Mecánica

Verónica E. Arriola-Rios

Robótica móvil

23 de octubre de 2024

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación

Movimiento lineal

Dadas las variables *posición* $\vec{x}$, *velocidad* $\vec{v}$ y *aceleración* $\vec{a}$, se definen:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \tag{1}$$

Si la aceleración es constante:

$$v = \int a dt = at + c_1$$
$$x = \int v dt = \int (at + c_1) dt = \frac{1}{2}at^2 + c_1 t + c_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_1 t + x_1$$

Movimiento circular

Variables:

- Movimiento circular uniforme
  - θ: ángulo de rotación
  - ω: velocidad angular
  - $v = r\omega$: velocidad lineal o tangencial
- Movimiento circular uniformemente acelerado
  - α: aceleración angular
  - La aceleración tiene dos componentes:
    - a_c: aceleración centrípeta
    - a_t: aceleración tangencial

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación

Segunda ley de Newton

Momento lineal (*Momentum*)

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2}$$

Segunda ley de Newton

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dot{\vec{p}} \qquad (3)\\ &= m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad (4)\end{aligned}$$

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación

Coordenadas

Coordenadas cartesianas para un sistema de N partículas:

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N \qquad \text{con} \qquad \vec{r}_i \in \mathbb{R}^d \tag{5}$$

Pueden satisfacer k restricciones *holonómicas* que son de la forma:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t) = 0 \tag{6}$$

donde t es el tiempo. Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes, sean éstas las *coordenadas generalizadas*:

$$q_1, q_2, ..., q_{dN-k} \tag{7}$$

Coordenadas generalizadas

Definición

Las *coordenadas generalizadas* son un conjunto de variables **independientes** que describen de forma **única** la configuración del sistema.

Las coordenadas generalizadas pueden ser:

- Coordenadas cartesianas.
- Ángulos.
- Amplitudes de una expansión de Fourier de $\vec{r}_j$.
- Cantidades con dimensiones de energía.
- Cantidades con dimensiones de momento.

Usualmente se eligen de modo que correspondan directamente con los *grados de libertad* de las articulaciones o actuadores.

Grados de libertad

Definición

El número de variables independientes requeridas para describir al sistema determina los **grados de libertad** del sistema.

Las variables originales se escriben en términos de las coordenadas generalizadas mediante ecuaciones de transformación:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, ..., q_{dN-k}, t) \tag{8}$$
$$\dots$$
$$\vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, ..., q_{dN-k}, t)$$

Se asume que es posible obtener cualquier q_i como función de las $\vec{r}_l$ invirtiendo las ecuaciones (6) y (8).

Ejemplo: péndulo doble

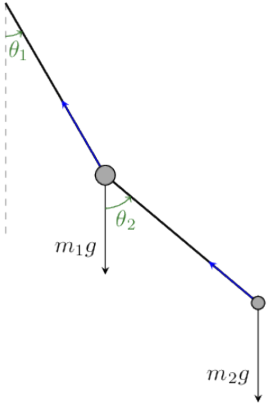

Figura: Las coordenadas generalizadas son los ángulos θ_1 y θ_2.

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación

Jacobianos

Definición

Un *Jacobiano* está conformado por las derivadas parciales de los vectores de posición con respecto a las posiciones generalizadas.

$$J_P = \frac{\partial \vec{r}_{OP}(\vec{q})}{\partial \vec{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial r_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Aplicaciones

- Mapeo lineal de las velocidades en el sistema cartesiano a velocidades generalizadas.

$$\dot{\vec{r}}_P = \frac{\partial \vec{r}_{OP}}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}} = J\dot{\vec{q}}$$

  - Expresar restricciones debidas a superficies en contacto.
  - Control de trayectorias.

- Mapeo lineal de cambios en coordenadas generalizadas al espacio cartesiano.

$$\Delta \vec{r}_P = \frac{\partial \vec{r}_{OP}}{\partial \vec{q}} \Delta \vec{q} = J\Delta \vec{q}$$

  - Cinemática directa e inversa.

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación

Temas

1 Repaso
- Cinemática
- Dinámica

2 Notación
- Coordenadas generalizadas
- Jacobianos

3 Transformaciones homogéneas
- Coordenadas homogéneas
- Traslación
- Rotación

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación