Mecánica

Verónica E. Arriola-Rios

Robótica móvil

13 de septiembre de 2022

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Denavit Hartenberg
   - Marcos de referencia
   - Matrices de transformación
4. Cinemática inversa

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Denavit Hartenberg
   - Marcos de referencia
   - Matrices de transformación
4. Cinemática inversa

Movimiento lineal

Dadas las variables *posición* $\vec{x}$, *velocidad* $\vec{v}$ y *aceleración* $\vec{a}$, se definen:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \tag{1}$$

Si la aceleración es constante:

$$v = \int a dt = at + c_1$$
$$x = \int v dt = \int (at + c_1) dt = \frac{1}{2}at^2 + c_1 t + c_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_1 t + x_1$$

Movimiento circular

Variables:

- Movimiento circular uniforme
  - θ: ángulo de rotación
  - ω: velocidad angular
  - $v = r\omega$: velocidad lineal o tangencial
- Movimiento circular uniformemente acelerado
  - α: aceleración angular
  - La aceleración tiene dos componentes:
    - a_c: aceleración centrípeta
    - a_t: aceleración tangencial

Temas

Segunda ley de Newton

Momento lineal (*Momentum*)

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2}$$

Segunda ley de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dot{\vec{p}} \tag{3}$$

$$= m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{4}$$

Temas

Temas

Coordenadas

Coordenadas cartesianas para un sistema de N partículas:

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N \qquad \text{con} \qquad \vec{r}_i \in \mathbb{R}^d \tag{5}$$

Pueden satisfacer k restricciones *holonómicas* que son de la forma:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t) = 0 \tag{6}$$

donde t es el tiempo. Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes, sean éstas las *coordenadas generalizadas*:

$$q_1, q_2, ..., q_{dN-k} \tag{7}$$

Coordenadas generalizadas

Definición

Las *coordenadas generalizadas* son un conjunto de variables **independientes** que describen de forma **única** la configuración del sistema.

Las coordenadas generalizadas pueden ser:

- Coordenadas cartesianas.
- Ángulos.
- Amplitudes de una expansión de Fourier de $\vec{r}_j$.
- Cantidades con dimensiones de energía.
- Cantidades con dimensiones de momento.

Usualmente se eligen de modo que correspondan directamente con los *grados de libertad* de las articulaciones o actuadores.

Grados de libertad

Definición

El número de variables independientes requeridas para describir al sistema determina los **grados de libertad** del sistema.

Las variables originales se escriben en términos de las coordenadas generalizadas mediante ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, ..., q_{dN-k}, t) \\ &\dots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, q_2, ..., q_{dN-k}, t)\end{aligned} \tag{8}$$

Se asume que es posible obtener cualquier q_i como función de las $\vec{r}_l$ invirtiendo las ecuaciones (6) y (8).

Ejemplo: péndulo doble

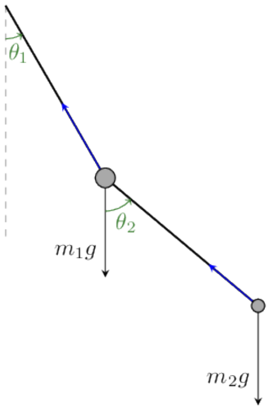


Figura: Las coordenadas generalizadas son los ángulos θ_1 y θ_2.

Temas

Jacobianos

Definición

Un *Jacobiano* está conformado por las derivadas parciales de los vectores de posición con respecto a las posiciones generalizadas.

$$J_P = \frac{\partial \vec{r}_{OP}(\vec{q})}{\partial \vec{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Aplicaciones

- Mapeo lineal de las velocidades en el sistema cartesiano a velocidades generalizadas.

$$\dot{\vec{r}}_P = \frac{\partial \vec{r}_{OP}}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}} = J \dot{\vec{q}}$$

  - Expresar restricciones debidas a superficies en contacto.
  - Control de trayectorias.

- Mapeo lineal de cambios en coordenadas generalizadas al espacio cartesiano.

$$\Delta \vec{r}_P = \frac{\partial \vec{r}_{OP}}{\partial \vec{q}} \Delta \vec{q} = J \Delta \vec{q}$$

  - Cinemática directa e inversa.

Temas

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Denavit Hartenberg
   - Marcos de referencia
   - Matrices de transformación
4. Cinemática inversa

Eslabón

Definición (Eslabón)

Un eslabón es un cuerpo sólido con al menos un punto particular, llamado *nodo*, que soporta el montaje de otro eslabón.

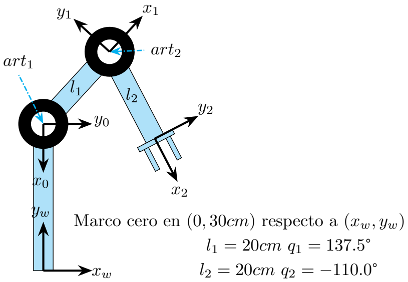


Figura: Cadena con dos eslabones: l_1 y l_2

Asignación de marcos de referencia

Para un eslabón i con dos nodos:

- Alinear z con el eje en movimiento de la articulación distal.
- La articulación proximal del enlace i también tiene el índice i, ya que ella es la responsable de su comportamiento.
- El origen o del marco de referencia se coloca en la intersección entre el eje z_i y el vector normal común a los ejes z_{i-1} y z_i.
- El eje x se coloca sobre el vector normal anterior, $\hat{x}_i = \hat{z}_i \times \hat{z}_{n-1}$. Sin son paralelos x_i va de z_{n-1} a z_n.
- El eje y se elige con la regla de la mano derecha.

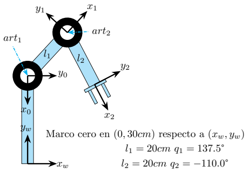
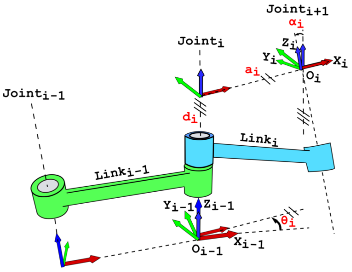
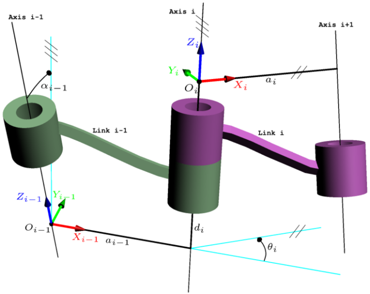


Figura: El eslabón l_1 tiene dos nodos.

Asignación clásica y alternativa



(a) Convención clásica, parámetros distales.



(b) Convención modificada, parámetros proximales.

Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Classic_DH_Parameters_Convention.png
Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DHParameter.png

Cadena cinemática abierta simple

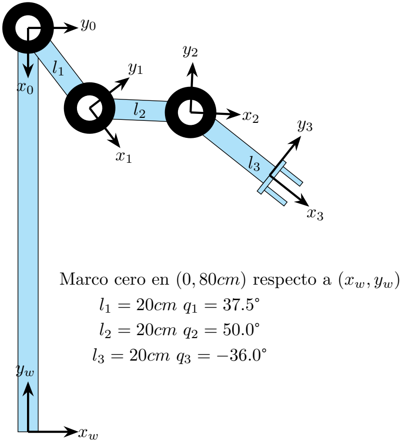


Figura: Cadena cinemática abierta simple con cuatro eslabones planos (incluyendo el eslabón base). El marco w es el sistema de coordenadas del mundo.

Temas

Denavit Hartenberg

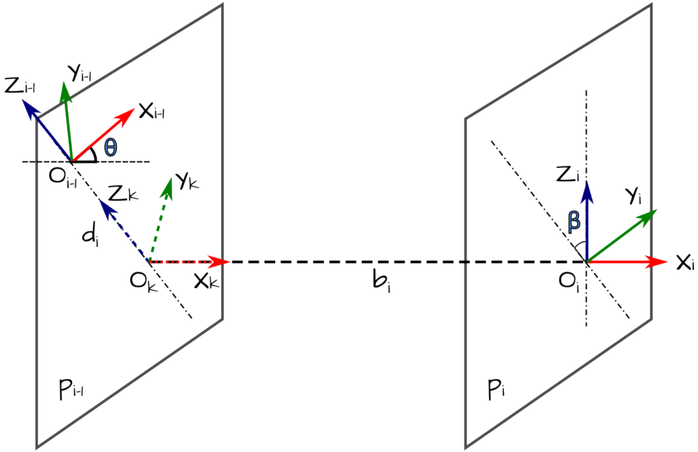


Figura: Cuatro transformaciones permiten trasladar el marco i a la posición del marco $i - 1$.

Para expresar las coordenadas del marco i con respecto al marco $i-1$ sean:

1. β_i: ángulo de rotación alrededor del eje X_i para alinear los ejes Z;
2. b_i: desplazamiento lineal a lo largo del eje X_i para colocar los orígenes sobre el mismo plano;
3. θ_i: ángulo de rotación alrededor del eje Z_{i-1}, que es la *variable de la articulación* si i es una articulación revoluta.
4. d_i: desplazamiento lineal a lo largo del eje Z_{i-1}, que es la *variable de la articulación* si la articulación i es prismática.

Matriz de transformación homogénea

$$T = \begin{bmatrix} R_{3\times 3} & P_{3\times 1} \\ F_{1\times 3} & W_{1\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

1. Traslación y rotación alrededor del eje X.

$$^{k}M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_i \\ 0 & \cos(\beta_i) & -\mathrm{sen}(\beta_i) & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(\beta_i) & \cos(\beta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

2. Traslación y rotación alrededor del eje Z.

$$^{i-1}M_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\mathrm{sen}(\theta_i) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

3. Para obtener las coordenadas del marco i con respecto a $i-1$:

$$^{i-1}M_i = Tra_{z_{i-1}}(d_i) Rot_{z_{i-1}}(\theta_{z-1}) Tra_{x_i}(b_i) Rot_{x_i}(\beta_i)$$

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Denavit Hartenberg
   - Marcos de referencia
   - Matrices de transformación
4. Cinemática inversa

Dada la posición del efector

1. Determinar la posición final del efector final en coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas generalizadas.

$$\vec{q}^0 =^0 M_n \vec{q}^n \tag{12}$$

2. Obtener el Jacobiano.
3. Indicar una posición inicial, para la cual conocemos las coordenadas generalizadas. Por ejemplo el vector $\vec{0}$.
4. Evaluar el Jacobiano J en la posición actual $\vec{q}$ y calcular ahí su pseudoinversa J^+.
5. Multiplicar la pseudoinversa por el error: la diferencia entre la posicion actual y la posicion deseada.

$$\vec{q}^{i+1} = \vec{q}^i + J^+(\vec{r}^{meta} - \vec{r}^i) \tag{13}$$