Домашнее задание №2, Марченко М.

Задача 1. *Докажите, что вещественное число определимо в структуре* $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$ *тогда и только тогда, когда оно алгебраическое. Охарактеризуйте вещественные числа, определимые в структуре* $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$.

Примите без доказательства, что в упорядоченном поле вещественных чисел любая формула равносильна подходящей бескванторной формуле

Решение. Термы в структуре $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$ представляют собой многочлены с рациональными коэффициентами. Из этого очевидным образом следует достаточность, обсудим необходимость.

Если предикат $x = \alpha$ задаётся атомарной формулой, она представляет собой $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы. Тогда α является корнем $t_1 - t_2$ — многочлена с рациональными коэффициентами.

Если $x = \alpha$ задаётся формулой вида $\psi_1 \wedge \psi_2$, где ψ_1, ψ_2 — атомарные, перейдём к рассмотрению ψ_1, ψ_2 и таким же образом заключим, что α — алгебраическое. Аналогично с $\vee, \neg$ и $\rightarrow$.

Если же $x = \alpha$ задаётся формулой $\forall y \;\; \psi$, где ψ — бескванторная, можно зафиксировать значение y и получить, что α является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Аналогично с $\exists$. ∎

Из предыдущих рассуждений получаем, что для всех вещественных чисел, определимых в $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$, соответствующий предикат задаётся формулой вида $t = 0$, где t — некоторый терм. ∎

Задача 3. *Докажите, что в стандартной модели арифметики* $(\mathbb{N}; =, +, \cdot)$ *определимы: любое конкретное натуральное число; отношения строгого порядка и делимости; множество всех простых чисел; отношение быть простыми близнецами; множества степеней двойки, тройки, четвёрки, пятёрки.*

Решение.

- Число n определимо тогда и только тогда, когда определим предикат $x = n$. Предикат $x = 1$ задаётся формулой $\forall n \;\; x \cdot n = n$. Индуктивно можно определить произвольное натуральное число: предикат $x = n$ задаётся формулой $x = (n-1) + 1$;
- Предикат $x < y$ задаётся формулой $\exists n \;\; y = x + n$, а предикат $x \mid y$ — формулой $\exists n \;\; y = x \cdot n$;
- Предикат «x — простое число» задаётся формулой $(x \neq 1) \wedge (\forall n \;\; n \neq x \wedge n \neq 1 \rightarrow n \nmid x)$.
- Предикат «x и y — простые близнецы» задаётся следующей формулой:

$$(x \text{ — простое}) \wedge (y \text{ — простое}) \wedge (y = x + 2 \vee x = y + 2).$$

- Предикат «x — степень двойки» задаётся следующей формулой:

$$\forall n \;\; (n \mid x \wedge n \text{ — простое}) \rightarrow n = 2.$$

  Аналогично можно задать множество степеней тройки и пятёрки. Множество же степеней четвёрки можно задать индуктивно с помощью формулы

$$(x = 1) \vee (\exists n \;\; x = 4 \cdot n \wedge n \text{ — степень четвёрки}).$$

∎

Задача 4. *Пусть* A — k*-буквенный алфавит, где* $k \geqslant 2$*. Определим бинарные отношения* $\leqslant_p, \leqslant_s, \leqslant_i$ *и* $\preceq$ *на* A^* *следующим образом:*

- $u \leqslant_p v$, *если* $ux = v$ *для некоторого* $x \in A^*$;
- $u \leqslant_s v$, *если* $xu = v$ *для некоторого* $x \in A^*$;
- $u \leqslant_i v$, *если* $xuy = v$ *для некоторых* $x, y \in A^*$;
- $u \preceq v$, *если* u *получается из* v *стиранием некоторых букв.*

Докажите, что:

1. *Отношение* $\leqslant_i$ *определимо через отношения* $\leqslant_p$ *и* $\leqslant_s$;
2. *Пустое слово определимо через любое из этих отношений;*
3. *Множество всех слов фиксированной длины определимо через любое из этих отношений;*
4. *Никакое фиксированное непустое слово не определимо через все эти отношения;*
5. *Существует двухбуквенное слово, не определимое через отношения* $\leqslant_i, \preceq$ *и однобуквенные слова;*
6. *Опишите все слова, не определимые как в предыдущем вопросе.*

Решение.

1. Отношение $\leqslant_i$ задаётся формулой $\exists x \;\; u \leqslant_p x \land x \leqslant_s v$;
2. Предикат $x = \epsilon$ задаётся формулой $\forall u \;\; x \leqslant u$, где $\leqslant$ — любое из введённых отношений;
3. Соответствующий предикат задаётся формулой $\forall x \; \forall y \;\; x \nleqslant y$, где $\leqslant$ — любое из введённых отношений;

TODO ■