \equiv 0$,
2. Так как подграфик f — прямоугольник,
3. Поскольку $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$,
4. Потому что подграфик f — вертикальный отрезок,
5. В силу ослабленной аддитивности.

□

7. Среднее значение функции на промежутке

Определение. Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Тогда

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$$

называется *средним значением функции* f *на промежутке* $[a,b]$.

8. *Выпуклая функция*

Определение. Функция $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ называется:

- *выпуклой вниз* на $\langle a,b\rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ и $t \in (0,1)$ выполняется неравенство
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2);$$
- *строго выпуклой вниз* на $\langle a,b\rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ и $t \in (0,1)$ выполняется неравенство
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Если выполняются противоположные неравенства, то функция f называется соответственно *выпуклой вверх* или *сторого выпуклой вверх* на $\langle a,b\rangle$.

Часто функции, которые только что были названы выпулыми вниз, называют просто *выпуклыми*, а те, что были названы выпуклыми вверх, — *вогнутыми*.

Поясним геометрический смысл производной. Пусть$x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ и, НУО[5], $x_1 < x_2$. Положим $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Тогда
$$t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{и} \quad 1 - t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$
При этом, если $x \in (x_1, x_2)$, то $t \in (0,1)$, и обратно. Неравенство, определяющее выпуклую функцию, переписывается в виде
$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad x \in (x_1, x_2).$$
Правая часть этого неравенства при $x \in [x_1, x_2]$ задаёт уравнение хорды, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ на графике f. Таким образом, выпуклость функции вниз означает, что график функции лежит не выше любой хорды, соединяющей две его точки. Строгая выпуклость вниз означает, что график лежит ниже любой хорды, за исключением концевых точек. Выпуклость функции вверх, напротив, означает, что график функции лежит не ниже любой хорды.

[5]Неравенства в определении не меняются при перемене x_1 и x_2 местами.

9. Выпуклое множество

Определение. Множество A в $\mathbb{R}^m$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми точками x, y ему также принадлежит отрезок $[x, y]$[6], соединяющий их.

10. Надграфик

Определение. *Надграфиком* функции f на $\langle a, b\rangle$ называется такое множество:

$$\{(x, y) \mid x \in \langle a, b\rangle,\ y \geqslant f(x)\}.$$

Замечание. Функция f выпукла на $\langle a, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ надграфик f на $\langle a, b\rangle$ — выпуклое множество.

Доказательство. Функция f выпукла на $\langle a, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ любая хорда принадлежит надграфику f на $\langle a, b\rangle$ $\Leftrightarrow$ надграфик f — выпуклое множество (если работает для хорд, сработает и для остальных отрезков, соединяющих две точки надграфика, потому что эти точки «выше» точек графика). $\square$

11. Опорная прямая

Определение. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Прямая, задаваемая уравнением $y = \ell(x)$, называется *опорной* для функции f в точке x_0, если

$$f(x_0) = \ell(x_0) \quad \text{и} \quad f(x) \geqslant \ell(x) \quad \text{для всех } x \in \langle a, b\rangle.$$

Если же

$$f(x_0) = \ell(x_0) \quad \text{и} \quad f(x) > \ell(x) \quad \text{для всех } x \in \langle a, b\rangle \setminus \{x_0\},$$

то прямая называется *строго опорной* для функции f в точке x_0.

Другими словами, прямая называется опорной к f в точке x_0, если она проходит через точку $(x_0, f(x_0))$ и лежит не выше графика функции. Строго опорная прямая лежит ниже графика функции во всех точках, кроме $(x_0, f(x_0))$.

[6] $[x, y] = \{x + t(y - x),\ t \in [0, 1]\}$.

12. Кусочно-непрерывная функция, интеграл от неё

Определение. Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-непрерывной*, если она непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, в которых имеет разрывы первого рода.

Определение. Пусть f — кусочно-непрерывная функция, $\widetilde{f}_k$ — её сужение на промежуток $[x_{k-1}, x_k]$, то есть

$$\widetilde{f}_k = f\big|_{[x_{k-1},x_k]} = \begin{cases} f(x_{k-1}+0), & x = x_{k-1} \\ f(x), & x \in (x_{k-1}, x_k) \\ f(x_k - 0), & x = x_k. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{f}_k$$

называется *интегралом кусочно-непрерывной функции* f.

13. Почти первообразная

Определение. Пусть $F, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Функция F называется *почти первообразной* f на $[a,b]$, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,b]$, кроме конечного числа.

Замечание. Если f — кусочно-непрерывная функция, у неё существует почти первообразная.

Доказательство. Пусть F_k — первообразная $\widetilde{f}_k$ на $[x_{k-1}, x_k]$.
ДОДЕЛАТЬ □

Замечание. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — кусочно-непрерывная функция, F — почти первообразная f на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда

$$\int_a^b = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{f}_k = \sum_{k=1}^{n} F_k(x_k) - F_k(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}).$$

Получили телескопическую сумму, после приведения подобных равную $F(a) - F(b)$ □

14. Функция промежутка, аддитивная функция промежутка