

Cuaterniones

Verónica E. Arriola-Rios

Robótica móvil

30 de abril de 2020

Temas

1 Definición

2 Multiplicación

3 Rotaciones en 3D

Definición

Hay varias formas de visualizar a los cuaterniones:

- Vectores con cuatro componentes

$$\tilde{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (1)$$

- Una extensión de los números complejos

$$\tilde{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (2)$$

- La unión de un escalar y vector con tres componentes

$$\tilde{q} = q + \vec{q} \quad (3)$$

- Par ordenado de partes real e imaginaria:

$$\tilde{q} = (q, \vec{q}) \quad (4)$$

- Polinomio en las variables (i, j, k)

Temas

1 Definición

2 Multiplicación

3 Rotaciones en 3D

Multiplicación

Se puede plantear como el producto de dos polinomios

$$\tilde{p}\tilde{q} = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \quad (5)$$

Tercia de imaginarios

Se define el significado de las tres componentes imaginarias del modo siguiente:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (6)$$

Desglosando la regla $ijk = -1$ se puede ver la tabla siguiente en términos de las permutaciones entre i , j y k :

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Cálculo del producto

	q_0	$q_1 i$	$q_2 j$	$q_3 k$
p_0	$p_0 q_0$	$p_0 q_1 i$	$p_0 q_2 j$	$p_0 q_3 k$
$p_1 i$	$p_1 q_0 i$	$p_1 q_1 i^2$	$p_1 q_2 ij$	$p_1 q_3 ik$
$p_2 j$	$p_2 q_0 j$	$p_2 q_1 ji$	$p_2 q_2 j^2$	$p_2 q_3 jk$
$p_3 k$	$p_3 q_0 k$	$p_3 q_1 ki$	$p_3 q_2 kj$	$p_3 q_3 k^2$

Aplicando la regla anterior esta tabla se transforma en:

	q_0	$q_1 i$	$q_2 j$	$q_3 k$
p_0	$p_0 q_0$	$p_0 q_1 i$	$p_0 q_2 j$	$p_0 q_3 k$
$p_1 i$	$p_1 q_0 i$	$-p_1 q_1$	$p_1 q_2 k$	$-p_1 q_3 j$
$p_2 j$	$p_2 q_0 j$	$-p_2 q_1 k$	$-p_2 q_2$	$p_2 q_3 i$
$p_3 k$	$p_3 q_0 k$	$p_3 q_1 j$	$-p_3 q_2 i$	$-p_3 q_3$

Versión matricial

El producto de cuaterniones se puede escribir como el producto de una matriz por un vector:

$$\tilde{p}\tilde{q} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \tilde{p}^\times \tilde{q} \quad (7)$$

También es posible escribirlo como:

$$\tilde{p}\tilde{q} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = {}^\times \tilde{q} \tilde{p} \quad (8)$$

Desarrollo de la multiplicación

- Como el producto de dos polinomios:

$$\tilde{p}\tilde{q} = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \quad (9)$$

$$= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (...)i + ... \quad (10)$$

- Como escalar y vector:

$$\tilde{p}\tilde{q} = (p + \vec{p})(q + \vec{q}) \quad (11)$$

$$= pq + p\vec{q} + q\vec{p} + \vec{p}\vec{q} \quad (12)$$

Para reacomodar esta última versión, revisemos una vez más la tabla de la multiplicación.

Cálculo del producto

	q_0	$q_1 i$	$q_2 j$	$q_3 k$
p_0	$p_0 q_0$	$p_0 q_1 i$	$p_0 q_2 j$	$p_0 q_3 k$
$p_1 i$	$p_1 q_0 i$	$-p_1 q_1$	$p_1 q_2 k$	$-p_1 q_3 j$
$p_2 j$	$p_2 q_0 j$	$-p_2 q_1 k$	$-p_2 q_2$	$p_2 q_3 i$
$p_3 k$	$p_3 q_0 k$	$p_3 q_1 j$	$-p_3 q_2 i$	$-p_3 q_3$

$$\tilde{p}\tilde{q} = pq + \textcolor{red}{p}\vec{q} + \textcolor{red}{q}\vec{p} + \vec{p}\vec{q} \quad (13)$$

$$= pq + \textcolor{red}{p}\vec{q} + \textcolor{red}{q}\vec{p} + \textcolor{green}{\vec{p}} \times \textcolor{green}{\vec{q}} - \textcolor{blue}{\vec{p}} \cdot \textcolor{blue}{\vec{q}} \quad (14)$$

Reagrupando escalares y vectores:

$$\tilde{p}\tilde{q} = (pq - \vec{p} \cdot \vec{q}) + (p\vec{q} + q\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}) \quad (15)$$

Otras operaciones

Suma:

$$\tilde{p} + \tilde{q} = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \quad (16)$$

Producto punto: **no** es la parte real del *producto de cuaterniones*.

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} = pq + \vec{p} \cdot \vec{q} \quad (17)$$

Norma:

$$|\tilde{q}| = \sqrt{\tilde{q} \cdot \tilde{q}} \quad (18)$$

Propiedades

No conmutatividad Obsérvese, a partir de la presencia del producto cruz, que:

$$\tilde{p}\tilde{q} \neq \tilde{q}\tilde{p} \quad (19)$$

Distributividad

$$(\tilde{p} + \tilde{q})\tilde{r} = \tilde{p}\tilde{r} + \tilde{q}\tilde{r} \quad (20)$$

$$\tilde{p}(\tilde{q} + \tilde{r}) = \tilde{p}\tilde{q} + \tilde{p}\tilde{r} \quad (21)$$

Cuaternión conjugado

El *cuaternión conjugado* es análogo al *complejo conjugado*:

$$\tilde{q}^* = q - \vec{q} \quad (22)$$

Más sobre la norma

Para el producto de un cuaternion por su conjugado:

$$\tilde{q}\tilde{q}^* = (q^2 - (\vec{q} \cdot (-\vec{q}))) + (q(-\vec{q}) + q\vec{q} + \vec{q} \times (-\vec{q})) \quad (23)$$

$$= (q^2 + \vec{q} \cdot \vec{q}) + (\cancel{-q\vec{q} + q\vec{q}} - \vec{q} \times \vec{q}) \overset{0}{\rightarrow} \quad (24)$$

Por lo tanto:

$$\tilde{q}\tilde{q}^* = \tilde{q} \cdot \tilde{q} \quad (25)$$

Norma:

$$|\tilde{q}| = \sqrt{\tilde{q} \cdot \tilde{q}} = \sqrt{\tilde{q}\tilde{q}^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (26)$$

Conjugado del producto

$$\tilde{p}^* \tilde{q}^* = (p - \vec{p})(q - \vec{q}) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &= pq - p\vec{q} - q\vec{p} + \vec{p}\vec{q} \\ &= (pq - \vec{p} \cdot \vec{q}) + (-p\vec{q} - q\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}) \end{aligned}$$

$$(\tilde{q}\tilde{p})^* = [(qp - \vec{q} \cdot \vec{p}) + (q\vec{p} + p\vec{q} + \vec{q} \times \vec{p})]^* \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= [(pq - \vec{p} \cdot \vec{q}) + (p\vec{q} + q\vec{p} - \vec{p} \times \vec{q})]^* \\ &= (pq - \vec{p} \cdot \vec{q}) + (-p\vec{q} - q\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{p}^* \tilde{q}^* = (\tilde{q}\tilde{p})^* \quad (29)$$

Temas

- 1 Definición
- 2 Multiplicación
- 3 Rotaciones en 3D**

Ángulos ACG

Es más común indicar las rotaciones en términos de los ángulos ACG, más conocidos por sus siglas en inglés RPY:

- *Alabeo (Roll)*. Rotación alrededor del eje x .
- *Cabeceo (Pitch)*. Rotación alrededor del eje y .
- *Guiñada (Yaw)*. Rotación alrededor del eje z .

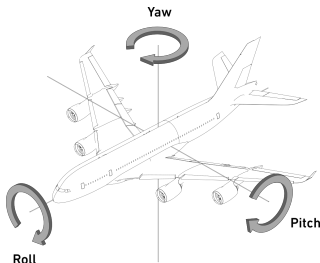


Figura: Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Flight_dynamics_with_text_ortho.svg

Cuaterniones en ROS

- Son un tipo base `tf::Quaternion` dentro del paquete `tf`.
- Su documentación se encuentra en:

http://docs.ros.org/jade/api/tf/html/c++/classtf_1_1Quaternion.html

- Otras funciones axiliares se listan en:

<http://wiki.ros.org/tf/Overview/Data%20Types>