

# Analyse des correspondances binaires

Mathématique

---

Véronique Tremblay

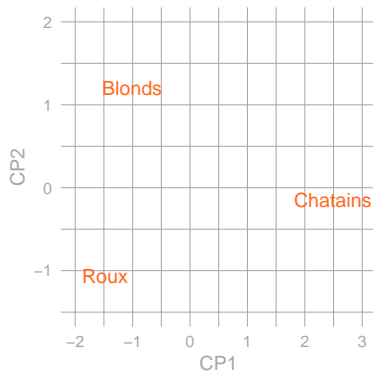
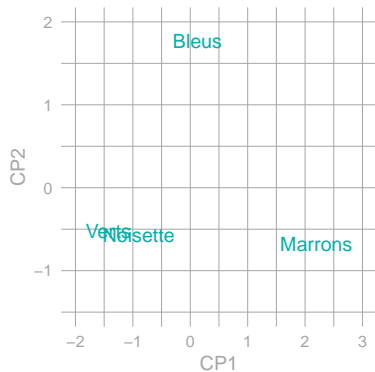
- Expliquer la mathématique de l'ACB

## Rappel de l'exemple

Tableau de fréquence de la couleur des yeux et des cheveux

	Chatains	Roux	Blonds
Marrons	119	26	7
Noisette	54	14	10
Verts	29	14	16
Bleus	84	17	94

# Si on faisait une ACP sur les profils lignes et colonnes



## Mesure de distance

On peut mesurer la distance entre deux profils lignes par

$$d^2(i, i') = \sum_{j=1}^p (L_{ij} - L_{i'j})^2$$

Profils lignes (L)

	Chatains	Roux	Blonds
Marrons	0.78	0.17	0.05
Noisette	0.69	0.18	0.13
Verts	0.49	0.24	0.27
Bleus	0.43	0.09	0.48

## Distance du $\chi^2$

$$d_{\chi^2}^2(i, i') = \sum_{j=1}^p \frac{1}{f_{\bullet j}} (L_{ij} - L_{i'j})^2$$

Profils lignes (L) et profil ligne moyen

	Chatains	Roux	Blonds
Marrons	0.78	0.17	0.05
Noisette	0.69	0.18	0.13
Vert	0.49	0.24	0.27
Bleus	0.43	0.09	0.48
$f_{\bullet j}$	0.59	0.15	0.26

## Lien avec l'ACP

	ACP	AFC (analyse directe)
Données	$X$	$L$
Distances	$I$	$D_p^{-1}$
Projections	$X\alpha$	$LD_p^{-1}u$
À maximiser	$\alpha^\top X^\top X\alpha$	$(u^\top D_p^{-1} L^\top) D_n (LD_p^{-1}u)$
Contrainte	$\alpha^\top \alpha = 1$	$u^\top D_p^{-1}u = 1$

## Lien avec l'ACP

	ACP	AFC (analyse duale)
Données	$X$	$C$
Distances	$I$	$D_n^{-1}$
Projections	$X\alpha$	$CD_n^{-1}v$
À maximiser	$\alpha^\top X^\top X\alpha$	$(v^\top D_n^{-1} C^\top) D_p(CD_n^{-1}v)$
Contrainte	$\alpha^\top \alpha = 1$	$v^\top D_n^{-1} v = 1$



## Solution (analyse directe)

---

On cherche le vecteur  $u \in \mathbb{R}^p$  qui maximise

$$(u^\top D_p^{-1} L^\top) D_n (L D_p^{-1} u)$$

Avec la contrainte que  $u^\top D_p^{-1} u = 1$ .

La solution est donnée par le vecteur propre principal de

$$D_p (D_p^{-1} F^\top D_n^{-1} F D_p^{-1}) = F^\top D_n^{-1} F D_p^{-1} \equiv S.$$

## Solution (analyse duale)

---

On cherche le vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  qui maximise

$$(v^\top D_n^{-1} C^\top) D_p (C D_n^{-1} v)$$

Avec la contrainte que  $v^\top D_n^{-1} v = 1$ .

La solution est donnée par le vecteur propre principal de

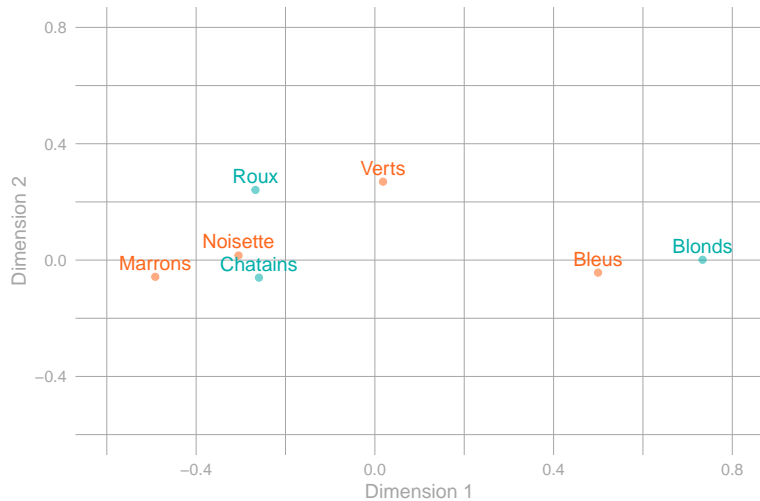
$$D_n (D_n^{-1} F D_p^{-1} F^\top D_n^{-1}) = F D_p^{-1} F^\top D_n^{-1} \equiv T.$$

## Et alors?

---

- $S$  et  $T$  ont les mêmes  $p$  premières valeurs propres.
- Les coordonnées des points d'un espace sont proportionnelles aux composantes du facteur de l'autre espace correspondant à la même valeur propre.
- En «centralisant» les profils lignes et colonnes, on peut illustrer le résultat des deux graphiques sur les mêmes axes.

# Analyse des correspondances binaires



- Similitude avec l'ACP
- Mêmes outils d'aide à l'interprétation (contribution et qualité)
- Différence dans l'interprétation des valeurs propres/singulières.