Redes convolucionales

Convolución

Verónica E. Arriola-Rios

Facultad de Ciencias, UNAM

15 de marzo de 2023

Correlación y convolución

Temas

1. Correlación y convolución
   - Correlación
   - Convolución

Correlación

Definición (Correlación cruzada)

La *correlación cruzada* o *covarianza cruzada* es una función del tiempo relativo entre dos señales, que mide la similitud entre ellas.

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\eta) g(t+\eta) d\eta \tag{1}$$

donde f^* indica el **complejo conjugado**.

Wikipedia[a]

[a] https://es.wikipedia.org/wiki/Correlaci%C3%B3n_cruzada

- Frecuentemente es usada para encontrar características relevantes en una señal desconocida por medio de la comparación con otra que sí se conoce.

Interpretación

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\eta) g(t + \eta) d\eta \tag{2}$$

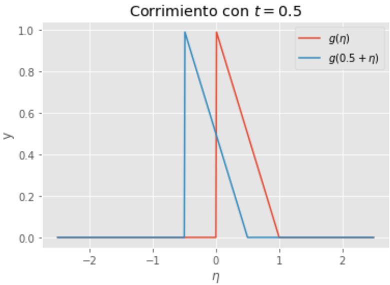


Figura: Para un t fijo, consideramos que g ha sido desplazada en la dirección contraria al signo de t.

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\eta) g(t + \eta) d\eta \quad (3)$$

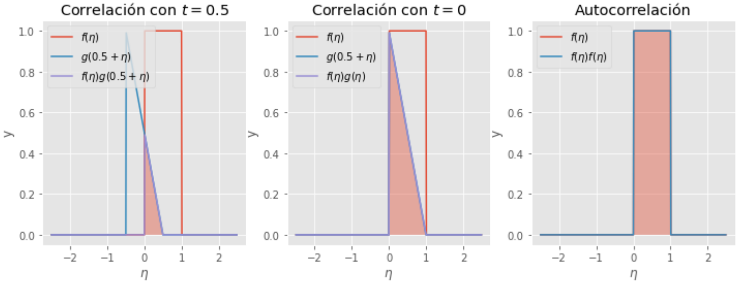


Figura: Al multiplicar ambas funciones el valor será más alto entre más parecidos sean los valores.

- La correlación calcula el área debado de la curva que resulta de multiplicar ambas funciones f^* y g.

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\eta) g(t + \eta) d\eta \tag{4}$$

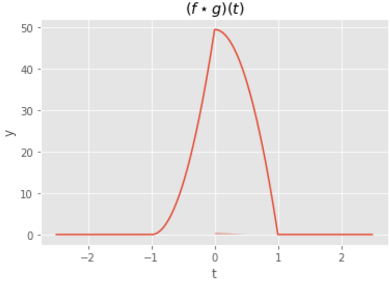


Figura: Integral bajo el producto de curvas para todo desplazamiento.

- $(f \star g)(t)$ indica qué tan parecidas son ambas funciones para los diferentes desplazamientos posibles t.
- Su máximo se encuentra donde ambas funciones coinciden mejor.

Definición (Correlación cruzada discreta)

La correlación cruzada discreta se define sobre funciones discretas como

$$(f \star g)[m] = \sum_{n} f^*[n]g[m+n] \tag{5}$$

Temas

Convolución

Definición (Convolución)

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) g(t - \eta) d\eta \tag{6}$$

donde $-\eta$ provoca un despazamiento e inversión de la función g con respecto a f.

Desplazamiento e inversión

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(t-\eta)d\eta \tag{7}$$

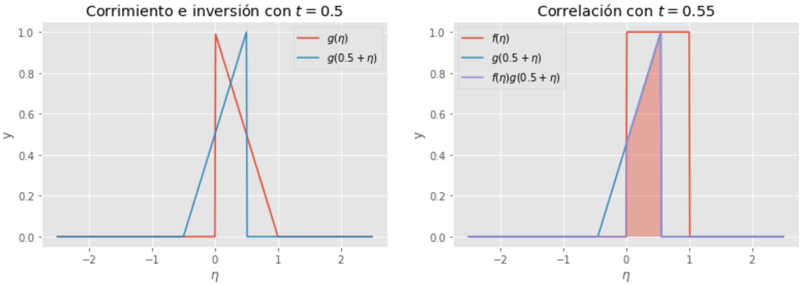


Figura: **Izq:** Para un t fijo, consideramos que g ha sido desplazada en la dirección del signo de t e invertida. **Der:** Área bajo la curva para un t dado.

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\eta) g(t+\eta) d\eta \qquad (8)$$

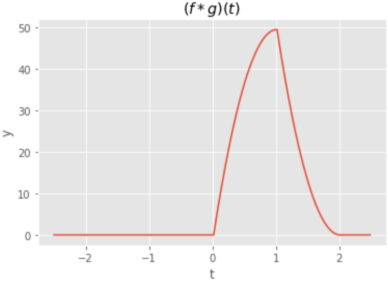


Figura: Integral bajo el producto de curvas para todo desplazamiento.

- $(f * g)(t)$ indica qué tan parecidas son $f(\eta)$ y $g(-\eta)$ para los diferentes desplazamientos posibles t.
- Su máximo se encuentra donde ambas funciones coinciden mejor.

Convolución discreta

Definición (Convolución discreta)

La convolución discreta se define sobre funciones discretas como

$$f[m] * g[m] = \sum_{n} f[n]g[m-n] \tag{9}$$

¿Por qué usar convolución?

- El los problemas de visión se utiliza la *convolución* para verificar la presencia de patrones en las imágenes.
- Porque es invariante a la posición que ocupa una característica en la imagen,
- no es tan sensible a pequeñas distorciones y
- Hubel y Wiesel 1962 encontraron que la conexiones en la corteza visual del cerebro de los gatos ejecuta este tipo de operación. [1]

[1] Quora: How did visual cortex inspire the usage of convolution operation in computer vision?

Convolución discreta en 2D

Temas

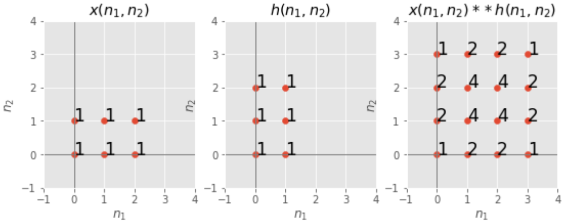
2. Convolución discreta en 2D
   - Definición
   - Convolución en imágenes
   - El problema del borde

Convolución 2D

Definición (Convolución 2D)

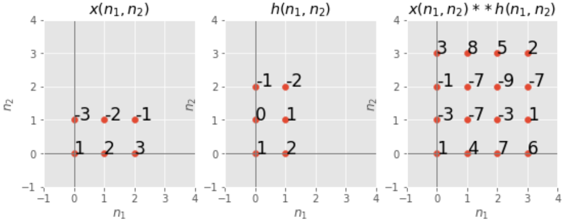
Se consideran dos señales discretas en 2D $x(n_1, n_2)$ y $h(n_1, n_2)$:

$$x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \tag{10}$$

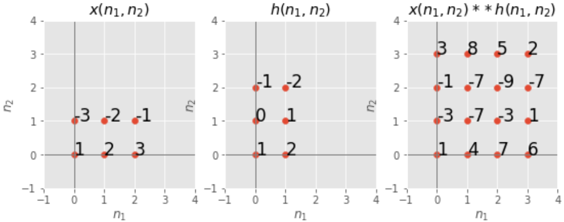


Ejemplo

$$x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \tag{11}$$



$n_1 = 0, n_2 = 0$



$k_1 = 0, k_2 = 0$:

$$x(0,0) = 1$$
$$h(0-0, 0-0) = 1$$

$k_1 = 1, k_2 = 0$:

$$x(1,0) = 2$$
$$h(0-1, 0-0) = 0$$

$k_1 = -1, k_2 = 0$:

$$x(-1,0) = 0$$
$$h(0+1, 0-0) = 2$$

$k_1 = 2, k_2 = 0$:

$$x(2,0) = 3$$
$$h(0-2, 0-0) = 0$$

$k_1 = -2, k_2 = 0$:

$$x(-2,0) = 0$$
$$h(0+2, 0-0) = 0$$

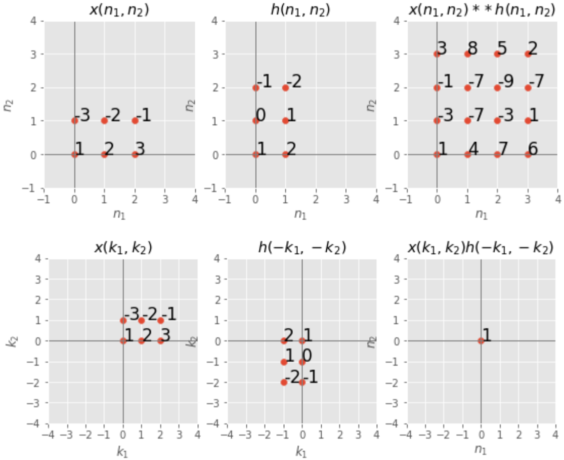


Figura: Caso $n_1 = 0, n_2 = 0$

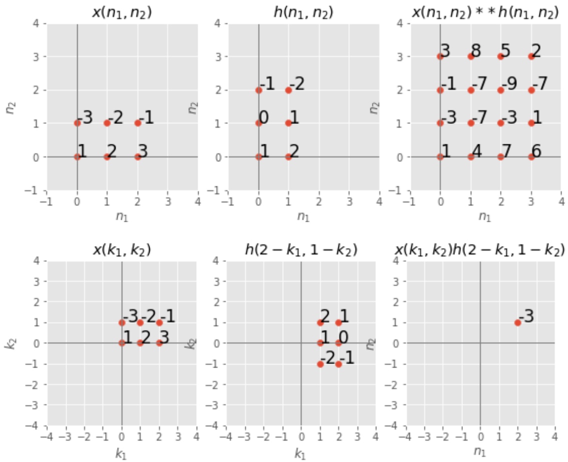


Figura: Caso $n_1 = 2, n_2 = 1$

Temas

2 Convolución discreta en 2D
- Definición
- Convolución en imágenes
- El problema del borde

Convolución en imágenes

- Una imagen es una matriz de números. Sea $x(n_1, n_2)$ esa matriz.
- A la función $h(n_1, n_2)$ se le llama *filtro* y es una matriz de menor tamaño que x.
- El resultado de convolucionar $x**g$ es una imagen filtrada.

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -18 & -9 & 0 \\ -9 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

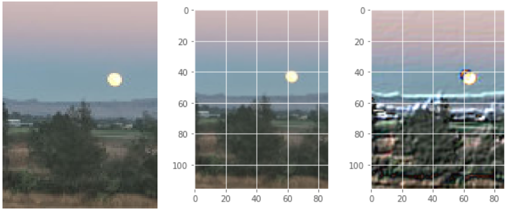


Figura: Aplicación del filtro *emboss*.

Temas

El problema del borde

- La convolución suma sobre el espacio infinito.
- Si la función vale 0 en los bordes no es necesario sumar sobre infinito.
- En el caso de las imágenes **no es cierto que la función valga cero** fuera de la imagen, es que desconocemos su valor. Esto afecta el valor de la convolución.

Figura: Desconocemos el escenario fuera de la imagen.

Opciones

Para no afectar la frontera:

- Rellenar con ceros (*fill*).
- Extensión circular (*wrap*).
- Extensión por simetría (*symm*).
- Extrapolación.

Sea el tamaño de la imagen N y el del filtro M.
Tamaño del resultado:

- Todos los pixeles donde hubo superposición entre la imagen y el filtro (*full*) $N + M - 1$.
- Sólo los pixeles de la imagen original (*same*) N.
- Sólo pixeles donde la superposición fue completa $N - M + 1$.

Referencias I

Hubel, D. H. y T. N. Wiesel (1962). «Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex.». En: *J. Physiol.* 160, págs. 106-154.

Licencia