Mecánica

Verónica E. Arriola-Rios

Robótica móvil

24 de octubre de 2024

Temas

Temas

Movimiento lineal

Dadas las variables *posición* $\vec{x}$, *velocidad* $\vec{v}$ y *aceleración* $\vec{a}$, se definen:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \tag{1}$$

Si la aceleración es constante:

$$v = \int a dt = at + c_1$$

$$x = \int v dt = \int (at + c_1) dt = \frac{1}{2}at^2 + c_1 t + c_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_1 t + x_1$$

Movimiento circular

Variables:

- Movimiento circular uniforme
  - θ: ángulo de rotación
  - ω: velocidad angular
  - $v = r\omega$: velocidad lineal o tangencial
- Movimiento circular uniformemente acelerado
  - α: aceleración angular
  - La aceleración tiene dos componentes:
    - a_c: aceleración centrípeta
    - a_t: aceleración tangencial

Temas

Segunda ley de Newton

Momento lineal (*Momentum*)

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2}$$

Segunda ley de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dot{\vec{p}} \tag{3}$$

$$= m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{4}$$

Temas

Temas

Coordenadas

Coordenadas cartesianas para un sistema de N partículas:

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N \qquad \text{con} \qquad \vec{r}_i \in \mathbb{R}^d \tag{5}$$

Pueden satisfacer k restricciones *holonómicas* que son de la forma:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t) = 0 \tag{6}$$

donde t es el tiempo. Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes, sean éstas las *coordenadas generalizadas*:

$$q_1, q_2, ..., q_{dN-k} \tag{7}$$

(Goldstein 1980)

Coordenadas generalizadas

Definición

Las *coordenadas generalizadas* son un conjunto de variables **independientes** que describen de forma **única** la configuración del sistema.

Las coordenadas generalizadas pueden ser:

- Coordenadas cartesianas.
- Ángulos.
- Amplitudes de una expansión de Fourier de $\vec{r}_j$.
- Cantidades con dimensiones de energía.
- Cantidades con dimensiones de momento.

Usualmente se eligen de modo que correspondan directamente con los *grados de libertad* de las articulaciones o actuadores.

Grados de libertad

Definición

El número de variables independientes requeridas para describir al sistema determina los **grados de libertad** del sistema.

Las variables originales se escriben en términos de las coordenadas generalizadas mediante ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, ..., q_{dN-k}, t) \\ &\dots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, q_2, ..., q_{dN-k}, t) \end{aligned} \tag{8}$$

Se asume que es posible obtener cualquier q_i como función de las $\vec{r}_l$ invirtiendo las ecuaciones (6) y (8).

Ejemplo: péndulo doble

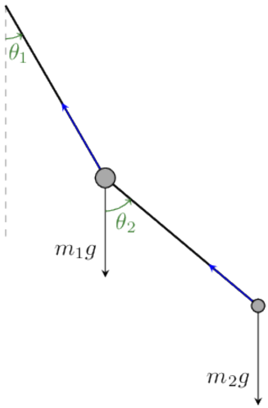

Figura: Las coordenadas generalizadas son los ángulos θ_1 y θ_2.

Temas

Jacobianos

Definición

Un *Jacobiano* está conformado por las derivadas parciales de los vectores de posición con respecto a las posiciones generalizadas.

$$J_P = \frac{\partial \vec{r}_{OP}(\vec{q})}{\partial \vec{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial r_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Aplicaciones

- Mapeo lineal de las velocidades en el sistema cartesiano a velocidades generalizadas.

$$\dot{\vec{r}}_P = \frac{\partial \vec{r}_{OP}}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}} = J\dot{\vec{q}}$$

  - Expresar restricciones debidas a superficies en contacto.
  - Control de trayectorias.
- Mapeo lineal de cambios en coordenadas generalizadas al espacio cartesiano.

$$\Delta\vec{r}_P = \frac{\partial \vec{r}_{OP}}{\partial \vec{q}} \Delta\vec{q} = J\Delta\vec{q}$$

  - Cinemática directa e inversa.

Temas

Temas

Coordenadas homogéneas

- Introducen un factor de escala w en la representación de los vectores de posición $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ (Mendoza-Garcia 2014)

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ zw \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- De modo que un vector $1\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ se puede representar como $[1, 2, 3, 1]^T$, $[3, 6, 9, 3]^T$ ó $[-2, -4, -6, -2]^T$

Matriz de transformación homogénea

$$M = \begin{bmatrix} R_{3\times3} & T_{3\times1} \\ P_{1\times3} & W_{1\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

Temas

1. Repaso
   - Cinemática
   - Dinámica
2. Notación
   - Coordenadas generalizadas
   - Jacobianos
3. Transformaciones homogéneas
   - Coordenadas homogéneas
   - Traslación
   - Rotación
   - Perspectiva

Traslación

$$TX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Temas

Rotaciones

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y\cos(\alpha) - z\operatorname{sen}(\alpha) \\ y\operatorname{sen}(\alpha) + z\cos(\alpha) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \operatorname{sen}(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\operatorname{sen}(\psi) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temas

Referencias I

- Goldstein, Herbert (1980). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley.
- Mendoza-Garcia, Ricardo-Franco (2014). *Fundamentos de Robótica, Herramientas Matemáticas para la Localización Espacial, Matrices de Transformación Homogéneas*. Universidad de Tarapacá, Chile. URL: http://www.eudim.uta.cl/rmendozag/courses/fundamentos_robotica/lectures/matrices_homogeneas.pdf.