Cuaterniones

Verónica E. Arriola-Rios

Robótica móvil

29 de octubre de 2024

Temas

Definición

Hay varias formas de visualizar a los cuaterniones:

- Vectores con cuatro componentes

$$\tilde{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) \tag{1}$$

- Una extensión de los números complejos

$$\tilde{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{2}$$

- La unión de un escalar y vector con tres componentes

$$\tilde{q} = q + \vec{q} \tag{3}$$

- Par ordenado de partes real e imaginaria:

$$\tilde{q} = (q, \vec{q}) \tag{4}$$

- Polinomio en las variables (i, j, k)

Temas

Multiplicación

Se puede plantear como el producto de dos polinomios

$$\tilde{p}\tilde{q} = (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \tag{5}$$

Tercia de imaginarios

Se define el significado de las tres componentes imaginarias del modo siguiente:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{6}$$

Desglosando la regla $ijk = -1$ se puede ver la tabla siguiente en términos de las permutaciones entre i, j y k:

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Cálculo del producto

	q_0	$q_1 i$	$q_2 j$	$q_3 k$
p_0	$p_0 q_0$	$p_0 q_1 i$	$p_0 q_2 j$	$p_0 q_3 k$
$p_1 i$	$p_1 q_0 i$	$p_1 q_1 i^2$	$p_1 q_2 ij$	$p_1 q_3 ik$
$p_2 j$	$p_2 q_0 j$	$p_2 q_1 ji$	$p_2 q_2 j^2$	$p_2 q_3 jk$
$p_3 k$	$p_3 q_0 k$	$p_3 q_1 ki$	$p_3 q_2 kj$	$p_3 q_3 k^2$

Aplicando la regla anterior esta tabla se transforma en:

	q_0	$q_1 i$	$q_2 j$	$q_3 k$
p_0	$p_0 q_0$	$p_0 q_1 i$	$p_0 q_2 j$	$p_0 q_3 k$
$p_1 i$	$p_1 q_0 i$	$-p_1 q_1$	$p_1 q_2 k$	$-p_1 q_3 j$
$p_2 j$	$p_2 q_0 j$	$-p_2 q_1 k$	$-p_2 q_2$	$p_2 q_3 i$
$p_3 k$	$p_3 q_0 k$	$p_3 q_1 j$	$-p_3 q_2 i$	$-p_3 q_3$

Versión matricial

El producto de cuaterniones se puede escribir como el producto de una matriz por un vector:

$$\tilde{p}\tilde{q} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \tilde{p}^{\times}\tilde{q} \tag{7}$$

También es posible escribirlo como:

$$\tilde{p}\tilde{q} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} =^{\times} \tilde{q}\tilde{p} \tag{8}$$

Desarrollo de la multiplicación

- Como el producto de dos polinomios:

$$\tilde{p}\tilde{q} = (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \tag{9}$$
$$= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + (\ldots)i + \ldots \tag{10}$$

- Como escalar y vector:

$$\tilde{p}\tilde{q} = (p + \vec{p})(q + \vec{q}) \tag{11}$$
$$= pq + p\vec{q} + q\vec{p} + \vec{p}\vec{q} \tag{12}$$

Para reacomodar esta última versión, revisemos una vez más la tabla de la multiplicación.

Cálculo del producto

	q_0	$q_1 i$	$q_2 j$	$q_3 k$
p_0	$p_0 q_0$	$p_0 q_1 i$	$p_0 q_2 j$	$p_0 q_3 k$
$p_1 i$	$p_1 q_0 i$	$-p_1 q_1$	$p_1 q_2 k$	$-p_1 q_3 j$
$p_2 j$	$p_2 q_0 j$	$-p_2 q_1 k$	$-p_2 q_2$	$p_2 q_3 i$
$p_3 k$	$p_3 q_0 k$	$p_3 q_1 j$	$-p_3 q_2 i$	$-p_3 q_3$

$$\tilde{p}\tilde{q} = pq + p\vec{q} + q\vec{p} + \vec{p}\vec{q} \tag{13}$$

$$= pq + p\vec{q} + q\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q} - \vec{p} \cdot \vec{q} \tag{14}$$

Reagrupando escalares y vectores:

$$\tilde{p}\tilde{q} = (pq - \vec{p} \cdot \vec{q}) + (p\vec{q} + q\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}) \tag{15}$$

Otras operaciones

Suma:

$$\tilde{p} + \tilde{q} = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_i)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \quad (16)$$

Producto punto: **no** es la parte real del *producto de cuaterniones*.

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} = pq + \vec{p} \cdot \vec{q} \quad (17)$$

Norma:

$$|\tilde{q}| = \sqrt{\tilde{q} \cdot \tilde{q}} \quad (18)$$

Propiedades

No conmutatividad Obsérvese, a partir de la presencia del producto cruz, que:

$$\tilde{\mathrm{p}}\tilde{\mathrm{q}} \neq \tilde{\mathrm{q}}\tilde{\mathrm{p}} \tag{19}$$

Distributividad

$$(\tilde{\mathrm{p}} + \tilde{\mathrm{q}})\tilde{\mathrm{r}} = \tilde{\mathrm{p}}\tilde{\mathrm{r}} + \tilde{\mathrm{q}}\tilde{\mathrm{r}} \tag{20}$$

$$\tilde{\mathrm{p}}(\tilde{\mathrm{q}} + \tilde{\mathrm{r}}) = \tilde{\mathrm{p}}\tilde{\mathrm{q}} + \tilde{\mathrm{p}}\tilde{\mathrm{r}} \tag{21}$$

Cuaternión conjugado

El *cuaternión conjugado* es análogo al *complejo conjugado*:

$$\tilde{q}^* = q - \vec{q} \tag{22}$$

Más sobre la norma

Para el producto de un cuaternion por su conjugado:

$$\begin{aligned}\tilde{q}\tilde{q}^* &= (q^2 - (\vec{q}\cdot(-\vec{q}))) + (q(-\vec{q}) + q\vec{q} + \vec{q}\times(-\vec{q})) && (23)\\ &= (q^2 + \vec{q}\cdot\vec{q}) + (\cancel{-q\vec{q} + q\vec{q}} - \cancelto{0}{\vec{q}\times(\vec{q})}) && (24)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\tilde{q}\tilde{q}^* = \tilde{q}\cdot\tilde{q} \qquad (25)$$

Norma:

$$|\tilde{q}| = \sqrt{\tilde{q}\cdot\tilde{q}} = \sqrt{\tilde{q}\tilde{q}^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \qquad (26)$$

Conjugado del producto

$$\begin{aligned}
\tilde{p}^*\tilde{q}^* &= (p - \vec{p})(q - \vec{q}) && (27)\\
&= pq - p\vec{q} - q\vec{p} + \vec{p}\vec{q}\\
&= (pq - \vec{p}\cdot\vec{q}) + (-p\vec{q} - q\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q})\\
(\tilde{q}\tilde{p})^* &= [(qp - \vec{q}\cdot\vec{p}) + (q\vec{p} + p\vec{q} + \vec{q}\times\vec{p})]^* && (28)\\
&= [(pq - \vec{p}\cdot\vec{q}) + (p\vec{q} + q\vec{p} - \vec{p}\times\vec{q})]^*\\
&= (pq - \vec{p}\cdot\vec{q}) + (-p\vec{q} - q\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q})\\
\Rightarrow \tilde{p}^*\tilde{q}^* &= (\tilde{q}\tilde{p})^* && (29)
\end{aligned}$$

Temas

Ángulos ACG

Es más común indicar las rotaciones en términos de los ángulos ACG, más conocidos por sus siglas en inglés RPY:

- *Alabeo (Roll)*. Rotación alrededor del eje x.
- *Cabeceo (Pitch)*. Rotación alrededor del eje y.
- *Guiñada (Yaw)*. Rotación alrededor del eje z.

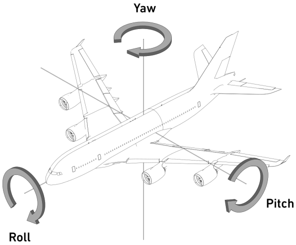


Figura: Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Flight_dynamics_with_text_ortho.svg

Cuaternión unitario para rotación

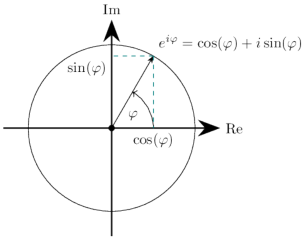
El cuaternión unitario:

$$\tilde{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{w}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{30}$$

representa una rotación de θ alrededor del vector unitario $\hat{w}$.

TIP: observemos la similitud con la fórmula de Euler, que define la exponencial compleja $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

$$\begin{aligned} q &= e^{\frac{\theta}{2}(u_x i + u_y j + u_z k)} \\ &= \cos\frac{\theta}{2} + (u_x i + u_y j + u_z k)\sin\frac{\theta}{2} \\ q^{-1} &= e^{-\frac{\theta}{2}(u_x i + u_y j + u_z k)} \\ &= \cos\frac{\theta}{2} - (u_x i + u_y j + u_z k)\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$



Rotaciones

- Una rotación se realiza mediante la fórmula:

$$p' = qpq^{-1}$$

con $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = p_x i + p_y j + p_z k$

- Programáticamente, la posición $\vec{p}$ se puede representar como un cuaternion cuya parte real es cero.

$$p = 0 + p_x i + p_y j + p_z k$$

El resultado buscado es la parte vectorial de p'.

Euler a cuaterión

- Sean los ángulos de Euler: $Roll, Pitch, Yaw = (\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$
- Cuaternión:

$$q = R_z R_y R_x = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \text{sen}\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_j}{2}\right) \\ 0 \\ \text{sen}\left(\frac{\alpha_j}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_w = c_r * c_p * c_y + s_r * s_p * s_y$$
$$q_x = s_r * c_p * c_y - c_r * s_p * s_y$$
$$q_y = s_r * c_p * s_y + c_r * s_p * c_y$$
$$q_z = c_r * c_p * s_y - s_r * s_p * c_y$$

Cómputo

Para optimizar operaciones sean $\alpha = \frac{\theta}{2}$, :

Roll	Pitch	Yaw
$c_i = \cos(\alpha_i)$	$c_j = \cos(\alpha_j)$	$c_k = \cos(\alpha_k)$
$s_i = \text{sen}(\alpha_i)$	$s_j = \text{sen}(\alpha_j)$	$s_k = \text{sen}(\alpha_k)$

$$cc = c_i * c_k \qquad cs = c_i * s_k$$

$$sc = s_i * c_k \qquad ss = s_i * s_k$$

$$q = \begin{bmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_j * cc + s_j * ss \\ c_j * sc - s_j * cs \\ c_j * ss + s_j * cc \\ c_j * cs - s_j * sc \end{bmatrix}$$

Cuaterniones en ROS

- Son un tipo base `tf::Quaternion` dentro del paquete `tf`.
- Se representan por un arreglo `np.array([qx, qy, qz, qw])`
- Su documentación se encuentra en:

  http://docs.ros.org/jade/api/tf/html/c++/classtf_1_1Quaternion.html
- Otras funciones axiliares se listan en:

  http://wiki.ros.org/tf/Overview/Data%20Types