Grafică 3D

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2021 - 2022

Cadru

- Grafica 3D:
  - ce reprezentăm? (aspecte teoretice)
  - cum reprezentăm? (funcționalități OpenGL)

Cadru

- Grafica 3D:
  - ce reprezentăm? (aspecte teoretice)
  - cum reprezentăm? (funcționalități OpenGL)
- Pentru a reprezenta cât mai realist un obiect 3D, pe lângă coordonate, culori, coordonate de texturare, un element cheie sunt **vectorii normali** asociați vârfurilor (un atribut al vârfurilor, indicați în funcția de tip creare a VBO, apoi transferați în shader).

Cadru

- Grafica 3D:
  - ce reprezentăm? (aspecte teoretice)
  - cum reprezentăm? (funcționalități OpenGL)
- Pentru a reprezenta cât mai realist un obiect 3D, pe lângă coordonate, culori, coordonate de texturare, un element cheie sunt **vectorii normali** asociați vârfurilor (un atribut al vârfurilor, indicați în funcția de tip creare a VBO, apoi transferați în shader).
- Formatele standard pentru obiectele 3D (de exemplu formatul .OBJ) includ astfel de informații. Extrăgând informațiile din fișier, astfel de modele 3D pot fi utilizate în OpenGL.

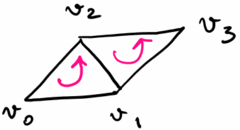
1. Poliedre: exemplu codul 08_01_desenare_cub

→ legate de rețele de triunghiuri ("triangle meshes")

→ v. GL_TRIANGLE_STRIP
GL_TRIANGLES

Vârfuri: ⚠ indexarea vârfurilor

Exemplu



0 1 2
2 1 3 (! același sens)

(coordonatele vf. pot fi indicate o singură dată în matricea de vârfuri, apoi în Elements indicăm cum sunt "legate").

1. Poliedre: vectori normali

a) ptr. triunghiuri / poligoane convexe : cf . cursurile anterioare

b) ptr. rețele de triunghiuri

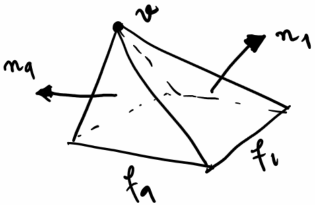
<u>opțiuni</u> :

(i) se folosește pentru fiecare față normala, așa cum a fost calculată

(ii) se lucrează la nivel de vârfuri, pentru fiecare vârf se calculează normala (⚠ OpenGL: fiecare vârf → normală) folosind normalele fețelor adiacente

1. Poliedre: vectori normali

Detaliere: vârf v adiacent cu fețele (Δ) $f_1, f_2, \ldots, f_q$



Fiecare față are un vector normal n_q

Vectorul normal în v:

$$\boxed{n_v = \frac{\sum n_i / q}{\| \sum n_i / q \|}}$$

(un mecanism de tip medie)

$\rightarrow \sum \lambda_q = 1$

Se mai pot considera și ponderi $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ asociate fețelor (de exemplu date de arii), apoi n_v se definește ca

$$\boxed{n_v = \frac{\sum \lambda_i n_i}{\| \sum \lambda_i n_i \|}}$$

2. Suprafețe implicite: forma generală

Forma generală : $F(x, y, z) = 0$

Exemple (suprafețe date de ec. de gradul II) $\downarrow$ cuadrice

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferă
- $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ hiperboloid cu 1 pânză
- $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ —„— 2 pânze
- $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ con circular drept
- $x^2 + y^2 = 1$ cilindru circular drept
- $x^2 - y^2 = 2z$ paraboloid hiperbolic

2. Suprafețe implicite: vectori normali

<u>Vectori normali</u>: Fie (x_0, y_0, z_0) un punct al suprafeței.

Normala exterioară la suprafață este dată de vectorul

$$\boxed{\underset{\nabla F}{\operatorname{grad}(F)}(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)}$$

<u>Exemplu</u>. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, deci $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Fixăm (x_0, y_0, z_0) pe sferă; $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2x_0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 2y_0$

$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 \Rightarrow$ <u>$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ este coliniar cu</u> <u>vectorul de poziție</u>.

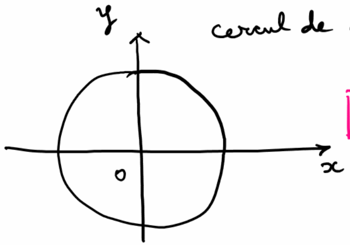
vectorul N e coliniar cu $\overrightarrow{OP}$

3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Preliminarii - reprezentarea curbelor

Obs. Fie $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$,

deci $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

cercul de centru O și rază 1



$\boxed{t \to \text{parametru}}$; se trasează o curbă

- se aleg valori pentru t
- se calculează pct. corespunzătoare
- se unesc și se trasează o aproximare a curbei

În spațiu: $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases}$ "elice" $t \in \mathbb{R}$

3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Exemple

1) $\begin{cases} x = r\cos(u) \\ y = r\sin(u) \\ z = v \end{cases}$ $\quad \underline{r>0}$ fixat

$u, v \in \mathbb{R}$ parametri

$\downarrow$

cilindru circular drept $(x^2+y^2=r^2)$

2) $\begin{cases} x = v\cos(u) \\ y = v\sin(u) \\ z = v \end{cases}$ $\quad u, v \in \mathbb{R}$ parametri

$\downarrow$

con circular drept $(x^2+y^2-z^2=0)$

3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Exemple

3) $\begin{cases} x = r\cos(u)\cos(v) \\ y = r\cos(u)\sin(v) \\ z = r\sin(u) \end{cases}$

$r > 0$

$u, v \in \mathbb{R}$ parametri

Sfera cu centrul O și rază r:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

(v. implementare $\underbrace{08\_02}_{\text{cod sursă}}$).

? cum arată reprezentarea ptr. centru arbitrar ?

3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Definiția generală

În general, o suprafață parametrizată este dată de o funcție

$$\boxed{f : \underbrace{\overset{\uparrow}{U}_{u} \times \overset{\uparrow}{V}_{v}}_{\text{parametri}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad U, V \subset \mathbb{R} \text{ intervale}}$$

3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Implementare: vârfuri

Pentru implementare:

• vârfuri: se consideră $\tilde{U} = \{ u_1, u_2, \dots, u_m \} \subset U$

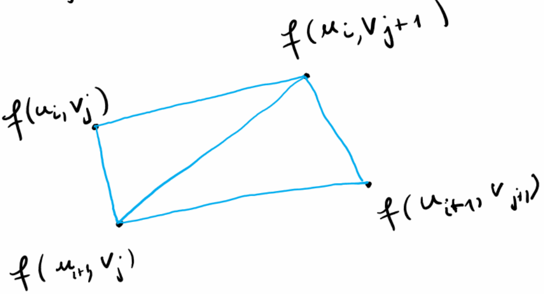
$\tilde{V} = \{ v_1, \dots, v_n \} \subset V$

ptr. $\forall i, j$ calculăm $f(u_i, v_j) \rightarrow$ un vârf, corespunzător unui pct. de pe suprafață

3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Implementare: fețe

se generează folosind triunghiuri sau patrulatere și "legând" vârfurile învecinate

<u>Principiu</u>:



am trasat două triunghiuri care aproximează, local, suprafața respectivă

3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Implementare: vectori normali

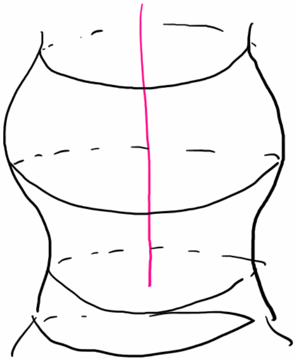
· Pentru normale: două variante

(i) se aplică principiile pentru rețelele de triunghiuri.

(ii) fixând (u,v) și pct. corespunzător de pe suprafață, un vector normal la suprafață în pct. respectiv se poate obține calculând $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$, apoi normalizare:

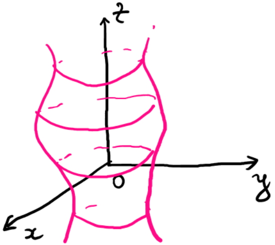
$$\boxed{\frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\|}}$$

4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Ilustrare



↓ se pot determina reprezentări parametrice

4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Reprezentare parametrică



Exemple:

i) segment paralel cu Oz

$\Rightarrow$ cilindru circular drept (porțiune)

ii) segment din planul Oxz care nu e paralel cu Oz

$\Rightarrow$ trunchi de con

4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Detalii

iii)

semicerc $\Longrightarrow$

sferă (eventual

fără poli)

etc.

4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Detalii

Determinarea reprezentării parametrice pentru suprafețele de rotație:

Fie $c : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă situată în planul $\underline{\underline{Oxz}}$.
$I \subset \mathbb{R}$ $(\underline{y=0})$

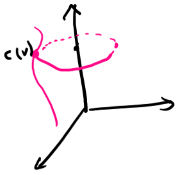
dată parametric sub forma

$$\boxed{c(v) = (\varphi(v), 0, \psi(v)), \quad \forall\, v \in I}$$

Pp. că $\varphi(v) > 0$, $\forall\, v \in I$, în particular curba nu intersectează axa Oz. Considerăm suprafața obținută rotind curba în jurul axei Oz

4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Detalii

Ce se întâmplă cu un punct al curbei prin rotație?

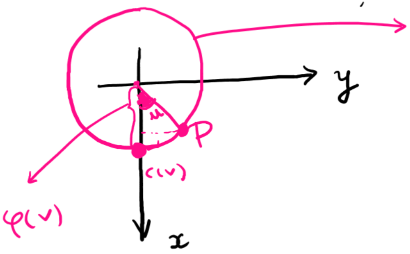


Fie $c(v)$ un punct al curbei $\Rightarrow$ $c(v)$ descrie un cerc:

- situat într-un plan perpendicular pe axa Oz (i.e. paralel cu Oxy), în particular toate pct. au a 3^a coordonată egală cu $\psi(v)$
- centrul cercului: situat pe Oz, are coordonatele: $(0, 0, \psi(v))$
- raza cercului: $\varphi(v)$

4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Detalii

"Privind de sus". secțiune prin planul $z = \psi(v)$



cercul descris prin rotirea lui $c(v)$, are centrul în pct. $(0, 0, \psi(v))$ și raza egală cu $\varphi(v)$.

Punctul P din figură are coordonatele

$$\boxed{P = (\varphi(v)\cdot\cos(u),\ \varphi(v)\cdot\sin(u),\ \psi(v))}$$

4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Concluzie

Concluzie. O suprafață de rotație poate fi generată alegând φ și ψ convenabile și definind

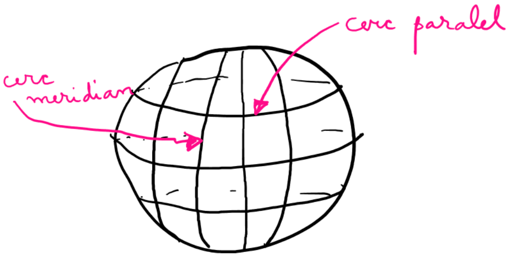
$f : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f(u,v) = (\varphi(v)\cdot\cos u,\ \varphi(v)\cdot\sin(u),\ \psi(v))}$$

(uneori definite pe $\mathbb{R}\times I$ sau cu ordinea parametrilor inversată)

4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Comentarii

Comentarii



În general, pe o suprafață de rotație, curbele $u =$ const și $v =$ const au denumiri speciale. Fie $(u_0, v_0) \in [0, 2\pi] \times I \Rightarrow$ $f(u_0, v_0)$ – punct pe suprafață

(i) $\underline{v = v_0}$, u = variabil, $u \mapsto f(u, v_0) \to$ cerc paralel

(ii) $\underline{u = u_0}$, v = variabil, $v \mapsto f(u_0, v) \to$ { curbă de tip meridian "copie a curbei inițiale"