Уравнения математической физики

Лектор Кулешов Александр Аркадьевич, БГУ, каф. МК, комн. 407

Author: KULIASHOU ALIAKSANDR (Kuleshov Alexander)

Belorussian State University, main entry, app. 407, sub-faculty (department) of the mathematical cybernetics

- **Задача Коши.**

ЗАДАЧА 1. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} - u_{xx} = 6, \tag{0.1}$$

$$u(0, x) = x^2, \; (u_t)(0, x) = 4x. \tag{0.2}$$

Решение. Воспользуемся формулой Даламбера.

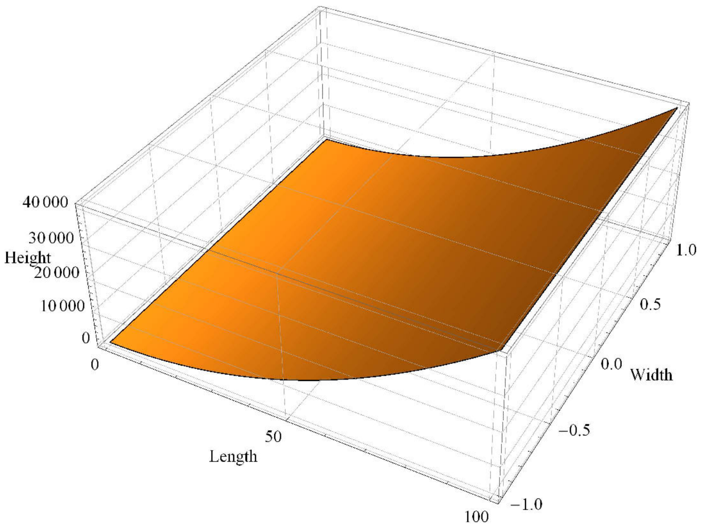
```
Clear[u, φ, ψ, f];
φ[x_] = x^2; ψ[x_] = 4 * x; f[t_, x_] = 6;
```

$$\texttt{u[t\_, x\_] = } -\frac{\int_0^{-a\,t+x} \psi[\alpha]\, d\alpha}{2\,a} + \frac{\int_0^{a\,t+x} \psi[\alpha]\, d\alpha}{2\,a} + \frac{1}{2}\varphi[-a\,t+x] + \frac{1}{2}\varphi[a\,t+x] + \int_0^t \left(\frac{1}{2*a}\int_{-a*(t-\tau)}^{a*(t-\tau)} f[\tau, x+\eta]\, d\eta\right) d\tau \;\texttt{/. \{a → 1\} // FullSimplify}$$

$$(2\,t + x)^2$$

Построим графики решения

```
Plot3D[u[t, x], {t, 0, 100}, {x, -1, 1}, PlotPoints → 40,
 Mesh → False, FaceGrids → All, AxesLabel → {"Length", "Width", "Height"}]
```



ЗАДАЧА 2. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} - u_{xx} = e^x, \tag{0.3}$$

$$u(0, x) = \sin x, \; (u_t)(0, x) = x + \cos x. \tag{0.4}$$

Решение. Воспользуемся формулой Даламбера.

```
Clear[u, φ, ψ, f];
```

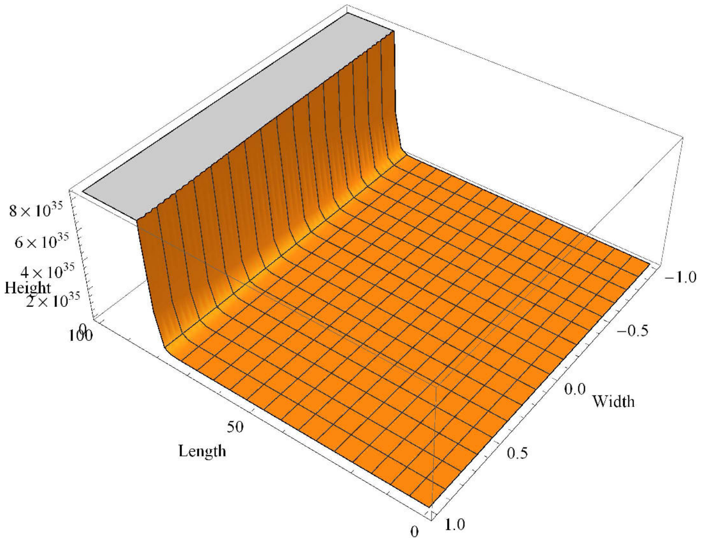
```
φ[x_] = Sin[x]; ψ[x_] = x + Cos[x]; f[t_, x_] = ⅇ^x;
```

$$u[t\_, x\_] = -\frac{\int_0^{-a\,t+x} \psi[\alpha]\, d\alpha}{2\,a} + \frac{\int_0^{a\,t+x} \psi[\alpha]\, d\alpha}{2\,a} + \frac{1}{2}\varphi[-a\,t+x] + \frac{1}{2}\varphi[a\,t+x] + \int_0^t \left(\frac{1}{2*a}\int_{-a*(t-\tau)}^{a*(t-\tau)} f[\tau, x+\eta]\, d\eta\right) d\tau \;/.\; \{a \to 1\} \;//\; \text{FullSimplify}$$

$$t\,x + e^x\,(-1 + \text{Cosh}[t]) + \text{Sin}[t+x]$$

Построим график решения

```
Plot3D[u[t, x], {t, 0, 100}, {x, -1, 1}, PlotPoints → 25, Mesh → True, FaceGrids → None,
 AxesLabel → {"Length", "Width", "Height"}, ViewPoint → {-1.481`, 1.97`, 2.067`}]
```



ЗАДАЧА 3. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin 3\,x, \tag{0.5}$$

$$u\,(0,\ x) = 0,\ (u_t)\,(0,\ x) = 0. \tag{0.6}$$

Решение. Воспользуемся формулой Даламбера.

```
Clear[u, φ, ψ, f];
```

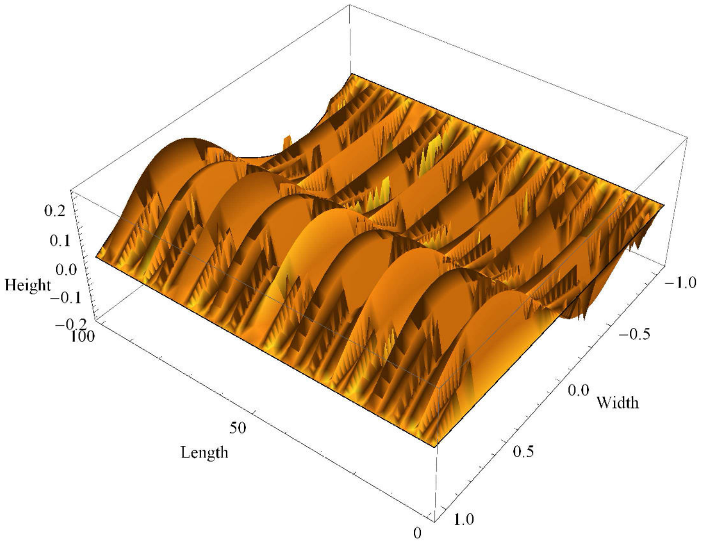
```
φ[x_] = 0; ψ[x_] = 0; f[t_, x_] = Sin[3 * x];
```

$$u[t\_, x\_] = -\frac{\int_0^{-a\,t+x} \psi[\alpha]\, d\alpha}{2\,a} + \frac{\int_0^{a\,t+x} \psi[\alpha]\, d\alpha}{2\,a} + \frac{1}{2}\varphi[-a\,t+x] + \frac{1}{2}\varphi[a\,t+x] + \int_0^t \left(\frac{1}{2*a}\int_{-a*(t-\tau)}^{a*(t-\tau)} f[\tau, x+\eta]\, d\eta\right) d\tau \;/.\; \{a \to 1\} \;//\; \text{FullSimplify}$$

$$\frac{2}{9}\,\text{Sin}\left[\frac{3\,t}{2}\right]^2\,\text{Sin}[3\,x]$$

Построим график решения

```
Plot3D[u[t, x], {t, 0, 100}, {x, -π/3, π/3}, PlotPoints → 40, Mesh → False, FaceGrids → None,
 AxesLabel → {"Length", "Width", "Height"}, ViewPoint → {-1.481`, 1.97`, 2.067`}]
```



ЗАДАЧА 4. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin 3\,t, \tag{0.7}$$

$$u\,(0,\ x) = 0,\ (u_t)\,(0,\ x) = 0. \tag{0.8}$$

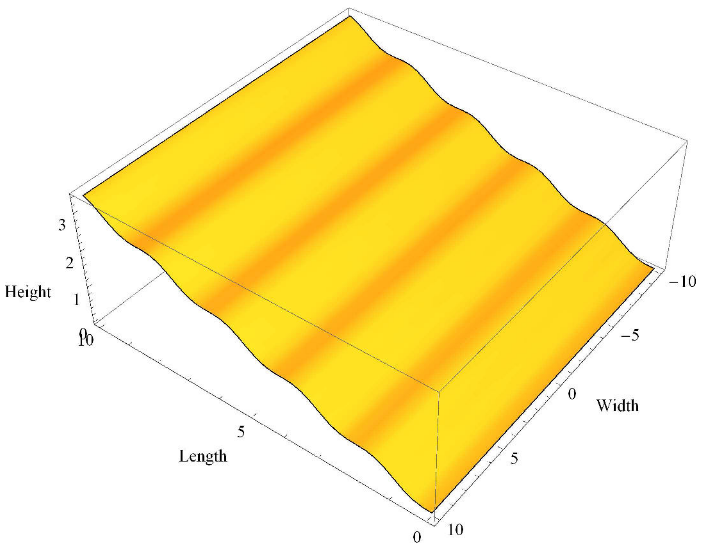
Решение. Воспользуемся формулой Даламбера.

```
Clear[u, φ, ψ, f];

φ[x_] = 0; ψ[x_] = 0; f[t_, x_] = Sin[3 * t];

u[t_, x_] = -(∫_0^(-a t+x) ψ[α] dα)/(2 a) + (∫_0^(a t+x) ψ[α] dα)/(2 a) + 1/2 φ[-a t + x] +
  1/2 φ[a t + x] + ∫_0^t (1/(2 * a) ∫_(-a*(t-τ))^(a*(t-τ)) f[τ, x + η] dη) dτ /. {a → 1} // FullSimplify
```

$$\frac{1}{9}\,(3\,t - \mathrm{Sin}[3\,t])$$

Построим графики решения u(t,x):

```
Plot3D[u[t, x], {t, 0, 10}, {x, -10, 10}, PlotPoints → 40, Mesh → False, FaceGrids → None,
 AxesLabel → {"Length", "Width", "Height"}, ViewPoint → {-1.481`, 1.97`, 2.067`}]
```



ЗАДАЧА 5. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} - \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) = 2\,xyz, \tag{0.9}$$

$$u\,(0,\ x) = x^2 + y^2 - 2\,z^2,\ (u_t)\,(0,\ x) = 1. \tag{0.10}$$

Решение.Воспользуемся формулой Кирхгофа. Интегрирование осуществляем в сферических координатах. Для перехода к сферическим координатам подключаем пакет **VectorAnalysis**.

```
Clear[φ, ψ, a, f, t, x, y, z, r, theta, phi];

<< "VectorAnalysis`"
```

General::obspkg : VectorAnalysis` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current functionality. See the Compatibility Guide for updating information.

```
Off[General::"spell1"];

SetCoordinates[Spherical[r, theta, phi]]

Spherical[r, theta, phi]

φ[x_, y_, z_] = x^2 + y^2 - 2 * z^2; ψ[x_, y_, z_] = 1; f[x_, y_, z_, t_] = 2 * x * y * z; a = 1;

Clear[u];

u[t_, x_, y_, z_] = FullSimplify[
  t/(4 * π) * Integrate[ψ[x + a * t * Cos[phi] * Sin[theta], y + a * t * Sin[phi] * Sin[theta],
      z + a * t * Cos[theta]] * (JacobianDeterminant[Spherical[r, theta, phi]] /. {r → 1}),
    {theta, 0, Pi}, {phi, -Pi, Pi}] + 1/(4 * π)
   D[t * Integrate[φ[x + a * t * Cos[phi] * Sin[theta], y + a * t * Sin[phi] * Sin[theta],
        z + a * t * Cos[theta]] * (JacobianDeterminant[Spherical[r, theta, phi]] /.
          {r → 1}), {theta, 0, Pi}, {phi, -Pi, Pi}], t] +
  Integrate[(t - τ)/(4 * π) * Integrate[f[x + a * (t - τ) * Cos[phi] * Sin[theta],
       y + a * (t - τ) * Sin[phi] * Sin[theta], z + a * (t - τ) * Cos[theta], τ] *
      (JacobianDeterminant[Spherical[r, theta, phi]] /. {r → 1}),
     {theta, 0, Pi}, {phi, -Pi, Pi}], {τ, 0, t}]]
```

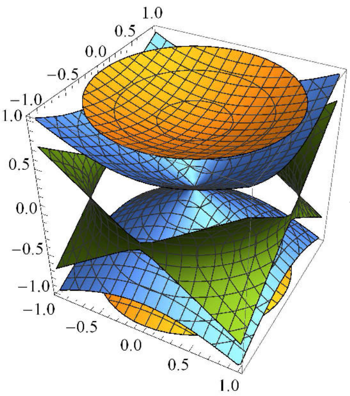
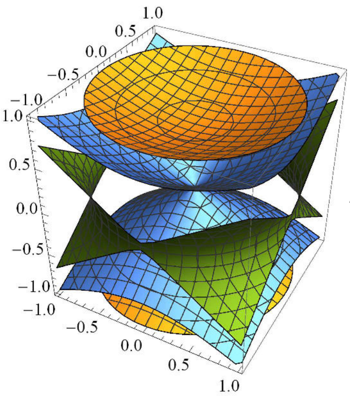
$t + x^2 + y^2 + t^2\,x\,y\,z - 2\,z^2$

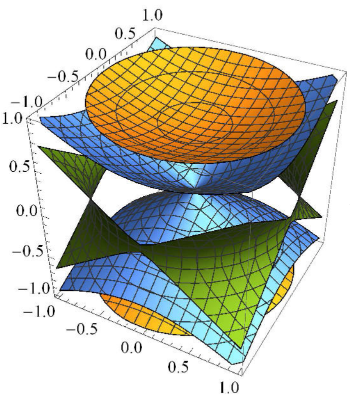
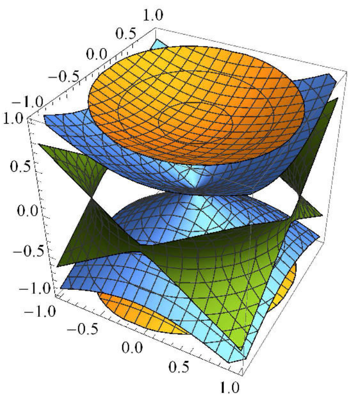
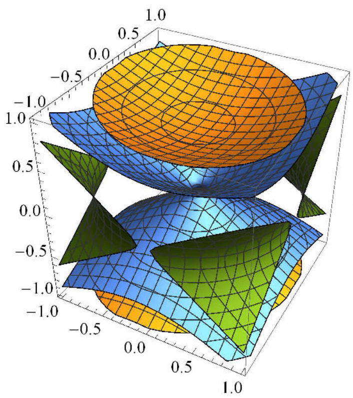
В данном случае можно изобразить поверхности уровня решения при каждом фиксированном значении времени t. Для этого используется дополнительный пакет **ContourPlot3D**. Ниже изображены графики поверхностей уровня 1 решения u(t,x,y,z) при t=0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,...,1.5.

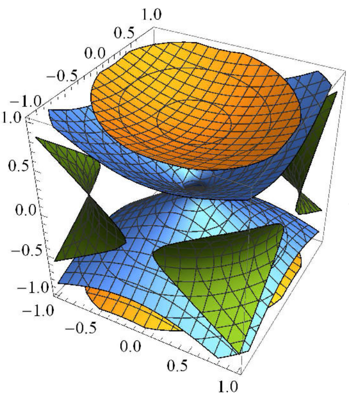
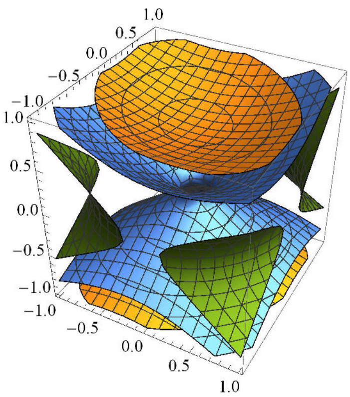
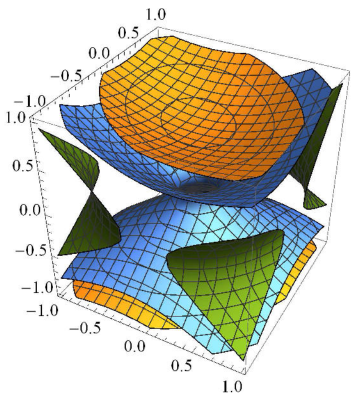
```
<< Graphics`ContourPlot3D`
```

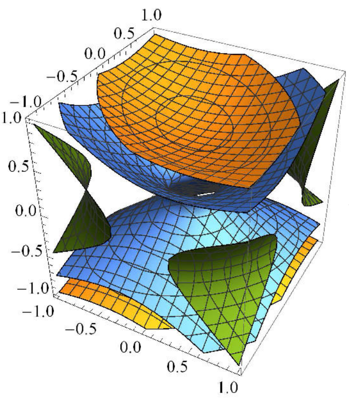
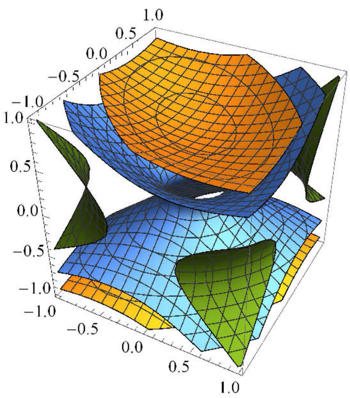
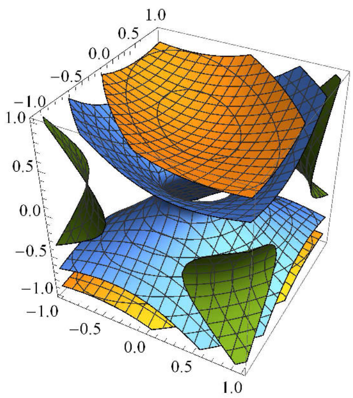
Get::noopen : Cannot open Graphics`ContourPlot3D`. >>

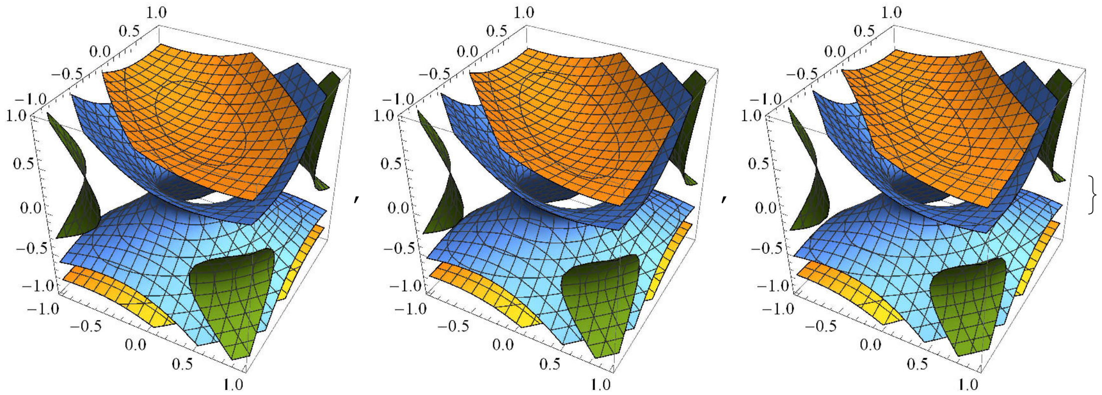
```
$Failed

Table[ContourPlot3D[u[t, x, y, z] - 1, {x, -1, 1},
  {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, AspectRatio → Automatic], {t, 0.2, 1.5, 0.1}]
```

{
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
, 
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
,


1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
, 
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
, 
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
,


1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
, 
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
, 
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
,


1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
, 
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
, 
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0
,



ЗАДАЧА 6. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} - 8\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) = t^2 x^2, \tag{0.11}$$

$$u(0, x) = y^2,\ (u_t)(0, x) = z^2. \tag{0.12}$$

Решение.Воспользуемся формулой Кирхгофа.

```
Clear[φ, ψ, a, f, t, x, y, z, r, theta, phi];

<< "VectorAnalysis`"
```

General::obspkg : VectorAnalysis` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current functionality. See the Compatibility Guide for updating information.

```
Off[General::"spell1"];

SetCoordinates[Spherical[r, theta, phi]]

Spherical[r, theta, phi]

φ[x_, y_, z_] = y^2; ψ[x_, y_, z_] = z^2; f[x_, y_, z_, t_] = t^2 * x^2; a = Sqrt[8];
Clear[u];

u[t_, x_, y_, z_] = Simplify[
  t/(4 * π) * Integrate[ψ[x + a * t * Cos[phi] * Sin[theta], y + a * t * Sin[phi] * Sin[theta],
      z + a * t * Cos[theta]] * (JacobianDeterminant[Spherical[r, theta, phi]] /. {r → 1}),
     {theta, 0, Pi}, {phi, -Pi, Pi}] + 1/(4 * π)
    D[t * Integrate[φ[x + a * t * Cos[phi] * Sin[theta], y + a * t * Sin[phi] * Sin[theta],
         z + a * t * Cos[theta]] * (JacobianDeterminant[Spherical[r, theta, phi]] /.
          {r → 1}), {theta, 0, Pi}, {phi, -Pi, Pi}], t] +
   Integrate[(t - τ)/(4 * π) * Integrate[f[x + a * (t - τ) * Cos[phi] * Sin[theta],
        y + a * (t - τ) * Sin[phi] * Sin[theta], z + a * (t - τ) * Cos[theta], τ] *
       (JacobianDeterminant[Spherical[r, theta, phi]] /. {r → 1}),
      {theta, 0, Pi}, {phi, -Pi, Pi}], {τ, 0, t}]]
```

$$8\,t^2 + \frac{8\,t^3}{3} + \frac{2\,t^6}{45} + \frac{t^4\,x^2}{12} + y^2 + t\,z^2$$

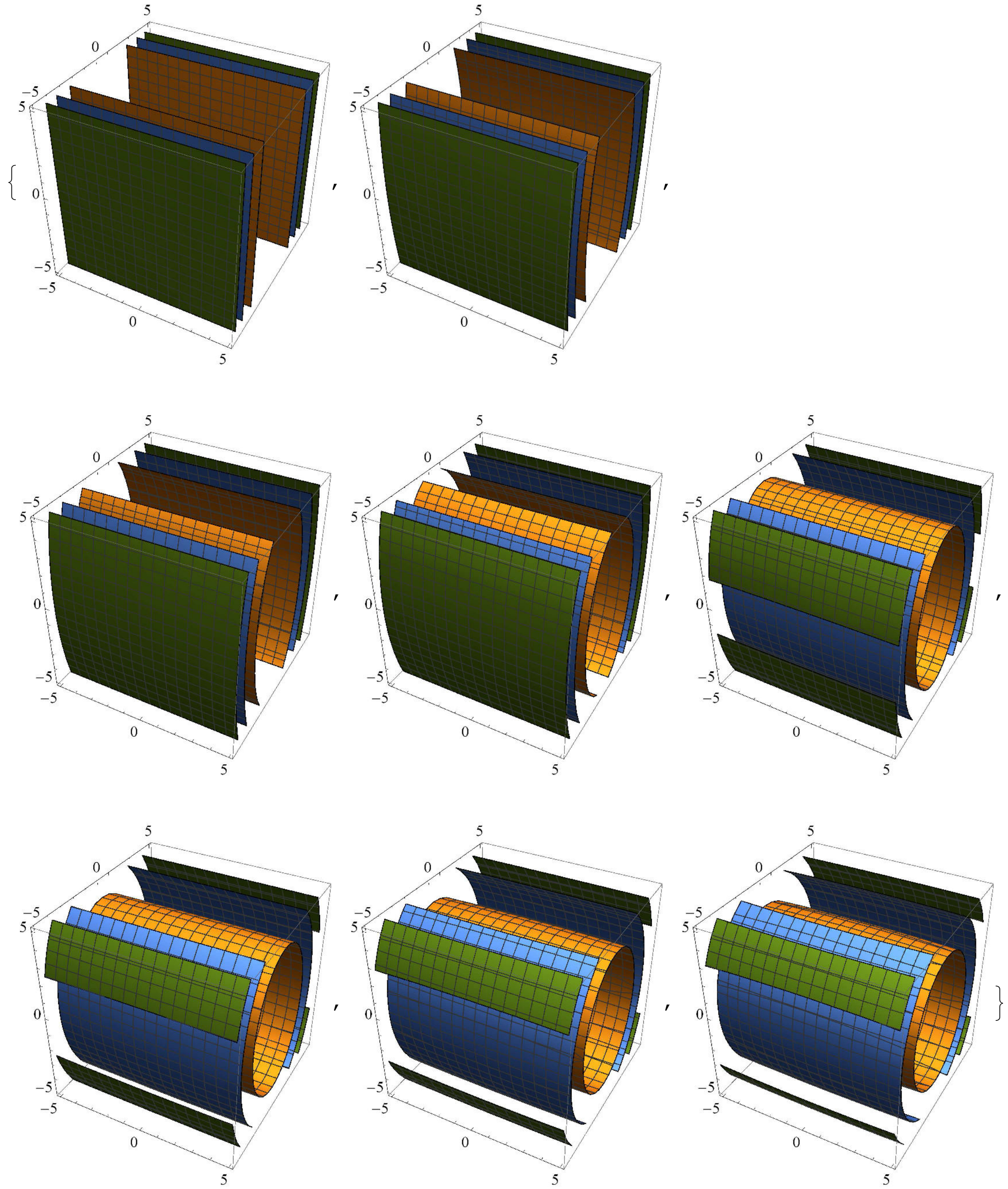
Ниже изображены графики поверхностей уровня 5 решения u(t,x,y,z) при t=0,0.1,0.2,0.3,0.4,...,0.7.

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
```

Get::noopen : Cannot open Graphics`ContourPlot3D`. >>

```
$Failed
```

```
Table[ContourPlot3D[u[t, x, y, z] - 5, {x, -5, 5},
  {y, -5, 5}, {z, -5, 5}, AspectRatio → Automatic], {t, 0, 0.7, 0.1}]
```



ЗАДАЧА 7. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} - 3\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) = 6\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \tag{0.13}$$

$$u(0,\ x) = x^2\, y^2\, z^2,\ (u_t)(0,\ x) = xyz. \tag{0.14}$$

Решение.Воспользуемся формулой Кирхгофа.

```
Clear[φ, ψ, a, f, t, x, y, z, r, theta, phi];

<< "VectorAnalysis`"
```

General::obspkg : VectorAnalysis` is now obsolete. The legacy version being loaded
may conflict with current functionality. See the Compatibility Guide for updating information.

```
Off[General::"spell1"];
```

```
SetCoordinates[Spherical[r, theta, phi]]
```

```
Spherical[r, theta, phi]
```

```
φ[x_, y_, z_] = x^2 * y^2 * z^2; ψ[x_, y_, z_] = x * y * z;
f[x_, y_, z_, t_] = 6 * (x^2 + y^2 + z^2); a = Sqrt[3];
Clear[u];
```

```
u[t_, x_, y_, z_] = Simplify[
  t/(4 * π) * Integrate[ψ[x + a * t * Cos[phi] * Sin[theta], y + a * t * Sin[phi] * Sin[theta],
       z + a * t * Cos[theta]] * (JacobianDeterminant[Spherical[r, theta, phi]] /. {r → 1}),
     {theta, 0, Pi}, {phi, -Pi, Pi}] + 1/(4 * π)
    D[t * Integrate[φ[x + a * t * Cos[phi] * Sin[theta], y + a * t * Sin[phi] * Sin[theta],
         z + a * t * Cos[theta]] * (JacobianDeterminant[Spherical[r, theta, phi]] /.
          {r → 1}), {theta, 0, Pi}, {phi, -Pi, Pi}], t] +
   Integrate[(t - τ)/(4 * π) * Integrate[f[x + a * (t - τ) * Cos[phi] * Sin[theta],
        y + a * (t - τ) * Sin[phi] * Sin[theta], z + a * (t - τ) * Cos[theta], τ] *
       (JacobianDeterminant[Spherical[r, theta, phi]] /. {r → 1}),
      {theta, 0, Pi}, {phi, -Pi, Pi}], {τ, 0, t}]]
```

$$\frac{9 t^6}{5} + t x y z + x^2 y^2 z^2 + t^4 \left(\frac{9}{2} + 3 x^2 + 3 y^2 + 3 z^2\right) + 3 t^2 \left(z^2 + y^2 \left(1 + z^2\right) + x^2 \left(1 + y^2 + z^2\right)\right)$$

Ниже изображены графики поверхностей уровня 10 решения u(t,x,y,z) при t=0,0.1,0.2,0.3,0.4,...,0.7.

```
<< Graphics`ContourPlot3D`
```

Get::noopen : Cannot open Graphics`ContourPlot3D`. >>

```
$Failed
```

```
Table[ContourPlot3D[u[t, x, y, z] - 10, {x, -5, 5},
  {y, -5, 5}, {z, -5, 5}, AspectRatio → Automatic], {t, 0, 0.7, 0.1}]
```

ЗАДАЧА 8. Функция u(t,x) с непрерывными частными производными третьего порядка является решением уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{0.15}$$

Показать, что этому же уравнению удовлетворяет и функция

$$v\,(t,\,x) = \partial_x\; u\,\partial_t\; u. \tag{0.16}$$

Решение. Дифференцируя уравнение сначала по переменной t, а потом по x находим дополнительные условия

```
Clear[cond];

cond = {D[Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x], {t, 1}] == 0,
  D[Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x], {x, 1}] == 0}
```

$\{-u^{(1,2)}[t,\,x] + u^{(3,0)}[t,\,x] == 0,\; -u^{(0,3)}[t,\,x] + u^{(2,1)}[t,\,x] == 0\}$

```
Clear[u, v];
```

```
v[t_, x_] = Derivative[1, 0][u][t, x] * Derivative[0, 1][u][t, x];
```

Добавим условие $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

```
cond = cond ⋃ {Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x] == 0}
```

$\{-u^{(0,2)}[t, x] + u^{(2,0)}[t, x] == 0, -u^{(0,3)}[t, x] + u^{(2,1)}[t, x] == 0, -u^{(1,2)}[t, x] + u^{(3,0)}[t, x] == 0\}$

Теперь убеждаемся в справедливости утверждения примера:

```
FullSimplify[Derivative[2, 0][v][t, x] - Derivative[0, 2][v][t, x] == 0, cond]
```

```
True
```

ЗАДАЧА 9. Показать,что наряду с функцией u(t,x) решением уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{0.17}$$

являются и функции

$$a)\ x\,u_x + t\,u_t, \tag{0.18}$$

$$b)\ u_x^2 + u_t^2, \tag{0.19}$$

$$c)\ \frac{u_t}{u_x^2 - u_t^2},\ u_x^2 \neq u_t^2. \tag{0.20}$$

Решение.Проверим a).

```
Clear[cond];
```

```
cond = {D[Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x], {t, 1}] == 0,
  D[Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x], {x, 1}] == 0}
```

$\{-u^{(1,2)}[t, x] + u^{(3,0)}[t, x] == 0, -u^{(0,3)}[t, x] + u^{(2,1)}[t, x] == 0\}$

```
Clear[u, v];
```

```
v[t_, x_] = x * Derivative[0, 1][u][t, x] + t * Derivative[1, 0][u][t, x];
```

Добавим условие $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

```
cond = cond ⋃ {Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x] == 0}
```

$\{-u^{(0,2)}[t, x] + u^{(2,0)}[t, x] == 0, -u^{(0,3)}[t, x] + u^{(2,1)}[t, x] == 0, -u^{(1,2)}[t, x] + u^{(3,0)}[t, x] == 0\}$

Теперь убеждаемся в справедливости утверждения примера:

```
FullSimplify[Derivative[2, 0][v][t, x] - Derivative[0, 2][v][t, x] == 0, cond]
```

```
True
```

Проверим b).

```
Clear[cond];
```

```
cond = {D[Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x], {t, 1}] == 0,
  D[Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x], {x, 1}] == 0}
```

$\{-u^{(1,2)}[t, x] + u^{(3,0)}[t, x] == 0, -u^{(0,3)}[t, x] + u^{(2,1)}[t, x] == 0\}$

```
Clear[u, v];
```

```
v[t_, x_] = Derivative[0, 1][u][t, x]^2 + Derivative[1, 0][u][t, x]^2;
```

Добавим условие $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

```
cond = cond ⋃ {Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x] == 0}
```

$\{-u^{(0,2)}[t, x] + u^{(2,0)}[t, x] == 0, -u^{(0,3)}[t, x] + u^{(2,1)}[t, x] == 0, -u^{(1,2)}[t, x] + u^{(3,0)}[t, x] == 0\}$

Теперь убеждаемся в справедливости утверждения примера:

```
FullSimplify[Derivative[2, 0][v][t, x] - Derivative[0, 2][v][t, x] == 0, cond]
```

```
True
```

Проверим c).

```
Clear[cond];
```

```
cond = {D[Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x], {t, 1}] == 0,
  D[Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x], {x, 1}] == 0}
```

$\{-u^{(1,2)}[t, x] + u^{(3,0)}[t, x] == 0, -u^{(0,3)}[t, x] + u^{(2,1)}[t, x] == 0\}$

```
Clear[u, v];
```

```
v[t_, x_] =
  Derivative[1, 0][u][t, x] / (Derivative[0, 1][u][t, x]^2 - Derivative[1, 0][u][t, x]^2);
```

Добавим условие $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

```
cond = cond ⋃ {Derivative[2, 0][u][t, x] - Derivative[0, 2][u][t, x] == 0}
```

$\{-u^{(0,2)}[t, x] + u^{(2,0)}[t, x] == 0, -u^{(0,3)}[t, x] + u^{(2,1)}[t, x] == 0, -u^{(1,2)}[t, x] + u^{(3,0)}[t, x] == 0\}$

Теперь убеждаемся в справедливости утверждения примера:

```
FullSimplify[Derivative[2, 0][v][t, x] - Derivative[0, 2][v][t, x] == 0, cond]
```

```
True
```

ЗАДАЧА 10. Определить значение показателя k=const,для которого уравнение

$$u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0. \tag{0.21}$$

имеет решение вида

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^k}. \tag{0.22}$$

Решение.Запишем функцию и подставим в уравнение

```
Clear[u, Equ];
```

$u[t\_, x\_, y\_, z\_] = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^k};$

```
Equ = FullSimplify[
  Derivative[2, 0, 0, 0][u][t, x, y, z] - (Derivative[0, 2, 0, 0][u][t, x, y, z] +
      Derivative[0, 0, 2, 0][u][t, x, y, z] + Derivative[0, 0, 0, 2][u][t, x, y, z]) == 0]
```

$(-1 + k)\, k\, (-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1-k} == 0$

Теперь находим искомые значения k:

```
SolveAlways[Equ, {x, y, z, t}]
```

$\{\{k \to 0\}, \{k \to 1\}\}$

ЗАДАЧА 11. Неограниченной струне сообщена на отрезке $-c \le x \le c$ поперечная начальная скорость v_0=const;вне этого отрезка начальная скорость равна нулю.Найти формулы,представляющие закон движения точек струны с различными абсциссами при t>0, и построить положения струны для моментов времени

$$t_k = \frac{kc}{4a}, \tag{0.23}$$

где k=0,2,4,6,...,2n.

Решение. Решение находится по формуле Даламбера. Оно имеет вид

$$u(t, x) = \psi(x + at) - \psi(x - at),$$

где

```
Clear[ψ, u, a, c];
```

```
ψ[z_ /; -∞ < z < -c] = 0;
```

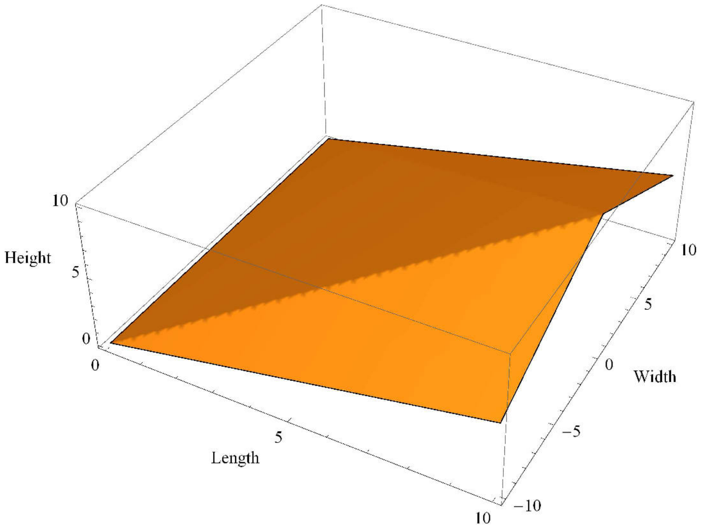
$\psi[z\_ /; -c <= z <= c] = \dfrac{v_0 * (z + c)}{2 * a};$

$\psi[z\_ /; c \le z < \infty] = \dfrac{v_0 * c}{a};$

```
u[t_, x_] := ψ[x + a * t] - ψ[x - a * t];
```

```
a = 1; c = 10; v0 = 1;
```

```
Plot3D[u[t, x], {t, 0, 10}, {x, -10, 10}, PlotPoints → 40,
 Mesh → False, FaceGrids → None, AxesLabel → {"Length", "Width", "Height"}]
```



ЗАДАЧА 12. Решить задачу о распространении электрических колебаний в неограниченном проводе при условии,что

$$GL = CR, \tag{0.24}$$

где G,L,C,R-утечка,самоиндукция,емкость и сопротивление единицы длины провода.Напряжение и сила тока в проводе в начальный момент заданы.

Решение.Математическая формулировка этой задачи следующая:

$$v_x + Li_t + Ri = 0,$$
$$i_x + Cv_t + Gv = 0$$

при $-\infty<x<+\infty, 0<t<+\infty$,

$$v(0, x) = f(x),\ i(0, x) = \sqrt{\frac{C}{L}}\ F(x)$$

при $-\infty<x<+\infty$,где v(t,x)-напряжение,а i(t,x)-сила тока.

Исключаем из уравнений (1) силу тока;в полученном таким образом уравнении второго порядка для v(t,x) освобождаемся от члена $v_t(t,x)$,тогда уравнение примет вид $u_{tt}=a^2u_{xx}$.Его решением будет $u(t,x)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$,где $\varphi(z)=\frac{f(z)+F(z)}{2}$,$\psi(z)=\frac{f(z)-F(z)}{2}$.Возвращаясь к функции v(t,x) и используя уравнения (5) и начальные условия (6),нетрудно получить:

$$v(t, x) = e^{-\frac{Rt}{L}} (\varphi(x - at) + \psi(x + at)),$$

$$i(t, x) = \sqrt{\frac{C}{L}}\ e^{-\frac{Rt}{L}} (\varphi(x - at) - \psi(x + at)).$$

Для анимации изображения распределения напряжения и силы тока зададим конкретные значения:

```
Clear[R, c, l, a, φ, ψ, u, v];

R = 1; l = 2; c = 7; a = 1;

φ[z_] = Cos[z]; ψ[z_] = z * Sin[z];

v[x_, t_] = e^(-(R*t)/l) * (φ[x - a * t] + ψ[x + a * t]) // Simplify
```

```
e^(-t/2) (Cos[t - x] + (t + x) Sin[t + x])
```

```
i[x_, t_] = Sqrt[c/l] * e^(-R*t/l) * (φ[x - a * t] - ψ[x + a * t]) // Simplify
```

$$\sqrt{\frac{7}{2}}\ e^{-t/2}\ (\text{Cos}[t-x]-(t+x)\ \text{Sin}[t+x])$$

Контурный график дает по существу “топографическую карту” функции. Контуры соединяют точки на поверхности, которые имеют одну и ту же высоту. На контурном графике изображены контуры, соединяющие одинаковые значения функции. Контурные графики, построенные системой Mathematica по умолчанию затенены, таким образом, что области с большими значениями функции будут светлее.При использовании Hue [параметр] интерпретация очевидна.

```
MovieContourPlot[i[x, t], {x, -10, 10}, {t, d, d + 0.1}, {d, 0, 5, 0.1},
 ColorFunction → (Hue[1 - #] &), Contours → 100, PlotPoints → 50, PlotRange → All]
```

```
MovieContourPlot[Sqrt[7/2] e^(-t/2) (Cos[t - x] - (t + x) Sin[t + x]),
 {x, -10, 10}, {t, d, 0.1 + d}, {d, 0, 5, 0.1}, ColorFunction → (Hue[1 - #1] &),
 Contours → 100, PlotPoints → 50, PlotRange → All]
```