Домашнее задание №2, Марченко М.

Задача 1. *Проверьте, что:*

- *обращение любого частичного порядка на множестве X является частичным порядком на X;*
- *декартово прозведение $(x, y)T(x_1, y_1) \leftrightarrow xRx_1 \wedge ySy_1$, $T = R \times S$, частичных порядков R на X и S на Y является частичным порядком на $X \times Y$;*
- *объединение произвольной возрастающей по включению последовательности частичных порядков на X является частичным порядком на X;*
- *пересечение частичных порядков на X является частичным порядком на X.*

Решение. Для каждого случая будем проверять выполнение условий рефлексивности, транзитивности и антисимметричности:

- 1) имеем $\forall x \in X \ \ xRx$, из чего по определению обращения следует $\forall x \in X \ \ xR^{-1}x$,

  2) для любых $x, y, z \in X$
  $$xR^{-1}y \wedge yR^{-1}z \leftrightarrow yRx \wedge zRy \rightarrow zRx \leftrightarrow xR^{-1}z$$

  3) $\forall x, y \in X xR^{-1}y \wedge yR^{-1}x \leftrightarrow yRx \wedge xRy \rightarrow x = y$;

- 1) имеем $\forall x \in X, y \in Y \ \ xRx \wedge ySy$, откуда по определению $\forall x \in X, y \in Y \ \ (x, y)T(x, y)$,

  2) для любых $x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y$
  $$(x, y)T(x_1, y_1) \wedge (x_1, y_1)T(x_2, y_2) \leftrightarrow$$
  $$\leftrightarrow xRx_1 \wedge ySy_1 \wedge x_1Rx_2 \wedge y_1Sy_2 \rightarrow xRx_2 \wedge ySy_2 \rightarrow (x, y)T(x_2, y_2)$$

  3) для любых $x, x_1 \in X, y, y_1 \in Y$
  $$(x, y)T(x_1, y_1) \wedge (x_1, y_1)T(x, y) \leftrightarrow$$
  $$\leftrightarrow xRx_1 \wedge ySy_1 \wedge x_1Rx \wedge y_1Sy \leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1 \leftrightarrow (x, y) = (x_1, y_1)$$

- Пусть $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$, где R_i — частичный порядок на X, причём $R_i \subseteq R_{i+1}$, тогда:

  1) для любого i имеем $\forall x \in X \ \ xR_ix$, откуда $\forall x \in X \ \ xRx$,

  2) для любых $x, y, z \in X$
  $$xRy \wedge yRz \rightarrow \exists i, j : xR_iy \wedge yR_jz,$$
  а так как порядки возрастают по включению, то при $k = \max(i, j)$ выполняется
  $$xR_ky \wedge yR_kz \rightarrow xR_kz \rightarrow xRz,$$

  3) для любых $x, y \in X$
  $$xRy \wedge yRx \rightarrow \exists i, j : xR_iy \wedge yR_jx,$$
  а так как порядки возрастают по включению, то при $k = \max(i, j)$ выполняется
  $$xR_ky \wedge yR_kx \rightarrow x = y;$$

- Пусть $R = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$, где R_i — частичный порядок на X, тогда:

   1) для любого i $\forall x \in X \ \ xR_ix$, откуда следует, что $\forall x \in X \ \ xRx$,
   2) для любых $x, y, z \in X$
   $$xRy \wedge yRz \leftrightarrow \forall i \ \ xR_iy \wedge yR_iz \to xR_iz \to xRz,$$
   3) для любых $x, y \in X$
   $$xRy \wedge yRx \leftrightarrow \forall i \ \ xR_iy \wedge yR_ix \leftrightarrow x = y.$$

■

Задача 2. (a) *Пусть $P(X)$ — множество всех частичных порядков на X. Докажите, что максимальные элементы в $(P(X); \subseteq)$ — это в точности линейные порядки на X. Существует ли наименьший элемент в $(P(X); \subseteq)$?*

(b) *Является ли декартово произведение двух предпорядков (соотв. линейных порядков) снова предпорядком (соотв. линейным порядком)?*

Решение. (a) $\Rightarrow$ Пусть R — максимальный элемент в $(P(X); \subseteq)$, то есть не существует $S \neq R$ такого, что $R \subseteq S$. Пусть при этом R не является некоторым линейным порядком на X, то есть существуют x, y такие, что $\neg(xRy \vee yRx)$. Положим $S = R \cup (x, y)$, но тогда $R \subseteq S$. Противоречие.

$\Leftarrow$ Пусть R — линейный порядок на X, и пусть он при этом не максимальный элемент в $(P(X); \subseteq)$, то есть существует $S \neq R$ такой, что $R \subseteq S$. Рассмотрим x, y такие, что $xSy \wedge \neg(xRy)$. Так как R — линейный порядок, то тогда yRx, а так как $R \subseteq S$, то и ySx. Получаем, что $xSy \wedge ySx$, откуда $x = y$. Но для любого x xRx, а мы вначале предположили обратное. Противоречие.

(b) TODO

■

Задача 3. *Докажите, что существует биекция между:*

(a) *множеством всех частичных порядков на X и множеством всех строгих частичных порядков на X. Аналогично для линейных порядков.*

(b) *множеством всех эквивалентностей на X и множеством всех разбиений множества X.*

Решение. (a) Сопоставим каждому частичному порядку порядку R строгий частичный порядок S, из которого «выкинули» все пары вида (x, x). Сюръективность очевидна (просто добавим обратно все такие пары и получим тем самым прообраз), инъективность следует из того, что в каждый частичный порядок входят все пары вида (x, x), а значит, мы всегда выкидываем один и тот же набор пар.

Утверждение про линейные порядки следует из того, что построенная описанным выше способом биекция переводит линейный порядок снова в линейный.

(b) Поставим в соответствие каждой эквивалентности разбиение множества X на соответствующие классы. Сюръективность следует из того, что для любого разбиения существует отношение эквивалентности «находиться в одном подмножестве данного разбиения», для которого подмножества разбиения — классы эквивалентности. Инъективность очевидна, так как отношения эквивалентности, как и любые другие отношения, полностью определяются упорядоченными парами, которые в них входят.

■

Задача 4. (a) *Линейный порядок на X называется полным, если любое непустое ограниченное сверху подмножество X имеет супремум. Являются ли полными обычные линейные порядки на множествах всех натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел? Ответ обоснуйте.*

(b) *Проверьте, что любое подмножество множества $\mathcal{P}(X)$ имеет инфимум и супремум по отношению включения.*

Решение. TODO ■

Задача 5. (a) *Опишите фактор-множества для следующих эквивалентностей:*

- *«$x - y$ делится на 5» на $\mathbb{Z}$,*
- *«$x - y \in \mathbb{Z}$» на $\mathbb{R}$,*
- *отношение параллельности прямых на множестве всех прямых на плоскости.*

(b) *Проверьте, что:*

- *если $\leqslant$ — предпорядок на X, то отношение «$x \leqslant y \wedge y \leqslant x$» есть эквивалентность на X,*
- *если $f\colon X \to Y$, то отношение «$f(x) = f(x_1)$» есть эквивалентность на X.*

Решение. (a)

- Множества вида $\{5k\}, \{1+5k\}, \{2+5k\}, \{3+5k\}, \{4+5k\}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что любое целое число входит в одно из этих множеств и что эти множества не пересекаются.
- Множества вида $\{x + k\}$, где $x \in [0, 1)$ фиксировано, а $k \in \mathbb{Z}$.
- Множества вида $\{ax + b\}$, где $a \in \mathbb{R}$ фиксировано, а $b \in \mathbb{R}$.

(b) Проверим выполнение условий рефлексивности, симметричности и транзитивности:

- 1) очевидно в силу того, что $\leqslant$ — предпорядок,
  2) в силу коммутативности конъюнкции «$x \leqslant y \wedge y \leqslant x$» $\leftrightarrow$ «$y \leqslant x \wedge x \leqslant y$»,
  3) «$x \leqslant y \wedge y \leqslant x$» $\wedge$ «$y \leqslant z \wedge z \leqslant y$» $\leftrightarrow x \leqslant y \wedge y \leqslant x \wedge y \leqslant z \wedge z \leqslant y \to$ «$x \leqslant z \wedge z \leqslant x$».

■