

Домашнее задание №1, Марченко М.

Задача 1. Запишите аксиомы теории групп предложениями следующих сигнатур: $\{=, \cdot\}$, $\{=, \cdot, e\}$, $\{=, \cdot, e, {}^{-1}\}$, $\{=, P\}$, где P — трёхместный предикатный символ, обозначающий график умножения. Какая из этих сигнатур лучше соответствует изложению теории групп? Сделайте синтаксический анализ полученных формул.

Решение. • $\{=, \cdot\}$:

1. $\forall a \forall b \forall c (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
2. $\exists e \forall a e \cdot a = a \wedge a \cdot e = a$,
3. $\forall a_1 \exists a_2 \forall b (a_1 \cdot a_2) \cdot b = b \wedge (a_2 \cdot a_1) \cdot b = b \wedge b \cdot (a_1 \cdot a_2) = b \wedge b \cdot (a_2 \cdot a_1) = b$.

• $\{=, \cdot, e\}$:

1. $\forall a \forall b \forall c (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
2. $\forall a e \cdot a = a \wedge a \cdot e = a$,
3. $\forall a_1 \exists a_2 a_1 \cdot a_2 = e \wedge a_2 \cdot a_1 = e$.

• $\{=, \cdot, e, {}^{-1}\}$:

1. $\forall a \forall b \forall c (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
2. $\forall a e \cdot a = a \wedge a \cdot e = a$,
3. $\forall a_1 \exists a_2 a_2 = a_1^{-1}$.

• $\{=, P\}$ (пусть \mathbb{G} — σ -структура, где $\sigma = \{=, P\}$):

1. $\forall a \forall b \forall c \mathbb{G} \models P(a \cdot b, c, a \cdot (b \cdot c))$,
2. $\exists e \forall a \mathbb{G} \models P(e, a, a) \wedge \mathbb{G} \models P(a, e, a)$,
3. $\forall a_1 \exists a_2 \forall b \mathbb{G} \models P(a_1 \cdot a_2, b, b) \wedge \mathbb{G} \models P(a_2 \cdot a_1, b, b) \wedge \mathbb{G} \models P(b, a_1 \cdot a_2, b) \wedge \mathbb{G} \models P(b, a_2 \cdot a_1, b)$.

Для изложения теории групп лучше всего подходит сигнатура $\{=, \cdot, e, {}^{-1}\}$, так как содержит ключевые для неё понятия нейтрального и обратного элементов.

TODO

Задача 2. Докажите основные равносильности. Докажите, что любую формулу можно привести к предварённому виду, в котором бескванторная часть является ДНФ бескванторных формул.

Решение. Основные равносильности легко доказать, построив таблицы истинности для формул слева и справа от \equiv и убедившись, что они одинаковые.

Используя равносильности для кванторов, последние можно «протаскать» в начало формулы, после чего с помощью первых десяти равносильностей привести бескванторную часть формулы к ДНФ.

Задача 3. Существует ли алгоритм, вычисляющий значение $\varphi^{\mathbb{A}}$ по любой конечной сигнатуре σ , σ -предложению φ и конечной σ -структуре \mathbb{A} . Если да, оцените время работы вашего алгоритма.

Решение. Ниже приведён псевдокод алгоритма:

1: **function** EVALUATE(φ, \mathbb{A})

```

2:   if  $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$  then           ▷ если  $\varphi$  — атомарная, вычислить значения термов и  $\varphi$ 
3:   |   return  $P(t_1, \dots, t_n)$ 

4:   ▷ если  $\varphi$  содержит логические связки, её значение вычисляется рекурсивно
5:   if  $\varphi = \neg\psi$  then
6:   |   return  $\neg \text{EVALUATE}(\psi, \mathbb{A})$ 
7:   if  $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$  then
8:   |   return  $\text{EVALUATE}(\psi_1, \mathbb{A}) \wedge \text{EVALUATE}(\psi_2, \mathbb{A})$ 
9:   if  $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$  then
10:  |   return  $\text{EVALUATE}(\psi_1, \mathbb{A}) \vee \text{EVALUATE}(\psi_2, \mathbb{A})$ 
11:  if  $\varphi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$  then
12:  |   return  $\neg \text{EVALUATE}(\psi_1, \mathbb{A}) \vee \text{EVALUATE}(\psi_2, \mathbb{A})$ 

13:  ▷ если  $\varphi$  содержит кванторы, перебираем все  $|\sigma|$  возможных значений переменных
14:  if  $\varphi = \forall x \psi$  then
15:  |   for all  $a \in \mathbb{A}$  do
16:  |   |   if  $\neg \text{EVALUATE}(\psi(a), \mathbb{A})$  then
17:  |   |   |   return  $\perp$ 
18:  |   return  $\top$ 
19:  if  $\varphi = \exists x \psi$  then
20:  |   for all  $a \in \mathbb{A}$  do
21:  |   |   if  $\text{EVALUATE}(\psi(a), \mathbb{A})$  then
22:  |   |   |   return  $\top$ 
23:  |   return  $\perp$ 

```

Если n — количество переменных в φ , а $|\varphi|$ — длина формулы φ , то время работы алгоритма можно оценить как $O(|\varphi| \cdot |\sigma|^n)$. ■

Задача 4. Докажите, что отношение \leq не определимо в структуре $(\mathbb{Z}, =, +)$, а операция $+$ не определима в структуре $(\mathbb{Z}, =, \leq)$.

Решение. Пусть $g: x \mapsto -x$, тогда g — автоморфизм. Так как $a \leq b \not\Rightarrow -a \leq -b$, то отношение \leq не инвариантно, а следовательно, не определимо. ■

Функция определима тогда и только тогда, когда определим её график. Но с помощью $=$ и \leq мы можем определять только вертикальные и горизонтальные прямые, а также участки плоскости, ограниченные этими прямыми, в то время, как график $+$ — наклонная прямая. ■

Задача 5. Напишите предложения сигнатуры $\{=, \leq\}$ такие, что любая модель получившегося множества предложений является плотным линейным порядком с наименьшим, но без наибольшего элемента. Докажите, что любые две счётные модели этого множества изоморфны. Верно ли это для моделей мощности континуум?

Решение. Просто составим требуемое множество из определения плотного линейного порядка с наименьшим, но без наибольшего элемента:

- $\forall x \forall y \ x \neq y \rightarrow (x \leq y \vee y \leq x),$
- $\forall x \forall y \ x \leq y \rightarrow (\exists z \ x \leq z \leq y),$
- $\exists m \forall x \ m \leq x,$
- $\forall x \exists y \ x \leq y.$

■

Рекурсивно построим изоморфизм φ между произвольной моделью этого множества и структурой $(\mathbb{Q}_+, =, \leq)$. Пусть $\varphi(m) = 0$; если мы нашли образы для элементов $\{a_i\}_{i=0}^k$ (пусть этот список отсортирован по возрастанию), то образ элемента a_{k+1} найдём следующим образом: если $a_k \leq a_{k+1}$, то выберем произвольное рациональное число, большее $\varphi(a_k)$ в качестве образа a_{k+1} . В противном случае найдём в списке рассмотренных такие числа, что $a_i \leq a_{k+1} \leq a_{i+1}$ и выберем произвольное рациональное число между $\varphi(a_i)$ и $\varphi(a_{i+1})$ в качестве образа a_{k+1} . ■

TODO ■