Домашнее задание №1, Марченко М.

Задача 1. *Запишите аксиомы теории групп предложениями следующих сигнатур:* $\{=, \cdot\}$, $\{=, \cdot, e\}$, $\{=, \cdot, e, ^{-1}\}$, $\{=, P\}$, *где* P *— трёхместный предикатный символ, обозначающий график умножения. Какая их этих сигнатур лучше соответствует изложению теории групп? Сделайте синтаксический анализ полученных формул.*

Решение.

- $\{=, \cdot\}$:
  1. $\forall a\ \forall b\ \forall c\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
  2. $\exists e\ \forall a\ \ e \cdot a = a \wedge a \cdot e = a$,
  3. $\forall a_1\ \exists a_2\ \forall b\ \ (a_1 \cdot a_2) \cdot b = b \wedge (a_2 \cdot a_1) \cdot b = b \wedge b \cdot (a_1 \cdot a_2) = b \wedge b \cdot (a_2 \cdot a_1) = b$.
- $\{=, \cdot, e\}$:
  1. $\forall a\ \forall b\ \forall c\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
  2. $\forall a\ \ e \cdot a = a \wedge a \cdot e = a$,
  3. $\forall a_1\ \exists a_2\ \ a_1 \cdot a_2 = e \wedge a_2 \cdot a_1 = e$.
- $\{=, \cdot, e, ^{-1}\}$:
  1. $\forall a\ \forall b\ \forall c\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
  2. $\forall a\ \ e \cdot a = a \wedge a \cdot e = a$,
  3. $\forall a_1\ \exists a_2\ \ a_2 = a_1^{-1}$.
- $\{=, P\}$ (пусть $\mathbb{G}$ — σ-структура, где $\sigma = \{=, P\}$):
  1. $\forall a\ \forall b\ \forall c\ \ \mathbb{G} \models \mathrm{P}(a \cdot b, c, a \cdot (b \cdot c))$,
  2. $\exists e\ \forall a\ \ \mathbb{G} \models \mathrm{P}(e, a, a) \wedge \mathbb{G} \models \mathrm{P}(a, e, a)$,
  3. $\forall a_1\ \exists a_2\ \forall b\ \ \mathbb{G} \models \mathrm{P}(a_1 \cdot a_2, b, b) \wedge \mathbb{G} \models \mathrm{P}(a_2 \cdot a_1, b, b) \wedge \mathbb{G} \models \mathrm{P}(b, a_1 \cdot a_2, b) \wedge \mathbb{G} \models \mathrm{P}(b, a_2 \cdot a_1, b)$.

■

Для изложения теории групп лучше всего подходит сигнатура $\{=, \cdot, e, ^{-1}\}$, так как содержит ключевые для неё понятия нейтрального и обратного элементов. ■

Синтаксический анализ аксиом теории групп, записанных в сигнатуре $\{=, \cdot, e, ^{-1}\}$:

1. Термы: a, b, c, $a \cdot b$, $(a \cdot b) \cdot c$, $b \cdot c$, $a \cdot (b \cdot c)$.

   Подформулы: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall c\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall b\ \forall c\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a\ \forall b\ \forall c\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

2. Термы: a, e, $e \cdot a$, $a \cdot e$.

   Подформулы: $e \cdot a = a$, $a \cdot e = a$, $e \cdot a = a \wedge a \cdot e = a$, $\forall a\ \ e \cdot a = a \wedge a \cdot e = a$.

3. Термы: a_1, a_2, a_1^{-1}.

   Подформулы: $a_2 = a_1^{-1}$, $\exists a_2\ \ a_2 = a_1^{-1}$, $\forall a_1\ \exists a_2\ \ a_2 = a_1^{-1}$.

■

Задача 2. *Докажите основные равносильности. Докажите, что любую формулу можно привести к предварённому виду, в котором бесkванторная часть является ДНФ бескванторных формул.*

Решение. Основные равносильности легко доказать, построив таблицы истинности для формул слева и справа от $\equiv$ и убедившись, что они одинаковые. ■

Используя равносильности для кванторов, последние можно «протащить» в начало формулы, после чего с помощью первых десяти равносильностей привести бескванторную часть формулы к ДНФ. ■

Задача 3. *Существует ли алгоритм, вычисляющий значение $\varphi^{\mathbb{A}}$ по любой конечной сигнатуре σ, σ-предложению φ и конечной σ-структуре $\mathbb{A}$. Если да, оцените время работы вашего алгоритма.*

Решение. Ниже приведён псевдокод алгоритма:

```
function EVALUATE(φ, 𝔸)
    if φ = P(t_1, ..., t_n) then        ▷ если φ — атомарная, вычислить значения термов и φ
        return P(t_1, ..., t_n)

    ▷ если φ содержит логические связки, её значение вычисляется рекурсивно ◁
    if φ = ¬ψ then
        return ¬EVALUATE(ψ, 𝔸)
    if φ = ψ_1 ∧ ψ_2 then
        return EVALUATE(ψ_1, 𝔸) ∧ EVALUATE(ψ_2, 𝔸)
    if φ = ψ_1 ∨ ψ_2 then
        return EVALUATE(ψ_1, 𝔸) ∨ EVALUATE(ψ_2, 𝔸)
    if φ = ψ_1 → ψ_2 then
        return ¬ EVALUATE(ψ_1, 𝔸) ∨ EVALUATE(ψ_2, 𝔸)

    ▷ если φ содержит кванторы, перебираем все |σ| возможных значений переменных ◁
    if φ = ∀x ψ then
        for all a ∈ 𝔸 do
            if ¬EVALUATE(ψ(a), 𝔸) then
                return Л
        return И
    if φ = ∃x ψ then
        for all a ∈ 𝔸 do
            if EVALUATE(ψ(a), 𝔸) then
                return И
        return Л
```

Если n — количество переменных в φ, а $|\varphi|$ — длина формулы φ, то время работы алгоритма можно оценить как $O(|\varphi| \cdot |\sigma|^n)$. ■

Задача 4. *Докажите, что отношение $\leqslant$ не определимо в структуре $(\mathbb{Z}; =, +)$, а операция $+$ не определима в структуре $(\mathbb{Z}; =, \leqslant)$.*

Решение. Пусть $g\colon x \mapsto -x$, тогда g — автоморфизм. Так как $a \leqslant b \not\Rightarrow -a \leqslant -b$, то отношение $\leqslant$ не инвариантно, а следовательно, не определимо. ■

Функция определима тогда и только тогда, когда определим её график. Но с помощью $=$ и $\leqslant$ мы можем определять только вертикальные и горизонтальные прямые, а также участки плоскости, ограниченные этими прямыми, в то время, как график $+$ — наклонная прямая. ■

Задача 5. *Напишите предложения сигнатуры $\{=, \leqslant\}$ такие, что любая модель получившегося множества предложений является плотным линейным порядком с наименьшим, но без наибольшего элемента. Докажите, что любые две счётные модели этого множества изоморфны. Верно ли это для моделей мощности континуум?*

Решение. Просто составим требуемое множество из определения плотного линейного порядка с наименьшим, но без наибольшего элемента:

- $\forall x \; \forall y \;\; x \neq y \to (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$,
- $\forall x \; \forall y \;\; x \leqslant y \to (\exists z \;\; x \leqslant z \leqslant y)$,
- $\exists m \; \forall x \;\; m \leqslant x$,
- $\forall x \; \exists y \;\; x \leqslant y$. ■

Рекурсивно построим изоморфизм φ между произвольной счётной моделью этого множества и структурой $(\mathbb{Q}_+; =, \leqslant)$. Пусть $\varphi(m) = 0$; если мы нашли образы для элементов $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ (пусть этот список отсортирован по возрастанию), то образ элемента a_{k+1} найдём следующим образом: если $a_k \leqslant a_{k+1}$, то выберем произвольное рациональное число, большее $\varphi(a_k)$ в качестве образа a_{k+1}. В противном случае найдём в списке рассмотренных такие числа, что $a_i \leqslant a_{k+1} \leqslant a_{i+1}$ и выберем произвольное рациональное число между $\varphi(a_i)$ и $\varphi(a_{i+1})$ в качестве образа a_{k+1}. ■

TODO ■