07/05/19
Vero

# Independencia lineal mediante coordenadas

Sea un ev- $V$ y sea $S \subseteq V$ un subespacio.
Sea $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $V$ y $S = gen\{v_1 - v_2, v_3 - v_1, v_1\}$
Se busca determinar una base de $S$.

Como hemos visto en el documento de Indep. Lineal, para probarla vemos qué pasa con $a, b$ y $c$ en esta ecuación:

$$a(v_1 - v_2) + b(v_3 - v_1) + c(v_1) = 0_V$$

En el caso de que tuviéramos polinomios, había varios métodos (así ~~como~~ en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$). En este caso desconocemos como "llevar a una matriz" a "vectores" de este estilo. Para ello, usamos la transformación de coordenadas (*):

$$[a(v_1 - v_2) + b(v_3 - v_1) + c(v_1)]_C = [0_V]_C \quad (*)$$

$$\Big\downarrow \text{linealidad}$$

$$a[v_1 - v_2]_C + b[v_3 - v_1]_C + c[v_1]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de aquí nos resta elegir algún método, yo lo probaré con el de "determinante"

$$\Big\downarrow \text{este paso es siempre válido}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

el sist tiene solución única si $\det(A) \neq 0$. (la trivial)

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \boxed{a = b = c = 0}$$

y vale para (*) porque la (*) es biyectiva

Luego como (*) tiene solución $a=b=c=0 \Rightarrow$ el conj $C' = \{v_1 - v_2, v_3 - v_1, v_1\}$ es l.i.

Como

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ C' \text{ l.i} \\ \bullet\ C' \text{ genera } S \end{array}\right\} \Rightarrow C' \text{ puede ser una base de } S.$$

Utilidades de este método:

- Sacar la base de la $Im(f)$ en un caso así:

$f: W \to S$   $f(w_1) = v_1 - v_2$   siendo

$S \subseteq V$   $f(w_2) = v_3 - v_1$   $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base de $W$

$f(w_3) = v_1$

- Trabajar con funciones:

$$S = gen \left\{ \begin{array}{ll} A\cos(wct + \pi/2), & A\,sen(wct) \\ + sen(wct) & + A\cos(wct) \end{array} \right\}$$

$S \subseteq V$

Base de $V = \{A\cos(wct), A\,sen(wct)\}$

- Más aún, funciones en el plano $\mathbb{C}$.
- Modulación de señales en la vida real (transmisión de bits, señales digitales).
- Probar ortogonalidad bajo determinadas condiciones.