Décomposition biais-variance

Véronique Tremblay

26/03/2021

Compromis biais-variance

Posons $Y = f(x) + \epsilon$, avec $\mathbf{E}(\epsilon) = 0$ et $\mathbf{Var}(\epsilon) = \sigma_\epsilon^2$. L'estimateur de $f(x)$ est $\hat{f}(x)$. Rappelons que $f(x)$ est *déterministe* alors que $\hat{f}(x)$ et Y sont des variables aléatoires.

$$\mathbf{E}\left[(Y-\hat{f}(x))^2\right]=\mathbf{E}\left[Y^2+\hat{f}(x)^2-2Y\hat{f}(x)\right] \quad \text{(ligne 1)}$$

$$=\mathbf{E}[Y^2]+\mathbf{E}\left[\hat{f}(x)^2\right]-\mathbf{E}[2Y\hat{f}(x)] \quad \text{(ligne 2)}$$

$$=\mathbf{Var}[Y]+\mathbf{E}[Y]^2+\mathbf{Var}[\hat{f}(x)]+\mathbf{E}[\hat{f}(x)]^2-\mathbf{E}[2Y\hat{f}(x)] \quad \text{(ligne 3)}$$

$$=\mathbf{Var}[Y]+\mathbf{E}[Y]^2+\mathbf{Var}[\hat{f}(x)]+\mathbf{E}[\hat{f}(x)]^2-2f(x)\mathbf{E}[\hat{f}(x)] \quad \text{(ligne 4)}$$

$$=\mathbf{Var}[Y]+\mathbf{Var}[\hat{f}(x)]+(f(x)-\mathbf{E}[\hat{f}(x)])^2 \quad \text{(ligne 5)}$$

$$=\mathbf{Var}[Y]+\mathbf{Var}[\hat{f}(x)]+\mathbf{E}[f(x)-\hat{f}(x)]^2 \quad \text{(ligne 6)}$$

$$=\sigma_\epsilon^2+\mathbf{Var}[\hat{f}(x)]+\mathbf{Biais}[\hat{f}(x)]^2 \quad \text{(ligne 7)}$$