

Домашнее задание №2, Марченко М.

Задача 1. Проверьте, что:

- обращение любого частичного порядка на множестве X является частичным порядком на X ;
- декартово произведение $(x, y)T(x_1, y_1) \leftrightarrow xRx_1 \wedge ySy_1$, $T = R \times S$, частичных порядков R на X и S на Y является частичным порядком на $X \times Y$;
- объединение произвольной возрастающей по включению последовательности частичных порядков на X является частичным порядком на X ;
- пересечение частичных порядков на X является частичным порядком на X .

Решение. Для каждого случая будем проверять выполнение условий рефлексивности, транзитивности и антисимметричности:

- 1) имеем $\forall x \in X \ xRx$, из чего по определению обращения следует $\forall x \in X \ xR^{-1}x$,
2) для любых $x, y, z \in X$

$$xR^{-1}y \wedge yR^{-1}z \leftrightarrow yRx \wedge zRy \rightarrow zRx \leftrightarrow xR^{-1}z$$

- 3) $\forall x, y \in X \ xR^{-1}y \wedge yR^{-1}x \leftrightarrow yRx \wedge xRy \rightarrow x = y$;

- 1) имеем $\forall x \in X, y \in Y \ xRx \wedge ySy$, откуда по определению $\forall x \in X, y \in Y \ (x, y)T(x, y)$,
2) для любых $x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y$

$$(x, y)T(x_1, y_1) \wedge (x_1, y_1)T(x_2, y_2) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow xRx_1 \wedge ySy_1 \wedge x_1Rx_2 \wedge y_1Sy_2 \rightarrow xRx_2 \wedge ySy_2 \rightarrow (x, y)T(x_2, y_2)$$

- 3) для любых $x, x_1 \in X, y, y_1 \in Y$

$$(x, y)T(x_1, y_1) \wedge (x_1, y_1)T(x, y) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow xRx_1 \wedge ySy_1 \wedge x_1Rx \wedge y_1Sy \leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1 \leftrightarrow (x, y) = (x_1, y_1)$$

- Пусть $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$, где R_i — частичный порядок на X , причём $R_i \subseteq R_{i+1}$, тогда:

- 1) для любого i имеем $\forall x \in X \ xR_i x$, откуда $\forall x \in X \ xRx$,
2) для любых $x, y, z \in X$

$$xRy \wedge yRz \rightarrow \exists i, j : xR_i y \wedge yR_j z,$$

а так как порядки возрастают по включению, то при $k = \max(i, j)$ выполняется

$$xR_k y \wedge yR_k z \rightarrow xR_k z \rightarrow xRz,$$

- 3) для любых $x, y \in X$

$$xRy \wedge yRx \rightarrow \exists i, j : xR_i y \wedge yR_j x,$$

а так как порядки возрастают по включению, то при $k = \max(i, j)$ выполняется

$$xR_k y \wedge yR_k x \rightarrow x = y;$$

- Пусть $R = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$, где R_i — частичный порядок на X , тогда:

- 1) для любого $i \forall x \in X \ xR_i x$, откуда следует, что $\forall x \in X \ xRx$,
- 2) для любых $x, y, z \in X$

$$xRy \wedge yRz \leftrightarrow \forall i \ xR_i y \wedge yR_i z \rightarrow xR_i z \rightarrow xRz,$$

- 3) для любых $x, y \in X$

$$xRy \wedge yRx \leftrightarrow \forall i \ xR_i y \wedge yR_i x \leftrightarrow x = y.$$

■

Задача 2. (а) Пусть $P(X)$ — множество всех частичных порядков на X . Докажите, что максимальные элементы в $(P(X); \subseteq)$ — это в точности линейные порядки на X . Существует ли наименьший элемент в $(P(X); \subseteq)$?

- (б) Является ли декартово произведение двух предпорядков (соотв. линейных порядков) снова предпорядком (соотв. линейным порядком)?

Решение. (а) \Rightarrow Пусть R — максимальный элемент в $(P(X); \subseteq)$, то есть не существует $S \neq R$ такого, что $R \subseteq S$. Пусть при этом R не является некоторым линейным порядком на X , то есть существуют x, y такие, что $\neg(xRy \vee yRx)$. Положим $S = R \cup (x, y)$, но тогда $R \subseteq S$. Противоречие.

\Leftarrow Пусть R — линейный порядок на X , и пусть он при этом не максимальный элемент в $(P(X); \subseteq)$, то есть существует $S \neq R$ такой, что $R \subseteq S$. Рассмотрим x, y такие, что $xSy \wedge \neg(xRy)$. Так как R — линейный порядок, то тогда yRx , а так как $R \subseteq S$, то и ySx . Получаем, что $xSy \wedge ySx$, откуда $x = y$. Но для любого $x \ xRx$, а мы вначале предположили обратное. Противоречие.

- (б) TODO

■

Задача 3. Докажите, что существует биекция между:

- (а) множеством всех частичных порядков на X и множеством всех строгих частичных порядков на X . Аналогично для линейных порядков.
- (б) множеством всех эквивалентностей на X и множеством всех разбиений множества X .

Решение. (а) Сопоставим каждому частичному порядку порядку R строгий частичный порядок S , из которого «выкинули» все пары вида (x, x) . Сюръективность очевидна (просто добавим обратно все такие пары и получим тем самым прообраз), инъективность следует из того, что в каждый частичный порядок входят все пары вида (x, x) , а значит, мы всегда выкидываем один и тот же набор пар.

Утверждение про линейные порядки следует из того, что построенная описанным выше способом биекция переводит линейный порядок снова в линейный.

- (б) Поставим в соответствие каждой эквивалентности разбиение множества X на соответствующие классы. Сюръективность следует из того, что для любого разбиения существует отношение эквивалентности «находиться в одном подмножестве данного разбиения», для которого подмножества разбиения — классы эквивалентности. Инъективность очевидна, так как отношения эквивалентности, как и любые другие отношения, полностью определяются упорядоченными парами, которые в них входят.

■

Задача 4. (а) Линейный порядок на X называется полным, если любое непустое ограниченное сверху подмножество X имеет супремум. Являются ли полными обычные линейные порядки на множествах всех натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел? Ответ обоснуйте.

(b) Проверьте, что любое подмножество множества $\mathcal{P}(X)$ имеет инфимум и супремум по отношению включения.

Решение. TODO ■

Задача 5. (а) Опишите фактор-множества для следующих эквивалентностей:

- « $x - y$ делится на 5» на \mathbb{Z} ,
- « $x - y \in \mathbb{Z}$ » на \mathbb{R} ,
- отношение параллельности прямых на множестве всех прямых на плоскости.

(b) Проверьте, что:

- если \leq — предпорядок на X , то отношение « $x \leq y \wedge y \leq x$ » есть эквивалентность на X ,
- если $f: X \rightarrow Y$, то отношение « $f(x) = f(x_1)$ » есть эквивалентность на X .

Решение. (а) • Множества вида $\{5k\}, \{1 + 5k\}, \{2 + 5k\}, \{3 + 5k\}, \{4 + 5k\}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что любое целое число входит в одно из этих множеств и что эти множества не пересекаются.

- Множества вида $\{x + k\}$, где $x \in [0, 1)$ фиксировано, а $k \in \mathbb{Z}$.
- Множества вида $\{ax + b\}$, где $a \in \mathbb{R}$ фиксировано, а $b \in \mathbb{R}$.

(b) Проверим выполнение условий рефлексивности, симметричности и транзитивности:

- 1) очевидно в силу того, что \leq — предпорядок,
 - 2) в силу коммутативности конъюнкции « $x \leq y \wedge y \leq x$ » \leftrightarrow « $y \leq x \wedge x \leq y$ »,
 - 3) « $x \leq y \wedge y \leq x$ » \wedge « $y \leq z \wedge z \leq y$ » \leftrightarrow $x \leq y \wedge y \leq x \wedge y \leq z \wedge z \leq y \rightarrow$ « $x \leq z \wedge z \leq x$ ».
 - 1) очевидно,
 - 2) $f(x) = f(x_1) \leftrightarrow f(x_1) = f(x)$ в силу стандартной интерпретации равенства,
 - 3) $f(x) = f(x_1) \wedge f(x_1) = f(x_2) \rightarrow f(x) = f(x_2)$ тоже по стандартной интерпретации равенства.
-