Домашнее задание №2, Марченко М.

Задача 1. *Докажите, что вещественное число определимо в структуре* $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$ *тогда и только тогда, когда оно алгебраическое. Охарактеризуйте вещественные числа, определимые в структуре* $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$.

Примите без доказательства, что в упорядоченном поле вещественных чисел любая формула равносильна подходящей бескванторной формуле

Решение. Термы в структуре $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$ представляют собой многочлены с целыми коэффициентами. Из этого очевидным образом следует достаточность, обсудим необходимость.

Если предикат $x = \alpha$ задаётся атомарной формулой, она представляет собой $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы. Тогда α является корнем $t_1 - t_2$ — многочлена с целыми коэффициентами.

Если $x = \alpha$ задаётся формулой вида $\psi_1 \wedge \psi_2$, где ψ_1, ψ_2 — атомарные, перейдём к рассмотрению ψ_1, ψ_2 и таким же образом заключим, что α — алгебраическое. Аналогично с $\vee, \neg$ и $\to$.

Если же $x = \alpha$ задаётся формулой $\forall y \;\; \psi$, где ψ — бескванторная, можно зафиксировать значение y и получить, что α является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. Аналогично с $\exists$. ■

Из предыдущих рассуждений получаем, что для всех вещественных чисел, определимых в $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$, соответствующий предикат задаётся формулой вида $t = 0$, где t — некоторый терм. ■

Задача 2. *Докажите, что комплексное число определимо в структуре* $(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$ *тогда и только тогда, когда оно рациональное.*

Примите без доказательства, что в поле комплексных чисел любая формула равносильна подходящей бескванторной формуле.

Решение. TODO ■

Задача 3. *Докажите, что в стандартной модели арифметики* $(\mathbb{N}; =, +, \cdot)$ *определимы: любое конкретное натуральное число; отношения строгого порядка и делимости; множество всех простых чисел; отношение быть простыми близнецами; множества степеней двойки, тройки, четвёрки, пятёрки.*

Решение.

- Число n определимо тогда и только тогда, когда определим предикат $x = n$. Предикат $x = 1$ задаётся формулой $\forall n \;\; x \cdot n = n$. Индуктивно можно определить произвольное натуральное число: предикат $x = n$ задаётся формулой $x = (n - 1) + 1$;
- Предикат $x < y$ задаётся формулой $\exists n \;\; y = x + n$, а предикат $x \mid y$ — формулой $\exists n \;\; y = x \cdot n$;
- Предикат «x — простое число» задаётся формулой $(x \neq 1) \wedge (\forall n \;\; n \neq x \wedge n \neq 1 \to n \nmid x)$.
- Предикат «x и y — простые близнецы» задаётся следующей формулой:

$$(x \text{ — простое}) \wedge (y \text{ — простое}) \wedge (y = x + 2 \vee x = y + 2).$$

- Предикат «x — степень двойки» задаётся следующей формулой:

$$\forall n \;\; (n \mid x \wedge n \text{ — простое}) \to n = 2.$$

  Аналогично можно задать множество степеней тройки и пятёрки. Множество же степеней четвёрки можно задать индуктивно с помощью формулы

$$(x = 1) \vee (\exists n \;\; x = 4 \cdot n \wedge n \text{ — степень четвёрки}).$$

■

Задача 4. *Пусть A — k-буквенный алфавит, где $k \geqslant 2$. Определим бинарные отношения $\leqslant_p, \leqslant_s, \leqslant_i$ и $\preceq$ на A^* следующим образом:*

- *$u \leqslant_p v$, если $ux = v$ для некоторого $x \in A^*$;*
- *$u \leqslant_s v$, если $xu = v$ для некоторого $x \in A^*$;*
- *$u \leqslant_i v$, если $xuy = v$ для некоторых $x, y \in A^*$;*
- *$u \preceq v$, если u получается из v стиранием некоторых букв.*

Докажите, что:

1. *Отношение $\leqslant_i$ определимо через отношения $\leqslant_p$ и $\leqslant_s$;*
2. *Пустое слово определимо через любое из этих отношений;*
3. *Множество всех слов фиксированной длины определимо через любое из этих отношений;*
4. *Никакое фиксированное непустое слово не определимо через все эти отношения;*
5. *Существует двухбуквенное слово, не определимое через отношения $\leqslant_i, \preceq$ и однобуквенные слова;*
6. *Опишите все слова, не определимые как в предыдущем вопросе.*

Решение. 1. Отношение $\leqslant_i$ задаётся формулой $\exists x \;\; u \leqslant_p x \wedge x \leqslant_s v$;

2. Предикат $x = \epsilon$ задаётся формулой $\forall u \;\; x \leqslant u$, где $\leqslant$ — любое из введённых отношений;
3. Соответствующий предикат задаётся формулой $\forall x \; \forall y \;\; x \nleqslant y$, где $\leqslant$ — любое из введённых отношений;

TODO ■

Задача 5. *Докажите, что любой элемент структуры $(A^*; \leqslant_i)$, обогащённой константами для всех слов длины не более двух, определим. Охарактеризуйте группу автоморфизмов структуры $(A^*; \leqslant_i)$. Докажите аналогичные результаты для отношения $\preceq$ вместо $\leqslant_i$.*

Решение. TODO ■