④ $E = \{1, e^{x}, e^{-x}, e^{2x}\}$

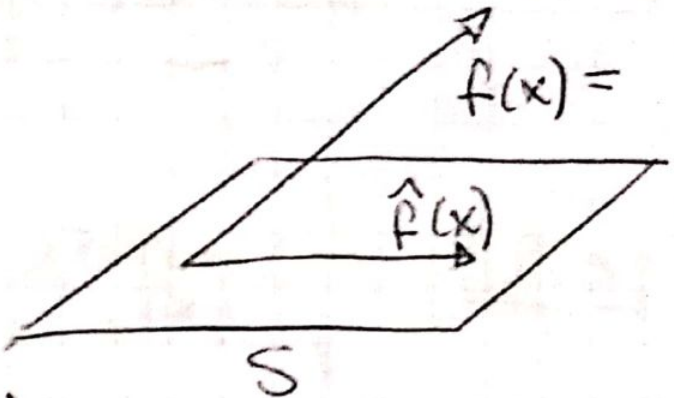
Voy a buscar $\langle 1, e^{x}\rangle, \langle e^{x}, e^{-x}\rangle, \langle e^{-x}, e^{2x}\rangle$

(si me lo pide) $\langle 1, e^{2x}\rangle, \langle e^{x}, e^{2x}\rangle, \langle 1, e^{-x}\rangle$

La cuestión es que se ve que no son ⊥ ni ahí por el pi que me dan (quería ver si lo eran pero es evidente que no)

$S = \text{gen}\{1, e^{-x}\}$

$$f(x) = \underbrace{\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}}_{\text{la posta.}} = \sinh(x)$$




$$\hat{f}(x) = \text{Proy}_S(f(x))$$

Busco BON$_S$, primero hallo las normas$^2$ de $1$ y $e^{-x}$ (porque me resulta interesante y útil dps.)

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1\,dx = 1$$

$$\langle e^{-x}, e^{-x}\rangle = \int_0^1 e^{-2x}\,dx = \frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1) = \frac{1 - e^{-2}}{2}$$

Busco un vector ortog a 1.

$$\langle 1, \alpha + \beta e^{-x}\rangle = \underset{\uparrow\ \text{pido}}{0}$$

$$= \langle 1, \alpha\rangle + \langle 1, \beta e^{-x}\rangle = \alpha\langle 1, 1\rangle + \langle 1, e^{-x}\rangle\beta$$

$$= \alpha + \beta(1 - e^{-1}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -\beta(1 - e^{-1})$$ elijo $\boxed{\alpha = 1 - e^{-1}}$ y $\boxed{\beta = -1}$

$\Rightarrow$ BON$_S = \{1, \alpha + \beta e^{-x}\}$ con

$$\operatorname{Proy}_S f(x) = \frac{e^{1}+e^{-1}-2}{2} + \frac{\left[\dfrac{e^{1}+e^{-1}-2-1-e^{-2}+2e^{-1}+1-e^{-2}-2^{2}}{2}\right]\cdot\left(\alpha+\beta e^{-x}\right)}{\|\alpha+\beta e^{-x}\|^{2}}$$

$$\operatorname{Proy}_S f(x) = \frac{e^{1}+e^{-1}-2}{2} + \frac{\left[\dfrac{e^{1}+3e^{-1}-3-e^{-2}+1-e^{-2}-2}{2}\right]\cdot\left(\alpha+\beta e^{-x}\right)}{\|\alpha+\beta e^{-x}\|^{2}}$$

$$= \frac{e^{1}+e^{-1}-2}{2} + \frac{\left[\dfrac{e^{1}+3e^{-1}-4-2e^{-2}}{2}\right]\cdot\left(\alpha+\beta e^{-x}\right)}{\|\alpha+\beta e^{-x}\|^{2}}$$

no zafo más

$$\langle \alpha+\beta e^{-x}, \alpha+\beta e^{-x}\rangle$$

$$= \langle \alpha, \alpha+\beta e^{-x}\rangle + \langle \beta e^{-x}, \alpha+\beta e^{-x}\rangle$$

$$= \langle \alpha, \alpha\rangle + \langle \alpha, \beta e^{-x}\rangle + \langle \beta e^{-x}, \alpha\rangle + \|\beta e^{-x}\|^{2}$$

$$= \alpha^{2} + \alpha\beta\langle 1, e^{-x}\rangle + \alpha\beta\langle e^{-x}, 1\rangle + \beta^{2}\|e^{-x}\|^{2}$$

$$= 1 - e^{-1} + \alpha\beta(1-e^{-1})\cdot 2 + \beta^{2}\left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)$$

$$= 1 - e^{-1} - (1-e^{-1})^{2}\cdot 2 + \left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)\cdot 1 = 1-e^{-1} - 2(1-2e^{-1}-e^{-2}) + (1-e^{-2})/2$$

$$= 1 - e^{-1} - 2 + 4e^{-1} + 2e^{-2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2} = \frac{3}{2}e^{-2} + 3e^{-1} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Proy}_S f(x) = \frac{e^{1} + e^{-1} - 2}{2} + \frac{\left[\frac{e^{1} + 3e^{-1} - 4 - 2e^{-2}}{\cancel{2}}\right](1 - e^{-1} - e^{-x})}{\frac{3e^{-2} + 6e^{-1} - 1}{\cancel{2}}}$$

$$\text{Proy}_S f(x) = \frac{e^{1} + e^{-1} - 2}{2} + \frac{e^{1} + 3e^{-1} - 4 - 2e^{-2}}{3e^{-2} + 6e^{-1} - 1}(1 - e^{-1} - e^{-x})$$

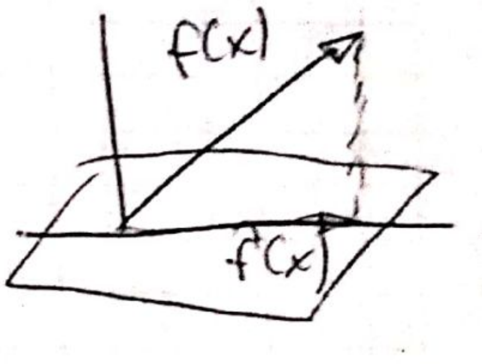
$$\text{Proy}_S f(x) \cong \cosh(1) - 1 - 0{,}278(1 - e^{-1} - e^{-x})$$

$$= \cosh(1) - 2 - 0{,}278 + 0{,}102 + 0{,}278 e^{-x}$$

$$\cong 0{,}367 + 0{,}278 e^{-x}.$$

(1) El resultado: pertenece a S porque es CL de los elems de S.

(2) Su norma$^2$ es $<$ a $\|f(x)\|^2$:




$$\|\sinh(x)\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 dx \cong 0{,}407$$

$$\|0{,}367 + 0{,}278 e^{-x}\|^2$$

$$= \langle 0{,}367 + 0{,}278 e^{-x}, 0{,}367 + 0{,}278 e^{-x} \rangle$$

$$= 0{,}367^2 + 2 \cdot 0{,}367 \cdot 0{,}278 \cdot (1 - e^{-1}) + 0{,}278^2 \cdot \left(\frac{1 - e^{-2}}{2}\right)$$

$$\cong 0{,}297$$

$\Rightarrow$ es un resultado coherente

La dist a $S$ es: $\sqrt{\| f(x) - \hat{f}(x) \|^2}$

y a $S^\perp$ va a ser ~~¿~~ usando esto:

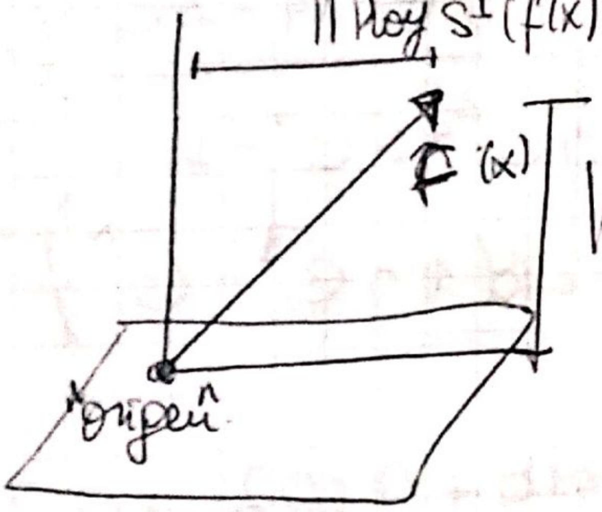
$$Proy_S(f(x)) + Proy_{S^\perp}(f(x)) = f(x)$$

→ luego tomamos "resta" a ambos lados

$$Proy_{S^\perp}(f(x)) - f(x) = -Proy_S(f(x))$$

$\| Proy_{S^\perp}(f(x)) - f(x) \|$ → con el dibujo parece obvio que la sombra es la dist de la min punta de la flecha al "origen"

$\Rightarrow$




$$\| Proy_S(f(x)) - f(x) \|$$

$$\|$$

$$\| \hat{f}(x) - f(x) \|$$