



# Definiciones

- 1 Definiciones
- 2 Rotaciones
- 3 Inserción y remoción

# Temas

## 1 Definiciones

- Árboles AVL
- Factor de Balanceo
- Balanceo de árboles AVL

# Árboles AVL

- Inventados por los rusos: *Georgii Adelson-Velskii* y *Yevgeniy Landis*.
- Los árboles AVL son árboles binarios ordenados balanceados. Es decir, la diferencia entre las alturas de los subárboles de cada nodo no es mayor que 1.

# Temas

## 1 Definiciones

- Árboles AVL
- Factor de Balanceo
- Balanceo de árboles AVL

# Factor de Balanceo

## Definición (Factor de balanceo)

Se define como *factor de balanceo* a:

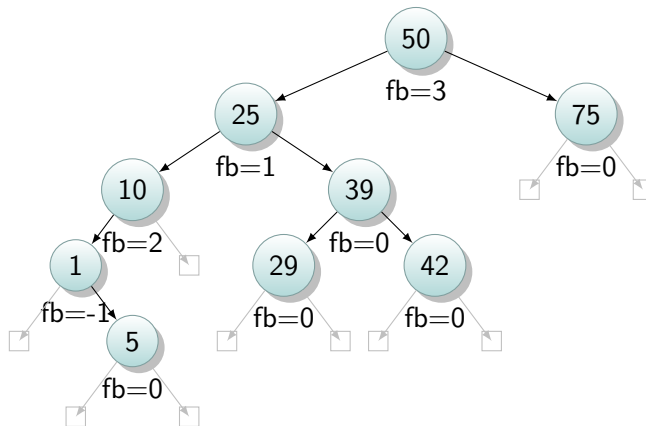
$$FB = h_i - h_j \quad (1)$$

donde  $h_i$  y  $h_j$  son las alturas de los subárboles izquierdo y derecho respectivamente, del árbol con raíz  $r_i$ .<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>En caso de que el subárbol sea vacío se puede decir que su altura es -1. Alternativamente se puede definir  $h = 0$  si el subárbol es vacío,  $h = h_{\text{subárbol}} + 1$  de otro modo.

# Ejemplo



# Temas

## 1 Definiciones

- Árboles AVL
- Factor de Balanceo
- Balanceo de árboles AVL



# Balanceo de árboles AVL

- Se dice que un árbol AVL está balanceado si  $|FB| < 2$  para todo nodo en el árbol.
- Para garantizar que esta propiedad se cumpla, si al insertar o borrar un nodo se viola esta propiedad para algún nodo a lo largo del camino entre este nodo y la raíz, se realiza inmediatamente una operación de balanceo.
- Para balancear árboles AVL se requieren dos tipos de operaciones sobre nodos:
  - 1 Rotación izquierda
  - 2 Rotación derecha

Las cuales se pueden aplicar solas o compuestas.
- Qué rotaciones se aplican y sobre qué nodos, depende del valor del FB.

# Rotaciones

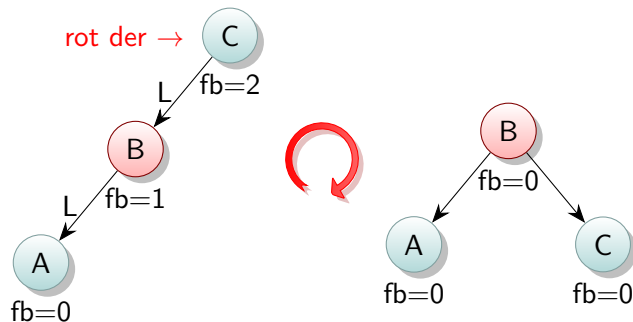
- 1 Definiciones
- 2 Rotaciones
- 3 Inserción y remoción

# Temas

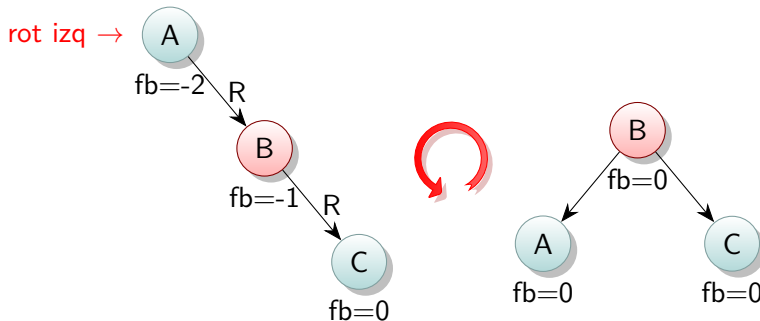
## 2 Rotaciones

- Rotaciones básicas
- Considerando los subárboles

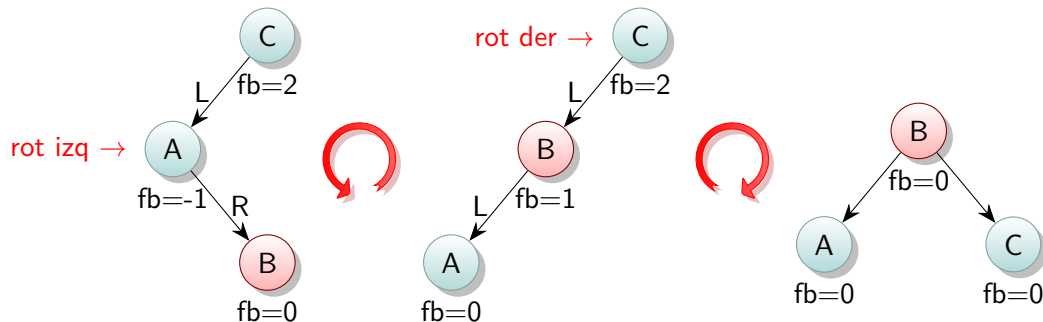
# Rotación a la derecha (LL)



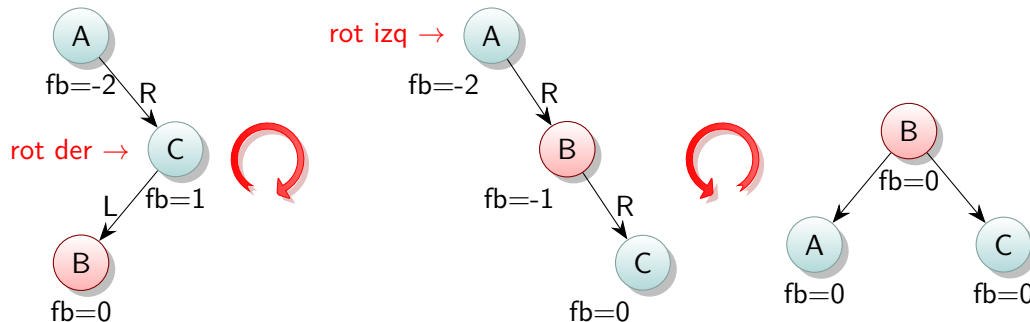
# Rotación a la izquierda (RR)



# Rotación doble (LR)



# Rotación doble (RL)



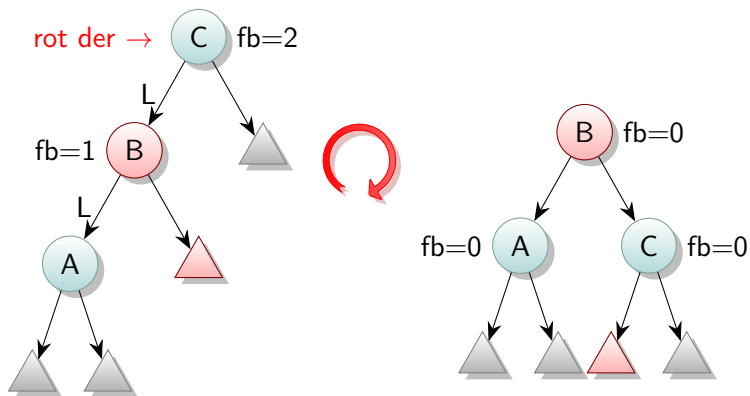
# Temas

## 2 Rotaciones

- Rotaciones básicas
- Considerando los subárboles



# Rotación a la derecha (LL)



# Inserción y remoción

- 1 Definiciones
- 2 Rotaciones
- 3 Inserción y remoción

# Temas

- 3** Inserción y remoción
  - Atributos del nodo
    - Insertar
    - Remover

# NodoAVL

- Para implementar árboles AVL de forma eficiente se requieren los atributos siguientes en cada nodo:
  - Dato
  - HijoI
  - HijoD
  - **Padre**
  - **Altura** del subárbol con raíz en este nodo.

# Temas

- 3 **Inserción y remoción**
  - Atributos del nodo
  - **Insertar**
  - Remover

# Insertar

## Algoritmo 1 Insertar

```
1: function AGREGA(árbol, dato)
2:   nodoNuevo  $\leftarrow$  INSERTA(árbol, dato)  $\triangleright$  Rabalancear a partir de nodoNuevo.padre
3:   while (temp  $\leftarrow$  temp.padre) =  $\emptyset$  do
4:     ACTUALIZAALTURA(temp)
5:     fb  $\leftarrow$  FACTORDEBALANCEO(temp)
6:     if fb = -2 then  $\triangleright$  Lado derecho (R)
7:       if FACTORDEBALANCEO(temp.hijoD) = 1 then  $\triangleright$  Lado izquierdo (L)
8:         ROTACIÓNDERECHA(temp.hijoD)
9:         ROTACIÓNIZQUIERDA(temp)
10:    return
11:  else
12:    Caso simétrico
13:    if temp.alturaPrevio = temp.alturaNueva then return
```

# Ejercicio de inserción

**Insertar:** 65,50,23,70,82,68,39

# Temas

- 3 Inserción y remoción
  - Atributos del nodo
  - Insertar
  - Remover

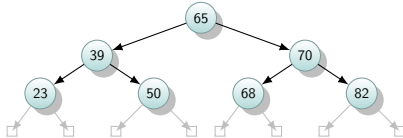


# Remover




- Se realiza de forma análoga a `insertar`:
  - 1 Se remueve el nodo con el mismo algoritmo de antes.
  - 2 A partir del nodo padre del nodo que fue removido, se rebalancea el árbol.

# Ejercicio de remoción

Remover: 68,82,70



# Bibliografía I

-  Cormen, Thomas H. y col. (2009). *Introduction to Algorithms*. 3rd. The MIT Press.
-  Preiss, Bruno (1999). *Data Structures and Algorithms with Object-Oriented Design Patterns in Java*. John Wiley & Sons.
-  Vargas Villazón, América, Jorge Lozano Moreno y Guillermo Levine Gutiérrez, eds. (1998). *Estructuras de datos y Algoritmos*. John Wiley & Sons, 438 pp.

# Licencia

Creative Commons  
Atribución-No Comercial-Compartir Igual

