Série 13

Cette série fait suite aux chapitres 7.1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

a) Montrer que $A\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot A\overrightarrow{u}$ pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$.

b) Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice B de taille 2×2 telle que $B\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v} \cdot B\overrightarrow{u}$ en général.

Exercice 2

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $Q^T AQ = D$, avec Q une matrice orthogonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

On a fait la partie 1 en classe. Vous pouvez vous concentrer sur la partie 2.

On suppose A est une matrice symétrique de taille $n \times n$.

i) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

ii) Calculer la décomposition ci-dessus pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

On a fait la partie a en classe. Vous pouvez vous concentrer sur la partie b.

On suppose que A est une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas forcément distincts) tels que

$$A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T. \tag{1}$$

Cette expression est appelée décomposition spectrale de A.

b) Calculer la décomposition spectrale et vérifier l'égalité (1) pour

$$\text{i)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit A une matrice symétrique inversible. Montrer qu'alors l'inverse de A est aussi symétrique.

Contrairement au solutionnaire, on vous recommande ici d'utiliser le théorème spectral.

Exercice 6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormée.

Note : on ne vous demande pas d'être capable de trouver les racines d'un polynôme général de degré 3 ou plus à l'examen ; ici, pour l'exercice, trouvez les racines par essai-erreur et demandez aux assistant.es si cela vous empêche de progresser.
