Задача.

Для связного взвешенного графа /орграфа/ G с множеством вершин $\{v_1, v_2, \mathbf{K}, v_n\}$ и неотрицательными весами w_{ij} ребер $\{i, j\}$ /дуг (i, j)/, заданного матрицей смежности, реализуйте алгоритм Флойда–Уоршелла. В качестве выходных данных выведите матрицу кратчайших расстояний между всеми парами вершин, а также кратчайшие маршруты от некоторой вершины v^* до всех остальных вершин графа.

В алгоритме участвуют две матрицы:

1) Матрица расстояний $D^k = [d_{ij}^k] \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Каждый ее элемент d_{ij}^k равен длине кратчайшего k-пути из вершины v_i в вершину v_j. Здесь k-путем называется такой простой путь с начальной вершиной v_i и конечной вершиной v_j, все промежуточные вершины которого (если они есть) принадлежат множеству $\{v_1, v_2, \mathbf{K}, v_k\}$.

2) Матрица путей $P^k = [p_{ij}^k] \in \mathbf{N}^{n \times n}$. Всякий ее элемент p_{ij}^k равен номеру вершины, предшествующей конечной вершине v_j в кратчайшем k-пути из v_i в v_j.

Элементы матриц D^k и P^k, стоящие на главной диагонали, не участвуют в вычислениях, поэтому их можно считать равными любому числу. Здесь они полагаются равными 0.

Алгоритм Флойда–Уоршелла – Floyd–Warshall algorithm

Floyd(G)

{ *// подготовительный этап*

for (каждого $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$)

for (каждого $j \in \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$)

{

$$d_{ij}^0 = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ w_{ij}, & \text{если есть дуга } (i, j), \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$ *// Тем самым, D^0 – это взвешенная матрица смежности графа G*

$$p_{ij}^0 = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ i & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

}

// основной этап

for (каждого $k \in \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$)

for (каждого $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$)

for (каждого $j \in \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$)

{

$$d_{ij}^k = \min\{d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\};$$

$$p_{ij}^k = \begin{cases} p_{ij}^{k-1}, & \text{если } d_{ij}^{k-1} \le d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}, \\ p_{kj}^{k-1}, & \text{если } d_{ij}^{k-1} > d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}. \end{cases}$$

}

}