Домашнее задание №4, Марченко М.

Задача 1. *Пусть $\mathbb{N}$ — стандартная структура натуральных чисел в сигнатуре $\{=, +, \cdot\}$ и $\mathrm{Th}(\mathbb{N}) := \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\}$. Нестандартной моделью арифметики называется модель теории $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$, не изоморфная $\mathbb{N}$. Докажите, что существует нестандартная модель арифметики и опишите структуру порядка в счётной нестандартной модели.*

Решение. TODO ∎

Задача 2. *Будут ли (конечно) аксиоматизируемыми следующие классы структур (подходящей сигнатуры):*

- *всех групп; всех конечных групп; всех бесконечных групп; всех абелевых групп; всех циклических групп; всех групп без кручения;*
- *всех полей; всех конечных полей; всех полей фиксированной характеристики; всех бесконечных полей; всех алгебраически замкнутых полей; всех алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики;*
- *всех упорядоченных полей; всех конечных упорядоченных полей; всех упорядоченных полей фиксированной характеристики; всех вещественно замкнутых упорядоченных полей?*

Решение.

- Обозначим через $\mathcal{G}$ теорию, состоящую из аксиом группы, то есть из предложений

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z); \quad \forall x\ (x + e = x) \wedge (e + x = x); \quad \forall x\ x \cdot x^{-1} = e.$$

Тогда класс всех групп (обозначим через $\mathcal{K}$) в точности равен $\mathrm{Mod}(\mathcal{G})$, а значит, конечно аксиоматизируем. ∎

Пользуясь теоремой компактности, можно доказать, что если теория имеет модель сколь угодно большой конечной мощности, то она имеет и бесконечную модель. Из этого утверждения следует, что класс $\mathcal{K}_{<\infty}$ конечных групп не аксиоматизируем, так как для любого натурального n существует группа из n элементов. ∎

Рассмотрим предложения $\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n\ (x_1 \neq x_2) \wedge \ldots (x_{n-1} \neq x_n)$ (здесь перебираются все пары элементов $x_1, \ldots, x_n$). Пусть $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{G} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, тогда класс $\mathcal{K}_\infty$ всех бесконечных групп в точности равен $\mathrm{Mod}(\mathcal{G}_\infty)$, а значит, аксиоматизируем. При этом он не конечно аксиоматизируем, так как тогда $\mathcal{K}_{<\infty} = (Str_\sigma \setminus \mathcal{K}_\infty) \cap \mathcal{K}$ был бы аксиоматизируем. ∎

Пусть $\mathcal{G}_A = \mathcal{G} \cup \{\forall x\ \forall y\ x \cdot y = y \cdot x\}$, тогда класс $\mathcal{K}_A$ всех абелевых групп есть в точности $\mathrm{Mod}(\mathcal{G}_A)$. ∎

Пусть $\mathcal{K}_c$ — класс всех циклических групп. Покажем, что у $\mathrm{Th}(\mathcal{K}_c)$ есть модель, не являющаяся циклической группой (откуда $\mathcal{K}_c$ — не аксиоматизируем). Будем использовать сокращение $x^n = x \cdot \ldots \cdot x$ n раз. Возьмём сигнатуру $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$, где c — новый константный символ, и рассмотрим σ'-теорию

$$\mathcal{T} = \mathrm{Th}(\mathcal{K}_c) \cup \{\forall x\ x^n \neq c : n \in \mathbb{N}\}.$$

Покажем, что у любого конечного подмножества $T \subset \mathcal{T}$ есть модель. Положим

$$N = \max\{n \in N : (\forall x\ x^n \neq c) \in T\} + 1,$$

тогда достаточно взять σ'-обогащение циклической группы порядка N, где c интерпретируется как e. По теореме компактности у всего $\mathcal{T}$ есть некоторая модель $\mathbb{A}$. Тогда σ-обеднение этой модели будет моделью для $\mathrm{Th}(\mathcal{K}_c)$, но не будет циклической группой, так как $c^{\mathbb{A}}$ не представляется в качестве степени некоторого x. ■

Пусть $\mathcal{K}_\neg$ — класс всех групп без кручения. Рассмотрим предложения $\varphi_n = \forall x\, x \neq e \to x^n \neq e$ и теорию $T = \mathcal{G} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $\mathcal{K}_\neg = \mathrm{Mod}(T)$, то есть аксиоматизируем. Покажем, что при этом он не конечно аксиоматизируем.

TODO ■

- Пусть теория $\mathcal{F}$ состоит из аксиом поля (их всего 9). Тогда класс $\mathcal{K}$ всех полей в точности равен $\mathrm{Mod}(\mathcal{F})$, а потому конечно аксиоматизируем. ■

  TODO ■

  Рассмотрим предложения $\varphi_n = (1 + 1 + \ldots + 1 = 0)$ (n единиц). Тогда класс полей нулевой характеристики есть в точности $\mathrm{Mod}(T_0)$, где $T_0 = \{\neg\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Зафиксируем любую ненулевую характеристику m, тогда класс полей характеристики m есть в точности $\mathrm{Mod}(T_m)$, где
  $$T_m = \{\neg\varphi_n : n < m\} \cup \{\varphi_m\}.$$

  Выходит, класс полей любой ненулевой характеристики конечно аксиоматизируем. TODO (про нулевую) ■

  TODO ■

  TODO

  ■

Задача 3. *Докажите, что:*

- *любой аксиоматизируемый класс структур замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений;*
- *если предложение логически следует из данного множества предложений, то оно логически следует из некоторого конечного подмножества данного множества;*
- *класс структур данной сигнатуры конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он сам и его дополнение (в классе всех структур данной сигнатуры) аксиоматизируемы.*

Решение.

- Пусть $\mathbb{A} \in K = \mathrm{Mod}(T)$ (то есть $\mathbb{A} \models T$) и $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$. Так как элементарно эквивалентные структуры удовлетворяют одни и те же предложения, то $\mathbb{B} \in K$.

  Пусть $\mathbb{A}_i \in K$, где $i \in I$, и пусть F — ультрафильтр на I. По теореме об ультрафильтре
  $$\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i : \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F.$$

  Так как $\mathbb{A} \models T$ для любого i, то $\{i : \mathbb{A}_i \models T\} = I \in F$, откуда $\mathbb{A}_F \models T$. ■

- Если предложение φ логически следует из некоторой теории T, то $\mathrm{Mod}(T \cup \{\neg\varphi\}) = \varnothing$. Тогда по теореме компактности существует конечное $T_n \subseteq T$ такое, что $\mathrm{Mod}(T_n \cup \{\neg\varphi\}) = \varnothing$, что значит, что φ логически следует из теории T_n.

- Необходимость. Пусть $K = \mathrm{Mod}(\varphi)$, где φ — предложение, тогда $\overline{K} = Str_\sigma \setminus K = \mathrm{Mod}(\neg\varphi)$.

  Достаточность. Пусть $K = \mathrm{Mod}(T)$, $\overline{K} = \mathrm{Mod}(T')$ для некоторых теорий T и T'. Тогда
  $$\mathrm{Mod}(T \cup T') = \mathrm{Mod}(T) \cap \mathrm{Mod}(T') = \varnothing,$$

откуда по теореме компактности существуют конечные $T_n \subseteq T$ и $T'_n \subseteq T'$ такие, что

$$\mathrm{Mod}(T_n \cup T'_n) = \mathrm{Mod}(T_n) \cap \mathrm{Mod}(T'_n) = \varnothing.$$

Тогда справедливо следующее:

$$\mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(T_n) \subseteq \overline{\mathrm{Mod}(T'_n)} \subseteq \overline{\mathrm{Mod}(T')} \subseteq \mathrm{Mod}(T),$$

откуда $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T_n)$.

■