Primitive grafice. Fața și spatele unui poligon convex

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2021 - 2022

Condiții pentru poligoane

Vector normal. Fața și spatele unui poligon convex

Exemple

Motivație

- Codul sursă `03_01_poligoane3d.cpp`

Motivație

- Codul sursă `03_01_poligoane3d.cpp`
- Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?

Motivație

- Codul sursă `03_01_poligoane3d.cpp`
- Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?
  - **NU:** reguli pentru aplicarea reguli pentru aplicarea funcției `GL_POLYGON` - se presupune că vârfurile determină un poligon convex

Motivație

- Codul sursă `03_01_poligoane3d.cpp`
- Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?
  - **NU:** reguli pentru aplicarea reguli pentru aplicarea funcției `GL_POLYGON` - se presupune că vârfurile determină un poligon convex
  - **DA:** fața și spatele unui poligon convex

Reguli pentru aplicarea funcției GL_POLYGON

Se presupune că opțiunea GL_POLYGON este utilizată pentru un șir de vârfuri $P_1, P_2, \ldots, P_N$, distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.

Reguli pentru aplicarea funcției GL_POLYGON

Se presupune că opțiunea GL_POLYGON este utilizată pentru un șir de vârfuri $P_1, P_2, \ldots, P_N$, distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.
2. Vârfurile trebuie indicate în ordinea corectă, astfel încât linia pologonală să nu aibă autointersecții.

Reguli pentru aplicarea funcției GL_POLYGON

Se presupune că opțiunea GL_POLYGON este utilizată pentru un șir de vârfuri $P_1, P_2, \ldots, P_N$, distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.
2. Vârfurile trebuie indicate în ordinea corectă, astfel încât linia pologonală să nu aibă autointersecții.
3. Poligonul trebuie să fie convex.

1. Coplanaritatea

De verificat: condiția de coplanaritate

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{P_1} & x_{P_2} & x_{P_3} & \dots & x_{P_N} \\ y_{P_1} & y_{P_2} & y_{P_3} & \dots & y_{P_N} \\ z_{P_1} & z_{P_2} & z_{P_3} & \dots & z_{P_N} \end{pmatrix} = 3 \tag{1}$$

sau faptul că

$$\dim_{\mathbb{R}}\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1P_N}\rangle = 2. \tag{2}$$

Fapt: O condiție alternativă este coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4}$, ..., $\overrightarrow{P_{N-1}P_N} \times \overrightarrow{P_NP_1}$, $\overrightarrow{P_NP_1} \times \overrightarrow{P_1P_2}$. Altfel spus: punctele $P_1, P_2, \dots, P_N$ sunt coplanare dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ ($i = 1, \dots, N$, cu convenții modulo N) sunt coliniari.

Exemplu

Punctele $P_1 = (7, 1, 1)$, $P_2 = (-3, 3, 9)$, $P_3 = (1, -1, 9)$, $P_4 = (8, -4, 5)$ sunt coplanare.

$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (32, 32, 32)$

$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = \ldots = (16, 16, 16)$

$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_1} = \ldots = (32, 32, 32)$

$\overrightarrow{P_4P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = \ldots = (48, 48, 48)$

vectorii sunt proporționali, deci coliniari; deci punctele sunt coplanare

$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (-10, 2, 8)$

$\overrightarrow{P_2P_3} = P_3 - P_2 = (4, -4, 0)$

dezv. ultima coloană

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix} -10 & 4 & e_1 \\ 2 & -4 & e_2 \\ 8 & 0 & e_3 \end{vmatrix} = 32e_1 + 32e_2 + 32e_3 = (32, 32, 32)$$

Exemplu

Punctele $P_1 = (7, 1, 1), P_2 = (-3, 3, 9)$, $P_3 = (1, -1, 9)$, $P_4 = (11, -3, 1)$ sunt coplanare.

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = (16, 16, 16)$$

$$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_1} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_4P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (48, 48, 48)$$

2. Linie poligonală fără autointersecții

De verificat: intersecții de segmente.

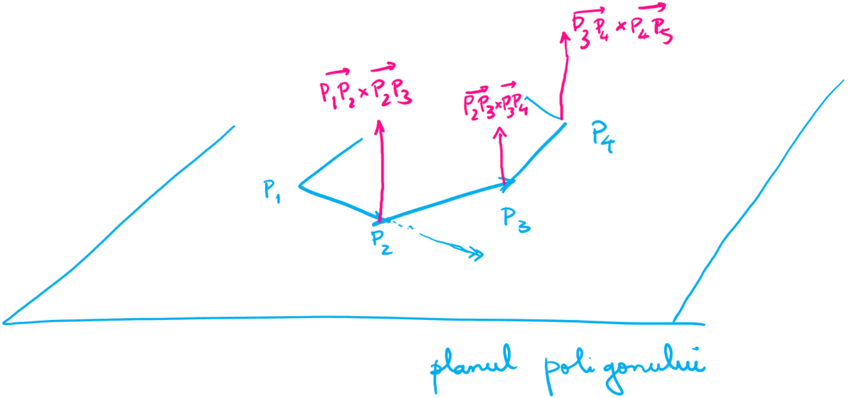
Varianta 1 Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se intersectează $\Leftrightarrow$ A și B sunt de o parte și de alta a dreptei CD **și** C și D sunt de o parte și de alta a dreptei AB. Două puncte M și N sunt de o parte și de alta a dreptei d de ecuație $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Leftrightarrow f(M) \cdot f(N) < 0$.

Varianta 2 Se folosește reprezentarea segmentelor cu ajutorul combinațiilor afine. Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se intersectează $\Leftrightarrow$

$$\exists s_0, t_0 \in [0,1] \quad \text{a.î.} \quad (1-t_0)A + t_0 B = (1-s_0)C + s_0 D.$$

Această variantă poate fi aplicată și în context 3D.

3. Convexitatea poligonului - figura



În cazul unui poligon convex, vectorii $\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_2P_3}\times\overrightarrow{P_3P_4}$, ... au același sens (și reciproc!)

3. Convexitatea poligonului

De verificat: convexitatea (folosind produse vectoriale).
Observație. (i) Fie $=(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ un poligon (sensul de parcurgere este important!). Poligonul $\mathcal{P}$ este convex dacă și numai dacă pentru orice trei vârfuri consecutive P_{i-1}, P_i, P_{i+1} (modulo N) ale poligonului sensul vectorul $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ este independent de i.
(ii) Vectorii menționați au toți aceeași direcție (perpendiculari pe planul poligonului), deoarece punctele sunt coplanare (vezi condiția 1).
(iii) Pentru un poligon convex, vectorul

$$\mathrm{n} = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

este independent de i.
Exemplu. Punctele $P_1 = (7, 1, 1), P_2 = (-3, 3, 9)$, $P_3 = (1, -1, 9)$, $P_4 = (11, -3, 1)$ determină un poligon convex.

Definiție - vector normal

Lemă. Pentru un poligon convex, vectorul

$$\mathrm{n} = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

este independent de i.

Definiție. Fie $(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ un poligon convex. Se alege $i = 1, \ldots, n$. Vectorul

$$\mathrm{n} = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

se numește **vector normal (normală)** la planul poligonului / poligonul $(P_1, P_2, \ldots, P_N)$.

Modalitate de calcul (I)

1. Se aleg trei vârfuri consecutive, de exemplu P_1, P_2, P_3, având coordonatele $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$, $A_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$, respectiv $P_3 = (x_{P_3}, y_{P_3}, z_{P_3})$.

Modalitate de calcul (I)

1. Se aleg trei vârfuri consecutive, de exemplu P_1, P_2, P_3, având coordonatele $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$, $A_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$, respectiv $P_3 = (x_{P_3}, y_{P_3}, z_{P_3})$.
2. Se scrie ecuația planului determinat de cele trei puncte sub forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde coeficienții A, B, C și D sunt dați de formulele

$$A = \begin{vmatrix} y_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ y_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ y_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix}, \qquad B = -\begin{vmatrix} x_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{P_1} & 1 & z_{P_1} \\ x_{P_2} & 1 & z_{P_2} \\ x_{P_3} & 1 & z_{P_3} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & 1 \end{vmatrix}, \qquad D = -\begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & z_{P_1} \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} \\ x_{P_3} & y_{P_3} & z_{P_3} \end{vmatrix},$$

fiind deduși din condiția de coliniaritate

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_{P_1} & y_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pe scurt: se dezvoltă după linia I determinantul de mai sus.

Modalitate de calcul (II)

3 Are loc relația

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (A, B, C).$$

Modalitate de calcul (II)

3 Are loc relația

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (A, B, C).$$

4 În final:

$$\mathrm{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C).$$

Conceptul de față / spate al unui poligon convex

Definiție. Pentru un punct $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ notăm

$$\pi(M) = \pi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

Noțiunile de **față/spate** a planului poligonului (și, implicit, a poligonului convex fixat) sunt definite astfel:

- $M = (x, y, z)$ se află **în fața planului (poligonului)** $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) > 0$;

Conceptul de față / spate al unui poligon convex

Definiție. Pentru un punct $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ notăm

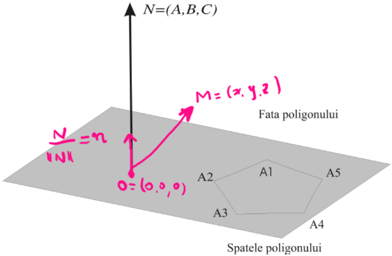
$$\pi(M) = \pi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

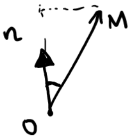
Noțiunile de **față/spate** a planului poligonului (și, implicit, a poligonului convex fixat) sunt definite astfel:

- $M = (x, y, z)$ se află **în fața planului (poligonului)** $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) > 0$;
- $M = (x, y, z)$ se află **în spatele planului (poligonului)** $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) < 0$.

Interpretare - "normala indică fața poligonului"

Presupunem că $D = 0$, adică planul trece prin originea $O = (0, 0, 0)$.





M este în fața poligonului

$\Leftrightarrow A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z > 0$

(unde $M = (x, y, z)$)

produs scalar între vectorii (A, B, C) și (x, y, z)

$\Leftrightarrow \langle (A, B, C), (x, y, z) \rangle > 0$

$\Leftrightarrow \langle n, \overrightarrow{OM} \rangle > 0 \quad (\overrightarrow{OM} = (x, y, z))$

$\Leftrightarrow \cos(\sphericalangle(n, \overrightarrow{OM})) > 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(n, \overrightarrow{OM}) < 90^\circ$

$\Leftrightarrow$ proiecția punctului M pe dreapta determinată de n are același sens cu n

$\Leftrightarrow$ n și $\overrightarrow{OM}$ sunt de aceeași parte a planului

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Normala indică fața poligonului (convex)}}$

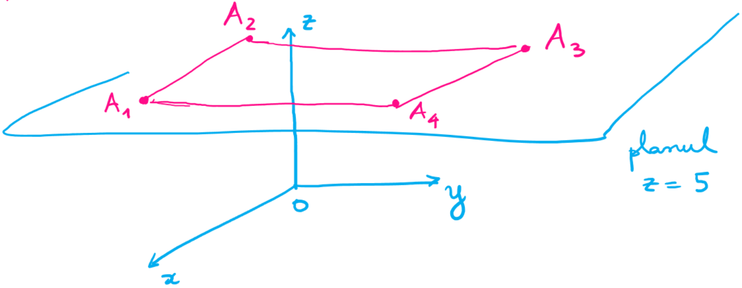
Intrepretare - sinteză

- Presupunem că $D = 0$, deci planul trece prin origine, iar ecuația sa este $\pi(x, y, z) = Ax + By + Cz = 0$.
- Considerând vectorul $\mathrm{n} = (A, B, C)$ care direcționează normala la plan, avem $\pi(A, B, C) > 0$, deci vectorul n indică partea din față a poligonului (planului).
- În general, un vector (x, y, z) este orientat înspre partea din față a planului dacă $\pi(x, y, z) > 0$, i.e. $\langle (x, y, z), \mathrm{n}, \rangle > 0$, ceea ce înseamnă că proiecția vectorului (x, y, z) pe N este la fel orientată ca și n.
- Prin translație, aceste rezultate pot fi extinse pentru un plan arbitrar. Mai mult, presupunând că parcurgem poligonul $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ în sens trigonometric și că rotim un burghiu drept în sensul indicat de această parcurgere, acesta se va deplasa în sensul indicat de vectorul N, deci înspre fața poligonului (vezi figura).
- Altfel spus, din față un poligon este văzut ca fiind parcurs în sens trigonometric, iar din spate un poligon este văzut ca fiind parcurs în sens orar.

Exemplul 1. Cod sursă `03_01_poligoane3d.cpp`

$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$

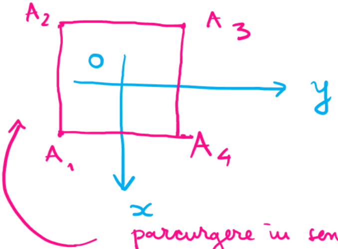
Explicatie geometrică



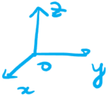
Exemplul 1. Cod sursă 03_01_poligoane3d.cpp

$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$

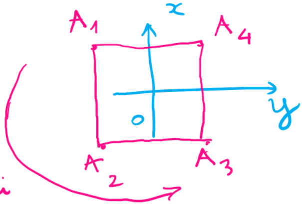
"văzut de sus"



parcurgere în sens orar



"văzut de jos"



parcurgere în sens trigonometric

Concluzie
(0, 0, 0) este în fața poligonului

Exemplul 1. Cod sursă `03_01_poligoane3d.cpp`

$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$

Explicație algebrică: $\pi(x, y, z) = -100z + 500$; $\pi(0,0,0) = 500 > 0$, deci $(0,0,0)$ în fața polig.

· scriem ecuația planului sub forma $\underbrace{Ax + By + Cz + D}_{\pi(x)} = 0$

· folosim determinantul:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \to \\ A_2 \to \\ A_3 \to \end{array} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 5 & -5 & 5 & 1 \\ -5 & -5 & 5 & 1 \\ -5 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot 0 - y \cdot 0 + z(-100) - (-500) = -100z + 500$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ -5 & -5 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + L_1}{\overset{L_2 \to L_2 + L_1}{=}} \begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -100$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \dots = -500$$

Exemplul 1. Cod sursă 03_01_poligoane3d.cpp

$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$

Am obținut ecuația

$$-100z + 500 = 0$$

$$\Downarrow$$

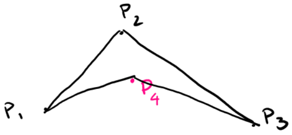
$$(A, B, C) = (0, 0, -100) \Rightarrow$$

$n = (0, 0, -1) \Rightarrow$ deci "fața poligonului este în jos"

Exemplul 2. Cod sursă `03_02_poligoane3d_exemplu2.cpp`

Fie punctele $P_1 = (6, 2, 0)$, $P_2 = (-4, 4, 8)$, $P_3 = (0, 0, 8)$ (toate trei situate în planul de ecuație $x + y + z = 8$).

a) Să se aleagă P_4 astfel ca patrulaterul $P_1P_2P_3P_4$ să fie concav.



? P_4 care să fie combinație convexă a pct. P_1, P_2, P_3

Alegem $P_4 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3$

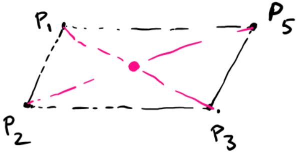
$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3\right)}_{\text{mijlocul lui } [P_2P_3]}\right)}_{\text{mijloc}}$$

$P_4 = (2, 2, 4)$

Exemplul 2. Cod sursă `03_02_poligoane3d_exemplu2.cpp`

Fie punctele $P_1 = (6, 2, 0)$, $P_2 = (-4, 4, 8)$, $P_3 = (0, 0, 8)$ (toate trei situate în planul de ecuație $x + y + z = 8$).

b) Să se aleagă P_5 astfel ca patrulaterul $P_1P_2P_3P_5$ să fie convex.



Alegem P_5 a.î.
$P_1P_2P_3P_5$ să fie paralelogram

Diagonalele unui paralelogram se taie în părți egale

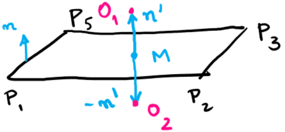
$$\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_5$$

$$\Rightarrow \underline{P_5 = P_1 + P_3 - P_2} \Rightarrow \underline{P_5 = (10, -2, 0)}$$

Exemplul 2. Cod sursă 03_02_poligoane3d_exemplu2.cpp

Fie punctele $P_1 = (6,2,0)$, $P_2 = (-4,4,8)$, $P_3 = (0,0,8)$ (toate trei situate în planul de ecuație $x + y + z = 8$).

c) Să se determine puncte O_1 și O_2 astfel ca poligonul $P_1P_2P_3P_5$ să fie văzut din față, respectiv din spate.



- am calculat $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$, pentru a găsi normala.

$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \dots = (32, 32, 32)$

$\left(n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

- am ales convenabil un punct în plan M și un vector n', car să fie proporțional și cu același sens cu normala:

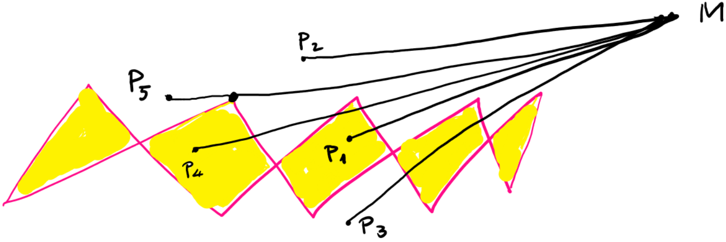
Explicit: M = mijl lui $[P_1P_3]$, $M = (3,1,4)$; $n' = (10,10,10)$

$n' = \overrightarrow{MO_1} \Rightarrow n' = O_1 - M \Rightarrow O_1 = (3,1,4) + (10,10,10) = (13,11,14)$

$-n' = \overrightarrow{MO_2} = -n' = O_2 - M \Rightarrow O_2 = (3,1,4) - (10,10,10) = (-7,-9,-6)$

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Regula par-impar *(odd-even rule)*

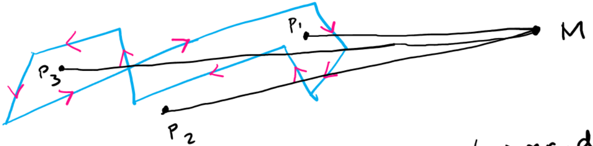


- se alege un punct M "departe" în afara poligonului
- pentru un punct P (ne situat pe laturi): paritatea nr. de intersecții dintre segmentul [PM] și poligon → decizie.

nr. par. de intersecții : exterior
impar ——"—— : interior

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Regula indexului nenul *(non-zero winding number rule)*



Convenție. "ne uităm" în stânga "−"
— " — dreapta "+"

⇒ nr. de intersecții cu
· semnul "−" : n_-
· semnul "+" : n_+

Indexul unui punct P este $i_P = n_+ - n_-$

Ptr. regula indexului:

Un punct este exterior dacă indexul este 0
interior dacă indexul este $\neq 0$

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Observație.

Legătura dintre cele două reguli

Obs. $(n_+ + n_-)$ = numărul total de intersecții,
iar paritatea lui ne dă regula par/impar

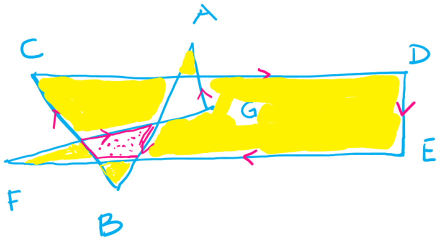
P exterior ptr. regula indexului $\Rightarrow n_+ = n_-$

$\Rightarrow (n_+ + n_-)$ este par $\Rightarrow$ P exterior ptr. par/impar

$\not\Leftarrow$ NU e neapărat adevărat

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Exemplu



exterior și ptr.
index și ptr
par/impar

interior și ptr.
index și ptr.
par/impar

exterior ptr.
par/impar
interior ptr.
index