Уравнения математической физики

Лектор Кулешов Александр Аркадьевич, БГУ, каф. МК, комн. 421, e-mail: kuleshov.sania2013@yandex.ru

Author: KULIASHOU ALIAKSANDR (Kuleshov Alexander)

Belorussian State University, main entry, app. 421, sub-faculty (department) of the mathematical cybernetics

Лабораторная работа №7

Решение задач Коши для гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Указание. Привести к каноническому виду. Найти общее решение приведенного уравнения. Затем найти общее решение исходного. Оно будет зависеть от двух произвольных функций. Эти произвольные функции определяются из двух начальных условий.

```
<< Calculus`DSolveIntegrals`;
```

General::obspkg :
Calculus`DSolveIntegrals` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current Mathematica functionality. See the Compatibility Guide for updating information. ≫

0.0.1 Задача №1.

$$4\,y^2\,\partial_{x,x}u[x,y]+2\left(1-y^2\right)\partial_{x,y}u[x,y]-\partial_{y,y}u[x,y]-\frac{2\,y}{1+y^2}\left(2\,\partial_x\,u[x,y]-\partial_y\,u[x,y]\right)=0 \tag{0.1}$$

$$u[x,y]\,|_{y=0}=\ \varphi[x],\left(\partial_y\,u[x,y]\right)|_{y=0}=\ \psi[x]. \tag{0.2}$$

Решение задачи №1:

Определим тип уравнения по знаку дискриминанта:

```
Clear[A11, A12, A22, Δ];
Print["Δ = ", Δ = A12 A12 - A11 A22 /. {A11 → 4 y^2, A22 → -1, A12 → (1 - y^2)} // Simplify]
```

Δ = $(1+y^2)^2$

$\Delta > 0$ для любых x, y ϵ R, следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве R^2.

Приведение к каноническому виду:

```
Off[General::"spell"];
Off[General::"spell1"];
Clear[A11, A12, A22, A1, A2, A0, rφ, rψ, φ, ψ, a, b, c, d, ξ, η];
A11 = 4 y^2; A12 = (1 - y^2); A22 = -1; A1 = -4 y/(1 + y^2); A2 = 2 y/(1 + y^2); A0 = 0;
```

Вычисление общих интегралов:

```
rφ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[φ[x, y], x] + (A12 + Sqrt[Δ]) D[φ[x, y], y] == 0,
   φ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → F], (1 + y^2)^2 > 0]
```

$$\left\{\left\{\varphi[x,\ y] \to x\,F[1] - \frac{2}{3}\,y^3\,F[1] + F[2]\right\}\right\}$$

Находим первую функцию замены переменных:

```
ξ[x_, y_] = rφ[[1]][[1]][[2]] /. F[1] → a /. F[2] → b
```

$$b + a\,x - \frac{2\,a\,y^3}{3}$$

Аналогично находится вторая функция замены переменных с поизвольными постоянными c, d:

```
rψ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[ψ[x, y], x] + (A12 - Sqrt[Δ]) D[ψ[x, y], y] == 0,
   ψ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → G], (1 + y^2)^2 > 0]
```

$$\{\{\psi[x,\ y] \to (x + 2\,y)\,G[1] + G[2]\}\}$$

```
η[x_, y_] = rψ[[1]][[1]][[2]] /. G[1] → c /. G[2] → d
```

$$d + c\,(x + 2\,y)$$

Проверяем невырожденность преобразования:

```
Factor[Det[{{D[ξ[x, y], x], D[ξ[x, y], y]}, {D[η[x, y], x], D[η[x, y], y]}}]] ≠ 0
```

$$2\,a\,c\,\left(1 + y^2\right) \neq 0$$

Преобразование переменных невырожденно, если $a\,c \neq 0$.

```
Clear[LinearPDE, u, v, res, Equ];
```

```
LinearPDE = A11 D[u[x, y], x, x] + 2 A12 D[u[x, y], x, y] +
  A22 D[u[x, y], y, y] + A1 D[u[x, y], x] + A2 D[u[x, y], y] + A0 u[x, y]
```

$$\frac{2\,y\,u^{(0,1)}[x,\ y]}{1 + y^2} - u^{(0,2)}[x,\ y] - \frac{4\,y\,u^{(1,0)}[x,\ y]}{1 + y^2} + 2\,\left(1 - y^2\right)\,u^{(1,1)}[x,\ y] + 4\,y^2\,u^{(2,0)}[x,\ y]$$

```
u[x_, y_] = v[ξ[x, y], η[x, y]];
```

```
res = FullSimplify[Coefficient[LinearPDE,
   {Derivative[2, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 2][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]], v[ξ[x, y], η[x, y]]}]]
```

$$\left\{0,\ 4\,a\,c\,\left(1 + y^2\right)^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\}$$

Записываем левую часть преобразованного уравнения:

```
Equ = Plus @@ (res {û_ξξ, û_ξη, û_ηη, û_ξ, û_η, û})
```

$$4\,a\,c\,\left(1 + y^2\right)^2\,\hat{u}_{\xi\eta}$$

Разделим обе части на $4\,a\,c\,\left(1 + y^2\right)^2$:

```
Expand[Equ / 4 / a / c / (1 + y^2)^2]
```

$$\hat{u}_{\xi\eta}$$

Получаем канонический вид:

$\hat{u}_{\xi\eta} = 0;$

Общее решение канонического вида:

```
Clear[v];
```

```
DSolve[∂ξ,η v[ξ, η] == 0, v[ξ, η], {ξ, η}] // Flatten
```

$\{v[\xi,\ \eta] \to C[1][\xi] + C[2][\eta]\}$

Общее решение исходного уравнения -- сумма двух произвольных функций:

```
Clear[u];
```

```
u[x_, y_] = f[ξ[x, y]] + g[η[x, y]]
```

$f\left[b + a\,x - \frac{2\,a\,y^3}{3}\right] + g[d + c\,(x + 2\,y)]$

Определение функций *f*, *g*:

```
Clear[Equ];
```

```
a = 1; c = 1; b = 0; d = 0;
```

```
Equ = FullSimplify[{u[x, 0] == φ[x], (∂y u[x, y] /. y → 0) == ψ[x]}]
```

$\{f[x] + g[x] == \varphi[x],\ \psi[x] == 2\,g'[x]\}$

Решаем второе уравнение, чтобы выразить функцию *g*:

```
Clear[solg];
```

```
solg = DSolve[Equ[[2]], g[x], x] /. x → z // Flatten
```

$\left\{g[z] \to C[1] + \int_1^z \frac{1}{2}\,\psi[K[1]]\,dK[1]\right\}$

Подставляем найденную функцию $g(x)$ в первое уравнение и находим функцию $f(x)$:

```
Clear[Equ1, solf];
```

```
Equ1 = Equ[[1]] /. x → z /. solg
```

$C[1] + f[z] + \int_1^z \frac{1}{2}\,\psi[K[1]]\,dK[1] == \varphi[z]$

```
solf = Flatten[Solve[Equ1, f[z]]]
```

$\left\{f[z] \to -C[1] - \int_1^z \frac{1}{2}\,\psi[K[1]]\,dK[1] + \varphi[z]\right\}$

Записываем явное определение функций $g(z)$ и $f(z)$:

```
Clear[f, g];
```

```
f[z_] = FullSimplify[f[z] /. solf]
```

$-C[1] - \int_1^z \frac{1}{2}\,\psi[K[1]]\,dK[1] + \varphi[z]$

```
g[z_] = FullSimplify[g[z] /. solg]
```

$C[1] + \int_1^z \frac{1}{2}\,\psi[K[1]]\,dK[1]$

Получаем решение задачи Коши:

```
Clear[Uout];
```

```
Uout[x_, y_] = FullSimplify[u[x, y]]
```

$\int_1^{x+2\,y} \frac{1}{2}\,\psi[K[1]]\,dK[1] - \int_1^{x-\frac{2\,y^3}{3}} \frac{1}{2}\,\psi[K[1]]\,dK[1] + \varphi\left[x - \frac{2\,y^3}{3}\right]$

Проверка:

```
A11 ∂x,x Uout[x, y] + 2 A12 ∂x,y Uout[x, y] +
  A22 ∂y,y Uout[x, y] + A1 ∂x Uout[x, y] + A2 ∂y Uout[x, y] // FullSimplify
```

```
0
```

```
Uout[x, 0]
```

```
φ[x]
```

```
∂y Uout[x, y] /. y → 0 // Expand
```

```
ψ[x]
```

Используя формулу Ньютона-Лейбница, решение можно преобразовать к виду:

$$\frac{1}{2}\int_{x-\frac{2y^3}{3}}^{x+2y}\psi[\alpha]\,d\alpha+\varphi\left[x-\frac{2y^3}{3}\right]$$

0.0.2 Задача №2.

$$\partial_{x,x}u[x,y]-2\,\partial_{x,y}u[x,y]=-4\,e^{y}, \tag{0.3}$$

$$u[x,y]\,|_{x=0}=\ \varphi[y],\ (\partial_x\,u[x,y])\,|_{x=0}=\ \psi[y]. \tag{0.4}$$

Решение задачи №2:

Определим тип уравнения по знаку дискриминанта:

```
Clear[A11, A12, A22, Δ];
```

```
Print["Δ = ", Δ = A12 A12 - A11 A22 /. {A11 → 1, A22 → 0, A12 → -1} // Simplify]
```

```
Δ = 1
```

$\Delta > 0$ для любых x, y ϵ R, следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве R^2.

Приведение к каноническому виду:

```
Off[General::"spell"];
```

```
Off[General::"spell1"];
```

```
Clear[A11, A12, A22, A1, A2, A0, rφ, rψ, φ, ψ, a, b, c, d, ξ, η, prav4];
A11 = 1; A12 = -1; A22 = 0; A1 = 0; A2 = 0; A0 = 0; prav4 = -4 ⅇ^y;
```

Вычисление общих интегралов:

```
rφ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[φ[x, y], x] + (A12 + Sqrt[Δ]) D[φ[x, y], y] == 0,
   φ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → F]]
```

```
{{φ[x, y] → F[1] + y F[2]}}
```

Находим первую функцию замены переменных:

```
ξ[x_, y_] = rφ[[1]][[1]][[2]] /. F[1] → a /. F[2] → b
```

```
a + b y
```

Аналогично находится вторая функция замены переменных с поизвольными постоянными c, d:

```
rψ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[ψ[x, y], x] + (A12 - Sqrt[Δ]) D[ψ[x, y], y] == 0,
   ψ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → G]]
```

```
{{ψ[x, y] → G[1] + (2 x + y) G[2]}}
```

```
η[x_, y_] = rψ[[1]][[1]][[2]] /. G[1] → c /. G[2] → d
```

```
c + d (2 x + y)
```

Проверяем невырожденность преобразования:

```
Factor[Det[{{D[ξ[x, y], x], D[ξ[x, y], y]}, {D[η[x, y], x], D[η[x, y], y]}}]] ≠ 0
```

```
-2 b d ≠ 0
```

Преобразование переменных невырожденно, если $bd \neq 0$.

```
Clear[LinearPDE, u, v, res, Equ];
```

```
LinearPDE = A11 D[u[x, y], x, x] + 2 A12 D[u[x, y], x, y] +
  A22 D[u[x, y], y, y] + A1 D[u[x, y], x] + A2 D[u[x, y], y] + A0 u[x, y]
```

$-2 u^{(1,1)}[x, y] + u^{(2,0)}[x, y]$

```
u[x_, y_] = v[ξ[x, y], η[x, y]];
```

```
res = FullSimplify[Coefficient[LinearPDE,
   {Derivative[2, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 2][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]], v[ξ[x, y], η[x, y]]}]]
```

```
{0, -4 b d, 0, 0, 0, 0}
```

Записываем левую часть преобразованного уравнения:

$\text{Equ} = \text{Plus} @@ \left(\text{res} \left\{\hat{u}_{\xi\xi}, \hat{u}_{\xi\eta}, \hat{u}_{\eta\eta}, \hat{u}_{\xi}, \hat{u}_{\eta}, \hat{u}\right\}\right)$

$-4\, b\, d\, \hat{u}_{\xi\eta}$

Выразим y через ξ и разделим обе части на $-4\ b\ d$:

```
soly = Solve[ξ[x, y] == ξ, y] // Flatten
```

$\left\{y \to \frac{-a+\xi}{b}\right\}$

$\text{Expand}[\{\text{Equ}, \text{prav4}\} / (-4\, b\, d)] \ /.\ y \to \frac{-a+\xi}{b}$

$\left\{\hat{u}_{\xi\eta}, \frac{e^{\frac{-a+\xi}{b}}}{b\, d}\right\}$

Получаем канонический вид:

$$\hat{u}_{\xi\eta} = \frac{e^{\frac{-a+\xi}{b}}}{b\, d}; \qquad (0.5)$$

Общее решение канонического вида будем искать в виде суммы: $\hat{u} = u1 + u2$, где $u1$ -- общее решение однородного уравнения (0.5), а $u2$ -- частное решение уравнения (0.5).

```
Clear[u1, u2];
```

Находим $u1$:

$\text{DSolve}\left[\partial_{\xi,\eta} \text{u1}[\xi, \eta] == 0, \text{u1}[\xi, \eta], \{\xi, \eta\}\right] \ //\ \text{Flatten}$

```
{u1[ξ, η] → C[1][ξ] + C[2][η]}
```

Общее решение однородного уравнения -- сумма двух произвольных функций:

```
Clear[u1, f, g];
```

```
u1[ξ_, η_] = f[ξ] + g[η]
```

```
f[ξ] + g[η]
```

Находим $u2$. Очевидно, что частным решением будет функция

$\text{u2}[\xi\_, \eta\_] = \frac{1}{d} e^{\frac{-a+\xi}{b}} \eta;$

```
∂ξ,η u2[ξ, η] == ℯ^((-a+ξ)/b)/(b d)
```

True

Общее решение исходного уравнения:

```
Clear[u];
```

```
u[x_, y_] = u1[ξ[x, y], η[x, y]] + u2[ξ[x, y], η[x, y]]
```

$$\frac{e^{y}\,(c + d\,(2\,x + y))}{d} + f[a + b\,y] + g[c + d\,(2\,x + y)]$$

Определение функций *f*, *g*:

```
Clear[Equ];
```

```
a = 0; c = 0; b = 1; d = 1;
```

```
Equ = FullSimplify[{u[0, y] == φ[y], (∂x u[x, y] /. x → 0) == ψ[y]}]
```

$$\{e^{y}\,y + f[y] + g[y] == \varphi[y],\ 2\,(e^{y} + g'[y]) == \psi[y]\}$$

Решаем второе уравнение, чтобы выразить функцию *g*:

```
Clear[solg];
```

```
solg = DSolve[Equ[[2]], g[y], y] /. y → z // Flatten
```

$$\left\{g[z] \to C[1] + \int_1^z \frac{1}{2}\left(-2\,e^{K[1]} + \psi[K[1]]\right) dK[1]\right\}$$

Подставляем найденную функцию *g*(*y*) в первое уравнение и находим функцию *f*(*y*):

```
Clear[Equ1, solf];
```

```
Equ1 = Equ[[1]] /. y → z /. solg
```

$$e^{z}\,z + C[1] + f[z] + \int_1^z \frac{1}{2}\left(-2\,e^{K[1]} + \psi[K[1]]\right) dK[1] == \varphi[z]$$

```
solf = Flatten[Solve[Equ1, f[z]]]
```

$$\left\{f[z] \to -e^{z}\,z - C[1] - \int_1^z \frac{1}{2}\left(-2\,e^{K[1]} + \psi[K[1]]\right) dK[1] + \varphi[z]\right\}$$

Записываем явное определение функций *g*(*z*) и *f*(*z*):

```
Clear[f, g];
```

```
f[z_] = FullSimplify[f[z] /. solf]
```

$$-e^{z}\,z - C[1] - \int_1^z \frac{1}{2}\left(-2\,e^{K[1]} + \psi[K[1]]\right) dK[1] + \varphi[z]$$

```
g[z_] = FullSimplify[g[z] /. solg]
```

$$C[1] + \int_1^z \frac{1}{2}\left(-2\,e^{K[1]} + \psi[K[1]]\right) dK[1]$$

Получаем решение задачи Коши:

```
Clear[Uout];
```

```
Uout[x_, y_] = FullSimplify[u[x, y]]
```

$$2\,e^{y}\,x - \int_1^y \frac{1}{2}\left(-2\,e^{K[1]} + \psi[K[1]]\right) dK[1] + \int_1^{2\,x+y} \frac{1}{2}\left(-2\,e^{K[1]} + \psi[K[1]]\right) dK[1] + \varphi[y]$$

Проверка:

```
∂x,x Uout[x, y] + 2 A12 ∂x,y Uout[x, y] - prav4 // Expand
```

0

```
Uout[0, y]
```

φ[y]

```
∂x Uout[x, y] /. x → 0 // Expand
```

ψ[y]

Используя формулу Ньютона-Лейбница, решение можно преобразовать к виду:

$$2\,e^{y}\,x + \frac{1}{2}\int_{y}^{x+2y} (\psi[\alpha] - 2\,e^{\alpha})\,d\alpha + \varphi[y] \tag{0.6}$$

0.0.3 Задача №3.

$$\partial_{x,x}\,u[x,\,y] + 2\,\mathrm{Cos}[x]\,\partial_{x,y}\,u[x,\,y] - \mathrm{Sin}^2[x]\,\partial_{y,y}\,u[x,\,y] - \mathrm{Sin}[x]\,\partial_y\,u[x,\,y] = 0, \tag{0.7}$$

$$u[x,\,y]\,|_{y=\mathrm{Sin}[x]} = \;x + \mathrm{Cos}[x],\,\left(\partial_y\,u[x,\,y]\right)|_{y=\mathrm{Sin}[x]} = \;\mathrm{Sin}[x]. \tag{0.8}$$

Решение задачи №3:

Определим тип уравнения по знаку дискриминанта:

```
Clear[A11, A12, A22, Δ];

Print["Δ = ",
 Δ = A12 A12 - A11 A22 /. {A11 → 1, A22 → -Sin[x]^2, A12 → Cos[x]} // FullSimplify]
```

Δ = 1

Δ > 0 для любых x, y ϵ R, следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве R^2.

Приведение к каноническому виду:

```
Off[General::"spell"];

Off[General::"spell1"];

Clear[A11, A12, A22, A1, A2, A0, rφ, rψ, φ, ψ, a, b, c, d, ξ, η];
A11 = 1; A12 = Cos[x]; A22 = -Sin[x]^2; A1 = 0; A2 = -Sin[x]; A0 = 0;
```

Вычисление общих интегралов:

```
rφ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[φ[x, y], x] + (A12 + Sqrt[Δ]) D[φ[x, y], y] == 0,
   φ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → F]]
```

{{φ[x, y] → F[1] + (-x + y) F[2] - F[2] Sin[x]}}

Находим первую функцию замены переменных:

```
ξ[x_, y_] = rφ[[1]][[1]][[2]] /. F[1] → a /. F[2] → b
```

a + b (-x + y) - b Sin[x]

Аналогично находится вторая функция замены переменных с поизвольными постоянными c, d:

```
rψ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[ψ[x, y], x] + (A12 - Sqrt[Δ]) D[ψ[x, y], y] == 0,
   ψ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → G], (1 + y^2)^2 > 0]
```

{{ψ[x, y] → G[1] + (x + y) G[2] - G[2] Sin[x]}}

```
η[x_, y_] = rψ[[1]][[1]][[2]] /. G[1] → c /. G[2] → d
```

c + d (x + y) - d Sin[x]

Проверяем невырожденность преобразования:

```
Factor[Det[{{D[ξ[x, y], x], D[ξ[x, y], y]}, {D[η[x, y], x], D[η[x, y], y]}}]] ≠ 0
```

```
-2 b d ≠ 0
```

Преобразование переменных невырожденно, если $b\ d \neq 0$.

```
Clear[LinearPDE, u, v, res, Equ];
```

```
LinearPDE = A11 D[u[x, y], x, x] + 2 A12 D[u[x, y], x, y] +
  A22 D[u[x, y], y, y] + A1 D[u[x, y], x] + A2 D[u[x, y], y] + A0 u[x, y]
```

$-\mathrm{Sin}[x]\, u^{(0,1)}[x, y] - \mathrm{Sin}[x]^2\, u^{(0,2)}[x, y] + 2\,\mathrm{Cos}[x]\, u^{(1,1)}[x, y] + u^{(2,0)}[x, y]$

```
u[x_, y_] = v[ξ[x, y], η[x, y]];
```

```
res = FullSimplify[Coefficient[LinearPDE,
   {Derivative[2, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 2][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]], v[ξ[x, y], η[x, y]]}]]
```

```
{0, -4 b d, 0, 0, 0, 0}
```

Записываем левую часть преобразованного уравнения:

$\mathbf{Equ = Plus\ @@\ (res\ \{\hat{u}_{\xi\xi},\ \hat{u}_{\xi\eta},\ \hat{u}_{\eta\eta},\ \hat{u}_{\xi},\ \hat{u}_{\eta},\ \hat{u}\})}$

$-4\, b\, d\, \hat{u}_{\xi\eta}$

Разделим обе части на $-4\ b\ d$:

```
Expand[Equ / (-4 b d)]
```

$\hat{u}_{\xi\eta}$

Получаем канонический вид:

$\hat{u}_{\xi\eta} = 0;$

Общее решение канонического вида:

```
Clear[v];
```

$\mathbf{DSolve[\partial_{\xi,\eta} v[\xi, \eta] == 0,\ v[\xi, \eta],\ \{\xi, \eta\}]\ //\ Flatten}$

```
{v[ξ, η] → C[1][ξ] + C[2][η]}
```

Общее решение исходного уравнения -- сумма двух произвольных функций:

```
ClearAll[u, f, g, x, y];
```

```
u[x_, y_] = f[ξ[x, y]] + g[η[x, y]]
```

```
f[a + b (-x + y) - b Sin[x]] + g[c + d (x + y) - d Sin[x]]
```

Определение функций f, g:

```
Clear[Equ];
```

```
a = 0; c = 0; b = 1; d = 1;
```

$\mathbf{Equ = FullSimplify[\{u[x, Sin[x]] == x + Cos[x],\ (\partial_y u[x, y]\ /.\ y \to Sin[x]) == Sin[x]\}]}$

```
{x + Cos[x] == f[-x] + g[x], Sin[x] == f′[-x] + g′[x]}
```

Решаем второе уравнение, чтобы выразить функцию g:

```
Clear[solg];
```

```
solg = DSolve[Equ[[2]], g[x], x] /. x → z // Flatten
```

```
{g[z] → C[1] - Cos[z] + f[-z]}
```

Подставляем найденную функцию $g(x)$ в первое уравнение и находим функцию $f(x)$:

```
Clear[Equ1, solf];
```

```
Equ1 = Equ[[1]] /. x → z /. solg
```

z + Cos[z] == C[1] - Cos[z] + 2 f[-z]

```
solf = Flatten[Solve[Equ1, f[-z]] /. z → -z]
```

$\left\{f[z] \to \frac{1}{2}(-z - C[1] + 2\,Cos[z])\right\}$

Записываем явное определение функций $g(z)$ и $f(z)$:

```
Clear[f, g];
```

```
f[z_] = FullSimplify[f[z] /. solf]
```

$-\frac{z}{2} - \frac{C[1]}{2} + Cos[z]$

```
g[z_] = FullSimplify[g[z] /. solg]
```

$\frac{1}{2}(z + C[1])$

Получаем решение задачи Коши:

```
Clear[Uout];
```

```
Uout[x_, y_] = FullSimplify[u[x, y]]
```

x + Cos[x - y + Sin[x]]

Проверка:

$A11\,\partial_{x,x}Uout[x, y] + 2\,A12\,\partial_{x,y}Uout[x, y] + A22\,\partial_{y,y}Uout[x, y] + A1\,\partial_x Uout[x, y] + A2\,\partial_y Uout[x, y]$ // FullSimplify

0

```
Uout[x, Sin[x]]
```

x + Cos[x]

∂_y Uout[x, y] /. y → Sin[x] // Expand

Sin[x]

$u[x, y] = x + Cos[x - y + Sin[x]]$.

0.0.4 Задача №4.

$$3\,\partial_{x,x}u[x, y] - 4\,\partial_{x,y}u[x, y] + \partial_{y,y}u[x, y] - 3\,\partial_x\,u[x, y] + \partial_y\,u[x, y] = 0, \quad (0.9)$$

$$u[x, y]\,|_{y=0} = \varphi[x], \left(\partial_y\,u[x, y]\right)|_{y=0} = \psi[x]. \quad (0.10)$$

Решение задачи №4:

Определим тип уравнения по знаку дискриминанта:

```
Clear[A11, A12, A22, Δ];
```

```
Print["Δ = ", Δ = A12 A12 - A11 A22 /. {A11 → 3, A22 → 1, A12 → -2} // Simplify]
```

Δ = 1

Δ > 0 для любых x, y ϵ R, следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве R^2.

Приведение к каноническому виду:

```
Off[General::"spell"];
```

```
Off[General::"spell1"];
```

```
Clear[A11, A12, A22, A1, A2, A0, rφ, rψ, φ, ψ, a, b, c, d, ξ, η];
A11 = 3; A12 = -2; A22 = 1; A1 = -3; A2 = 1; A0 = 0;
```

Вычисление общих интегралов:

```
rφ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[φ[x, y], x] + (A12 + Sqrt[Δ]) D[φ[x, y], y] == 0,
   φ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → F]]
```

$\left\{\left\{\varphi[x, y] \to F[1] + \frac{1}{3}(x + 3y) F[2]\right\}\right\}$

Находим первую функцию замены переменных:

```
ξ[x_, y_] = rφ[[1]][[1]][[2]] /. F[1] → a /. F[2] → b
```

$a + \frac{1}{3} b (x + 3y)$

Аналогично находится вторая функция замены переменных с поизвольными постоянными c, d:

```
rψ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[ψ[x, y], x] + (A12 - Sqrt[Δ]) D[ψ[x, y], y] == 0,
   ψ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → G], (1 + y^2)^2 > 0]
```

$\{\{\psi[x, y] \to G[1] + (x + y) G[2]\}\}$

```
η[x_, y_] = rψ[[1]][[1]][[2]] /. G[1] → c /. G[2] → d
```

$c + d (x + y)$

Проверяем невырожденность преобразования:

```
Factor[Det[{{D[ξ[x, y], x], D[ξ[x, y], y]}, {D[η[x, y], x], D[η[x, y], y]}}]] ≠ 0
```

$-\frac{2 b d}{3} \neq 0$

Преобразование переменных невырожденно, если $bd \neq 0$.

```
Clear[LinearPDE, u, v, res, Equ];
```

```
LinearPDE = A11 D[u[x, y], x, x] + 2 A12 D[u[x, y], x, y] +
  A22 D[u[x, y], y, y] + A1 D[u[x, y], x] + A2 D[u[x, y], y] + A0 u[x, y]
```

$u^{(0,1)}[x, y] + u^{(0,2)}[x, y] - 3 u^{(1,0)}[x, y] - 4 u^{(1,1)}[x, y] + 3 u^{(2,0)}[x, y]$

```
u[x_, y_] = v[ξ[x, y], η[x, y]];
```

```
res = FullSimplify[Coefficient[LinearPDE,
   {Derivative[2, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 2][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]], v[ξ[x, y], η[x, y]]}]]
```

$\left\{0, -\frac{4 b d}{3}, 0, 0, -2 d, 0\right\}$

Записываем левую часть преобразованного уравнения:

```
Equ = Plus @@ (res {û_ξξ, û_ξη, û_ηη, û_ξ, û_η, û})
```

$-2 d \hat{u}_{\eta} - \frac{4}{3} b d \hat{u}_{\xi\eta}$

Разделим обе части на $-\frac{4}{3}$ b d:

```
Expand[Equ / (-4/3 b d)]
```

$\frac{3 \hat{u}_{\eta}}{2 b} + \hat{u}_{\xi\eta}$

Получаем канонический вид:

$\hat{u}_{\xi\eta} + \frac{3\,\hat{u}_\eta}{2\,b} = 0;$

Общее решение канонического вида:

```
Clear[v];
```

$$\text{DSolve}\left[\partial_{\xi,\eta}v[\xi,\eta] + \frac{3}{2\,b}\partial_\eta v[\xi,\eta] == 0,\ v[\xi,\eta],\ \{\xi,\eta\}\right] \ // \ \text{Flatten}$$

$$\left\{v[\xi,\eta] \to \int_1^\eta e^{-\frac{3\,\xi}{2\,b}} C[1][K[1]]\, dK[1] + C[2][\xi]\right\}$$

Общее решение исходного уравнения :

```
ClearAll[u, f, g, x, y];
```

$$u[x\_, y\_] = f[\xi[x,y]] + e^{-\frac{3\,\xi[x,y]}{2\,b}} g[\eta[x,y]] \ // \ \text{Apart}$$

$$f\left[a + \frac{1}{3} b\,(x + 3\,y)\right] + e^{-\frac{3\,a}{2\,b} - \frac{x}{2} - \frac{3\,y}{2}} g[c + d\,(x + y)]$$

Определение функций *f*, *g*:

```
Clear[Equ];
a = 0; c = 0; b = 3; d = 1;
```

$$\text{Equ} = \text{FullSimplify}\left[\left\{u[x,0] == \varphi[x],\ \left(\partial_y u[x,y] \ /.\ y \to 0\right) == \psi[x]\right\}\right]$$

$$\left\{f[x] + e^{-x/2} g[x] == \varphi[x],\ 3\,f'[x] + \frac{1}{2} e^{-x/2}\,(-3\,g[x] + 2\,g'[x]) == \psi[x]\right\}$$

Решаем первое уравнение, чтобы выразить функцию *f*:

```
Clear[solf, prf];
solf = Solve[Equ[[1]], f[x]] /. x → z // Flatten // Simplify
```

$$\left\{f[z] \to -e^{-z/2} g[z] + \varphi[z]\right\}$$

```
prf = D[solf, z] // Simplify
```

$$\left\{f'[z] \to \frac{1}{2} e^{-z/2} g[z] - e^{-z/2} g'[z] + \varphi'[z]\right\}$$

Подставляем найденную функцию *f'*(*x*) во второе уравнение и находим функцию *g*(*x*):

```
Clear[Equ1, solg];
Equ1 = Equ[[2]] /. x → z /. prf // Simplify
```

$$\psi[z] + 2\,e^{-z/2} g'[z] == 3\,\varphi'[z]$$

```
solg = Flatten[DSolve[Equ1, g[z], z]]
```

$$\left\{g[z] \to C[1] + \int_1^z -\frac{1}{2} e^{\frac{K[1]}{2}} (\psi[K[1]] - 3\,\varphi'[K[1]])\, dK[1]\right\}$$

Записываем явное определение функций *g*(*z*) и *f*(*z*):

```
Clear[f, g];
f[z_] = FullSimplify[f[z] /. solf]
```

$$-e^{-z/2} g[z] + \varphi[z]$$

```
g[z_] = FullSimplify[g[z] /. solg]
```

$$C[1] + \int_1^z -\frac{1}{2} e^{\frac{K[1]}{2}} (\psi[K[1]] - 3\,\varphi'[K[1]])\, dK[1]$$

Получаем решение задачи Коши:

```
Clear[Uout];
Uout[x_, y_] = FullSimplify[u[x, y]]
```

$$e^{-\frac{x}{2}-\frac{3y}{2}}\left(\int_1^{x+y}-\frac{1}{2}e^{\frac{K[1]}{2}}(\psi[K[1]]-3\varphi'[K[1]])\,dK[1]-\int_1^{x+3y}-\frac{1}{2}e^{\frac{K[1]}{2}}(\psi[K[1]]-3\varphi'[K[1]])\,dK[1]\right)+\varphi[x+3y]$$

Проверка:

```
A11 ∂x,x Uout[x, y] + 2 A12 ∂x,y Uout[x, y] +
  A22 ∂y,y Uout[x, y] + A1 ∂x Uout[x, y] + A2 ∂y Uout[x, y] // FullSimplify
```

0

```
Uout[x, 0]
```

$\varphi[x]$

```
∂y Uout[x, y] /. y → 0 // Expand
```

$\psi[x]$

Используя формулу Ньютона-Лейбница, решение можно преобразовать к виду:

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}-\frac{3y}{2}}\int_{x+y}^{x+3y}e^{\alpha/2}(\psi[\alpha]-3\varphi'[\alpha])\,d\alpha+\varphi[x+3y]$$

0.0.5 Задача №5.

$$e^y\,\partial_{x,y}u[x,y]-\partial_{y,y}u[x,y]+\partial_y\,u[x,y]=0, \tag{0.11}$$

$$u[x,y]\,|_{y=0}=\;-\frac{x^2}{2},\;\left(\partial_y\,u[x,y]\right)|_{y=0}=\;-\mathrm{Sin}[x]. \tag{0.12}$$

Решение задачи №5:

Определим тип уравнения по знаку дискриминанта:

```
Clear[A11, A12, A22, Δ];
Print["Δ = ", Δ = A12 A12 - A11 A22 /. {A11 → 0, A22 → -1, A12 → 1/2 e^y} // Simplify]
```

$\Delta\;=\;\frac{e^{2y}}{4}$

$\Delta>0$ для любых x, y $\in R$, следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве R^2.

Приведение к каноническому виду:

```
Off[General::"spell"];
Off[General::"spell1"];
Clear[A11, A12, A22, A1, A2, A0, rφ, rψ, φ, ψ, a, b, c, d, ξ, η];
A11 = 0; A12 = 1/2 e^y; A22 = -1; A1 = 0; A2 = 1; A0 = 0;
```

Вычисление общих интегралов:

```
rφ = FullSimplify[CompleteIntegral[A22 D[φ[x, y], y] + (A12 + Sqrt[Δ]) D[φ[x, y], x] == 0,
   φ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → F], e^(2 y)/4 > 0]
```

$$\left\{\left\{\varphi[x,y]\to\frac{1}{2}\left(e^y+\sqrt{e^{2y}}+2x\right)F[1]+F[2]\right\}\right\}$$

Находим первую функцию замены переменных:

```
ξ[x_, y_] = rφ[[1]][[1]][[2]] /. F[1] → a /. F[2] → b
```

$$b + \frac{1}{2} a \left(e^{y} + \sqrt{e^{2 y}} + 2 x\right)$$

Аналогично находится вторая функция замены переменных с поизвольными постоянными c, d:

```
rψ = FullSimplify[CompleteIntegral[A22 D[ψ[x, y], y] + (A12 - Sqrt[Δ]) D[ψ[x, y], x] == 0,
   ψ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → G], e^(2 y)/4 > 0]
```

$$\left\{\left\{\psi[x, y] \to -\frac{1}{2} \left(-e^{y} + \sqrt{e^{2 y}} - 2 x\right) G[1] + G[2]\right\}\right\}$$

```
η[x_, y_] = rψ[[1]][[1]][[2]] /. G[1] → c /. G[2] → d
```

$$d - \frac{1}{2} c \left(-e^{y} + \sqrt{e^{2 y}} - 2 x\right)$$

Проверяем невырожденность преобразования:

```
Factor[Det[{{D[ξ[x, y], x], D[ξ[x, y], y]}, {D[η[x, y], x], D[η[x, y], y]}}]] ≠ 0
```

$$-a c \sqrt{e^{2 y}} \neq 0$$

Преобразование переменных невырожденно, если $ac \neq 0$.

```
Clear[LinearPDE, u, v, res, Equ];
```

```
LinearPDE = A11 D[u[x, y], x, x] + 2 A12 D[u[x, y], x, y] +
  A22 D[u[x, y], y, y] + A1 D[u[x, y], x] + A2 D[u[x, y], y] + A0 u[x, y]
```

$$u^{(0,1)}[x, y] - u^{(0,2)}[x, y] + e^{y} u^{(1,1)}[x, y]$$

```
u[x_, y_] = v[ξ[x, y], η[x, y]];
```

```
res = FullSimplify[Coefficient[LinearPDE,
   {Derivative[2, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 2][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]], v[ξ[x, y], η[x, y]]}]]
```

$$\left\{0, a c e^{2 y}, 0, 0, 0, 0\right\}$$

Записываем левую часть преобразованного уравнения:

```
Equ = Plus @@ (res {û_ξξ, û_ξη, û_ηη, û_ξ, û_η, û})
```

$$a c e^{2 y} \hat{u}_{\xi\eta}$$

Разделим обе части на $a c e^{2 y}$:

```
Expand[Equ / (a c e^(2 y))]
```

$$\hat{u}_{\xi\eta}$$

Получаем канонический вид:

$\hat{u}_{\xi\eta} = 0$;

Общее решение канонического вида:

```
Clear[v];
```

```
DSolve[∂_{ξ,η} v[ξ, η] == 0, v[ξ, η], {ξ, η}] // Flatten
```

$$\{v[\xi, \eta] \to C[1][\xi] + C[2][\eta]\}$$

Общее решение исходного уравнения -- сумма двух произвольных функций:

```
ClearAll[u, f, g, x, y];
```

```
u[x_, y_] = f[ξ[x, y]] + g[η[x, y]]
```

$$f\left[b + \frac{1}{2} a \left(e^y + \sqrt{e^{2 y}} + 2 x\right)\right] + g\left[d - \frac{1}{2} c \left(-e^y + \sqrt{e^{2 y}} - 2 x\right)\right]$$

Определение функций *f*, *g*:

```
Clear[Equ];
```

```
a = 1; c = 1; b = 0; d = 0;
```

$$\text{Equ = FullSimplify}\left[\left\{u[x, 0] == \frac{-x^2}{2}, \left(\partial_y u[x, y] \text{ /. } y \to 0\right) == -\text{Sin}[x]\right\}\right]$$

$$\left\{x^2 + 2 f[1 + x] + 2 g[x] == 0, \text{Sin}[x] + f'[1 + x] == 0\right\}$$

Интегрируем второе уравнение, чтобы выразить функцию *f*:

```
Clear[solf, equf];
```

$$\text{equf} = \int \text{Equ[[2]][[1]]}\, dx == 0$$

$$-\text{Cos}[x] + f[1 + x] == 0$$

```
solf = Solve[equf, f[1 + x]] /. x → z - 1 // Flatten
```

$$\{f[z] \to \text{Cos}[1 - z]\}$$

Подставляем найденную функцию *f*(*x*) в первое уравнение и находим функцию g(*x*):

```
Clear[Equ1, solg];
```

```
Equ1 = Equ[[1]] /. {solf /. z → 1 + x}
```

$$\left\{x^2 + 2 \text{Cos}[x] + 2 g[x] == 0\right\}$$

```
solg = Solve[Equ1[[1]], g[x]] /. x → z // Flatten
```

$$\left\{g[z] \to \frac{1}{2} \left(-z^2 - 2 \text{Cos}[z]\right)\right\}$$

Записываем явное определение функций *g*(*z*) и *f*(*z*):

```
Clear[f, g];
```

```
f[z_] = FullSimplify[f[z] /. solf]
```

$$\text{Cos}[1 - z]$$

```
g[z_] = FullSimplify[g[z] /. solg]
```

$$-\frac{z^2}{2} - \text{Cos}[z]$$

Получаем решение задачи Коши:

```
Clear[Uout];
```

```
Uout[x_, y_] = FullSimplify[u[x, y]]
```

$$-\frac{1}{8} \left(e^y - \sqrt{e^{2 y}} + 2 x\right)^2 + \text{Cos}\left[\frac{1}{2} \left(2 - e^y - \sqrt{e^{2 y}} - 2 x\right)\right] - \text{Cos}\left[\frac{1}{2} \left(e^y - \sqrt{e^{2 y}} + 2 x\right)\right]$$

Проверка:

$$\text{A11}\, \partial_{x,x} \text{Uout}[x, y] + 2\, \text{A12}\, \partial_{x,y} \text{Uout}[x, y] + \text{A22}\, \partial_{y,y} \text{Uout}[x, y] + \text{A1}\, \partial_x \text{Uout}[x, y] + \text{A2}\, \partial_y \text{Uout}[x, y] \text{ // FullSimplify}$$

0

```
Uout[x, 0]
```

$-\frac{x^2}{2}$

```
∂y Uout[x, y] /. y → 0 // Expand
```

```
-Sin[x]
```

$u[x, y] = -\frac{1}{8}\left(e^y - \sqrt{e^{2y}} + 2x\right)^2 + \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{2}\left(2 - e^y - \sqrt{e^{2y}} - 2x\right)\right] - \mathrm{Cos}\left[\frac{1}{2}\left(e^y - \sqrt{e^{2y}} + 2x\right)\right].$

0.0.6 Задача №6.

$$\partial_{x,x} u[x, y] - 2\,\mathrm{Sin}[x]\,\partial_{x,y} u[x, y] - \left(3 + \mathrm{Cos}^2[x]\right)\partial_{y,y} u[x, y] - \mathrm{Cos}[x]\,\partial_y\, u[x, y] = 0, \tag{0.13}$$

$$u[x, y]\,|_{y=\mathrm{Cos}[x]} = \mathrm{Sin}[x], \left(\partial_y\, u[x, y]\right)|_{y=\mathrm{Cos}[x]} = \frac{e^x}{2}. \tag{0.14}$$

Решение задачи №6:

Определим тип уравнения по знаку дискриминанта:

```
Clear[A11, A12, A22, Δ];

Print["Δ = ",
  Δ = A12 A12 - A11 A22 /. {A11 → 1, A22 → -(3 + Cos[x]^2), A12 → -Sin[x]} // Simplify]
```

```
Δ = 4
```

$\Delta > 0$ для любых x, y ϵ R, следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве R^2.

Приведение к каноническому виду:

```
Off[General::"spell"];

Off[General::"spell1"];

Clear[A11, A12, A22, A1, A2, A0, rφ, rψ, φ, ψ, a, b, c, d, ξ, η];
A11 = 1; A12 = -Sin[x]; A22 = -(3 + Cos[x]^2); A1 = 0; A2 = -Cos[x]; A0 = 0;
```

Вычисление общих интегралов:

```
rφ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[φ[x, y], x] + (A12 + Sqrt[Δ]) D[φ[x, y], y] == 0,
   φ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → F]]
```

```
{{φ[x, y] → F[1] + (-2 x + y - Cos[x]) F[2]}}
```

Находим первую функцию замены переменных:

```
ξ[x_, y_] = rφ[[1]][[1]][[2]] /. F[1] → a /. F[2] → b
```

```
a + b (-2 x + y - Cos[x])
```

Аналогично находится вторая функция замены переменных с поизвольными постоянными c, d:

```
rψ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[ψ[x, y], x] + (A12 - Sqrt[Δ]) D[ψ[x, y], y] == 0,
   ψ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → G]]
```

```
{{ψ[x, y] → G[1] + (2 x + y - Cos[x]) G[2]}}
```

```
η[x_, y_] = rψ[[1]][[1]][[2]] /. G[1] → c /. G[2] → d
```

```
c + d (2 x + y - Cos[x])
```

Проверяем невырожденность преобразования:

```
Factor[Det[{{D[ξ[x, y], x], D[ξ[x, y], y]}, {D[η[x, y], x], D[η[x, y], y]}}]] ≠ 0
```

```
-4 b d ≠ 0
```

Преобразование переменных невырожденно, если $bd \neq 0$.

```
Clear[LinearPDE, u, v, res, Equ];

LinearPDE = A11 D[u[x, y], x, x] + 2 A12 D[u[x, y], x, y] +
  A22 D[u[x, y], y, y] + A1 D[u[x, y], x] + A2 D[u[x, y], y] + A0 u[x, y]
```

$-\mathrm{Cos}[x]\, u^{(0,1)}[x, y] + \left(-3 - \mathrm{Cos}[x]^2\right) u^{(0,2)}[x, y] - 2\,\mathrm{Sin}[x]\, u^{(1,1)}[x, y] + u^{(2,0)}[x, y]$

```
u[x_, y_] = v[ξ[x, y], η[x, y]];

res = FullSimplify[Coefficient[LinearPDE,
   {Derivative[2, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 2][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]], v[ξ[x, y], η[x, y]]}]]
```

{0, -16 b d, 0, 0, 0, 0}

Записываем левую часть преобразованного уравнения:

$\mathrm{Equ} = \mathrm{Plus} @@ \left(\mathrm{res}\ \{\hat{u}_{\xi\xi}, \hat{u}_{\xi\eta}, \hat{u}_{\eta\eta}, \hat{u}_{\xi}, \hat{u}_{\eta}, \hat{u}\}\right)$

$-16\, b\, d\, \hat{u}_{\xi\eta}$

Разделим обе части на $-16\ b\ d$:

```
Expand[Equ / (-16 b d)]
```

$\hat{u}_{\xi\eta}$

Получаем канонический вид:

$\hat{u}_{\xi\eta} = 0;$

Общее решение канонического вида:

```
Clear[v];
```

$\mathrm{DSolve}\left[\partial_{\xi,\eta} v[\xi, \eta] == 0, v[\xi, \eta], \{\xi, \eta\}\right]$ // Flatten

$\{v[\xi, \eta] \to C[1][\xi] + C[2][\eta]\}$

Общее решение исходного уравнения -- сумма двух произвольных функций:

```
ClearAll[u, f, g, x, y];

u[x_, y_] = f[ξ[x, y]] + g[η[x, y]] // FullSimplify
```

f[a + b (-2 x + y - Cos[x])] + g[c + d (2 x + y - Cos[x])]

Определение функций *f*, *g*:

```
Clear[Equ];

a = 0; c = 0; b = 1; d = 1;
```

$\mathrm{Equ} = \mathrm{FullSimplify}\left[\left\{u[x, \mathrm{Cos}[x]] == \mathrm{Sin}[x],\ \left(\partial_y u[x, y] \ /.\ y \to \mathrm{Cos}[x]\right) == \frac{e^x}{2}\right\}\right]$

$\{f[-2x] + g[2x] == \mathrm{Sin}[x],\ e^x == 2\,(f'[-2x] + g'[2x])\}$

Интегрируем второе уравнение, чтобы выразить функцию *f*:

```
Clear[solf, equf];
```

$\mathrm{equf} = \int \mathrm{Equ}[[2]][[2]]\, dx == \int e^x\, dx$

$-f[-2x] + g[2x] == e^x$

$\mathrm{solf} = \mathrm{Solve}[\mathrm{equf}, f[-2x]]\ /.\ x \to -\frac{z}{2}$ // Flatten

$\{f[z] \to -e^{-z/2} + g[-z]\}$

Подставляем найденную функцию *f*(*x*) в первое уравнение и находим функцию g(*x*):

```
Clear[Equ1, solg];

Equ1 = Equ[[1]] /. {solf /. z → -2 x}
```

$\{-e^{x}+2\,g[2\,x]==\mathrm{Sin}[x]\}$

```
solg = Solve[Equ1[[1]], g[2 x]] /. x → z/2 // Flatten
```

$\left\{g[z]\to\frac{1}{2}\left(e^{z/2}+\mathrm{Sin}\left[\frac{z}{2}\right]\right)\right\}$

Записываем явное определение функций $g(z)$ и $f(z)$:

```
Clear[f, g];

f[z_] = FullSimplify[f[z] /. solf]
```

$-e^{-z/2}+g[-z]$

```
g[z_] = FullSimplify[g[z] /. solg]
```

$\frac{1}{2}\left(e^{z/2}+\mathrm{Sin}\left[\frac{z}{2}\right]\right)$

Получаем решение задачи Коши:

```
Clear[Uout];

Uout[x_, y_] = FullSimplify[u[x, y]]
```

$\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{2}\,(y-\mathrm{Cos}[x])\right]\mathrm{Sin}[x]+e^{x}\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{2}\,(y-\mathrm{Cos}[x])\right]$

Проверка:

```
A11 ∂x,x Uout[x, y] + 2 A12 ∂x,y Uout[x, y] +
  A22 ∂y,y Uout[x, y] + A1 ∂x Uout[x, y] + A2 ∂y Uout[x, y] // FullSimplify
```

0

```
Uout[x, Cos[x]]
```

Sin[x]

```
∂y Uout[x, y] /. y → Cos[x] // Expand
```

$\frac{e^{x}}{2}$

$u[x,y]=\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{2}\,(y-\mathrm{Cos}[x])\right]\mathrm{Sin}[x]+e^{x}\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{1}{2}\,(y-\mathrm{Cos}[x])\right].$

0.0.7 Задача №7.

$$\partial_{x,x}u[x,y]-2\,\mathrm{Sin}[x]\,\partial_{x,y}u[x,y]-\left(3+\mathrm{Cos}^2[x]\right)\partial_{y,y}u[x,y]+\partial_x\,u[x,y]+(2-\mathrm{Sin}[x]-\mathrm{Cos}[x])\,\partial_y\,u[x,y]=0, \quad (0.15)$$

$$u[x,y]\,|_{y=\mathrm{Cos}[x]}=\;0,\left(\partial_y\,u[x,y]\right)|_{y=\mathrm{Cos}[x]}=\;e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{Cos}[x]. \quad (0.16)$$

Решение задачи №7:

Определим тип уравнения по знаку дискриминанта:

```
Clear[A11, A12, A22, Δ];

Print["Δ = ",
 Δ = A12 A12 - A11 A22 /. {A11 → 1, A22 → -(3 + Cos[x]^2), A12 → -Sin[x]} // Simplify]
```

Δ = 4

$\Delta > 0$ для любых x, y $\in R$, следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве R^2.

Приведение к каноническому виду:

```
Off[General::"spell"];
```

```
Off[General::"spell1"];
```

```
Clear[A11, A12, A22, A1, A2, A0, rφ, rψ, φ, ψ, a, b, c, d, ξ, η];
A11 = 1; A12 = -Sin[x]; A22 = -(3 + Cos[x]^2); A1 = 1; A2 = 2 - Sin[x] - Cos[x]; A0 = 0;
```

Вычисление общих интегралов:

```
rφ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[φ[x, y], x] + (A12 + Sqrt[Δ]) D[φ[x, y], y] == 0,
   φ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → F]]
```

```
{{φ[x, y] → F[1] + (-2 x + y - Cos[x]) F[2]}}
```

Находим первую функцию замены переменных:

```
ξ[x_, y_] = rφ[[1]][[1]][[2]] /. F[1] → a /. F[2] → b
```

```
a + b (-2 x + y - Cos[x])
```

Аналогично находится вторая функция замены переменных с поизвольными постоянными c, d:

```
rψ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[ψ[x, y], x] + (A12 - Sqrt[Δ]) D[ψ[x, y], y] == 0,
   ψ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → G]]
```

```
{{ψ[x, y] → G[1] + (2 x + y - Cos[x]) G[2]}}
```

```
η[x_, y_] = rψ[[1]][[1]][[2]] /. G[1] → c /. G[2] → d
```

```
c + d (2 x + y - Cos[x])
```

Проверяем невырожденность преобразования:

```
Factor[Det[{{D[ξ[x, y], x], D[ξ[x, y], y]}, {D[η[x, y], x], D[η[x, y], y]}}]] ≠ 0
```

```
-4 b d ≠ 0
```

Преобразование переменных невырожденно, если $bd \neq 0$.

```
Clear[LinearPDE, u, v, res, Equ];
```

```
LinearPDE = A11 D[u[x, y], x, x] + 2 A12 D[u[x, y], x, y] +
  A22 D[u[x, y], y, y] + A1 D[u[x, y], x] + A2 D[u[x, y], y] + A0 u[x, y]
```

$(2 - \mathrm{Cos}[x] - \mathrm{Sin}[x])\, u^{(0,1)}[x, y] + \left(-3 - \mathrm{Cos}[x]^2\right) u^{(0,2)}[x, y] + u^{(1,0)}[x, y] - 2\,\mathrm{Sin}[x]\, u^{(1,1)}[x, y] + u^{(2,0)}[x, y]$

```
u[x_, y_] = v[ξ[x, y], η[x, y]];
```

```
res = FullSimplify[Coefficient[LinearPDE,
   {Derivative[2, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 2][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]], v[ξ[x, y], η[x, y]]}]]
```

```
{0, -16 b d, 0, 0, 4 d, 0}
```

Записываем левую часть преобразованного уравнения:

$\mathbf{Equ = Plus @@ \left(res \left\{\hat{u}_{\xi\xi}, \hat{u}_{\xi\eta}, \hat{u}_{\eta\eta}, \hat{u}_{\xi}, \hat{u}_{\eta}, \hat{u}\right\}\right)}$

$4\, d\, \hat{u}_{\eta} - 16\, b\, d\, \hat{u}_{\xi\eta}$

Разделим обе части на $-16\, b\, d$:

```
Expand[Equ / (-16 b d)]
```

$-\frac{\hat{u}_{\eta}}{4\, b} + \hat{u}_{\xi\eta}$

Получаем канонический вид:

$\hat{u}_{\xi\eta} - \dfrac{\hat{u}_\eta}{4\,b} = 0;$

Общее решение канонического вида:

```
Clear[v];
```

$$\text{DSolve}\left[\partial_{\xi,\eta}v[\xi,\eta] - \frac{\partial_\eta v[\xi,\eta]}{4\,b} == 0,\ v[\xi,\eta],\ \{\xi,\eta\}\right] \text{ // Flatten}$$

$$\left\{v[\xi,\eta] \to \int_1^\eta e^{\frac{\xi}{4\,b}}\, C[1][K[1]]\, dK[1] + C[2][\xi]\right\}$$

Общее решение исходного уравнения:

```
ClearAll[u, f, g, x, y];
```

$$u[x\_,y\_] = f[\xi[x,y]] + e^{\frac{\xi[x,y]}{4\,b}}\, g[\eta[x,y]] \text{ // FullSimplify}$$

$$f[a + b\,(-2\,x + y - \text{Cos}[x])] + e^{\frac{a+b\,(-2\,x+y-\text{Cos}[x])}{4\,b}}\, g[c + d\,(2\,x + y - \text{Cos}[x])]$$

Определение функций *f*, *g*:

```
Clear[Equ];
```

```
a = 0; c = 0; b = 1; d = 1;
```

$$\text{Equ} = \text{FullSimplify}\left[\left\{u[x, \text{Cos}[x]] == 0,\ \left(\partial_y u[x,y] \text{ /. } y \to \text{Cos}[x]\right) == e^{-\frac{x}{2}}\, \text{Cos}[x]\right\}\right]$$

$$\left\{f[-2\,x] + e^{-x/2}\, g[2\,x] == 0,\ 4\,f'[-2\,x] + e^{-x/2}\,(-4\,\text{Cos}[x] + g[2\,x] + 4\,g'[2\,x]) == 0\right\}$$

Решаем первое уравнение, чтобы выразить функцию *f*:

```
Clear[solf, solf1, equf];
```

```
equf = Solve[Equ[[1]], f[-2 x]] // Flatten
```

$$\left\{f[-2\,x] \to -e^{-x/2}\, g[2\,x]\right\}$$

$$\text{solf1} = \text{equf /. } x \to -\frac{z}{2} \text{ // Flatten}$$

$$\left\{f[z] \to -e^{z/4}\, g[-z]\right\}$$

Подставляем производную функции *f*(*x*) во второе уравнение и находим функцию g(*x*):

```
Clear[Equ1, prf];
```

```
prf = D[equf, x] // Expand
```

$$\left\{-2\,f'[-2\,x] \to \frac{1}{2}\, e^{-x/2}\, g[2\,x] - 2\,e^{-x/2}\, g'[2\,x]\right\}$$

$$\text{Equ1} = \text{Equ}[[2]] \text{ /. } \left\{f'[-2\,x] \to -\frac{1}{4}\, e^{-x/2}\, g[2\,x] + e^{-x/2}\, g'[2\,x]\right\} \text{ // FullSimplify}$$

$$e^{-x/2}\,(\text{Cos}[x] - 2\,g'[2\,x]) == 0$$

Находим функцию *g*:

```
Clear[solg, equg];
```

$$\text{equg} = \text{DSolve}\left[\left\{\text{Equ1 /. } x \to \frac{z}{2}\right\},\ g[z],\ z\right] \text{ // Flatten}$$

$$\left\{g[z] \to C[1] + \text{Sin}\left[\frac{z}{2}\right]\right\}$$

```
solg = equg[[1]] /. C[1] → 0
```

$g[z] \to \mathrm{Sin}\left[\frac{z}{2}\right]$

```
solf = solf1 /. {solg /. z → -z }
```

$\left\{f[z] \to e^{z/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{z}{2}\right]\right\}$

Записываем явное определение функций $g(z)$ и $f(z)$:

```
Clear[f, g];
```

```
f[z_] = FullSimplify[f[z] /. solf]
```

$e^{z/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{z}{2}\right]$

```
g[z_] = FullSimplify[g[z] /. solg]
```

$\mathrm{Sin}\left[\frac{z}{2}\right]$

Получаем решение задачи Коши:

```
Clear[Uout];
```

```
Uout[x_, y_] = FullSimplify[u[x, y]]
```

$2\,e^{\frac{1}{4}(-2x+y-\mathrm{Cos}[x])}\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2}(y-\mathrm{Cos}[x])\right]$

Проверка:

```
A11 ∂x,x Uout[x, y] + 2 A12 ∂x,y Uout[x, y] +
  A22 ∂y,y Uout[x, y] + A1 ∂x Uout[x, y] + A2 ∂y Uout[x, y] // FullSimplify
```

0

```
Uout[x, Cos[x]]
```

0

```
∂y Uout[x, y] /. y → Cos[x] // Expand
```

$e^{-x/2}\,\mathrm{Cos}[x]$

$u[x, y] = 2\,e^{\frac{1}{4}(-2x+y-\mathrm{Cos}[x])}\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2}(y-\mathrm{Cos}[x])\right].$

0.0.8 Задача №8.

$$\partial_{x,x} u[x, y] + 2\,\mathrm{Sin}[x]\,\partial_{x,y} u[x, y] - \mathrm{Cos}^2[x]\,\partial_{y,y} u[x, y] + \partial_x u[x, y] + (1 + \mathrm{Sin}[x] + \mathrm{Cos}[x])\,\partial_y u[x, y] = 0, \tag{0.17}$$

$$u[x, y]\,|_{y=-\mathrm{Cos}[x]} = 1 + 2\,\mathrm{Sin}[x],\ \left(\partial_y u[x, y]\right)|_{y=-\mathrm{Cos}[x]} = \mathrm{Sin}[x]. \tag{0.18}$$

Решение задачи №8:

Определим тип уравнения по знаку дискриминанта:

```
Clear[A11, A12, A22, Δ];
```

```
Print["Δ = ", Δ = A12 A12 - A11 A22 /. {A11 → 1, A22 → -Cos[x]^2, A12 → Sin[x]} // Simplify]
```

Δ = 1

$\Delta > 0$ для любых x, y ϵ R, следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве R^2.

Приведение к каноническому виду:

```
Off[General::"spell"];

Off[General::"spell1"];

Clear[A11, A12, A22, A1, A2, A0, rφ, rψ, φ, ψ, a, b, c, d, ξ, η];
A11 = 1; A12 = Sin[x]; A22 = -Cos[x]^2; A1 = 1; A2 = 1 + Sin[x] + Cos[x]; A0 = 0;
```

Вычисление общих интегралов:

```
rφ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[φ[x, y], x] + (A12 + Sqrt[Δ]) D[φ[x, y], y] == 0,
   φ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → F]]

{{φ[x, y] → F[1] + (-x + y) F[2] + Cos[x] F[2]}}
```

Находим первую функцию замены переменных:

```
ξ[x_, y_] = rφ[[1]][[1]][[2]] /. F[1] → a /. F[2] → b

a + b (-x + y) + b Cos[x]
```

Аналогично находится вторая функция замены переменных с поизвольными постоянными c, d:

```
rψ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[ψ[x, y], x] + (A12 - Sqrt[Δ]) D[ψ[x, y], y] == 0,
   ψ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → G]]

{{ψ[x, y] → G[1] + (x + y + Cos[x]) G[2]}}

η[x_, y_] = rψ[[1]][[1]][[2]] /. G[1] → c /. G[2] → d

c + d (x + y + Cos[x])
```

Проверяем невырожденность преобразования:

```
Factor[Det[{{D[ξ[x, y], x], D[ξ[x, y], y]}, {D[η[x, y], x], D[η[x, y], y]}}]] ≠ 0

-2 b d ≠ 0
```

Преобразование переменных невырожденно, если $bd \neq 0$.

```
Clear[LinearPDE, u, v, res, Equ];

LinearPDE = A11 D[u[x, y], x, x] + 2 A12 D[u[x, y], x, y] +
  A22 D[u[x, y], y, y] + A1 D[u[x, y], x] + A2 D[u[x, y], y] + A0 u[x, y]
```

$(1 + \mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x])\, u^{(0,1)}[x, y] - \mathrm{Cos}[x]^2 u^{(0,2)}[x, y] + u^{(1,0)}[x, y] + 2\,\mathrm{Sin}[x]\, u^{(1,1)}[x, y] + u^{(2,0)}[x, y]$

```
u[x_, y_] = v[ξ[x, y], η[x, y]];

res = FullSimplify[Coefficient[LinearPDE,
   {Derivative[2, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 2][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]], v[ξ[x, y], η[x, y]]}]]

{0, -4 b d, 0, 0, 2 d, 0}
```

Записываем левую часть преобразованного уравнения:

$\mathbf{Equ = Plus @@ (res\ \{\hat{u}_{\xi\xi}, \hat{u}_{\xi\eta}, \hat{u}_{\eta\eta}, \hat{u}_{\xi}, \hat{u}_{\eta}, \hat{u}\})}$

$2\, d\, \hat{u}_{\eta} - 4\, b\, d\, \hat{u}_{\xi\eta}$

Разделим обе части на -4 b d:

```
Expand[Equ / (-4 b d)]
```

$-\frac{\hat{u}_{\eta}}{2\, b} + \hat{u}_{\xi\eta}$

Получаем канонический вид:

$$\hat{u}_{\xi\eta} - \frac{\hat{u}_{\eta}}{2 b} = 0;$$

Общее решение канонического вида:

```
Clear[v];
```

$$\text{DSolve}\left[\partial_{\xi,\eta}v[\xi,\eta]-\frac{\partial_\eta v[\xi,\eta]}{2\,b}=0,\ v[\xi,\eta],\ \{\xi,\eta\}\right]\ //\ \text{Flatten}$$

$$\left\{v[\xi,\eta]\to\int_1^\eta e^{\frac{\xi}{2b}}\,C[1][K[1]]\,dK[1]+C[2][\xi]\right\}$$

Общее решение исходного уравнения:

```
ClearAll[u, f, g, x, y];
```

$$u[x\_,y\_]=f[\xi[x,y]]+e^{\frac{\xi[x,y]}{2b}}\,g[\eta[x,y]]\ //\ \text{FullSimplify}$$

$$f[a-b\,x+b\,y+b\,\text{Cos}[x]]+e^{\frac{a-b\,x+b\,y+b\,\text{Cos}[x]}{2b}}\,g[c+d\,(x+y+\text{Cos}[x])]$$

Определение функций *f*, *g*:

```
Clear[Equ];
```

```
a = 0; c = 0; b = 1; d = 1;
```

$$\text{Equ}=\text{FullSimplify}\left[\left\{u[x,-\text{Cos}[x]]=1+2\,\text{Sin}[x],\ \left(\partial_y u[x,y]\ /.\ y\to-\text{Cos}[x]\right)=\text{Sin}[x]\right\}\right]$$

$$\left\{f[-x]+e^{-x/2}\,g[x]=1+2\,\text{Sin}[x],\ f'[-x]+\frac{1}{2}\,e^{-x/2}\,(g[x]+2\,g'[x])=\text{Sin}[x]\right\}$$

Решаем первое уравнение, чтобы выразить функцию *f*:

```
Clear[solf, solf1, equf];
```

```
equf = Solve[Equ[[1]], f[-x]] // Flatten
```

$$\left\{f[-x]\to1-e^{-x/2}\,g[x]+2\,\text{Sin}[x]\right\}$$

```
solf1 = equf /. x → -z // Flatten
```

$$\left\{f[z]\to1-e^{z/2}\,g[-z]-2\,\text{Sin}[z]\right\}$$

Подставляем производную функции *f*(*x*) во второе уравнение и находим функцию g(*x*):

```
Clear[Equ1, prf];
```

```
prf = D[equf, x] // Expand
```

$$\left\{-f'[-x]\to2\,\text{Cos}[x]+\frac{1}{2}\,e^{-x/2}\,g[x]-e^{-x/2}\,g'[x]\right\}$$

$$\text{Equ1}=\text{Equ}[[2]]\ /.\ \left\{f'[-x]\to-2\,\text{Cos}[x]-\frac{1}{2}\,e^{-x/2}\,g[x]+e^{-x/2}\,g'[x]\right\}\ //\ \text{FullSimplify}$$

$$2\,\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x]=2\,e^{-x/2}\,g'[x]$$

Находим функцию *g*:

```
Clear[solg, equg];
```

```
equg = DSolve[Equ1, g[x], x] // Flatten
```

$$\left\{g[x]\to C[1]+e^{x/2}\,\text{Sin}[x]\right\}$$

```
solg = equg[[1]] /. {C[1] → 0, x → z}
```

$$g[z]\to e^{z/2}\,\text{Sin}[z]$$

```
solf = solf1 /. {solg /. z → -z}
```

$$\{f[z]\to1-\text{Sin}[z]\}$$

Записываем явное определение функций *g*(*z*) и *f*(*z*):

```
Clear[f, g];
f[z_] = FullSimplify[f[z] /. solf]
```

1 – Sin[z]

```
g[z_] = FullSimplify[g[z] /. solg]
```

$e^{z/2}$ Sin[z]

Получаем решение задачи Коши:

```
Clear[Uout];
Uout[x_, y_] = FullSimplify[u[x, y]]
```

1 + Sin[x – y – Cos[x]] + $e^{y+Cos[x]}$ Sin[x + y + Cos[x]]

Проверка:

```
A11 ∂x,x Uout[x, y] + 2 A12 ∂x,y Uout[x, y] +
  A22 ∂y,y Uout[x, y] + A1 ∂x Uout[x, y] + A2 ∂y Uout[x, y] // FullSimplify
```

0

```
Uout[x, -Cos[x]]
```

1 + 2 Sin[x]

```
∂y Uout[x, y] /. y → -Cos[x] // Expand
```

Sin[x]

$u[x, y] = 1 + \mathrm{Sin}[x - y - \mathrm{Cos}[x]] + e^{y+\mathrm{Cos}[x]}\,\mathrm{Sin}[x + y + \mathrm{Cos}[x]]$.

0.0.9 Задача №9.

$$\partial_{x,x} u[x, y] + 2\,\mathrm{Cos}[x]\,\partial_{x,y} u[x, y] - \mathrm{Sin}^2[x]\,\partial_{y,y} u[x, y] + \partial_x u[x, y] + (1 - \mathrm{Sin}[x] + \mathrm{Cos}[x])\,\partial_y u[x, y] = 0, \tag{0.19}$$

$$u[x, y]\,|_{y=\mathrm{Sin}[x]} = \mathrm{Cos}[x], \left(\partial_y u[x, y]\right)|_{y=\mathrm{Sin}[x]} = \mathrm{Sin}[x]. \tag{0.20}$$

Решение задачи №9:

Определим тип уравнения по знаку дискриминанта:

```
Clear[A11, A12, A22, Δ];
Print["Δ = ", Δ = A12 A12 - A11 A22 /. {A11 → 1, A22 → -Sin[x]^2, A12 → Cos[x]} // Simplify]
```

Δ = 1

Δ > 0 для любых x, y ϵ R, следовательно, данное уравнение является уравнением гиперболического типа во всем пространстве R^2.

Приведение к каноническому виду:

```
Off[General::"spell"];
Off[General::"spell1"];
Clear[A11, A12, A22, A1, A2, A0, rφ, rψ, φ, ψ, a, b, c, d, ξ, η];
A11 = 1; A12 = Cos[x]; A22 = -Sin[x]^2; A1 = 1; A2 = 1 - Sin[x] + Cos[x]; A0 = 0;
```

Вычисление общих интегралов:

```
rφ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[φ[x, y], x] + (A12 + Sqrt[Δ]) D[φ[x, y], y] == 0,
   φ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → F]]
```

{{φ[x, y] → F[1] + (–x + y) F[2] – F[2] Sin[x]}}

Находим первую функцию замены переменных:

```
ξ[x_, y_] = rφ[[1]][[1]][[2]] /. F[1] → a /. F[2] → b
```

a + b (-x + y) - b Sin[x]

Аналогично находится вторая функция замены переменных с поизвольными постоянными c, d:

```
rψ = FullSimplify[CompleteIntegral[A11 D[ψ[x, y], x] + (A12 - Sqrt[Δ]) D[ψ[x, y], y] == 0,
   ψ[x, y], {x, y}, IntegralConstants → G]]
```

{{ψ[x, y] → G[1] + (x + y) G[2] - G[2] Sin[x]}}

```
η[x_, y_] = rψ[[1]][[1]][[2]] /. G[1] → c /. G[2] → d
```

c + d (x + y) - d Sin[x]

Проверяем невырожденность преобразования:

```
Factor[Det[{{D[ξ[x, y], x], D[ξ[x, y], y]}, {D[η[x, y], x], D[η[x, y], y]}}]] ≠ 0
```

-2 b d ≠ 0

Преобразование переменных невырожденно, если $bd \neq 0$.

```
Clear[LinearPDE, u, v, res, Equ];
```

```
LinearPDE = A11 D[u[x, y], x, x] + 2 A12 D[u[x, y], x, y] +
  A22 D[u[x, y], y, y] + A1 D[u[x, y], x] + A2 D[u[x, y], y] + A0 u[x, y]
```

$(1 + \mathrm{Cos}[x] - \mathrm{Sin}[x])\, u^{(0,1)}[x, y] - \mathrm{Sin}[x]^2\, u^{(0,2)}[x, y] + u^{(1,0)}[x, y] + 2\,\mathrm{Cos}[x]\, u^{(1,1)}[x, y] + u^{(2,0)}[x, y]$

```
u[x_, y_] = v[ξ[x, y], η[x, y]];
```

```
res = FullSimplify[Coefficient[LinearPDE,
   {Derivative[2, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 2][v][ξ[x, y], η[x, y]], Derivative[1, 0][v][ξ[x, y], η[x, y]],
    Derivative[0, 1][v][ξ[x, y], η[x, y]], v[ξ[x, y], η[x, y]]}]]
```

{0, -4 b d, 0, 0, 2 d, 0}

Записываем левую часть преобразованного уравнения:

```
Equ = Plus @@ (res {û_ξξ, û_ξη, û_ηη, û_ξ, û_η, û})
```

$2\, d\, \hat{u}_{\eta} - 4\, b\, d\, \hat{u}_{\xi\eta}$

Разделим обе части на -4 b d:

```
Expand[Equ / (-4 b d)]
```

$-\frac{\hat{u}_{\eta}}{2\,b} + \hat{u}_{\xi\eta}$

Получаем канонический вид:

$\hat{u}_{\xi\eta} - \frac{\hat{u}_{\eta}}{2\,b} = 0;$

Общее решение канонического вида:

```
Clear[v];
```

$\mathrm{DSolve}\left[\partial_{\xi,\eta} v[\xi, \eta] - \frac{\partial_{\eta} v[\xi, \eta]}{2\,b} == 0,\ v[\xi, \eta],\ \{\xi, \eta\}\right]$ // Flatten

$\left\{v[\xi, \eta] \rightarrow \int_1^{\eta} e^{\frac{\xi}{2 b}}\, C[1][K[1]]\, dK[1] + C[2][\xi]\right\}$

Общее решение исходного уравнения:

```
Clear[u, f, g, x, y];
```

```
u[x_, y_] = f[ξ[x, y]] + e^(ξ[x,y]/(2 b)) g[η[x, y]] // FullSimplify
```

$$f[a - b\,x + b\,y - b\,\mathrm{Sin}[x]] + e^{\frac{a - b\,x + b\,y - b\,\mathrm{Sin}[x]}{2\,b}}\, g[c + d\,(x + y) - d\,\mathrm{Sin}[x]]$$

Определение функций *f*, *g*:

```
Clear[Equ];

a = 0; c = 0; b = 1; d = 1;

Equ = FullSimplify[{u[x, Sin[x]] == Cos[x], (∂y u[x, y] /. y → Sin[x]) == Sin[x]}]
```

$$\left\{\mathrm{Cos}[x] == f[-x] + e^{-x/2}\, g[x],\ f'[-x] + \frac{1}{2}\, e^{-x/2}\,(g[x] + 2\, g'[x]) == \mathrm{Sin}[x]\right\}$$

Решаем первое уравнение, чтобы выразить функцию *f*:

```
Clear[solf, solf1, equf];

equf = Solve[Equ[[1]], f[-x]] // Flatten
```

$$\{f[-x] \to e^{-x/2}\,(e^{x/2}\,\mathrm{Cos}[x] - g[x])\}$$

```
solf1 = equf /. x → -z // Flatten
```

$$\{f[z] \to e^{z/2}\,(e^{-z/2}\,\mathrm{Cos}[z] - g[-z])\}$$

Подставляем производную функции *f*(*x*) во второе уравнение и находим функцию g(*x*):

```
Clear[Equ1, prf];

prf = D[equf, x] // Expand
```

$$\left\{-f'[-x] \to \frac{1}{2}\, e^{-x/2}\, g[x] - \mathrm{Sin}[x] - e^{-x/2}\, g'[x]\right\}$$

```
Equ1 = Equ[[2]] /. {f'[- x] →
    1/2 e^(-x/2) (e^(x/2) Cos[x] - g[x]) - e^(-x/2) (1/2 e^(x/2) Cos[x] - e^(x/2) Sin[x] - g'[x])} // FullSimplify
```

$$e^{-x/2}\, g'[x] == 0$$

Находим функцию *g*:

```
Clear[solg, equg];

equg = DSolve[Equ1, g[x], x] // Flatten
```

{g[x] → C[1]}

```
solg = equg[[1]] /. {C[1] → 0, x → z}
```

g[z] → 0

```
solf = solf1 /. {solg /. z → -z}
```

{f[z] → Cos[z]}

Записываем явное определение функций *g*(*z*) и *f*(*z*):

```
Clear[f, g];

f[z_] = FullSimplify[f[z] /. solf]
```

Cos[z]

```
g[z_] = FullSimplify[g[z] /. solg]
```

0

Получаем решение задачи Коши:

```
Clear[Uout];
```

```
Uout[x_, y_] = FullSimplify[u[x, y]]
```

```
Cos[x - y + Sin[x]]
```

Проверка:

```
A11 ∂x,x Uout[x, y] + 2 A12 ∂x,y Uout[x, y] +
  A22 ∂y,y Uout[x, y] + A1 ∂x Uout[x, y] + A2 ∂y Uout[x, y] // FullSimplify
```

```
0
```

```
Uout[x, Sin[x]]
```

```
Cos[x]
```

```
∂y Uout[x, y] /. y → Sin[x] // Expand
```

```
Sin[x]
```

$u[x, y] = \mathrm{Cos}[x - y + \mathrm{Sin}[x]]$.