Cuaternioni

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2021 - 2022

Problematizare - generalități

Când este considerată o clasă de transformări:

(i) de câte informații numerice este nevoie pentru a indica o transformare?

(ii) există o structură algebrică subiacentă?

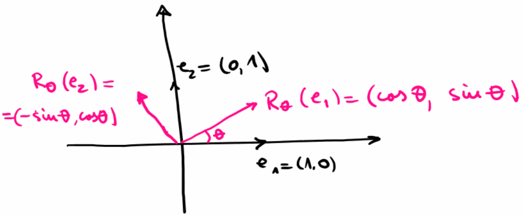
1. Translații

Context 2D/3D

- 2/3 numere
- $(\mathbb{R}^2, +)/(\mathbb{R}^3, +)$

2. Rotații 2D

Informații numerice: $\underline{\underline{1}}$ (unghiul rotației) $\longrightarrow$ am pp. originea pct. fix



$$\left.\begin{aligned} \text{Avem } R_\theta(e_1) &= (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2 \\ R_\theta(e_2) &= (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

R_θ: complet caracterizată de matricea $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2. Rotații 2D. De reținut

- pentru a indica o rotație 2D este necesară / suficientă o singură informație numerică,
- a descrie o rotație $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ a indica modul în care este transformat un reper ortonormat în alt reper ortonormat păstrând orientarea $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ a indica matricea de transformare între repere, în cazul 2D aceasta este de forma $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Obs. $$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}^{\text{transpusa}} = I_2$$

Definiții generale. Grupul ortogonal

Def. (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s.n. <u>ortogonală</u> dacă $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$.

(ii) $O(n) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n \}$.

Obs a) $(O(n), \cdot)$ grup : <u>grupul ortogonal de ordinul n</u>

b) $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$

(iii) $SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$: <u>grupul special ortogonal de ordinul n</u>.

Obs. c) $SO(n)$ e subgrup al lui $O(n)$

d) $\det A = (+1)$ sau $(-1) \Longleftrightarrow$ păstrează / schimbă orientarea

2. Rotații 2D și grupul SO(2)

• Am văzut că unei rotații de unghi θ îi corespunde o matrice $\in SO(2)$

• Și reciproc este adevărat!

Dacă $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2) \Longrightarrow \ldots \Rightarrow$ corespunde unei rotații de unghi convenabil.

Concluzie: Grupul R_{2D} al rotațiilor 2D este izomorf cu un grup de matrice:

$$\boxed{(R_{2D}, \circ) \simeq (SO(2), \cdot)}$$

2. Rotații 2D și numere complexe

Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos\theta, \sin\theta) \equiv \cos\theta + i\sin\theta$$

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(sfera 1-dimensională / cerc)

$(S^1, \cdot)$ grup. Avem izomorfisme naturale.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} (\mathcal{R}_{2D}, \circ) & \simeq & (SO(2), \cdot) & \simeq & (S^1, \cdot) \\ R_\theta & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \end{array}}$$

Remember: corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe

Construcție: Se consideră mulțimea $\mathbb{R}^2$, înzestrată cu două operații:

"+": $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$
"·": $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

În raport cu cele două operații se obține un corp comutativ.

Remember: corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe

Construcție: Se consideră mulțimea $\mathbb{R}^2$, înzestrată cu două operații:

"+": $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$
"·": $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

În raport cu cele două operații se obține un corp comutativ.

Notații:

$$1 \equiv (1, 0), \qquad i \equiv (0, 1)$$

și folosind aceste notații orice pereche (a, b) se reprezintă sub forma $a + ib$.
Are loc relația fundamentală $i^2 = -1$.
Corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Remember: corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe

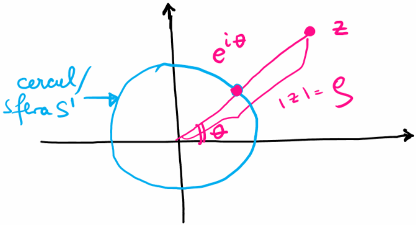
Proprietăți și notații

(i) Pentru $z = a + ib \in \mathbb{C}$, modulul lui z este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(ii) Dacă $z = a + ib \neq 0$, are loc relația $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, unde $\bar{z} = a - ib$ este conjugatul lui z

(iii) Orice număr complex $z \neq 0$ se scrie în mod unic sub forma

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho = |z|.$$



3. Rotații 3D - generalități

Observație 1.

A indica o rotație 3D $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ a indica o schimbare de repere ortonormate cu păstrarea orientării

$\Leftrightarrow$ a indica o matrice din grupul $\mathrm{SO}(3)$

De fapt

$$(\mathcal{R}_{3D}, \circ) \simeq (\mathrm{SO}(3), \cdot).$$

3. Rotații 3D - generalități

Observație 1.

A indica o rotație 3D $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ a indica o schimbare de repere ortonormate cu păstrarea orientării

$\Leftrightarrow$ a indica o matrice din grupul $\mathrm{SO}(3)$

De fapt

$$(\mathcal{R}_{3D}, \circ) \simeq (\mathrm{SO}(3), \cdot).$$

Observație 2.

Orice matrice $A \in \mathrm{SO}(3)$ (i.e. orice rotație în context 3D) admite **o valoare proprie reală** și **un vector propriu (axă a rotației)** . De asemenea, rotația este caracterizată de **un unghi**, măsurat în planul perpendicular pe axă. Pentru rotația de unghi θ și axă $(v1, v2, v3)$:

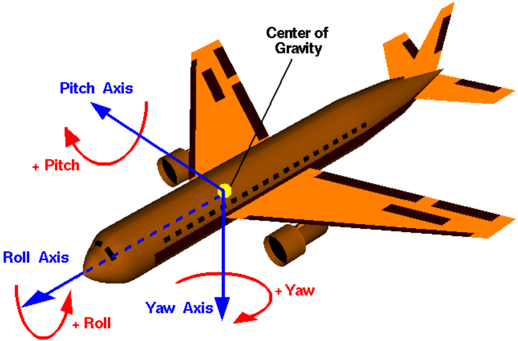
$$\mathtt{glm} :: \mathtt{rotate}(\theta, \mathtt{vec3}(\mathtt{v1}, \mathtt{v2}, \mathtt{v3}))$$

3. Rotații 3D - problematizare: structura grupului $\mathrm{SO}(3)$

Două posibilități:

- folosind unghiurile lui Euler
- folosind cuaternioni

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: intuiție



Sursa: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Rollpitchyawplain.png

Altă reprezentare:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/Euler2a.gif

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: intuiție

$$S^1 \times S^1 \times S^1 \longrightarrow SO(3)$$

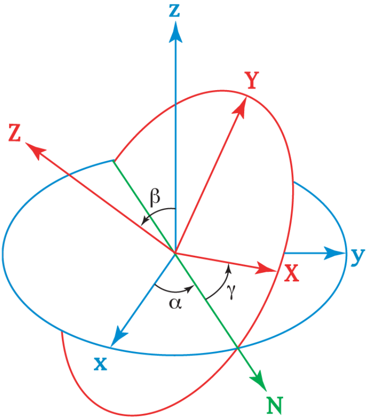
se obține folosind rotațiile în jurul axelor de coordonate:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \to \text{rotație de unghi } \theta \text{ în jurul lui } Oy$$

Fapt: orice matrice din $SO(3)$ poate fi reprezentată ca produs al unor rotații (3) în jurul axelor de coordonate, cu unghiuri alese convenabil

$\longrightarrow$ unghiurile lui Euler

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: formalizare



Sursa: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Euler.png

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: *Gimbal Lock*

Ilustrare *Gimbal Lock*

<u>Exemplu</u>: $R(\alpha, (1,0,0))$ (rotație de unghi α și axă $(1,0,0)$)

$R(\frac{\pi}{2}, (0,1,0))$

$R(\gamma, (0,0,1))$

compunere (scriem matrice, înmulțim....) $\longrightarrow$

matricea
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha+\gamma) & \cos(\alpha+\gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha+\gamma) & \sin(\alpha+\gamma) & 0 \end{pmatrix}$$

"se pierde o libertate de mișcare"

$\rightarrow$ legată de propr. aplicației $S^1 \times S^1 \times S^1 \longrightarrow SO(3)$

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

$$\mathbb{R}^4 = \{(s, a, b, c) \mid s, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\wr\wr\wr$$

$$\mathbb{H} = \{\underbrace{s}_{\text{"partea reală"}} + \underbrace{a\,i + b\,j + c\,k}_{\text{"partea imaginară"}} \mid s, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

i, j, k sunt definiți prin:
$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ i \cdot j = -j\,i = k \\ j\,k = -k\,j = i \\ k\,i = -i\,k = j \end{cases}$$

Pe $\mathbb{H}$ se definesc $\begin{cases} \text{"+" : pe componente} \\ \text{"}\cdot\text{" : indusă de regulile de mai sus} \end{cases}$

Fapt: $\boxed{(\mathbb{H}, +, \cdot) \text{ corp necomutativ}}$

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Observație. Fie

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid M = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ s, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Au loc relațiile

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fapt, $(\mathcal{H}, +, \cdot) \simeq (\mathbb{H}, +, \cdot)$.

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Exercițiu. Calculați

$$(2 - 4i + 3j - k) \cdot (1 + 2i - j + k).$$

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Notație: Fie $q = s + ai + bj + ck = (s, v)$,

unde $v = (a, b, c)$

Cu această notație:

(i) înmulțirea este dată de

$$q \cdot q' = (s \cdot s' - v \cdot v', \; s v' + s' v + v \times v')$$

(ii) $|q|^2 = s^2 + \|v\|^2$

(iii) Ptr. $q \neq 0$; $q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}$, $\bar{q} = (s, -v)$

Notație $S^3 = \{ q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1 \}$.

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Propoziție. (legătura dintre rotații 3D și cuaternioni)

(i) Fie rotația 3D având axa dată de versorul u și unghiul θ. Fie cuaternionul $q \in S^3$ dat de

$$q = (s, \mathrm{v}), \qquad \begin{cases} s = \cos\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} \\ \mathrm{v} = \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{u} \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Fie $P \in \mathbb{R}^3$ și P' punctul obținut aplicând rotația de unghi θ și axă u lui P, adică

$$P' = R_{\mathrm{u},\theta}(P).$$

Atunci în $\mathbb{H}$ are loc relația

$$(0, P') = q \cdot (0, P) \cdot q^{-1}.$$

Altfel spus, pentru a determina P' efectuăm în $\mathbb{H}$ calculul $q \cdot (0, P) \cdot q^{-1}$ și rezultatul ne va conduce la cuaternionul $(0, P')$.

(ii) Fie $q = s + ai + bj + cK \in S^3$ un cuaternion de normă 1. El corespunde unei rotații având matricea 3×3

$$\begin{pmatrix} s^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2sc & 2ac + 2sb \\ 2ab + 2sc & s^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2sa \\ 2ac - 2sb & 2bc + 2sa & s^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Exemplu. Considerăm rotația $R_{\mathrm{u},\theta}$ dată de vectorul $\mathrm{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ și de unghi $\theta = \frac{2\pi}{3}(120^\circ)$. De exemplu, avem $R_{\mathrm{u},\theta}(1,0,0) = (0,1,0)$. Interpretarea acestei relații folosind cuaternioni este următoarea.

(i) Vectorul u se scrie cu cuaternioni $\mathrm{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$. Conform propoziției anterioare, rotației $R_{\mathrm{u},\theta}$ i se asociază cuaternionul

$$q = cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{u} = \cos\frac{2\pi}{6} + \sin\frac{2\pi}{6}(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k) = \ldots.$$

Prin calcul, se deduce

$$q = \frac{1}{2}(1 + i + j + k), \quad q^{-1} = \frac{1}{2}(1 - i - j - k).$$

(ii) Versorii axelor Ox, Oy, Oz corespund cuaternionilor i, j, k, deci $R_{\mathrm{u},\theta}(1,0,0) = (0,1,0)$ se rescrie $R_{\mathrm{u},\theta}(i) = j$. Se poate verifica faptul că are loc relația $(0,j) = q \cdot (0,i) \cdot q^{-1}$, care este exact rescrierea din propoziția anterioară (cu $P = (1,0,0) \equiv i, P' = (0,1,0) \equiv j$).

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Alte detalii teoretice și despre implementare:

K. Shoemake, Quaternions

https://www.cprogramming.com/tutorial/3d/quaternions.html