Mis Apuntes

Inverso multiplicativo de $z = x + iy$

$zz^{-1} = 1$ $\qquad z^{-1} = u + iv$ $\qquad \begin{cases} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

$xu - yv + i(xv + yu) = 1$

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \exists \text{ si } \det(M) \neq 0$$

En dem $x^2 + y^2 \neq 0$ $\quad$ (si $x^2 + y^2 = 0$ si $x = 0$ e $y = 0$)
$z = 0 + 0i$
no tiene inverso

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{i(-y)}{x^2 + y^2}$$

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ $\quad$ • $|z| = |\overline{z}|$ $\quad$ • $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Im}(i(x + iy))$
$= \operatorname{Im}(ix + i^2 y) = \operatorname{Im}(-y + ix)$
$= x = \operatorname{Re}(z)$

- $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(-y + ix) = -y = -\operatorname{Im} z$

- $\overline{z \cdot w} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)} = xu - yv - i(xv + yu)$
$= xu - (-y)(-v) + i(x(-v) + (-y)u) = \overline{z} \cdot \overline{w}$

- $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{-iy}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1/z$

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$
- $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$

- $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{\bar{w}} = \bar{z} \cdot w$
- $z\bar{w} + \bar{z}w = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$
- $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$
- $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$

Dem

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$$
$$= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$$
$$= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$
$$\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2$$
$$= |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2$$
$$= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$$

- $|z-w| \leq |z| + |w|$ ya que $|z-w| = |z+(-w)| \leq |z| + |-w|$
- $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$
- $\big||z| - |w|\big| \leq |z+w|$ ya que: $\underbrace{|z|}_{} = |z+w-w|$

$$= |(z+w+(-w))| \leq |z+w| + \underbrace{|-w|}_{}$$

o sea $|z| - |w| \leq |z+w|$

Similarmente $|w| - |z| \leq |z+w|$

$\Rightarrow \big||w| - |z|\big| \leq |z+w|$

12) Notación

$n \in \mathbb{N} \,/\, z^{\frac{1}{n}} = \{ w \in \mathbb{C} \,/\, w^n = z \}$

Por ej: Hallar $(-1)^{1/4}$

$$(-1)^{1/4} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z^4 = -1 \}$$

11) e)

$z^4 = -1$

$z = r e^{i\theta}$

$z^4 = -1$

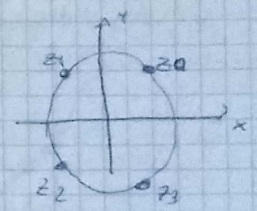
$r^4 e^{i4\theta} = 1 e^{i\pi}$

$r^4 = 1$

$4\theta = \pi + 2k\pi, \; k = 0, 1, 2, 3$

$\Rightarrow r = 1$

$\theta_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \; ; k = 0, 1, 2, 3$



$z_0 = e^{i\pi/4}$

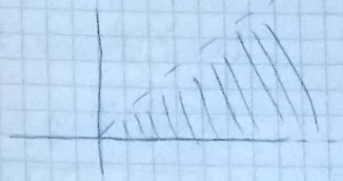
$z_1 = e^{i3/4\pi}$

$z_2 = e^{i5/4\pi}$

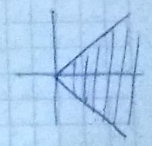
$z_3 = e^{i7/4\pi}$

13)

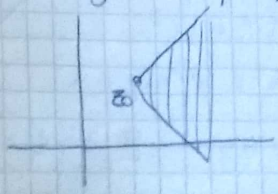
1) $A = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, 0 < \arg(z) < \pi/3 \}$



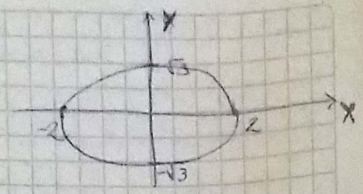
$\tilde{A}_1 = \{ z \,/\, |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{4} \}$



2) $A_2 = \{ z \,/\, |\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leq \pi/4 \}$



$A_3 = \{ z \,/\, |z-1| + |z+1| = 4 \}$

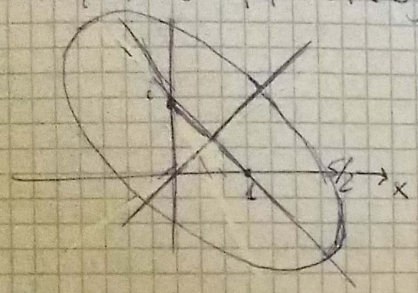


3/ $DIST(z,1) + DIST(z,-1) = 4$

$|z_1 - z_2| = 2c$ $\quad \in : z \in \mathbb{C} : DIST(z, z_1) + DIST(z, z_2) = 2a$

con $\boxed{a > c}$ $\quad z_1, z_2$: focos de la elipse

$A_4 = \{ z \,/\, |z-1| + |z-i| \leq 5 \}$

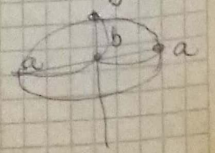


llamo

$2c = |z_1 - z_2|$

$c < a$

$b^2 = a^2 - c^2$



(3 c)

$\tilde{A} = \{ z \,/\, |z-i| = Im(z) + 1 \}$

Vemos que $z \in \tilde{A} \Rightarrow Im(z) \geq -1$

$z = x + iy$

$|x + i(y-1)| = Im(z) + 1$

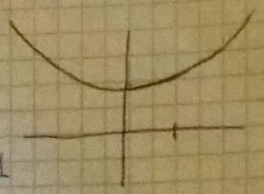
$|x + i(y-1)| = y + 1 \;,\; y \geq -1$

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = y + 1$

$x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$

$x^2 = 4y \qquad y \geq -1$



Trabajo Práctico Nro. 1

Números Complejos

1. Comprobar que $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i} = -\dfrac{2}{5}$

2. Efectuar las operaciones indicadas:

   (a) $(\frac{1}{2} + i3) + (1 + i\frac{3}{4})$ (b) $(\frac{1}{3} + i) - (2 - i\frac{1}{4}) + (-\frac{5}{4} + i2)$ (c) $i\sqrt{2} + (1 + i\sqrt{2})$

   (d) $(2 - i\sqrt{32}).(2 + i\frac{3}{2})$ (e) $(i3).(i2).(-i)$ (f) $(3 + i4) : (5 - i2)$

   (g) $(i\frac{2}{3}) : (1 - i6)$ (h) $(1 - i)^2$ (i) $(-i2)^7$

3. Determinar el módulo de cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $2 + i\sqrt{5}$ (b) $\dfrac{(2 + i\sqrt{5})(1 + i)}{(2 - i4)}$

4. Hallar una representación trigonométrica de los siguientes números complejos:

   (a) $2 - i2$ (b) $i3$ (c) $-\sqrt{3} + i3$ (d) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

   y calcular el argumento principal de cada uno de ellos.

5. Expresar en forma binómica $(a + ib)$ los siguientes números complejos:

   (a) $2\,\mathrm{cis}(3)$ (b) $2\,\mathrm{cis}(\frac{10}{3}\pi)$ (c) $-\dfrac{2}{1 + \sqrt{3}i}$ (d) $(\sqrt{3} + i)^6$

   notación: $\mathrm{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$

6. Verificar que $\dfrac{(1-i)^{49}(\cos(\frac{\pi}{40}) + i\,sen(\frac{\pi}{40}))^{10}}{(8i - 8\sqrt{3})^6} = -\sqrt{2}$

7. Siendo $w_1 = 1 + i$, $w_2 = i$ y $w_3 = -1 - i$, calcular $\mathrm{Arg}(w_i)$, $\mathrm{Arg}(w_i \cdot w_j)$ y $\mathrm{Arg}(w_i/w_j)$ para $i, j = 1, 2, 3$.

8. Probar que $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$ vale que:

   (a) $\mathrm{Re}(kz) = k\,\mathrm{Re}(z), \quad k \in \mathbb{R}$

   (b) $\mathrm{Im}(z - w) = -\mathrm{Im}(w - z)$

   (c) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$

   (d) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$

   (e) $\mathrm{Re}(z \cdot w) = \mathrm{Re}(\overline{z} \cdot \overline{w})$

   (f) $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}w$

   (g) $\overline{iz} = -i\overline{z}$

   (h) $z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w}) = 2\,\mathrm{Re}(\overline{z} \cdot w)$

◆ D abierto si todo punto de D es int a D

$\forall \bar{x} \in D \; \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset D$

(Equiv: D es abierto $\Leftrightarrow FR(D) \cap D = \emptyset$)
z es pto front de D $\Rightarrow z \notin D$)

$D \subset \mathbb{C}$

- z_0 es int a D si $\exists \varepsilon > 0 \,/\, B(z_0, \varepsilon) \subset D$

$B(z_0, \varepsilon) = \{ w \in \mathbb{C} : |w - z_0| < \varepsilon$

- z_0 es ext a D si $\exists \varepsilon > 0 \,/\, B(z_0, \varepsilon) \subset D^c$

sii $B(z_0, \varepsilon) \cap D = \emptyset$

- z_0 es punto frontera de D sii $\forall \varepsilon > 0$:

$B(z_0, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset \;\wedge\; B(z_0, \varepsilon) \cap D^c \neq \emptyset$

◆ D cerrado $\Leftrightarrow D^c$ es abierto

D cerrado si $\Leftrightarrow FR(D) \subset D$

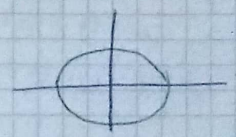
◆ $D \subset \mathbb{C}$ es acotado $\exists M > 0 \,/\, D \subseteq B(0, M)$

1) una elipse

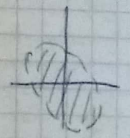
$FR(A) = A$; $INT(A) = \emptyset$

A no abierto, A sí cerrado

A acotado; $A \subset B(0, 5)$

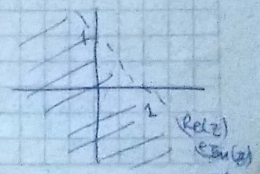


2)

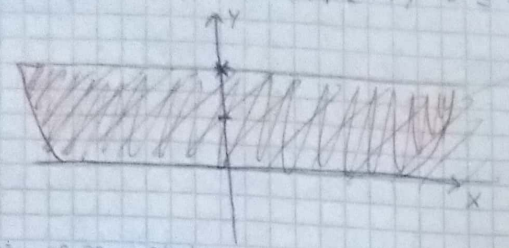


ABIERTO, NO CERRADO, SI ACOTADO

14 -g) $A = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) + Im(z) < 1 \}$



14-h) $\hat{A} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2i| \leq 4 ;\ 0 \leq Im(z) \leq 2 \}$



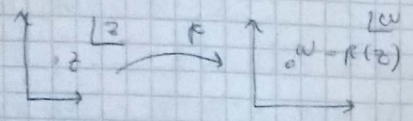
conjunto

Funciones complejas

$z \in \mathbb{C} \xrightarrow{z} \boxed{f} \xrightarrow{w} w \in \mathbb{C}$

$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

D dominio de f



$f(z) = w$

$f(x+iy) = u + iv$ $\quad u = Re(f)$

$v = Im(f)$

u, v dependen de x, y son campos escalares en $\mathbb{R}^2$

$u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Ejemplos

1) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xiy - y^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$Dom f = \mathbb{C}$

$Re f = u(x,y) = x^2 - y^2$

$Im f = v(x,y) = 2xy$

2) $f(z) = \bar{z} = x - iy = x + i(-y)$

$Dom f = \mathbb{C}$ $\quad Re f = x$

$Im f = -y$

3) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{(-y)}{x^2+y^2}$

$Dom f = \mathbb{C} - \{0\}$

$Re f = u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad Dom\, u = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

$Im f = v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ $\quad Dom\, v = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

4) $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \neq 0 \\ 1+3i & z = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{(-y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1+3i & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$Dom f = \mathbb{C}$

$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$v(x,y) = \begin{cases} \frac{-y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5) $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k$

con $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$

$Dom f = \mathbb{C}$

$Re f = \}$

$Im f =$

6) $f(z) = \dfrac{1}{z+1} = \dfrac{\overline{z+1}}{|z+1|^2} = \dfrac{x+1-iy}{(x+1)^2+y^2}$

$\text{Dom } f = \mathbb{C} - \{-1\}$

$= \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - i\,\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$

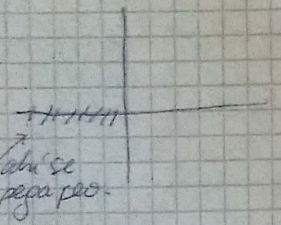
7) $f(z) = \text{Arg } z = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$\text{Dom } f = \mathbb{C} - \{0\}$

$v(x,y) = 0$

$\text{Dom } u = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

$$u(x,y) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi & x < 0 \text{ o } y > 0 \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & x = 0, y < 0 \end{cases}$$



ahí se pega pero.

$\boxed{\text{Límite}}$ Sea $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y sea z_0 un punto de acumulación de D.

punto que está pegado a puntos del dominio

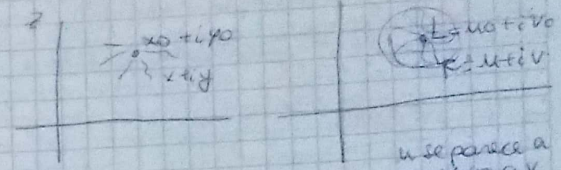
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \quad (*)$$

z_0 es un punto de acumulación de un conj D si todo entorno de z_0 contiene puntos de D, distintos de z_0.

Decimos que f tiende a L cuando z tiende a z_0, y lo denotamos $(*)$

Si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 \,/\, 0 \le |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$, $z \in D$

$\boxed{\text{Propiedades}}$



u se parece a u_0 y v a v_0 si $x \sim x_0$ e $y \sim y_0$

- $z_0 = x_0 + i y_0$

  $L = u_0 + i v_0$,

  $z = x + iy$

  $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

  $\lim_{z \to z_0} f(z) = L \iff \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$

  $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ sii $\lim_{z \to z_0} f(z) - L = 0$

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$ sii $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = 0$

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = L \Rightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = |L|$

  no vale la recíproca.

- vale el álgebra de límite

  - Si $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = L$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = M$

    $\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) + g(z) = L + M$

- $\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z) = L\cdot M$

- $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$ si $M\neq 0$

- Si $\lim_{z\to z_0} f(z)=0$ y $g(z)$ es acotada en un entorno de $z_0 \Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z) = 0$

<u>Def</u> g es acotada en D si $\exists M / |g(z)| \leq M \ \forall z\in D$

<u>Ejemplitos</u>

a) $\lim_{z\to z_0} z = z_0$ b) $\lim_{z\to z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$

c) $\lim_{z\to z_0} z^2 = z_0^2$ d) $\lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n$

e) $\lim_{z\to z_0} a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k = a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_k z_0^k$

e)

$$\lim_{z\to 3+i} \frac{z}{\bar{z}} = \frac{3+i}{3-i} = (3+i)\frac{1}{3-i}$$

$$= (3+i)\cdot\frac{\overline{3-i}}{|3-i|^2} = \frac{(3+i)^2}{10}$$

$$= \frac{9-1+6i}{10} = \frac{8}{10}+\frac{6}{10}i$$

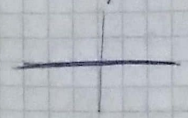
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+iy)}{(x-iy)}\cdot\frac{(x+iy)}{(x+iy)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2+2xyi}{x^2+y^2}$$

Tomando $Re(z)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \nexists \rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}} \nexists$$

con $y=0$



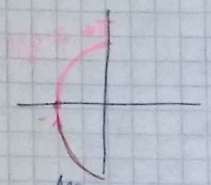
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$$

con $x=0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1$$

$\neq$

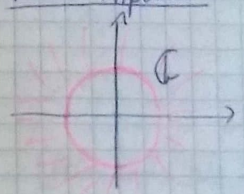
g) $\lim_{z\to -1} \operatorname{Arg} z \nexists$



$\operatorname{Arg} z \to -\pi$

$$\lim_{z\to i} \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2}$$

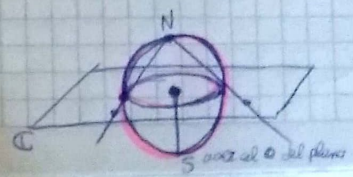
<u>Punto infinito</u>



Se define por sus entornos

$\rightarrow$ un entorno del $\infty = \{z\in\mathbb{C} / |z| > R\}$

<u>Proyección estereográfica</u>



$z=0 \rightarrow S$

$|z|<1 \rightarrow$ hemisferio sur

$|z|>1 \rightarrow$ " norte

$|z|=1 \rightarrow$ ecuador

$z=\infty \rightarrow N$

Límites ∞

Decimos que $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$ sii dado $\varepsilon>0$, $\exists$ $R>0$ / $|z|>R \Rightarrow |f(z)-L|<\varepsilon$

Equivalentemente

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \iff \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L$$

Decimos que $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ sii dado $R>0$, $\exists$ $\delta>0$ / $0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)|>R$

Equivalentemente

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Ej: $\lim_{z\to -2} \frac{1}{z+2} = \infty$ ya que $\lim_{z\to -2} \frac{1}{\left(\frac{1}{z+2}\right)}$

$$= \lim_{z\to -2} z+2 = 0$$

Continuidad

$f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, D abierto

(así, z_0 es pto de acumulación del dominio)

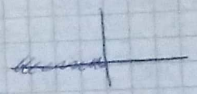
f es continua en z_0 sii

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \ \exists \text{ y } \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Valen reglas:

- Si f y g son continuas en $z_0 \Rightarrow$
  - $f+g$ es continua en z_0
  - $f\cdot g$ " " " "
  - f/g " " " "
- Si f es continua en z_0 y g es continua en $f(z_0)$ $\Rightarrow h = g\circ f$ es continua en z_0

Ej
- $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$ es continua en todo z_0
- $f(z) = \operatorname{Arg} z$ es continua en $\mathbb{C} - \{z / z = x, x\in\mathbb{R}, x\leq 0\}$



- $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i} & z\neq 2i \\ 4i & z = 2i \end{cases}$

$f(2i) = 4i$

$$\lim_{z\to 2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i}$$

$$z^2+4 = z^2-(-4) = z^2-(2i)^2 = (z-2i)(z+2i)$$

$$\lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)(z+2i)}{z-2i} = \lim_{z\to 2i} z+2i = 4i$$

$\Rightarrow f$ es continua también ya: f es continua en $\mathbb{C}$

Derivabilidad en funciones complejas

Sea $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, D abierto, $z_0 \in D$

Decimos que f es derivable en z_0 sii $\exists$:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$ y en tal caso se lo denota $\underbrace{f'(z_0)}_{\text{la derivada de } f \text{ en } z_0}$ o $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

Notación: $z = z_0 + \Delta z$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Ejemplos 1) $f(z) = z$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0 + \Delta z - z_0}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$$

$f'(z_0) = 1 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$

2) $f(z) = z^2$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^2 + 2 z_0 \Delta z + \Delta z^2 - z_0^2}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{2 z_0 \Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} = 2 z_0$$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$(z^2)' = 2z$

3) $f(z) = |z|^2$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)(\bar{z_0} + \overline{\Delta z}) - z_0 \bar{z_0}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{z_0 \bar{z_0}} + \bar{z_0} \Delta z + z_0 \overline{\Delta z} + \Delta z \overline{\Delta z} - \cancel{z_0 \bar{z_0}}}{\Delta z}$$

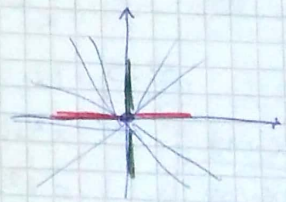
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\bar{z_0} + \overline{\Delta z}) \Delta z + z_0 \overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z} (\bar{z_0} + \overline{\Delta z}) + z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Veamos $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$

$\Delta z = \Delta x + i \Delta y$

Si $\Delta x = 0$



Si $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} : \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y i}{\Delta y i} = -1$$

Si $\Delta y = 0$

$$: \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Luego, $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \nexists$

Luego si $z_0 \neq 0$, $f'(z_0)$ $\nexists$

Si $z_0 = 0$, $f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} 0 + \Delta \bar{z} + 0 \cdot \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = 0$

4) $f(z) = \bar{z}$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0} + \overline{\Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \nexists$$

Reglas de derivación

- $c' = 0$ (c cte)
- $(z^n)' = n z^{n-1}$
- $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$
- $(f(z) g(z))' = f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$
- $(c f(z))' = c f'(z)$
- Regla de la cadena

$f(z) = x^2 + iy^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$ → $z_0 = x_0 + iy_0$, $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + i(y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + i y_0^2)}{\Delta x + i \Delta y}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2x_0 \Delta x + i 2 y_0 \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 i^2}{\Delta x + i \Delta y}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2x_0 \Delta x + 2 i y_0 \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 i^2}{\Delta x + i \Delta y} \cdot \frac{\Delta x - i \Delta y}{\Delta x - i \Delta y}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2x_0 \Delta x^2 - i 2 x_0 \Delta x \Delta y + i 2 y_0 \Delta y \Delta x + 2 y_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 - i \Delta x^2 \Delta y + i \Delta y^2 \Delta x + \Delta}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$\boxed{\text{por acá no sale}}$

$x^2 + i y^2$

$= x^2 + (i)(-y^2)$

$= x^2 + (-i)(-y^2)$

$z = (x + iy)$

$\bar{z} = (x - iy)$

$z \cdot \bar{z} = x^2 - iyx + iyx + (-i) i y^2$

$= x^2 - i y^2$

$\bar{z} \cdot \bar{z} = (x - iy)(x - iy)$

$x^2 + i^2 y^2 - iyx - iyx$

$= x^2 - y^2 - 2yxi$

no, tampoco

Si $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{2 y_0 \Delta y^2 + \Delta y^3}{\Delta y^2} = 2 y_0$$

Si $2y_0 \neq 2x_0$ $\nexists$ $f'(z_0)$

Si $x_0 = y_0$:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2x_0(\Delta x^2 + \Delta y^2) + \Delta x^3 + \Delta y^3 - i(\Delta x^2 \Delta y - \Delta y^2 \Delta x)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Si $\Delta y = 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x^2} = 2x_0$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} 2x_0 + \frac{\Delta x^3}{\Delta x^2 + \Delta y} + \frac{\Delta y^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - i \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Delta y + i \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Delta x$$

f es derivable en los puntos de la forma $z_0 = x_0 + i y_0$ y su derivada vale $f'(z_0) = 2x_0$

$\boxed{\text{Hasta el 9 de la guía 2}}$

---

1)

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+4i+6i-8}{|3+4i|^2} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} i$$

$$\frac{2-i}{5i} = \frac{2-i}{5i} \cdot \frac{-5i}{-5i} = \frac{(2-i)(-5i)}{|5i|^2} = \frac{-10i-5}{25} = -\frac{2}{5} i - \frac{1}{5}$$

$+$

$-\frac{2}{5}$ ☺

2) h) $(1-i)^2 = (1-i)(1-i) = 1 - i - i - 1 = -2i$

$(a+bi)^2 = (a+bi)(a+bi) = a^2 + abi + abi - b^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

i) $(-i2)^7 = 2^7 (-i)^7 = -2^7 (i)^7 = -2^7 i^2 i^2 i^2 i = -2^7 (-1)(-1)(-1)(i) = 2^7$

$\hookrightarrow = -2^7 (i^2) i$

3)

a) $\sqrt{Re^2(z) + Im(z)^2} = \sqrt{2^2+5} = 3$

b) $\dfrac{(2+i\sqrt{5})(1+i)}{2-i4} = \dfrac{(2+i\sqrt{5})(1+i)}{(2-4i)}\dfrac{(2+4i)}{(2+4i)} = \dfrac{(2+i\sqrt{5})(1+i)\,2(1+2i)}{|2+4i|^2}$

$= \dfrac{(2+2i+\sqrt{5}i-\sqrt{5})(2+4i)}{4+16} = \dfrac{((2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})i)(2+4i)}{20}$

$= \dfrac{2(2-\sqrt{5})+4i(2-\sqrt{5})+2(2+\sqrt{5})i+4i(2+\sqrt{5})i}{\sqrt{20}}$

$= \dfrac{2(2-\sqrt{5})+8i-4\sqrt{5}i+8i+2\sqrt{5}i-8-4\sqrt{5}}{20}$

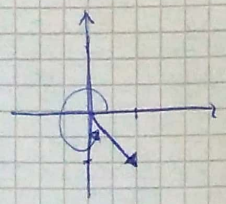
$= \dfrac{4-2\sqrt{5}+8i-4\sqrt{5}i+8i+2\sqrt{5}i-8-4\sqrt{5}}{20}$

$= \dfrac{-4-6\sqrt{5}+16i-2\sqrt{5}i}{20} = \dfrac{(-4-6\sqrt{5})+(16-2\sqrt{5})i}{20}$

$= \dfrac{-2-6\sqrt{5}}{10} + \dfrac{8-\sqrt{5}}{10}i$

$\sqrt{\left(\dfrac{-2-6\sqrt{5}}{10}\right)^2+\left(\dfrac{8-\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

4) a) $2-2i$

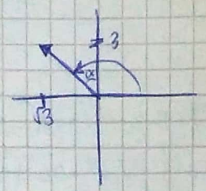


$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) + i\,2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{7}{8}\pi\right)$

b) $3i$

$= 3i\,\mathrm{sen}(\pi/2) + 3\cos(\pi/2)$

c) $-\sqrt{3}+i3$

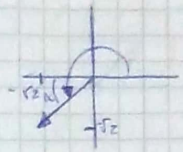


$= 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + 2\sqrt{3}\,i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{12}\pi\right)$

$tg(\alpha) = \frac{O}{A} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

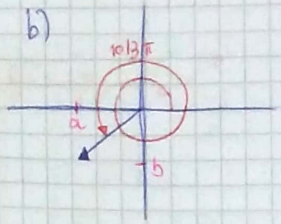
$\alpha = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{12}$

d)



$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) + i\,2\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{8}\pi\right)$

5) b)



$\frac{10}{3}\pi = 2\pi - \text{algo}$

$= 2\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}$

$= 3\pi + \frac{\pi}{3}$

$\sqrt{a^2+b^2} = 2$

$arctg\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\frac{b}{a} = \sqrt{3} \rightarrow b = \sqrt{3}a$

$\boxed{-1-\sqrt{3}i}$

$\sqrt{a^2+3a^2} = 2$

$\sqrt{4a^2} = 2$

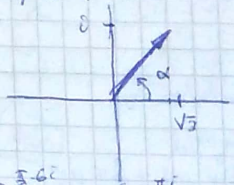
$2|a| = 2$

$|a| = 1$

$\boxed{a=-1,\ b=-\sqrt{3}}$

d) $z^6 = (z^2)^2 z^2 \Rightarrow$ es muy horrible.

$\sqrt{3}+i = 2e^{\pi/6\, i}$



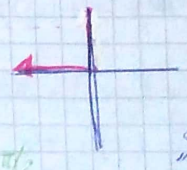
$\alpha = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$|\sqrt{3}+i| = 2$

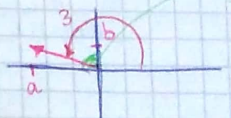
$(\sqrt{3}+i)^6 = (2e^{\pi/6\, i})^6$

$= 2^6(e^{\pi/6\, i})^6 = 2^6 e^{\frac{\pi}{6}6i} = 2^6 e^{\pi i}$

$\hookrightarrow z = 2^6\,cis(\pi)$



d) $2\,cis(3) = 2e^{3i}$



$3-\pi/2$

$\sqrt{a^2+b^2} = 2$

$tg\left(\frac{a}{b}\right) = 3-\pi/2$

$\Rightarrow tg\left(\frac{b}{a}\right) = \pi-3$

$\frac{b}{a} = 0{,}2407$

$b = a\,arctg(\pi-3)$ $\quad 0{,}2486$

$|a| = 1{,}9805$

$\begin{cases} a = -1{,}98 \\ b = -0{,}5 \end{cases}$

$\sqrt{a^2+|a\,arctg(\pi-3)|^2} = 2$

$|a|\sqrt{1+arctg(\pi-3)^2} = 2$

6) $\dfrac{(1-i)^{49}\left(\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{40}\right)\right)^{10}}{(8i-8\sqrt{3})^6}$

$= \dfrac{\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{7}{4}\pi i}\right)^{49}\left(1\,e^{\frac{\pi}{40}i}\right)^{10}}{8^6\,(i-\sqrt{3})^6}$

$= \dfrac{(\sqrt{2})^{49}\,e^{\frac{7}{4}\cdot 49\pi i}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}{8^6\,\left(2e^{\frac{5}{6}\pi i}\right)^6}$

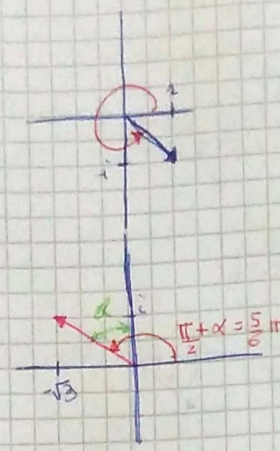
$= \dfrac{(\sqrt{2})^{49}\,e^{86\pi i}}{\left(((\sqrt{2})^6)^6\,((\sqrt{2})^2)^6\,e^{5\pi i}\right)}$

$= \dfrac{(\sqrt{2})^{49}\,e^{86\pi i}}{(\sqrt{2})^{36}(\sqrt{2})^{12}\,e^{5\pi i}} = (\sqrt{2})\,e^{81\pi i} = \sqrt{2}\,e^{\overbrace{(80\pi+\pi)}^{2\cdot 40\pi}\,i}$ $\quad 2\cdot\frac{1}{2}\pi$

son 40 vueltas al plano y media vuelta

$\Rightarrow = \sqrt{2}\,e^{\pi i}$

$= -\sqrt{2}$



$tg(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$\alpha = \pi/3$

7) Propis de los argumentos →

$Arg(w_1 w_2) \overset{\text{en gral}}{\neq} Arg\, w_1 + Arg\, w_2$ $\boxed{\text{mop}}$

$Arg(1+i) = \pi/4$

$Arg(i) = \pi/2$

$Arg(-1-i) = \frac{5}{4}\pi$

$Arg((1+i)\,i) = Arg(-1+i) = \frac{3}{4}\pi$

$Arg((1+i)(-1-i)) = Arg(-(1+i)^2)$

$\parallel$

$Arg(-2i) = Arg(-(\sqrt{2}\,e^{\pi/4 i})^2)$

$= Arg(-\underbrace{2}_{2}\,e^{\frac{\pi}{2}i}) = Arg(-z)$

$= Arg(2e^{\pi/2}\cdot e^{\pi i}) = Arg(2e^{3/2\pi})$

$= 3/2\pi$

$z - z = 0$

8)

a) $K\overbrace{(a+bi)}^{z} = Ka + Kbi$

$Re(K(a+bi)) = Ka$

$K\,Re(a+bi) = Ka$

b) $Im(z-w) = -Im(w-z)$

$Im((a+bi)-(c+di)) = -Im((c+di)-(a+bi))$

$Im((a-c)+(b-d)i) = -Im((c-a)+(d-b)i)$

$b-d = -(d-b) = b-d$

c) $Im(iz) = Im(i(a+bi))$

$= Im(ai-b) = a = Re(z)$

d) $Re(iz) = Re(ai-b) = -b = -Im(z)$

e) $Re(zw) = (a+bi)(c+di)$

$\overset{Re}{=} (ac+adi+bci-bd) = ac-bd$

$Re(\bar{z}\bar{w}) = (a-bi)(c-di)$

$\overset{Re}{=} (ac-dai-bci-bd) = ac-bd$

f) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$

$\downarrow$

$\overline{(a+bi)(c-di)} = \overline{ac+bci-adi+bd}$

$= ac+bd-bci+adi$

$\bar{z}w = (a-bi)(c+di)$

$= ac+adi-bci+bd$

g) $\overline{iz} = -i\bar{z}$

$\overline{i(a+bi)} = -i(a-bi)$

$\overline{ai-b} = -(ai+b)$

$-b-ai = -ai-b$

h) $z\bar{w}+\bar{z}w = (a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)$

$= \underbrace{(ac+bd+bci-adi)}_{z\bar{w}} + \underbrace{(ac+adi-bci+bd)}_{\bar{z}w}$

$= 2(ac+bd)$

$2Re(z\bar{w}) = 2(\overset{Re}{ac+bd+bci-adi}) = 2(ac+bd) = 2Re(\bar{z}w)$

$= 2Re(ac+bd-bci+adi)$

$= 2(ac+bd)$

i) $Im(z+w) = 0$

$\updownarrow$

$Im((a+b)+(c+d)i) = 0$ $\quad = c+d$ $\quad \boxed{c=-d}$ (1)

$\circledast$

$Re(z+w) = Re((a+b)+(c+d)i) = a+b = 2Re(a+bi) = 2a$

$\circledast$

$\boxed{b=a}$ (2)

$\overset{(1)(2)}{\Leftrightarrow}$ $z = \bar{w}$

j) $Re(z) > 0$

$Re(a+bi) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a > 0}$

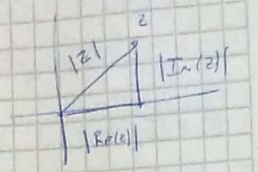
$$Re\left(\frac{1}{a+bi}\right) = Re\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right) = Re\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{1}{a} > 0$$

$a > 0$

Y ocurre lo mismo para el otro lado

k) $|z|\sqrt{2} \geq |Re(z)| + |Im(z)|$



$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2} \geq |a| + |b|$

$\sqrt{2(a^2+b^2)} \geq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$

x desigualdad triangular

$|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)| \leq \sqrt{2}\,|z|$

$v_1 = Re(z)$

$v_2 = Im(z)$

$v_1 \perp v_2$ (p.c)

$z = v_1 + v_2$

$z \in \mathbb{R}^2$

$\langle z, z\rangle = \langle v_1+v_2, v_1+v_2\rangle = \langle v_1, v_1+v_2\rangle + \langle v_2, v_1+v_2\rangle$

$= \langle v_1, v_1\rangle + \cancel{\langle v_1, v_2\rangle} + \cancel{\langle v_2, v_1\rangle} + \langle v_2, v_2\rangle$

$= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

$2(a^2+b^2) = 2(a+b)(a-b)$

a) $\overline{a+bi+c+di} = a+c-(b+d)i$

$\overline{a+bi} + \overline{c+di} = a-bi+c-di$ $\Big\}=$

c) $\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac+dai+bci-db} = (ac+(-db)) - (da+bc)i$

$\overline{(a+bi)}\,\overline{(c+di)} = (a-bi)(c-di) = ac - bic - dai - db$ $\Big\}=$

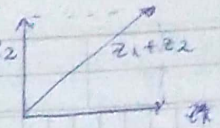
b) $z - \bar{z} = i2Im(z)$

$(a+bi) - (a-bi) = 2bi$

k) $|Re(z)| \leq |z|$

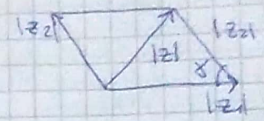
$|a| \leq |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}$



m) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|(a+c)+(b+d)i| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$



$|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \leq |z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$

$(|z_1| - |z_2|)^2 \qquad = (|z_1| + |z_2|)^2$

$|z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\gamma)$

$\cos(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = \pi/2$

$\Rightarrow z_1 \perp z_2$

$\cos(\gamma) = 1 \Rightarrow \gamma = 0$

$\Rightarrow z_1 // z_2$ (+) $\rightrightarrows$

$\cos\gamma = -1 \Rightarrow \gamma = \pi$

$\Rightarrow z_1 // z_2$ (−) $\rightleftarrows$

11) a) $z^2 = 2i$

$r^2 e^{i2\theta} = 2e^{i\pi/2} \longleftrightarrow 2\theta = \pi/2 + 2k\pi \rightarrow k = 0, 1$

$r^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$z_1 = \sqrt{2}e^{i5/4\pi}$

d) $z^4 = -8-8\sqrt{3}i$

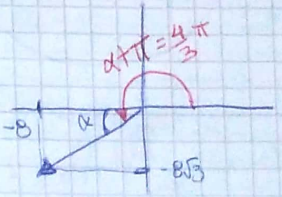
$z^4 = 16e^{i4/3\pi}$

$r^4 = 16 \rightarrow \boxed{r = 2}$

$r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i4/3\pi}$

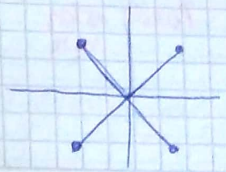
$4\theta = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in [0,3]$, $k \in \mathbb{N}$

$\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k}{2}\pi$



$z_0 = 2e^{i\pi/3}$ $\quad z_2 = 2e^{i2/3\pi}$

$z_1 = 2e^{i\frac{5}{2}\pi}$ $\quad z_3 = 2e^{i11/6\pi}$

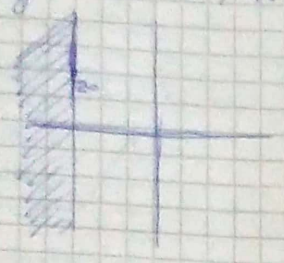


$tg\,\alpha = \frac{-8\sqrt{3}}{-8}$

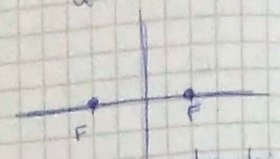
$tg\,\alpha = \sqrt{3}$

$\boxed{\alpha = \pi/3}$

1) b) $\arg(z-z_0) = \alpha$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$



c) $|z-1| + |z+1| = a$, $a > 2$



$|a+bi-1| + |a+bi+1| = 2$

$\sqrt{(a-1)^2+b^2} + \sqrt{(a+1)^2+b^2} = 2$

si $a=0$

$\sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+b^2} = 2$

$2\sqrt{1+b^2} = 2$

$\sqrt{1+b^2} = 1$

$1+b^2 = 1$

¿$b^2=0$? no.

$|z_1 - z_2| = 2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$

$|1-(-1)| = 2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$

$2 = 2c$

$\boxed{c=1}$

$\sqrt{a^2-b^2} = 1$

$\text{dist}(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

d) $|z-z_1| = |z-z_2|$

e) $z = 1$

$|1-1| + |1+1| = 2$

$|2| = 2$

chequear $\Rightarrow$ es elipse, calcular $z=-1$.

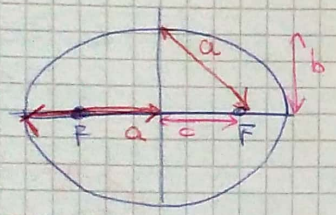
$d(1,1) + d(1,-1) = 2a$

$0 + 2 = 2a$

$\boxed{a=1}$

$c^2 = a^2 - b^2$

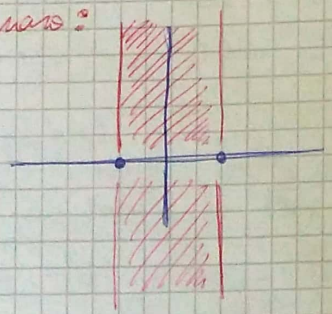
también me da $b=0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$



se cumple $\forall$

$z / -1 \leq \text{Re}(z) \leq 1$, $\text{Im}(z) \neq 0$

fíjense que el $(0,0)$ pertenece, $a \neq c$ no es una elipse, es algo raro:



Puede estar mal

1) a) $f(z) = z^2 = (\overset{x}{a}+\overset{y}{b}i)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$u(x,y) = \text{Re}\, f = x^2 - y^2$

$v(x,y) = \text{Im}\, f = 2xy$

b) $f(z) = 2|z|^2 - \frac{3i}{z-1} = 2z\bar{z} - \frac{3i}{z-1} \overset{(*)}{=} 2|z|^2 - \frac{3i(z+1)}{(z+1)(z-1)}$

$f(z) = 2z\bar{z} - \frac{3i(z+1)}{z^2-1} = 2(x^2+y^2) - \frac{3i(x+iy+1)}{(x+iy)^2-1}$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \frac{(3ix+y^2+3i)}{(x+iy)^2-1} = 2(x^2+y^2) - \frac{(3ix+y^2+3i)}{x^2-y^2+2xyi-1}$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \left[\frac{3ix}{(x^2-y^2+2xyi-1)} + \frac{y^2}{x^2-y^2+2xyi-1} + \frac{3i}{x^2-y^2+2xyi-1}\right]$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \frac{3ix}{(x^2-y^2+2xyi-1)} \cdot \frac{(x^2-y^2-2xyi-1)}{(x^2-y^2-2xyi-1)} + \ldots$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \frac{[3ix+y^2+3i](x^2-y^2-1-2xyi)}{(x^2-y^2-1)^2+(2xy)^2}$

mucho lío, vuelvo acá (*)

$f(z) = 2|z|^2 - \frac{3i}{z-1} = f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \frac{3i}{(x+yi-1)} = 2(x^2+y^2) - \frac{3i}{(x-1)+yi}$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2) - \frac{3i((x-1)-yi)}{(x-1)^2+y^2} = 2(x^2+y^2) - \frac{3i(x-1)}{(x-1)^2+y^2} - \frac{3y}{(x-1)^2+y^2}$

$u(x,y) = \text{Re}\, f = 2(x^2+y^2) - \frac{3y}{(x-1)^2+y^2}$

$v(x,y) = \text{Im}\, f = \frac{-3(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$

d) $f(z) = \frac{z-i}{z+1} = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y-1)}{(x+1)+iy} = \frac{[x+i(y-1)][(x+1)-iy]}{(x+1)^2+y^2}$ $\quad z(x,y)$

$= \frac{x(x+1) - iyx + i(y-1)(x+1) + y(y-1)}{(x+1)^2+y^2}$

$u(x,y) = \operatorname{Re} f = \frac{x(x+1)+y(y-1)}{(x+1)^2+y^2}$ $\quad v(x,y) = \operatorname{Im} f = \frac{-yx+(y-1)}{(x+1)^2+y^2}$

② a) $f(z) = z^2 + i2z$ $\quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{C}$

b) $f(z) = \frac{y}{x} + i\frac{1}{1-y}$ $\quad \operatorname{Dom} f \to \operatorname{Dom} u = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\operatorname{Dom} v = \mathbb{R}^2 - \{1\}$ $\quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{(0,y)\} - \{(1,x), x \in$

c) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ $\quad \operatorname{Dom} f \to \operatorname{Dom} u = \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Dom} v = \mathbb{R}^2 - \{$ $\quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{i, -i\}$

d) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}-i} = f(x,y) = \frac{x+yi}{x-yi-i} = \frac{x+yi}{x+i(-1-y)}$

$= \frac{(x+yi)(x-i(-1-y))}{x^2+(-1-y)^2} = \frac{(x+yi)(x+i(1+y))}{x^2+(1+y)^2}$

$= \frac{x^2+i(1+y)x+iyx-y(1+y)}{x^2+(1+y)^2}$ $\quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{-i\}$

e) $f(z) = \frac{1}{1-|a+bi|} = \frac{1}{1-\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{z / z = x+yi;\ x^2+y^2 = 1\}$

$a \to x$, $b \to y$

③ a) $\lim_{z\to 2+3i} \underbrace{(z-5i)^2}_{\to (2-2i)^2} = (2-2i)^2 = -8i$

b) $\lim_{z\to 2} \frac{z^2+3}{iz} = \lim_{z\to 2} \frac{(z^2+3)(-iz)}{z} = -7i$

$\frac{(4+3)(-i2)}{2}$

c) $\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1} = \lim_{z\to 1} (z+1)\frac{(z-1)}{(z-1)} = 2$

d) $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ $\quad z = x+yi$

Si $x\to 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}} : \lim_{x\to 0} \frac{yi}{-yi} = -1$

Si $y\to 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}} : \lim_{y\to 0} \frac{x}{x} = 1$

$\neq \Rightarrow \nexists \lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}}$

e) $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = \lim_{z\to 0} \bar{z}\cdot\frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^3}{|z|^2}$ $\to$ Ver

$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0$ veo si da 0

$\lim_{z\to 0} \left|\frac{\bar{z}^2}{z}\right| = \lim_{z\to 0} \frac{|\bar{z}|^2}{|z|} = \lim_{z\to 0} |z| = 0 = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z}$

es continua en $\mathbb{C} - \{0\}$

f) $\lim_{z\to 0} \frac{(\bar{z})^2}{z^2}$ $\quad z = x+yi$

$\lim_{z\to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 : \lim_{x\to 0} \left(\frac{-yi}{yi}\right)^2 = 1$

$\lim_{y\to 0} \left(\frac{x}{x}\right)^2 = 1$ $\quad \cap$ NO

$\frac{\bar{z}^2}{z}\cdot\frac{z^2}{z^2} = \frac{(\bar{z}z)^2}{z^3} = \frac{|z|^2}{z^3}$

$\lim_{z\to 0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} |f(z)| = 0$

$\lim_{z\to 0} \left|\frac{\bar{z}^2}{z}\right| = \lim_{z\to 0} \frac{|\bar{z}|^2}{|z|^2} = 1 \cap$ NO

$z = re^{i\theta}$, $\bar{z} = re^{-i\theta}$

$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(re^{-i\theta})^2}{(re^{i\theta})^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}e^{-2\theta i}}{\cancel{r^2}\underbrace{e^{i2\theta}}} = e^{-4\theta i}$ no vale lo mismo $\forall\theta \Rightarrow \nexists$ lim.

$z = re^{i\theta}$, $r\to 0$

1) $\theta = 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = e^{-4\theta i} = 1$

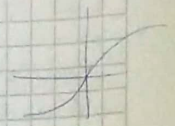
2) $\theta = \pi/4 \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = e^{-4\pi/4 i} = -1$

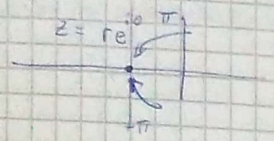
$\nexists \lim$

6)

$$\operatorname{arctan2}(y,x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right) & x>0,\ y>0 \quad (1) \\ \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)+\pi & x<0,\ y>0 \quad (2) \\ \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)-\pi & x<0,\ y<0 \quad (4) \\ \frac{\pi}{2} & x=0,\ y\neq 0 \end{cases}$$

$\pi/2$ $\quad x=0,\ y<0$



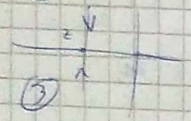


$$\lim_{\theta\to-\pi} \operatorname{Arg}(re^{i\theta}) = -\pi$$

$$\lim_{\theta\to\pi} \operatorname{Arg}(re^{i\theta}) = \pi$$

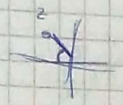
$\nexists$

(2)



(3)

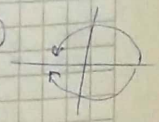
z 2º cuad



$\operatorname{Arg}(z) = \pi - \operatorname{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$

$$\lim_{y\to 0^+} \operatorname{Arg}(x+iy) = \lim_{y\to 0} \pi - \underbrace{\operatorname{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)}_{\to 0} = \pi$$

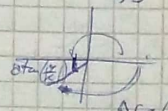
(1)



$$\lim_{y\to 0^-} \operatorname{Arg}(x+iy) = \lim_{y\to 0} -\pi + \underbrace{\operatorname{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)}_{\to 0} = -\pi$$

3º cuad

$-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$



$\operatorname{Arg}(z)$

(*)

$f(-1) = 1$

$\lim_{z\to -1} f(z)$ $\quad$ por la circunf. $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$= \lim_{\theta\to\pi} f(e^{i\theta}) = 1$

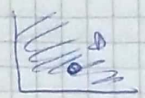
por otro camino $\neq C_1$: $|z| \neq 1$

$\lim_{z\to -1} f(z) = \lim_{z\to -1} (z^2+z+1) = 1$

Deberíamos probar: Dado $\varepsilon > 0$, busco $\delta > 0 \,/\, |z+1| < \delta \Rightarrow |f(z)-1| < \varepsilon$

8) $f(z)$ es continua en un conj abierto $D(\ldots)$

- $|f(z)|$ $\quad f$,11 cont
- $\bar{f}(z)$ $\quad f$, cont, conj cont.
- $\frac{1}{f(z)}$ $\quad$ cont $\forall z \in D \,/\, f(z) \neq 0$
- $f(\bar{z})$



puede pasar que $z \in D$, $\bar{z} \notin D$

Ahora $z \in D$, $\bar{z_0} \in D$

f cont en z_0 $\quad g(z) = f(\bar{z})$

$\Downarrow$

g cont en z_0

9) f es discont en z_0

g " " " z_0

$f+g$ es discont en z_0? No neces.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \quad f \text{ discont en } z=0$$

$$g(z) = -f(z) = \begin{cases} -\frac{1}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \quad \text{es discont en } z=0$$

$(f+g)(z) = f(z) + g(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\quad f+g$ cont en $z=0$

f y g es discont en z_0? No necesariamente.

$$f(z)=\begin{cases} 1/z & z\neq 0 \\ 1 & z=0 \end{cases}$$ f y g discont en $z=0$

$$(f\cdot g)(z) = f(z)\,g(z) = 1 \quad \forall z\in\mathbb{R}$$

f g cont en $z=0$

Derivabilidad de $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$
(D abierto)

Recordar concepto diferenc. de campos escalares en $\mathbb{R}$

$u: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, u abierto, $(x_0,y_0)\in D$

u es diferenciable en (x_0,y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-u'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-u'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

Sea $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, D abierto, f derivable en $z_0=x_0+iy_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}\right| = 0$$

$f'(z_0) = a+bi$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left|\frac{u(x,y)+iv(x,y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)-(a+bi)(x-x_0+i(y-y_0))}{x-x_0+i(y-y_0)}\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|u(x,y)-u(x_0,y_0)-a(x-x_0)+b(y-y_0)+i(v(x,y)-v(x_0,y_0)-b(x-x_0)-a(y-y_0))|}{|x-x_0+i(y-y_0)|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-a(x-x_0)+b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)-b(x-x_0)-a(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

Sii u y v diferenciables en (x_0,y_0)

y $a = u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0)$

$b = -u'_y(x_0,y_0) = v'_x(x_0,y_0)$

$f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, D abierto, $z_0\in D$ $\quad z_0 = x_0+iy_0$, $f = u+iv$

f es derivable en z_0 sii

- u y v son diferenciables en (x_0,y_0)
- Condiciones de Cauchy Riemann:
  - $u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0)$
  - $u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0)$

Ej $f(z_0) = x^2+iy^2$ $\quad$ u, v dif en $\mathbb{R}^2$

$u(x,y) = x^2$ $\quad v(x,y) = y^2$

- O-R $\quad \partial u/\partial x = 2x \quad \partial v/\partial y = 2y$

$\partial u/\partial y = 0 \quad 2x = 2y$

$\partial v/\partial x = 0 \quad 0 = 0$

Luego f es derivable en puntos

$z = x + ix$

$f'(z) = f'(x+ix) = u'_x(x,x) + i v'_x(x,x) = 2x + i0$

10 d) $f(z) = \operatorname{Im}(z) = y + i0$

$u(x,y) = y$

$v(x,y) = 0$

• u y v son dif en $\mathbb{R}^2$ $\quad u'_x = v'_y \quad u'_y = -v'_x$

$0 = 0 \quad 1 = -0$

• C-R $\quad u'_x = 0$, $u'_y = 1$, $v'_x = 0$, $v'_y = 0$ $\quad$ no se verifica en ningún punto $\Rightarrow$ f no es derivable en ningún punto.

• $f(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2} + i0$ $\quad (x, y, z)$, $z = u(x,y)$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ dif en $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ $\quad \boxed{z^2 = x^2+y^2}$ $z \geq 0$

$v(x,y) = 0$ dif en $\mathbb{R}^2$

• C-R $\quad u'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad v'_x = 0$

$u'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad v'_y = 0$

no se verifica C-R en ningún punto $\Rightarrow$ $|z|$ no es deriv en ningún z.

Existen funciones $f = u + iv$ que verifican C-R, pero f no es derivable (Photo 12)

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z}^2/z & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

$u'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{u(x,0) - u(0,0)}{x}$

$u'_x(1,0) = \lim_{x \to 1} \dfrac{u(x,0) - u(1,0)}{x-1}$

$\lim$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{u(1+h,0) - u(1,0)}{h}$

$u'_x(0,0)$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{Re}(f(x,0)) - \operatorname{Re}(f(0,0))}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x-0}{x} = 1$

$u'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \dfrac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \dfrac{\operatorname{Re}(f(0+iy)) - \operatorname{Re}(f(0+0i))}{y}$

Anexo

$f(x+0i) = \dfrac{x^2}{x} = x \qquad f(0+iy) = \dfrac{\overline{iy}}{iy} = \dfrac{(-iy)^2}{iy} = \dfrac{-y^2}{iy} = iy$

$u'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \dfrac{0-0}{y} = 0$

$v'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = \dfrac{\lim_{x \to 0} \operatorname{Im}(f(x)) - \operatorname{Im}(f(0+0i))}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{0-0}{x} = 0$

$v'_y(0,0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \dfrac{\operatorname{Im}(f(0+iy)) - \operatorname{Im}(f(0+0i))}{y}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{y-0}{y} = 1$

Se verifica C-R en $(0,0)$: $u'_x(0,0) = v'_y(0,0)$

$u'_y(0,0) = -v'_x(0,0)$

Pero f no es derivable en $z = 0$

$\lim_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \dfrac{\frac{\bar{z}^2}{z} - 0}{z} = \lim_{z \to 0} \left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2 \nexists$

u y v no son diferenciables en $(0,0)$

Holomorfa

• f es holomorfa en z_0 si $f'(z)$ $\exists$ en un entorno de z_0.

- f es holomorfa en un abierto D si f es holomorfa en cada punto de D

  y denotamos: $f \in H(D)$
- z_0 es un punto singular si f no es holomorfa en z_0
- f es "entera" si $f \in H(\mathbb{C})$

Ej $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ $\quad$ Dom $f = \mathbb{C} - \{i, -i\}$

f es continua en su dominio por ser cociente de continuas

$g(z) = z^2+1$

$g'(z) = 2z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

f es derivable en su dominio

$\Rightarrow \exists f' - \{i, -i\}$ $\quad$ i y $-i$ son puntos sing de f

f holomorfa en su dominio.

cociente de holom es holom si no se anula el denominador

Propiedad

f y $g \in H(D) \Rightarrow$

$f+g \in H(D)$

$f \cdot g \in H(D)$

$\dfrac{f}{g} \in H(D)$ excepto en los puntos que se anulan g

Conexión

- Conjuntos conexos

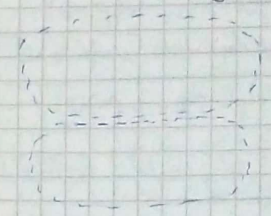
  Si no se puede cubrir por 2 abiertos disjuntos / c/u contenga puntos de D
- Conj conexo por curvas: Si cualesquiera 2 puntos se pueden unir por una curva totalmente contenida en el conjunto

Si D es abierto

D es conexo sii D es conexo por curvas.

(21) a) abiertos conexos: recuerdo

$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \neq 0\} = \mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$



no conexo porque se puede cubrir por 2 abiertos

$B_1 = \{z / \operatorname{Im} z > 0\}$

$B_2 = \{z / \operatorname{Im} z < 0\}$

$A \subset B_1 \cup B_2$

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$

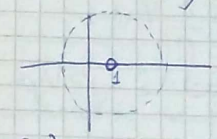
A es abierto

A no es conexo x curvas

$\Rightarrow A$ no es conexo

$A = \{z / 0 < |z-1| < 2\} \rightarrow$ abierto $\rightarrow$ conexo

conexo x curvas



(21) b) Si $f(z) = cte$ en D, D abierto $\Rightarrow f'(z) = 0$

Si $f'(z) = 0$ en D abierto $\Rightarrow f(z) = cte$ en D?

Si D es conexo, es cierto

Si D no es conexo, no necesariamente

Ej Si $f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -1 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$

Dom $f = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z \neq 0\} \rightarrow$ no conexo

f derivable en su dominio, $\quad f'(z) = 0 \ \forall z \in$ Dom f

$f'(z) = \begin{cases} 0 & \operatorname{Im} z > 0 \\ 0 & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$ $\quad$ y f no cte

Derivabilidad en polares

$f(z) = \sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\rho}\cos\frac{\theta}{2} + i\sqrt{\rho}\,\text{sen}\frac{\theta}{2}$

$f(z) = U(\rho,\theta) + i\,V(\rho,\theta)$

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$= u(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) + i\,v(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))$

$= U(\rho,\theta) + i\,V(\rho,\theta)$

θ se mueve en un período de amplitud 2π

u, v dif sii U, V dif $(\rho > 0)$

(1) (3) $U'_\rho = u'_x \cdot x'_\rho + u'_y \cdot y'_\rho = u'_x \cos\theta + u'_y\,\text{sen}\,\theta$

(2) (4) $U'_\theta = u'_x \cdot x'_\theta + u'_y \cdot y'_\theta = u'_x(-\rho\,\text{sen}\,\theta) + u'_y\,\rho\cos\theta$

idem con los V's

Aplicando C.R:

1) $U'_\rho = V'_y\cos\theta - V'_x\,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\rho}V'_\theta$

2) $U'_\theta = V'_y(-\rho\,\text{sen}\,\theta) + (-V'_x)\rho\cos\theta = -\rho V'_\rho$

$\boxed{\text{CR en polares}}$

$U'_\rho = \frac{1}{\rho}V'_\theta$

$U'_\theta = -\rho V'_\rho$

Y cómo hacemos para hallar $f'(z)$?

$f'(z) = u'_x(x,y) + i\,v'_x(x,y)$

Hacemos $(1)\cdot\cos(\theta) - (2)\frac{\text{sen}\,\theta}{\rho}$:

$U'_\rho\cos\theta - U'_\theta\frac{\text{sen}\,\theta}{\rho} = u'_x\cos^2\theta + u'_y\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + u'_x\,\text{sen}^2\theta - u'_y\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = u'_x$

$(3)\cos\theta - (4)\frac{\text{sen}\,\theta}{\rho} = V'_\rho\cos\theta - V'_\theta\frac{\text{sen}\,\theta}{\rho} = V'_x$

Luego $f'(z) = (U'_\rho\cos\theta - \overset{V'_\rho}{U'_\theta}\frac{\text{sen}\,\theta}{\rho}) + i(V'_\rho\cos\theta - \underbrace{V'_\theta\frac{\text{sen}\,\theta}{\rho}}_{-U'_\rho})$

$= U'_\rho\underbrace{(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)}_{e^{-i\theta}} + V'_\rho\underbrace{(\text{sen}\,\theta + i\cos\theta)}_{i e^{-i\theta}}$

$= \boxed{U'_\rho e^{-i\theta} + i\,V'_\rho e^{-i\theta}}$

$f(z) = \ln\rho + i\theta$, $\rho > 0$ $-\pi < \theta < \pi$ $\theta = \text{Arg}\,z$

logaritmo complejo

$U(\rho,\theta) = \ln\rho$

$V(\rho,\theta) = \theta$

u, v diferenciables si $\rho > 0$, $-\pi < \theta < \pi$

$U'_\rho = \frac{1}{\rho}$ $\quad U'_\rho = 0$

$U_\theta = 0$ $\quad V'_\theta = 1$

CR: $U'_\rho = \frac{1}{\rho}V'_\theta$; $U'_\theta = -\rho V'_\rho$

$0 = -\rho\cdot 0$

$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\cdot 1$!

$\Rightarrow f$ es derivable en z $\rho > 0$, $-\pi < \theta < \pi$

$f'(z) = U'_\rho e^{-i\theta} + i\,V'_\rho e^{-i\theta}$

$= \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} + i\cdot 0\, e^{-i\theta} = \rho^{-1}e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$

$\downarrow$

$\frac{1}{\rho}\cos(\theta) - \frac{i}{\rho}\,\text{sen}\,\theta$

Funciones elementales

- Polinómicas, coef $\in \mathbb{C}$ $\quad \text{Dom}\,f = \mathbb{C}$ $\quad f \in H(\mathbb{C})$, $f'(z) = a_1 + 2a_2 z^1 + \dots + k a_k z^{k-1}$
- Exponencial

$f(z) = e^x\cos(y) + i\,e^x\,\text{sen}\,y$

$u(x,y) = e^x\cos y$

$v(x,y) = e^x\,\text{sen}\,y$

- $\text{Dom}\,f = \mathbb{C}$
- u, v diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$

$u'_x = e^x \cos y \qquad v'_x = e^x \operatorname{sen} y$ verifica CR

$u'_y = -e^x \operatorname{sen} y \qquad v'_y = e^x \cos y$ $\Rightarrow$ f derivable en todo punto (f entera)

$f \in H(\mathbb{C})$

$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$
$= f(z)$

Definición de $\varphi(x) = e^x$ es la única función que verifica

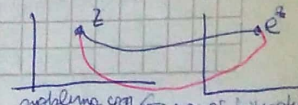
$$\begin{cases} \varphi'(x) = \varphi(x) \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

Para la función f $\begin{cases} f'(z) = f(z) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Denotamos $f(z) = e^z$ o $\exp(z)$

Propiedades

- $e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$
  $= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \cdot e^{iy}$
- $e^{z+s} = e^{x+a+i(y+b)}$ $\qquad z = x+iy$, $s = a+bi$
  $= e^{x+a} \cdot e^{i(y+b)} = e^x \cdot e^a \cdot e^{iy} \cdot e^{ib}$
  vale lo mismo que para $\exp \mathbb{R}$.
- $(e^z)^2 = e^z \cdot e^z = e^{2z}$
  $(e^z)^n = e^{nz}$
- $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y$
- $e^{z+2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z$ $\qquad$ una que es periódica de periodo p si $f(z+p) = f(z) \forall z$



problema con [illegible]

~ Por 24, 28, 29a, pajarse ~

7) a) $f(z)$: $\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{z} = \dfrac{x}{x+yi} = \dfrac{x(x-yi)}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2 - yxi}{x^2+y^2}$

$\lim_{z\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \quad \dfrac{-yxi}{x^2+y^2}$ ← no ayuda

$\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Re}(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} = \lim_{r\to 0} \dfrac{r\cos(\theta)}{r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} = \lim_{r\to 0} \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}$

1) $\theta = 0$ $\quad \lim_{z\to 0} f(z) = 1$ $\qquad$ 2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \lim_{z\to 0} f(z) = -i$

$\vee$

$\nexists \lim$

b) $f(z) = \dfrac{z}{|z|} = \dfrac{x+yi}{\sqrt{x^2+y^2}}$

si $y = ax$

$\Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z)$: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+axi}{\sqrt{x^2+a^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x+axi}{\sqrt{(1+a^2)x^2}}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x+axi}{\sqrt{1+a^2}\,|x|} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x(1+ai)}{|x|\sqrt{1+a^2}}$

$\to \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x(1+ai)}{|x|\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{1+ai}{\sqrt{1+a^2}}$

$\to \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}\dfrac{(1+ai)}{\sqrt{1+a^2}} = -\left(\dfrac{1+ai}{\sqrt{1+a^2}}\right)$

que además de ser $\neq$, ocurre que el resultado queda dependiendo de a.

$\downarrow$

$\nexists \lim_{z\to 0} \dfrac{z}{|z|}$

c) $\lim_{z\to 0} \frac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|} = \lim_{r\to 0} \frac{(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta \cdot r^2}{r}$

$= \lim_{r\to 0} \cos(\theta)(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot r = 0$

Definimos:

$$f(z) \begin{cases} \frac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$$

d) $f(z) = z\cos\left(\frac{i}{|z|}\right) \Rightarrow z = re^{i\theta}$

$\lim_{r\to 0} r\cdot \frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{1}{r}}}$

$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} re^{i\theta}\cdot e^{i\left(\frac{i}{r}\right)} = \lim_{r\to 0} r\cdot e^{i\theta}\cdot e^{-\frac{1}{r}} \Big\}$ 0

$f(z) = (x+yi)\left(\cos\left(\frac{i}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{i}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$

$= (x+yi)\, e^{i\left(\frac{i}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)} = (x+yi)\, e^{\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}} = (x+yi)\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right)^{-1}$

$= \frac{(x+yi)}{e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}$

$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} z\left(\cos\left(\frac{i}{|z|}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{i}{|z|}\right)\right)$

$= \lim_{z\to 0} z\left(\cosh\left(\frac{1}{|z|}\right) - \mathrm{senh}\left(\frac{1}{|z|}\right)\right)$

$= \lim_{r\to 0} re^{i\theta}\left(\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{2} + \frac{e^{\frac{1}{r}}}{2} - \left(\frac{e^{\frac{1}{r}}}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{r}}}{2}\right)\right)$

$= \lim_{r\to 0} re^{i\theta}\left(\frac{e^{-1/r}}{2} + \frac{e^{1/r}}{2} - \frac{e^{1/r}}{2} + \frac{e^{-1/r}}{2}\right)$ ok no sabés

$= \lim_{r\to 0} re^{i\theta}e^{-1/r}$ θ Si?

10) a) $f(z) = x^2 + iy^2$

$u(x,y) = x^2$ CR $\partial u/\partial x = 2x$ $\partial v/\partial y = 2y$

$v(x,y) = y^2$ $\partial u/\partial y = 0$ $2x = 2y$

$\partial v/\partial x = 0$ $0 = 0$

f es derivable en $z = x + ix$

$f'(z) = 2\mathrm{Re}(z)$

b) $f(z) = (x-iy)\,e^{-(x^2+y^2)}$ $z = x+iy$

$= re^{-i\theta}\cdot e^{-r}$ $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$

$= re^{-i\theta+r} = \frac{r}{e^{i\theta+r}} = \frac{x^2+y^2}{\cos(\theta+r) + i\,\mathrm{sen}(\theta+r)}$

$= \frac{x^2+y^2}{\cos(\theta + x^2+y^2) + i\,\mathrm{sen}(\theta + x^2+y^2)} = \frac{|z|}{\mathrm{cis}(\theta+|z|)}$

a ver...

$u(x,y) = x\,e^{-(x^2+y^2)}$
$v(x,y) = -y\,e^{-(x^2+y^2)}$ } diferenciables, compos de funciones dif (polinómica y exponencial)

CR) $u'_x(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} + x(-2x)e^{-(x^2+y^2)} = (1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$u'_y = -2yx\,e^{-(x^2+y^2)}$

$v'_x = 2yx\,e^{-(x^2+y^2)}$

$v'_y = -e^{-(x^2+y^2)} + 2y^2 e^{-(x^2+y^2)} = -(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $-1+2y^2 = 1-2x^2$ $y^2+x^2 = 1$

$2y^2+2x^2 = 2$

Se cumple $\forall (x,y)$ $x^2+y^2=1$

$\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ ✓

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

c) $f(z) = \frac{x^2}{y} + i\,2xy$

$u(x,y) = \frac{x^2}{y}$ $\quad \partial u/\partial x = \frac{2x}{y}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$

$v(x,y) = 2xy$ $\quad \partial v/\partial x = 2y$ $\quad \partial v/\partial y = 2x$

$\frac{2x}{y} = 2x$ sii $y = 1$

$-\frac{x^2}{y^2} = -2y \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = 2y$

$x^2 = 2y^3$

y debía valer 1

$\Downarrow$

$x^2 = 2$

$\boxed{x = \pm\sqrt{2}}$

f tiene derivada sólo en $z_1 = \sqrt{2} + i$

$z_2 = \sqrt{2} - i$

e) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z) + z\,\mathrm{Im}(z) = z\,(\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z))$

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C}$

$= (x + yi)\,(x + y)$

$= x^2 + yxi + xy + y^2 i$

$= \underbrace{x^2 + xy}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(yx + y^2)}_{v(x,y)}$

$\mathrm{Dom}\, u = \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Dom}\, v = \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ $\quad$ f es derivable en $z = 0$

$\boxed{2x + y = x + 2y}$ $\quad \boxed{x = -y}$

$-2y + y = -y + 2y$

$\boxed{-y = y}$ sii $\boxed{y = 0}$ $\quad \boxed{x = 0}$

f) $f(z) = (\mathrm{Re}(z))^2 = x^2$ $\quad \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ $\quad \partial v/\partial x = 0$ $\quad \Rightarrow$ f es derivable $\forall\, z / \mathrm{Re}(z) = 0$

$\partial u/\partial y = 0$ $\quad \partial v/\partial y = 0$

g) $f(z) = 3iz + z^2 = 3i\,(x + iy) + (x + iy)(x + yi)$

$= 3ix \underbrace{- 3y}_{} + \underbrace{x^2 - y^2}_{} + 2xy \cdot i$

$u(x,y) = x^2 - y^2 - 3y$

$v(x,y) = 3x + 2xy$

diferenciables

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C}$

$\partial u/\partial x = 2x$

$\partial u/\partial y = -2y - 3$

$\partial v/\partial x = 3 + 2y$

$\partial v/\partial y = 2x$

$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y = 2x$

$\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x = -2y - 3$

$\Rightarrow$ f tiene derivada en todo su dominio

h) $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$ $\quad \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\quad$ u, v def $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

no se pueden cumplir ya que $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ y para que se cumplan ambas $x = y = 0$ Abs.

$\Downarrow$

f no es derivable en ningún z.

(11) $f(z) = |z|^2 = x^2+y^2$ $\quad$ Dom $f = \mathbb{C}$

$u(x,y) = x^2+y^2$

$v(x,y) = 0$

u, v dif en $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \partial u/\partial x = 2x = 0 = \partial v/\partial y$

$\partial u/\partial y = 2y = 0 = -\partial v/\partial x$

se cumple que

f es derivable sii en $(0,0)$

Si $z \neq 0$ $\nexists f'(z)$

12 a)

$$\lim_{z\to 0} \frac{\frac{(\bar z)^3}{|z|^2} - \frac{(\bar z)^3}{|z|^2}\Big|_0}{z}$$

$$\frac{\bar z^3}{|z|^2} = \frac{(x-yi)^3}{x^2+y^2} = \frac{(r e^{-i\theta})^3}{r^2} = r e^{-3i\theta}$$

$\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{r\to 0} \frac{r e^{-3i\theta} - 0}{r e^{i\theta}} = \lim_{r\to 0} r e^{-3i\theta} \cdot r^{-1} e^{-i\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} e^{-4i\theta} = e^{-4i\theta}$$

$\cancel{(x^2+y^2)/(x^2+y^2)}$

f no es derivable en $z=0$ ya que u, v no son dif en $(0,0)$ $\leftarrow$ $\theta = 0$ $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = 1$

$\theta = \pi/4$ $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = -1$

$x^3 + 3x^2(-yi) + 3x(-yi)^2 + (-yi)^3$

$$\frac{\bar z^3}{|z|^2} = \frac{x^3 - 3x^2 y i - 3xy^2 + y^3 i}{x^2+y^2}$$

$z \cdot \bar z = |z|^2$

$z = \frac{|z|^2}{\bar z}$

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

Trabajo Práctico Nro. 2

Funciones Complejas. Funciones Holomorfas.

1. Expresar cada una de las siguientes funciones en la forma $u(x,y)+i\,v(x,y)$ donde u y v son funciones reales:

   (a) $f(z) = z^2$ $\quad$ (b) $f(z) = 2\,\bar z - 2\,i\,z$

   (c) $f(z) = 2|z|^2 - \frac{3i}{z-1}$ $\quad$ (d) $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$

2. Describir el dominio de las funciones:

   (a) $f(z) = z^2 + i2z$ $\quad$ (b) $f(z) = \frac{y}{x} + i\,\frac{1}{1-y}$ $\quad$ (c) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

   (d) $f(z) = \frac{z}{\bar z - i}$ $\quad$ (e) $f(z) = \frac{1}{1-|z|}$

3. Hallar, si existen, los siguientes límites:

   (a) $\lim_{z\to 2+3i} (z-5i)^2$ $\quad$ (b) $\lim_{z\to 2} \frac{z^2+3}{iz}$ $\quad$ (c) $\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1}$

   (d) $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar z}$ $\quad$ (e) $\lim_{z\to 0} \frac{\bar z^2}{z}$ $\quad$ (f) $\lim_{z\to 0} (\frac{\bar z}{z})^2$

   (g) $\lim_{z\to 1} \frac{x+y-1}{z-i}$ $\quad$ (h) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z^2+z+1-i}$ $\quad$ (i) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^3+3iz^2+7}{z^2-i}$

4. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios complejos de grado n y m respectivamente. Estudiar el $\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}$ para $n>m$, $n=m$ y $n<m$

5. Analizar la continuidad de las funciones:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(z+i)^2+1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ i & \text{si } z = 0 \end{cases} \quad \text{en el origen.}$$

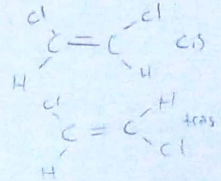
$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3-1}{z-1} & \text{si } |z| \neq 1 \\ 1 & \text{si } |z| = 1 \end{cases} \quad \text{en los puntos } 1, -1, i \text{ y } -i.$$

6. Probar que la función $f(z) = \mathrm{Arg}(z)$ es discontinua en todo punto del eje real no positivo.

7. Sean las funciones definidas para todo $z \neq 0$:

   (a) $f(z) = \frac{\mathrm{Re}\, z}{z}$ $\quad$ (b) $f(z) = \frac{z}{|z|}$ $\quad$ (c) $f(z) = \frac{z\,\mathrm{Re}\, z}{|z|}$ $\quad$ (d) $f(z) = z\,\mathrm{cis}(\frac{i}{|z|})$

   ¿Cuáles pueden ser definidas en $z=0$ de modo que sean continuas en ese punto?



Las derivadas
son por definición

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,0) - u(0,0)}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^3}{x^2} - 0\right) \frac{1}{x} = 1$$

debería hacer lo mismo con V

(14) a) $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es deriv

$$\Rightarrow u'_x = v'_y$$
$$u'_y = -v'_x$$

$$J\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x$$
$$= u_x^2 + u_y^2$$
$$= v_y^2 + v_x^2$$

$$f'_x(z) = u_x(x,y) + i\,v_x(x,y)$$

$$f'_y(z) = u_y(x,y) + i\,v_y(x,y)$$

15). $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

deriv $\Rightarrow$ $u_x|_{z_0} = v_y|_{z_0}$

en z_0 $\quad u_y|_{z_0} = -v_x|_{z_0}$

$\boxed{\text{Cumple CR}}$

$\rightarrow$ Probar que u y v son C_1 en x_0, y_0

Clase

$\cdot f'(z)$ es continua en z_0

$f(z) = z^n \quad \text{Dom}(f) = \mathbb{C}$

$n \in \mathbb{N}$

$n = 1 \quad f(z) = z$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z+h-z}{h} = 1$$

$n \geq 2 \quad f(z) = z^n$

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} z^{n-1} = 0$$

Ver si z^n es deriv en z

$z = r e^{i\theta}$

$f(z) = z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$

$u(r,\theta) = r^n \cos(n\theta)$

$v(r,\theta) = r^n \operatorname{sen}(n\theta)$

$\Big\}$ dif en $\mathbb{C} - \{0\}$

$\boxed{\text{Probamos } (z^n)' = n z^{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall z \in \mathbb{C}}$

$u_r = n r^{n-1} \cos(n\theta)$

$v_\theta = n r^n \cos(n\theta)$

$u_\theta = -n r^n \operatorname{sen}(n\theta)$

$v_r = n r^{n-1} \operatorname{sen}(n\theta)$

CR

$\frac{1}{r} v_\theta = n r^{n-1} \cos(n\theta) = u_r$ ✓

$-r v_r = -n r^n \operatorname{sen}(n\theta) = u_\theta$ ✓

$\therefore f$ derivable $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$

$f'(z) = (u_r + i v_r) e^{-i\theta}$

$f'(z) = (n r^{n-1} \cos(n\theta) + i n r^{n-1} \operatorname{sen}(n\theta)) \cdot e^{-i\theta}$

$f'(z) = n r^{n-1} \underbrace{(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))}_{= e^{in\theta}} e^{-i\theta} = n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}$

$= n (r e^{i\theta})^{n-1}$

$g(z) = 3z^5 + 4z^3 + (3+i) z^2 - 5i \rightarrow g$ es entero

$g'(z) = 15 z^4 + 12 z^2 - 2(3+i) z$ (g holom en $\mathbb{C}$)

$h(z) = \frac{1}{z}$; $z \in \mathbb{C} - \{0\}$; $h'(z) = ?$

$z = r e^{i\theta}$

$$h(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r e^{-i\theta}}{r^2} = \frac{1}{r} (\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta))$$

$u(r,\theta) = \frac{1}{r} \cos(\theta)$

$v(r,\theta) = -\frac{1}{r} \operatorname{sen}(\theta)$

$\Big\}$ u, v dif en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$u_r = -\frac{1}{r^2}\cos(\theta)$ $\quad \frac{1}{r} v_\theta = -\frac{1}{r^2}\cos\theta = u_r$

$v_\theta = -\frac{1}{r}\cos(\theta)$

$u_\theta = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta$ $\quad -r\, v_r = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}(\theta)$

$v_r = \frac{1}{r^2}\operatorname{sen}(\theta)$

CR

$\Rightarrow$ dif y CR $\therefore$ f es derivable en $\mathbb{C}-\{0\}$

$f'(z) = (u_r + i v_r)\, e^{-i\theta}$

$f'(z) = \left(\frac{-1}{r^2}\cos\theta + i\frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta\right) e^{-i\theta}$

$= -\frac{1}{r^2}\left(e^{-i\theta}\right) e^{-i\theta} = -\frac{1}{r^2} e^{-2i\theta}$

$f'(z) = \frac{-1}{z^2}$

10 - L) $\quad f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{z-1}{(z^2-1)(z-2)}$ $\quad$ Dom $f = \mathbb{C} - \{1, -1, \ldots\}$

$z \neq 1 \quad f(z) = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{derivable en todo el plano } -\{1\}} + \underbrace{\frac{1}{(z+1)(z-2)}}_{\text{deriv en todo punto } -\{-1,2\}}$

cociente de funciones derivables

$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$f(z) = \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{-2z+1}{(z+1)^2(z-2)^2}$

19) a) $f(z) = \bar{f}(z) \Rightarrow u(x,y) = u(x,y)$

$\underbrace{v(x,y) = -v(x,y)}$

$\Rightarrow v(x,y) = 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\therefore f(z) = u(x,y) + i0$, con u cont en $\mathbb{R}^2$

b) f holomorfa $\quad f(z) = \bar{f}(z)$

- u, v dif en $\mathbb{R}^2$
- CR

f entera $\Rightarrow \partial u/\partial x = \partial v/\partial y \quad | \quad \partial u/\partial x = -\partial v/\partial y$

$\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x \quad | \quad \partial u/\partial y = \partial v/\partial x$

De (1) y (3) $\quad v_y = 0 \ ; \ u_x = 0$

De (2) y (4) $\quad \underbrace{v_x = 0}_{\text{en abierto conexo}} \ ; \ \underbrace{u_y = 0}_{\text{en abierto conexo}}$ $\rightarrow$ u, v ctes

$\boxed{f(z) = c_1 + i c_2}$

b) Hallar f holomorfa en $\mathbb{C}$ / $f(z) = \bar{f}(z)$

f holomorfa en $\mathbb{C} \rightarrow$ f continua en $\mathbb{C}$

de 19 - a) $\quad f(z) = u(x,y)$ con u dif en $\mathbb{R}^2$

$f(z) = u(x,y) + i0$

Además CR

$u_x(x,y) = 0 = v_y(x,y)$

$u_y(x,y) = 0 = -v_x(x,y)$

$\boxed{f(z) = c \quad c \in \mathbb{R}}$

2) b) f holomorfa en $\mathbb{C}$ y $|\overbrace{f(z)+1}^{g(z)\text{ holomorfa en }\mathbb{C}}| = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ cte

$g(z) = u + iv \Rightarrow |g(z)| = 1$

$|g(z)|^2 = \boxed{1 = u^2 + v^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}: 2u \cdot u'_x + 2v \cdot \underbrace{v'_x}_{u_y} = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}: 2u\, u'_y + 2v\, \underbrace{v'_y}_{u_x} = 0$

$u \to x, y$; $v \to x, y$

$\hookrightarrow$ $u u_x - v u_y = 0$

$v u_x + u u_y = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}}_{\text{SL Hom cuadrado}} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(D) = u^2 + v^2 = 1 \neq 0$

único SC: $u_x = u_y = 0 \Rightarrow u = k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$

y por CR

$v_x = v_y = 0 \Rightarrow v = k_2$, $k_2 \in \mathbb{R}$

$f(z) = e^{i\arg(z)} = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$f(z) = \begin{cases} e^{i\theta} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

f no es cte

$|f(z)| = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$

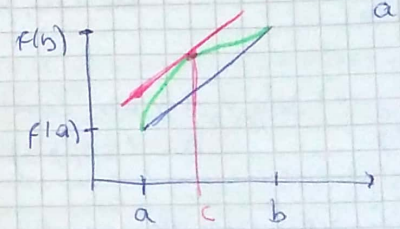
f no es holomorfa

En AI

$f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua en $[a,b]$

f derivable en $(a,b) \Rightarrow$

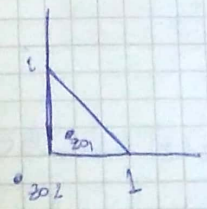
$\exists\, c \in (a,b) / \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$



$f(z) = z^3$

$z_1 = 1 \quad z_2 = i$

$\nexists\, z_0$ entre z_1 y z_2 / $\dfrac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = f'(z_0)$



$f(z_2) = i^3 = -i$

$f(z_1) = 1$

$f'(z_0) = 3z_0^2$

Reemplazando

$-i - 1 = 3z_0^2(i - 1)$

$i^3 - 1^3 = 3z_0^2(i - 1)$

$$3z_0^2 = \frac{i^3 - 1^3}{i-1} \Rightarrow 3z_0^2 = i^2 + i + 1$$

$$z_0^2 = \frac{i}{3} = \frac{1}{3} e^{i\pi/2}$$

$$\left.\begin{array}{l} z_{01} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\pi/4} \\ z_{02} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i5/4\pi} \end{array}\right\}$$ que no están en el segmento.

15) $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$f'(z) = u'_x(x,y) + i\,v'_x(x,y)$

f cont en $z_0 \Leftrightarrow u'_x$ y v'_x son continuas en (x_0, y_0)

Por C-R $u'_x = v'_y$, $v'_x = -u'_y$ $\Rightarrow v'_y$ y u'_y son continuas en (x_0, y_0)

u, v tienen derivadas parciales continuas en $(x_0, y_0) \Leftrightarrow u$ y v son C^1 en (x_0, y_0)

18) a) $f'(z) = 3z^2 + 4z - 3$

$f(1+i) = -3i$

$g(z) = z^3 + 2z^2 - 3z$

$g'(z) = f'(z) \Rightarrow g(z) = f(z) + k,\ k \in \mathbb{C}$

$(g - f)' = 0 \Rightarrow g(z) - f(z) = k$

8. Sabiendo que la función $f(z)$ es continua en un conjunto abierto D, ¿qué se puede decir sobre la continuidad de $|f(z)|$, $\bar{f}(z)$, $f(\bar{z})$ y $\frac{1}{f(z)}$?

9. Supongamos que z_0 es un punto de discontinuidad de las funciones $f(z)$ y $g(z)$. Analizar si z_0 también es punto de discontinuidad de las funciones $f(z) + g(z)$, $f(z)\,g(z)$ y $\frac{f(z)}{g(z)}$.

10. Determinar los puntos en los cuales las funciones dadas tienen derivada y en esos puntos calcularlas:

(a) $f(z) = x^2 + i\,y^2$	(b) $f(z) = (x - iy)e^{-(x^2+y^2)}$
(c) $f(z) = \frac{x^2}{y} + i\,2xy$	(d) $f(z) = \operatorname{Im} z$
(e) $f(z) = z \operatorname{Re} z + z \operatorname{Im} z$	(f) $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$
(g) $f(z) = 3iz + z^2$	(h) $f(z) = \lvert z\rvert$
(i) $f(z) = (z - 3i)^5$	(j) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 2\bar{z}$
(k) $f(z) = \frac{1}{z}$	(l) $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{z-1}{(z^2-1)(z-2)}$

11. Sea $f(z) = |z|^2$. Verificar que las condiciones de Cauchy Riemann se cumplen sólo si $z = 0$. ¿Qué se puede decir acerca de las existencia de $f'(z)$ si $z \neq 0$? ¿Existe $f'(0)$?

12. Demostrar que la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

no es derivable en $z = 0$ pero que las condiciones de Cauchy Riemann se verifican en ese punto.

Este ejemplo muestra que las condiciones de Cauchy Riemann no son suficientes para asegurar la derivabilidad.

13. Mostrar que $f(z) = |z|$ no es derivable en ningún punto. Confrontar con la diferenciabilidad de $\sqrt{x^2 + y^2}$ como función de $\mathbb{R}^2$.

14. (a) Probar que si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es derivable en (x,y) entonces

$$|\det Df(x,y)| = J\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix} = |f'(z)|^2$$

(b) Sean $f(z) = z^3$, $z_1 = 1$ y $z_2 = i$. Probar que no existe un punto z_0 sobre el segmento de recta que une a z_1 y z_2 tal que $f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$. Este ejemplo muestra que el teorema del valor medio para funciones reales no se extiende a las funciones complejas.

$\boxed{\text{Función exponencial}}$ $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y = \exp(z)$

26) a) $\exp(0) = e^0 \cos 0 + e^0 \operatorname{sen} 0 = 1$

b) $\exp(i\pi/2) = i$

c) $\exp(z + i\pi) = \exp(x + iy + i\pi) = e^x \cos(y+\pi) + i e^x \operatorname{sen}(y+\pi)$

$= -e^x \cos y + i(-e^x \operatorname{sen} y) = -\exp(z)$

d) $\overline{\exp z} = \overline{e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y}$

$= e^x \cos y - i e^x \operatorname{sen} y$

$= e^x \cos(-y) + i e^x \operatorname{sen}(-y) = \exp(x - iy)$

$= \exp(\bar{z})$

27) a) $\exp(i\bar{z}) \neq \overline{\exp(iz)}$ a menos que $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Equiv $\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$ sii $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$i\bar{z} = i(x - iy) = y + ix$

$iz = i(x + iy) = -y + ix$

$\exp(i\bar{z}) = \exp(y + ix) = e^y \cos(x) + i e^y \operatorname{sen}(x)$

$\overline{\exp(iz)} = \overline{\exp(-y + ix)} = e^{-y} \cos x + i e^{-y} \operatorname{sen} x$

$= e^{-y} \cos x - i e^{-y} \operatorname{sen} x$

$\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)} \iff e^y \cos x = e^{-y} \cos x$

$e^y \operatorname{sen} x = -e^{-y} \operatorname{sen} x$

Si $\cos(x) \neq 0 \Rightarrow e^{y} = -e^{-y} \Rightarrow y = 0$

Si $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \neq 0$

$\Rightarrow$ ec(2) $e^{y} = -e^{-y}$ Abs

Si $y = 0$

ec (2) $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$

$\Leftrightarrow x \in k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{z = k\pi + i0}$

Funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{sen}\theta$$

Definimos

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$\boxed{\text{Propiedades}}$

- Son enteras: $(\operatorname{sen} z)' = \frac{1}{2i}\left(i e^{iz} - (-i) e^{-iz}\right)$

$$= \frac{1}{2i}\left(i e^{iz} - (-i) e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(i e^{iz} + i e^{-iz}\right)$$
$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$(\cos z)' = \frac{1}{2}\left(i e^{iz} + (-i) e^{-iz}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$
$$= \frac{-1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\operatorname{sen} z$$

- Sobre el eje real, $z = x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left.\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right\} \text{coinciden con sen y cos en } \mathbb{R}$$

- Son periódicas

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz + i2\pi} - e^{-iz - i2\pi}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \operatorname{sen} z$$

Similarmente $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$

- valen identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \left[\frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2i}\right]^2 + \left[\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right]^2$$
$$= \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left[-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right] = \frac{4}{4} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

También valen (demostrar)

$\operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{sen}(z)$

$\cos(z+\pi) = -\cos(z)$

$\operatorname{sen}(z+\pi/2) = \cos(z)$

$\cos(z+\pi/2) = -\operatorname{sen}(z)$

- Son no acotados en el plano $\mathbb{C}$
- $\operatorname{Re}(\operatorname{sen} z)$? $\operatorname{Im}(\operatorname{sen} z)$?

$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x$

Recordemos $\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2} = \cosh y$

$\operatorname{senh} y = \dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}$

$$\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{ix}e^{y} + e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y} - e^{-ix}e^{-y}\right) - \frac{1}{4i}\left(e^{ix}e^{y} - e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y} - e^{-ix}e^{-y}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(2e^{ix}e^{-y} - 2e^{-ix}e^{y}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \operatorname{sen}(z)$$

- $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

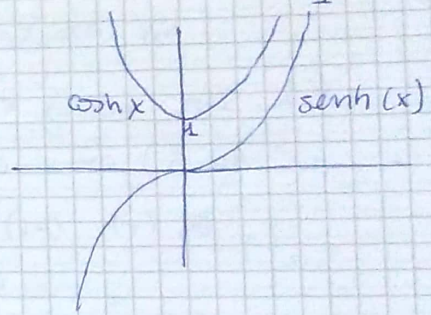
Veamos que $\operatorname{sen} z$ no está acotado

$$|\operatorname{sen} z|^2 = (\operatorname{sen} x \cosh y)^2 + (\cos x \operatorname{senh} y)^2$$

$$= \cdot + * + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y - \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

$$= \operatorname{sen}^2 x \underbrace{(\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y)}_{+1} + \operatorname{senh}^2 y \underbrace{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}_{1}$$

$$= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$



$\boxed{\text{Ceros de seno}}$

$\operatorname{sen} z = 0$

$\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0$

$e^{iz} = e^{-iz}$

$e^{-y}e^{ix} = e^{y}e^{-ix}$

$\begin{cases} \text{módulo: } e^{-y} = e^{y} \\ \text{argumento: } x = -x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{módulo: } y = 0 \\ \text{arg: } x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Los ceros del seno son los $z = k\pi + 0i$

La ecuación $\cos(z) = 2$ tiene infinitas soluciones

la ecu:

$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 2$

sii $\begin{cases} \cos x \cosh y = 2 & (1) \\ -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 0 & (2) \end{cases}$

De (2) o bien $\operatorname{senh} y = 0$

* si $\operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ de (1) $\cosh 0 = 1$

  sii $\cos x = 2$ no tiene sol.

* si $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  de (1) $\cos x = \cos k\pi = (-1)^k$

  en (1) $(-1)^k \cosh y = 2$

  $\cosh y = (-1)^k 2$

  Como $\cosh y > 0$, k debe ser par

  $\cosh y = 2$

  $\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = 2$

$e^y + e^{-y} = 1$ mult por e^y

$e^{2y} + 1 - 4e^y = 0$

$w = e^y \Rightarrow w^2 - 4w + 1 = 0$

$w = 2 \pm \sqrt{3}$

$e^y = 2 \pm \sqrt{3}$

$y_{1,2} = \ln(2 \pm \sqrt{3})$

las sols son $z_{1,2} = k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$ k par

Definimos:

- $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ siempre que $\cos z \neq 0$
- $\operatorname{cotg} z = \dfrac{1}{\operatorname{tg} z}$ siempre que $\operatorname{tg} z \neq 0$
- $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ si $\cos z \neq 0$
- $\operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ si $\operatorname{sen} z \neq 0$

$\boxed{\text{Trigonométricas hiperbólicas}}$

$\operatorname{senh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ $\quad \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

Propiedades

- son enteras $(\operatorname{senh} z)' = \cosh z$

  $(\cosh z)' = \operatorname{senh} z$

- $2\pi i$-periódicas

  Es decir $\operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(z \pm 2\pi i)$

  $\cosh(z) = \cosh(z \pm 2\pi i)$

- no acotadas
- $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y \overset{?}{+} i \cosh x \operatorname{sen} y$

  $\cosh z = \cosh x \cos y \overset{?}{+} i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} y$

- $\operatorname{senh}(iz) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\,\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \operatorname{sen}(z)$

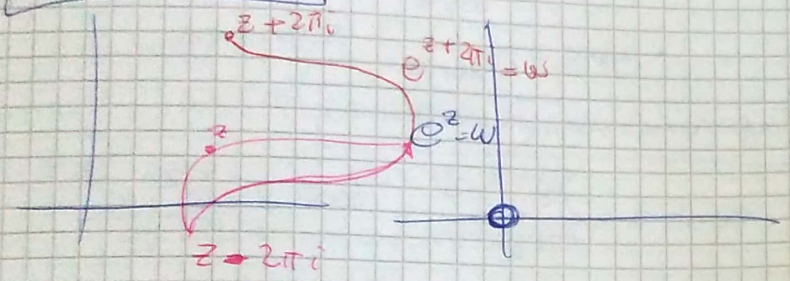
  $\operatorname{sen}(iz) = e^{i(iz)} - e^{-i(iz)} = \dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\,\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

  $= i \operatorname{senh}(z)$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)}+e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \cosh(z)$$

Inversa de e^z



dado que z es / $e^z = w$?

$$z = x+iy \qquad e^z = e^x \cdot e^{iy} = w$$

Conociendo $w \neq 0$ como hallar x, y?

$$e^x = |w| \Rightarrow x = \ln|w|$$

$$y = \arg(w) \rightarrow \text{hay infinitos}$$

Dado $w \neq 0$, $f(w) = \ln|w| + i\arg(w)$

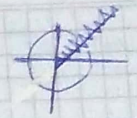
$$f(w) = f(\underbrace{re^{i\theta}}_{w}) = \ln r + i\theta$$

Para que sea función (univaluada) se debe restringir el $\arg(w) = \theta$

Ej $f_0(w) = \ln r + i\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

$f_\pi(w) = \ln r + i\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi$

$f_\alpha(w) = \ln r + i\theta, \quad \alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi$



son logaritmos (inversa de e^z)

$$\log_\alpha z = \ln r + i\theta \qquad \alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi$$

con $r = |z|$, $\arg z = \theta$ } en ese intervalo

Ejemplos

$$\log_0 z = \ln r + i\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\log_0(i) = \ln|i| + i\arg(i) = i\pi/2$$

$$\log_0(-2i) = \ln|-2i| + i\arg(-2i) = \ln 2 + i\frac{3}{2}\pi$$

$$\log_{-\pi}(z) = \ln r + i\theta$$

$$\log_{-\pi}(i) = \ln|i| + i\arg(i) = 0 + i\frac{\pi}{2}$$

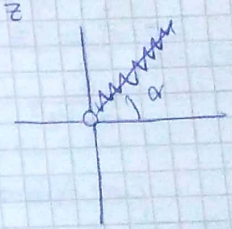
$$\log_{-\pi}(-2i) = \ln|2i| + i\arg(-2i) = \ln 2 - i\pi/2$$

$\log z$

Logaritmo principal $= \operatorname{Log}(z) = \ln r + i\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$

$\theta = \operatorname{Arg} z$

Propiedades



- $\log_\alpha z$ es holomorfa en $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$

$$\left(\operatorname{Log}_\alpha z\right)' = \frac{1}{z}$$

- $\operatorname{Log} z = \log_\alpha z + 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$

• $e^{\log z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} \cdot e^{i\theta} = r e^{i\theta} = z$

ojo: $\log(e^z) = \log(e^x \cdot e^{iy}) = \ln(e^x) + i \arg e^{iy}$
$= x + i(y + 2k\pi)$

Hasta el 34

19 c) $f(z)$ holomorfa en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ Dom $f = \{\mathbb{C}\}$

$\Rightarrow$ cumple CR y u, v son dif para todo $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ y que $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$

como vale $\forall \mathbb{C}$ que f sea holomorfa y $z \in \mathbb{C}$ y $\bar{z} \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f(\bar{z})$ holomorfa

sea $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$\bar{f}(z) = u(x,y) - i v(x,y)$

Si u, v son dif $\Rightarrow$ u y $-v$ son dif.

Por CR:

$u_x(x,y) = -v_y(x,y)$

$u_y(x,y) = v_x(x,y)$

¿Hay problemas?

$\bar{f}(z) = \bar{z} \cdot |z|^2 = (x - yi)(x^2 + y^2) = x^3 - y^3 i$ $\quad |z|^2 = \bar{z} \cdot z$

$\downarrow$

$z \cdot |z|^2$

u, v dif en $\mathbb{C}$

(...)

no

f es holomorfa en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ u, v son dif en $\mathbb{C}$ y cumple CR en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \exists f'(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$

$\downarrow$

esto quiere decir que f es holom en $\mathbb{C}$ tmb

Si me pide $\bar{f}(z)$ holom en $\mathbb{C}$ es lo mismo que pedir que $f(z)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$ ya que debe valer tanto para z como $\bar{z}$. $\longrightarrow$ Preguntar

d) $f'(z) = \underbrace{u_x(x,y)}_{x y^2} + i \underbrace{v_x(x,y)}_{0}$ $\quad v'_y$

$u_x(x,y) = x y^2 = v_y(x,y)$

$u(x,y) = \frac{x^2 y^2}{2} + g(y)$

$v(x,y) = \frac{x y^3}{3} + h(x)$

$u_y(x,y) = x^2 y + g'(y)$

$-v_x(x,y) = -\frac{y^3}{3} + h'(x)$

no hay como parece

$u(x,y) = \frac{x^2}{2} y^2 + g(y)$

$u'_x = x y^2 = v'_y$

$v'_x = -u'_y = 0$

$v(x,y) = x \frac{y^3}{3} + w(x)$

$-u'_y(x,y) = -x^2 y - g'(y)$

$v'_x(x,y) = \frac{y^3}{3} + w'(x)$

$-x^2 y - g'(y) = \frac{y^3}{3} + w'(x)$

$\boxed{\text{No}}$

20) a) $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ $\quad / u(x,y) = v(x,y)$

$u_x(x,y) = v_y(x,y) = u_y(x,y)$

$u_y(x,y) = -v_x(x,y) = -u_x(x,y)$

para que sea holomorfa deben ser 0

$\Rightarrow f(z) = c_1 + i c_2$ / c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ es falso el enunciado.

22) $f(z)$ holomorfa en D $\Rightarrow$ u, v dif en D, CR en D $\longrightarrow$ $u_x(x,y) = v_y(x,y)$, $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$

$\bar{f}(z)$ " " $\Rightarrow$ $u, -v$ dif en D, CR en D. $\longrightarrow$ $u_x(x,y) = -v_y(x,y)$, $u_y(x,y) = v_x(x,y)$

las 4 se dan si valen 0 $\Rightarrow$ u, v ctes

$p_0 = (x_0, y_0)$

$g(p_0) = u_0(x_0,y_0) + i\, v_0(x_0,y_0)$ $\quad$ u, v def en D

$h(p_0) = u_1(x_0,y_0) + i\, v_1(x_0,y_0)$ $\quad$ y cumplen CR en D

$(u_1(x,y)) = u_0(x,y)$

$u_{0x}(x,y) = v_{0y}(x,y)$ $\qquad$ $u_{1x}(x,y) = u_{0x}(x,y) = v_{1y}(x,y)$

$u_{0y}(x,y) = -v_{0x}(x,y)$ $\qquad$ $u_{1y}(x,y) = -v_{1x}(x,y)$

para que se cumplan deben coincidir las derivadas

además si coinciden en un punto no queda otra que de las ∞ funciones que cumplen sean iguales.

$g'(x,y) = h'(x,y)$

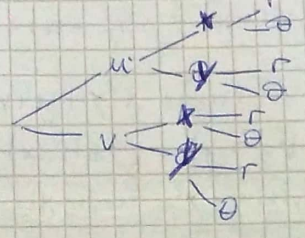
$\parallel \qquad \parallel$

$u'_x(x,y) + i\, \underbrace{u'_y(x,y)}_{v'_x(x,y)}$

23

$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$z = x + iy = re^{i\theta}$



$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u'_x \cos\theta + u'_y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = u'_x(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) + u'_y\, r\cos\theta$$

idem: $\dfrac{\partial v}{\partial r} = v'_x\cos\theta + v'_y\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = v'_x(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) + v'_y\, r\cos\theta$$

15. Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$. Probar que si $f'(z)$ es continua en z_0 entonces u y v son C^1 en (x_0, y_0). ✓

16. Decir en qué puntos del plano complejo son holomorfas las funciones del ejercicio 10. ¿Alguna es entera?

17. Determinar para qué valores de a y $b \in \mathbb{R}$, $f(z) = (ax + 2y) + i(-2x + by)$ es una función entera.

18. Hallar la función holomorfa que satisface las siguientes condiciones:

(a) $f'(z) = 3z^2 + 4z - 3$, $f(1+i) = -3i$ $\qquad$ (b) $\mathrm{Re}[f'(z)] = 3x^2 - 4y - 3y^2$, $f(1+i) = 0$

19. (a) Hallar todas las funciones $f(z)$ continuas en $\mathbb{C}$ tales que $f(z) = \bar{f}(z)$. ✓

(b) Hallar todas las funciones $f(z)$ holomorfas en $\mathbb{C}$ tales que $f(z) = \bar{f}(z)$. ✓

(c) ¿Es cierto que si $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ entonces $g(z) = \bar{f}(\bar{z})$ es holomorfa en $\mathbb{C}$?

(d) ¿Existe f holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f'(z) = xy^2$? No $\underline{E}$

(e) "Parecido al 22.a" Hallar todas las func / $F(z)$ $\bar{F}(\bar{z})$ y sean enteras si existen

20. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas y justificar:

(a) Si $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $\mathrm{Re} f(z) = \mathrm{Im} f(z)$ en $\mathbb{C}$, entonces $f(0) \neq f(1)$. $\underline{F}$

(b) Si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y si $|f(z)+1| = 1\ \forall z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante en $\mathbb{C}$. ✓

21. Un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ se denomina dominio o recinto.

(a) Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son dominios de $\mathbb{C}$:

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}(z) \neq 0\}$ $\qquad$ (ii) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$

(iii) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) > 0\}$ $\qquad$ (iv) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |\mathrm{Re}(z)| < 1\}$

(v) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ $\qquad$ (vi) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| > 4\}$

(vii) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ y } |z| > 2\}$

(b) Dar un ejemplo de una función no constante y holomorfa en un conjunto D con $f'(z) = 0$ para toda $z \in D$. $f(z) \begin{cases} 1 & \mathrm{Im}\, z > 0 \\ -1 & \mathrm{Im}\, z < 0 \end{cases}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}\, f = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \neq 0\}$ no conexo

se cumple si es conexo

22. Sea D un dominio del plano complejo.

(a) Probar que si $f(z)$ y $\bar{f}(z)$ son holomorfas en D entonces f es constante en D. ✓

(b) Probar que dos funciones holomorfas en D que coinciden en un punto de D, y tienen igual parte real, son iguales en todo D. $\underline{+}$

23. Probar que para $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ en coordenadas polares, las ecuaciones de Cauchy Riemann son:

$$r\,u_r = v_\theta \quad , \quad r\,v_r = -u_\theta$$

y si f es derivable en $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_0)$, entonces

$$f'(z_0) = (\cos\theta_0 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_0)(u_r + iv_r)$$

→ lo hicimos en clase ✓ pero viene bien rehacerlo

$\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$

$u'_x = v'_y$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial r} = v'_x \cos\theta + u'_x \operatorname{sen}\theta = -u'_y \cos\theta + u'_x \operatorname{sen}\theta$

$u'_y = -v'_x$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = v'_x(-r\operatorname{sen}\theta) + u'_x r\cos\theta$

$= u'_y r\operatorname{sen}\theta + u'_x r\cos\theta$

$\boxed{\partial v/\partial\theta = r\,\partial u/\partial r}$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = u'_x\cos\theta + u'_y\operatorname{sen}\theta} = v'_y\cos\theta - v'_x\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = u'_x(-r\operatorname{sen}\theta) + u'_y(r\cos\theta)$$
$$= -u'_x r\operatorname{sen}\theta + u'_y r\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}}$$

Si f es derivable en $z_0 = r_0\cos\theta_0 + i\operatorname{sen}\theta_0$

$\Rightarrow f'(z) = u_x(x,y) + i\,v_x(x,y)$

$v_r = -u_y\cos\theta + u_x\operatorname{sen}\theta \rightarrow -v_r\cos\theta = u_y\cos^2\theta - u_x\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$v_\theta = u_y r\operatorname{sen}\theta + u_x r\cos\theta \rightarrow v_\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} = u_y\operatorname{sen}^2\theta + u_x\cos\theta\operatorname{sen}\theta$

$$v_\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} - v_r\cos\theta = u_y = \underbrace{-v_x}_{CR}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x = -v_\theta\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} + v_r\cos\theta} \rightarrow -u_r\operatorname{sen}\theta + v_r\cos\theta = v_x$$

$v_r = u_x\cos\theta + v_y\operatorname{sen}\theta \rightarrow v_r\operatorname{sen}\theta = v_x\operatorname{sen}\theta\cos\theta + v_y\operatorname{sen}^2\theta$

$v_\theta = -v_x r\operatorname{sen}\theta + v_y r\cos\theta \rightarrow \frac{v_\theta}{r}\cos\theta = -v_x\operatorname{sen}\theta\cos\theta + v_y\cos^2\theta$

$$\Rightarrow \boxed{v_r\operatorname{sen}\theta + \frac{v_\theta}{r}\cos\theta = v_y = u_x}$$

$v_r\operatorname{sen}\theta + u_r\cos\theta = u_x$

$f'(z) = (v_r\operatorname{sen}\theta + u_r\cos\theta) + i(\underbrace{-u_r}_{\operatorname{sen}\theta} + v_r\cos\theta) = v_r(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta) + u_r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$

$v_r\, i(-i\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + u_r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$

(24)

i) $f(z) = az + b$

$Dom f = \mathbb{C}$ f continua en $\mathbb{C}$ por ser compos. de funciones continuas

$Im f = \mathbb{C}$

ii) $f(z) = 1/z$ compos de func continuas es cont salvo en donde se anula el denom

$Dom f = \mathbb{C} - \{0\}$

$Im f = \mathbb{C} - \{0\}$

$C_f = \mathbb{C} - \{0\}$

iii) $f(z) = \bar{z} = x - yi$ $Dom f = \mathbb{C}$ $C_f = \mathbb{C}$

$Im f = \mathbb{C}$

$z = f^{-1}(w) = \bar{w}$

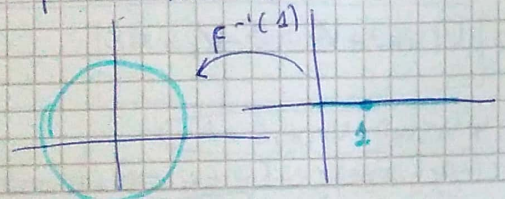
iv) $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2yxi$ $Dom f = \mathbb{C}$ $C_f = \mathbb{C}$

$Im f = \mathbb{C}$

v) $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $Dom f = \mathbb{C}$ $C_f = \mathbb{C}$

$Im f = \{z \in \mathbb{R} / z \geq 0\}$

$f(z) = |z| = w$



$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

(25) a) $e^{2+i2} = e^2 \cos(2) + i \operatorname{sen}(2) e^2$

b) $e^3 e^{i2} = e^3 \cos(2) + e^3 i \operatorname{sen}(2)$

c) $e^i = \cos(1) + i \operatorname{sen}(1)$

d) $\operatorname{sen}(4+i2) = \dfrac{e^{i(4+i2)} - e^{-i(4+i2)}}{2i}$

$$= \frac{e^{4i} \cdot e^{-2} - e^{-i4} e^2}{2i} = \frac{e^{4i-2} - e^{-4i+2}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-2}\cos(4) + e^{-2} i \operatorname{sen}(4) - e^2 \cos(-4) - i e^2 \operatorname{sen}(-4)}{2i}$$

$$= -i \frac{e^{-2}}{2}\cos(4) + \frac{e^{-2}}{2}\operatorname{sen}(4) + i \frac{e^2}{2}\cos(-4) - \frac{e^2}{2}\operatorname{sen}(-4)$$

e) $\cos(e^{1+3i}) = \cos(e^1 \cos(3) + i e^1 \operatorname{sen}(3))$ 6

$$= \frac{e^{i(e\cos(3) + ie\operatorname{sen}(3))} - e^{-i(e\cos(3) + ie\operatorname{sen}(3))}}{2i}$$

$$= \frac{e^{ie\cos(3)} e^{-e\operatorname{sen}(3)} - e^{-ie\cos(3)} e^{e\operatorname{sen}(3)}}{2i}$$

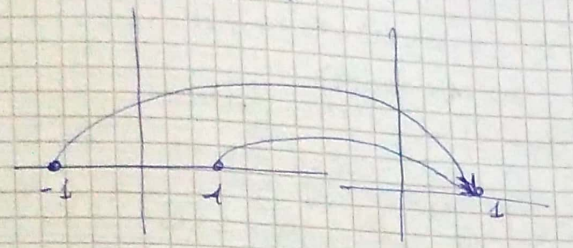
$$= \frac{e^{ie\cos(3) - e\operatorname{sen}(3)} - e^{-ie\cos(3) + e\operatorname{sen}(3)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-e\operatorname{sen}(3)}(\cos(e\cos(3)) + ie\operatorname{sen}(3)) - e^{e\operatorname{sen}(3)}(\cos(-e\cos(3)) + i\operatorname{sen}(-e\cos(3)))}{2i}$$

$$= -i e^{-e\operatorname{sen}(3)}(\cos(e\cos(3)) + i\operatorname{sen}(3)) + i e^{e\operatorname{sen}(3)}(\cos(e\cos(3)) + i\operatorname{sen}(3))$$ o/

(24) Indic $f(z) = z^2 = w$

$z = f^{-1}(w)$ $\qquad z^2 = 1 + \sqrt{3}\, i$



28 c) $\operatorname{sen} z = 10$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 10$$

$$e^{iz} - 20i - \frac{1}{e^{iz}} = 0$$

$$e^{2iz} - 20i e^{iz} - 1 = 0$$

$w = e^{iz}$

$$w^2 - 20iw - 1 = 0$$

$$w = \frac{20i \pm \sqrt{(-20i)^2 - 4(-1)1}}{2}$$

$$w = 20i \pm \sqrt{-400 + 4}$$

$$w = 10i \pm \sqrt{\frac{-396}{2}} = 10i \pm i\sqrt{99}$$

$$w = e^{iz} = (10 \pm \sqrt{99})\, i$$

$$e^{-y} e^{ix} = (10 \pm \sqrt{99})\, e^{i\pi/2}$$

$$\begin{cases} e^{-y} = 10 \pm \sqrt{99} \\ x = \pi/2 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\ln(10 \pm \sqrt{99}) \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

soluciones $z_{1k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i(-\ln(10 + \sqrt{99}))$

$z_{2k} = \pi/2 + 2k\pi + i(-\ln(10 - \sqrt{99}))$

g) $\operatorname{sh} z = 2i$ $\qquad \operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(i(-iz)) = i \operatorname{sen}(-iz)$

$= -i \operatorname{sen}(iz) = -i \operatorname{sen}(-y + ix)$

$= -i\,(\operatorname{sen}(-y) \operatorname{ch} x + i \cos(-y) \operatorname{sh} x) =$

$\operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y = 2i$

$$\begin{cases} \operatorname{sh} x \cos y = 0 & (1) \\ \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y = 2 & (2) \end{cases}$$

de (1) $\operatorname{sh} x = 0$

$\operatorname{sh} x \underset{=0}{} \Leftrightarrow x = 0$

de (2) $\operatorname{ch}(0) = 1$

Resulta $\operatorname{sen} y = 2$

$\nexists$ sol

$\cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

En (2) $\operatorname{sen}(y) = \operatorname{sen}(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$

Resulta

$\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sen} y = 2$

$\operatorname{ch}(x)(-1)^k = 2$

$\operatorname{ch}(x) = (-1)^k 2 \Rightarrow$ k debe ser par.

$\operatorname{ch} x = 2$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$$

$$e^x - 4 + e^{-x} = 0$$

$$e^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

$$t = e^x$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow \boxed{t = 2 \pm \sqrt{3}}$$

$$x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

Soluciones:

$$z_{1h} = \ln(2+\sqrt{3}) + i(\pi/2 + 2h\pi)$$

$$z_{2h} = \ln(2-\sqrt{3}) + i(\pi/2 + 2h\pi) \quad h \in \mathbb{Z}$$

28 c)

$$(\operatorname{Log} z)^2 + \operatorname{Log} z = -1$$

Sea $w = \operatorname{Log} z$

$$w^2 + w + 1 = 0$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$w = -1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$w = \operatorname{Log} z = \ln r + i\theta = -1/2 \pm \sqrt{3}/2\, i$$

$$\begin{cases} \ln r = -1/2 \\ \theta = \pm\sqrt{3}/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = e^{-1/2} \\ \theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\theta = \operatorname{Arg} z$$

$$-\pi \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

Como $-\pi \leq \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \pi$

ambas son soluciones

Soluciones:

$$z_1 = e^{-1/2} e^{\sqrt{3}/2}$$

$$z_2 = e^{-1/2} e^{-i\sqrt{3}/2}$$

30) $f(z) = \exp(iz)$

Función acotada en $D \subset \mathbb{C}$

$\operatorname{Im} f$ acotada en $B(z, M)$

$\exists M > 0 \,/\, \rightsquigarrow |f(z)| \leq M \quad \forall z \in D$

En este caso $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Im} z \geq 0\}$

en D $y \geq 0$

$e^{-y} \leq e^0$

$e^{-y} \leq 1$

$$|f(z)| = |e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y} e^{xi}| = e^{-y} \leq 1$$

$z \in D$

Es más, $f(z) = e^{iaz}$ está acotado en semiplano superior $\forall$ a real, $a > 0$

$f(z) = e^{-iz}$ está acotada en D?

$$|f(z)| = |e^{-iz}| = |e^y e^{-ix}| = e^y$$

puede ser muuuy grande tomando y grandes $\Rightarrow$ no está acotada en el semiplano superior.

en $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Im} z \leq 0\}$

$$|f(z)| = e^y \leq 1 \quad \Rightarrow f \text{ está acotada en } \tilde{D}$$

$z \in \tilde{D}$

b)

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

da más grandes para y muy chicos o muy grandes, no está acotado ni en D ni en $\tilde{D}$

$\frac{1}{3!} +$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

32) c)

$$\lim_{z\to 0} \exp(-|z|^2) = \exp\left(\lim_{z\to 0} -|z|^2\right) = \exp(0) = 1$$

exponencial es continua

Prop

- g cont en w_0
- $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} g[f(z)] = \lim_{z\to z_0} g\left[\lim_{z\to z_0} f(z)\right]$$

32 a) $\lim_{z\to\infty} \exp(z) = \lim_{z\to 0} \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

$$= \lim_{z\to 0} \exp\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) \quad (*)$$

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \exp\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

$$(*) \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

$C_1: y=0 \quad (z = x+i0)$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} e^{1/x}(1-i0) = \lim_{x\to 0} e^{1/x} \quad \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0 \end{cases} \neq$$

esto es lo que da

$C_2: x=0 \quad (z = 0+iy)$

$$L_2 = \lim_{y\to 0} 1\left(\cos(1/y) - i\,\mathrm{sen}(1/y)\right) = \lim_{y\to 0} e^{\pm\frac{1}{y}} \nexists L_2$$

$$\lim_{y\to 0} \cos(1/y), \quad \lim_{y\to 0} \mathrm{sen}(1/y) \quad \nexists$$

$$\nexists \lim_{z\to\infty} \exp(z)$$

32) b) $f(z) = \exp(-z^2)$

$$\lim_{z\to\infty} \exp(-z^2) = \lim_{z\to 0} \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

Tomar $C_3: z = x+ix$ $(y=x)$ y ver qué pasa

$C_1: z = x+i0$

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$C_2: z = iy$

$$L_2 = \lim_{y\to 0} \exp\left(\frac{-1}{(iy)^2}\right) = \lim_{y\to 0} \exp\left(\frac{1}{y^2}\right) = +\infty$$

$L_1 \neq L_2$ ∴ $\nexists \lim_{z\to\infty} \exp(-z^2)$

$f(z) = \underbrace{\mathrm{Arg}(z)}_{u(x,y)}$

u cont en $\mathbb{R}^2 - \{(x,0) \mid x \leq 0\}$

v cont en $\mathbb{R}^2$

$\overline{f(z)} = \mathrm{Arg}(z)$

tenemos: $\left.\begin{array}{l} f(z) = \overline{f(z)} \\ f \neq cte \end{array}\right\}$ f no es derivable $\forall z$.

f no derivable en ningún punto

$f(z) = \mathrm{Log}(z)$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{0\}$

- Cont en $\mathbb{C} - \{(x,0) / x \leq 0\}$
- Holomorfa en

$f'(z) = 1/z$

33) b) iv) $f(z) = \mathrm{Log}(\cos^2 z)$

$f'(z_0) = ?$, $z_0 = \pi(1+i)$

$f(z) = \mathrm{Log}(z)$

D: dom de holomorfía

$D = \mathbb{C} - \{ z / Re(z) \leq 0, Im(z) = 0 \}$

$g(z) = \mathrm{Log}(\cos^2(z))$

$D = \mathbb{C} - \{ z / Re(\cos^2(z)) \leq 0, Im(\cos^2(z)) = 0 \}$

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)} \cdot 2\cos(z)\,(-\mathrm{sen}(z))$$

$$f'(z) = -2\,\frac{\mathrm{sen}\, z}{\cos z} = -2\,\mathrm{tg}\, z$$

$$f'(\pi(1+i)) = \frac{-2\,\mathrm{sen}(\pi + i\pi)}{\cos(\pi + i\pi)}$$

$\mathrm{sen}(\pi(1+i)) = \mathrm{sen}(\pi)\,\mathrm{ch}(\pi) + i\cos(\pi)\,\mathrm{sh}(\pi) = -i\,\mathrm{sh}(\pi)$

$\cos(\pi(1+i)) = \cos(\pi)\,\mathrm{ch}(\pi) - i\,\mathrm{sen}(\pi)\,\mathrm{sh}(\pi) = -\mathrm{ch}(\pi)$

$$f'(\pi(1+i)) = -2\,\frac{(-i\,\mathrm{sh}\,\pi)}{-\mathrm{ch}\,\pi} = -2i\,\tanh(\pi)$$

34 - c) $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 3}$ $\rightarrow$ holom en $\mathbb{C}$ / $\rightarrow$ holom en $\mathbb{C}$

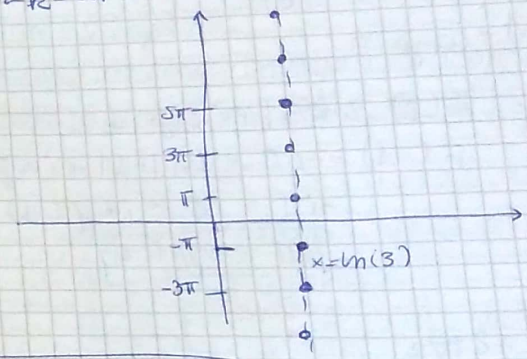
F holom en $\mathbb{C} - \{ z / e^z + 3 = 0 \}$

$z? \,/\, e^z + 3 = 0$

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = 3e^{i\pi}$$

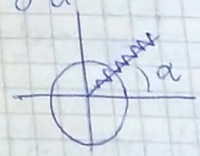
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 3 \rightarrow x = \ln(3) \\ y = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$z_k = \ln(3) + i\pi(2k+1), \ k \in \mathbb{Z}$



$\boxed{\text{Logaritmo}}$

$\log_\alpha z = \ln|z| + i \arg z, \quad \alpha \leq \arg z < \alpha + 2\pi$



Determinar una rama del log: es elegir cómo se miden los argumentos

La semirrecta $\{ z : \arg z = \alpha \}$ se denomina corte de rama

$z = 0$ punto de ramificación

es el punto que pertenece a todos los cortes de rama

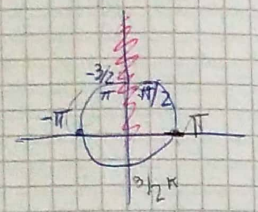
En log ppal, $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, $-\pi \leq \operatorname{Arg} z < \pi$

el corte de rama es: $\{z : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$

39 a - Sea $F(z)$ una rama del log cuyo corte de rama es la semirrecta $\{z \ \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ y $F(-1) = -i\pi$

$F(1)$? $F(-ie)$? $F(-e+ie)$?

$F(z) = \ln|z| + i \arg z$



$F(z) = \ln|z| + i \arg z$

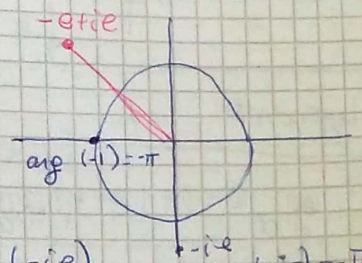
$F(-1) = -i\pi = \ln|-1| + i \arg(-1)$

$-i\pi = 0 + i \arg(-1)$

$\boxed{\pi = \arg(-1)}$

Luego:

$-\frac{3}{2}\pi \leq \arg z < \pi/2$



$F(1) = \ln|1| + i \arg(1)$

$= 0 + i0 = 0$

$F(-ie) = \ln|-ie| + i \arg(-ie)$

$= \ln e + i\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1 - i\pi/2$

$F(-e+ie) = \ln|e+ie| + i \arg(-e+ie) = \ln|\sqrt{2}\, e| + i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$

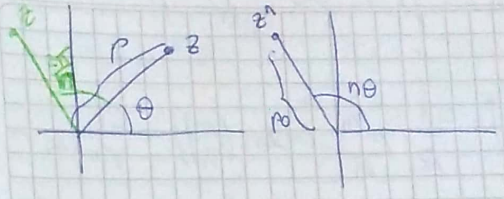
$= \ln\sqrt{2} + \ln e - i\, 5/4\, \pi = (\ln\sqrt{2} + 1) - i\frac{5}{4}\pi$

$\boxed{\text{Raíces n-ésimas}}$ inversas de z^n

$p(z) = z^n = \rho^n e^{i\theta} = \omega$ Resulta $|\omega| = \rho^n = |z|^n$

$\downarrow$ $\arg \omega = n\theta + 2k\pi$

$z = \rho e^{i\theta}$



$z^n = \omega$

$z = \text{"}\sqrt[n]{\omega}\text{"}$

$z^n = \rho^n e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})n}$

$= \rho^n e^{in\theta + 2k\pi} = \rho^n e^{in\theta}$

z^n no es inyectiva

Se pueden construir inversas restringiendo el dominio

Dado ω, cuál es "el" z / $z^n = \omega$?

$|\omega| = |z|^n \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|\omega|} = |\omega|^{1/n}$

$\arg \omega = n \arg z \Rightarrow \text{"}\arg z\text{"} = \frac{\text{"}\arg \omega\text{"}}{n}$

$\boxed{z = \sqrt[n]{|\omega|}\, e^{i\frac{\text{"}\arg \omega\text{"}}{n}}}$ ¿qué arg de ω tomamos?

$z = f^{-1}(\omega)$

Definimos la función raíz n-ésima:

$g(z) = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\arg z}{n}}$ con $\alpha \leq \arg z < \alpha + 2\pi$

- $\operatorname{Dom} g = \mathbb{C} - \{0\}$
- g es continua en el $\operatorname{Dom} g - \{z : \arg z = \alpha\}$
- g es derivable? $g(z) = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \sqrt[n]{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)$

$U(\rho, \theta) = \sqrt[n]{\rho} \cos\left(\frac{\theta}{n}\right)$

$V(\rho, \theta) = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)$

CR: $U_\rho = \frac{1}{n} \rho^{\frac{1}{n} - 1} \cos\left(\frac{\theta}{n}\right)$ $V_\rho = \frac{1}{n} \rho^{\frac{1}{n} - 1} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)$

$V_\theta = \rho^{1/n} \cos\left(\frac{\theta}{n}\right) \frac{1}{n}$ $U_\theta = \rho^{1/n}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right) \frac{1}{n}$

$$U_\rho = \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1}\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) = \frac{1}{\rho}\rho^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{\rho}V_\theta$$

$$V_\rho = \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\rho^{1/n}}{n}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right) = -\frac{1}{\rho}U_\theta$$

$\therefore$ g es derivable si $\rho > 0$, $\theta \neq \alpha$

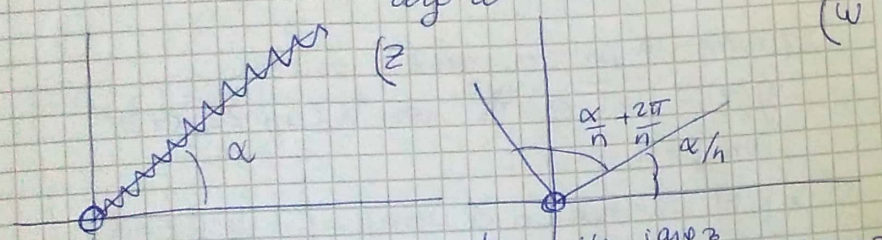
$$g'(z) = (U_\rho + iV_\rho)\,e^{-i\theta}$$

$$= \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1}e^{i\frac{\theta}{n}}e^{-i\theta} = \frac{1}{n}\rho^{\frac{1}{n}-1}e^{i\theta(1/n-1)}$$

$$= \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$$

• Imagen $\alpha \leq \arg(z) < \alpha + 2\pi$

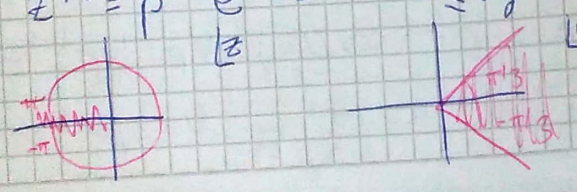
$$\frac{\alpha}{n} \leq \underbrace{\frac{\arg z}{n}}_{\arg w} < \frac{\alpha+2\pi}{n}$$



Ejemplo $g_1(z) = z^{1/3} = \rho^{1/3}e^{i\frac{\arg z}{3}}$ $-\pi \leq \arg z < \pi$

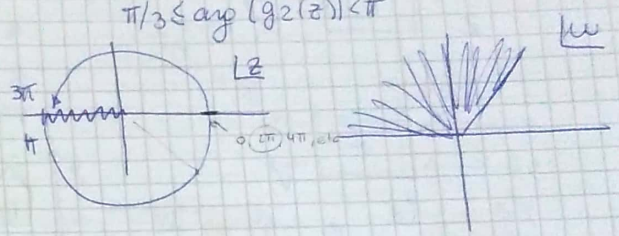
$$-\frac{\pi}{3} \leq \arg g_1(z) = \frac{\arg z}{3} < \frac{\pi}{3}$$

$g_1(z) = z^{1/3} = \rho^{1/3}e^{i\frac{\arg z}{3}}$ $-\pi \leq \arg z < \pi$



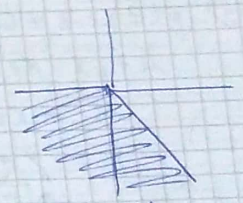
$g_2(z) = \rho^{1/3}e^{i\frac{\arg z}{3}}$ $\pi \leq \arg z < 3\pi$

$\pi/3 \leq \arg(g_2(z)) < \pi$



$g_3(z) = \rho^{1/3}e^{i\frac{\arg z}{3}}$ $-3\pi \leq \arg z < -\pi$

$-\pi \leq \arg(g_3(z)) < -\pi/3$



Exponentes complejos

$f(z) = z^c$ $(c \in \mathbb{C})$

z^n, $n \in \mathbb{N}$ $\quad e^{c\cdot\log z}$ para cierta determinación de una rama del logaritmo

$\vdots$

$\operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{0\}$

Continua en su dominio excepto en corte de rama

Holomorfa en su dominio, excepto en corte de rama

$$f'(z) = e^{c\log z}\cdot c\cdot\frac{1}{z} = e^{c\log z}\cdot c\cdot z^{-1}$$

$$= e^{c\log z}\cdot c\cdot e^{-\log z}$$

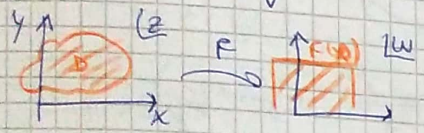
$$= c\cdot e^{c\log z - \log z}$$

$$= c\cdot e^{(c-1)\log z} = \boxed{c\cdot z^{c-1}}$$

FUNCIONES COMPLEJAS COMO TRASFORMACIONES EN EL PLANO

$$\mathbb{C} \xrightarrow[z]{} \boxed{F} \xrightarrow[w]{} \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[x,\ y]{} \boxed{F} \xrightarrow[u,\ v]{} \mathbb{R}^2$$

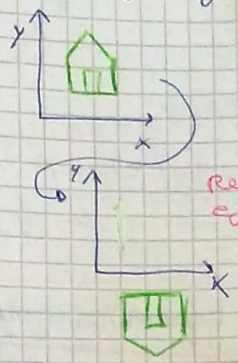


① $f(z) = \bar{z}$

$u + iv = \overline{x+iy} = x$

$u(x,y) = x$

$v(x,y) = -y$

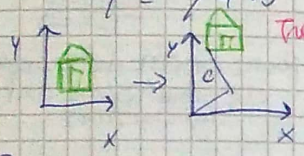


② $f(z) = z + c \quad , c \in \mathbb{C}$

$u + iv = x + iy + a + bi \qquad c = a + bi$

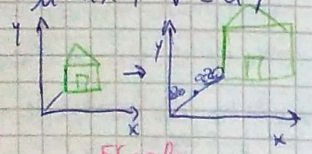
$u = x + a$

$y = y + b$



③ $f(z) = az \quad , a \in \mathbb{R}^+$

$u = ax \quad , \quad v = ay$

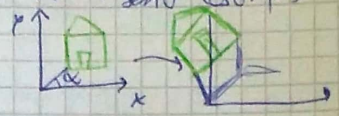


④ $f(z) = e^{i\theta} \cdot z = cz$ con $|z| = 1$

$= (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(x + iy)$

$u + iv = \cos\theta\, x - \mathrm{sen}\,\theta\, y + i(\cos\theta\, y + \mathrm{sen}\,\theta\, x)$ Rotación

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

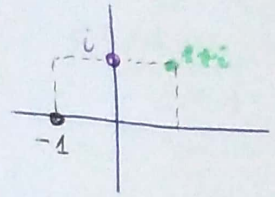


⑤ $f(z) = cz \qquad c \in \mathbb{C}, c = \rho e^{i\theta}$

$= \rho e^{i\theta} z$ $\boxed{\text{rotación + escala}}$

⑥ $f(z) = cz + b \qquad c \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}$

rotación + escala + traslación

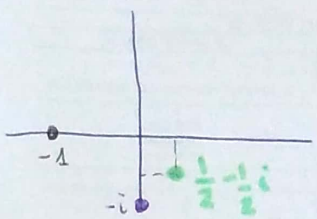


i a $\inf$

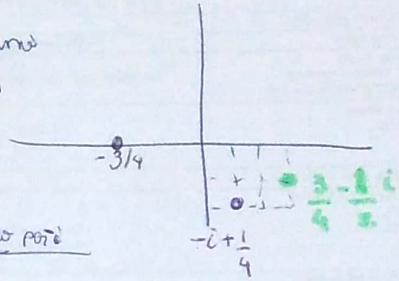
$1+i$ a 1

-1 a i

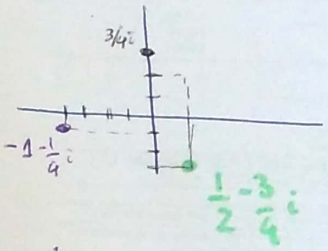
↓ lo invierto



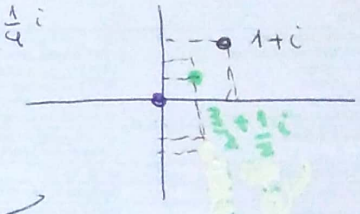
lo sumo 1/4 →



multiplico por i

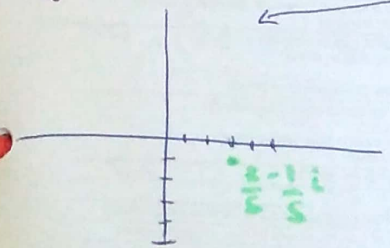


sumo $1 + \frac{1}{4} i$ →



α

invierto



→ mucho más

Planteo $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$f(i) = \infty = \dfrac{a(i)+b}{c(i)+d}$

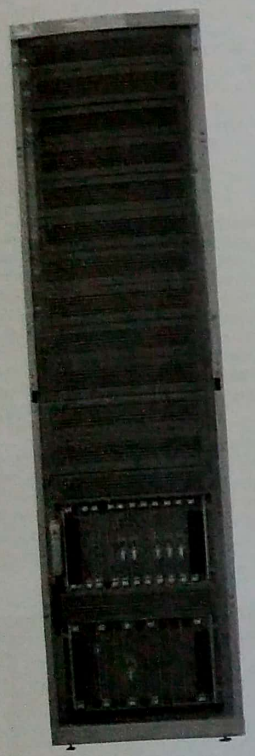
$f(-1) = i = \dfrac{a(-1)+b}{c(-1)+d}$

$f(1+i) = 1 = \dfrac{a(1+i)+b}{c(1+i)+d}$

$\frac{1}{3!} +$

MARCONI LH, ETSI

Cost effective high capacity microwave transmission over long distances



The Marconi LH (Long Haul) microwave system offers rapid roll-out of high transmission capacity with SDH compatibility and integrated network management. Based on long experience in Trunk Radio, this modern long-haul radio system is a more cost efficient solution than fiber in many applications such as fast modification of network topologies, and the rapid roll-out of backbone and feeder networks.

High integration, lowest cost of ownership
Marconi LH can also be used as a redundancy to fiber or when long hop-lengths are needed under difficult conditions. The modern, scalable and highly integrated design provides lowest cost of ownership in all parts of the products life cycle: deployment, expansion and operation.

Key features/benefits
- STM-1 transmission, upgradeable to transparent STM-4
- Rapid roll-out
- Frequencies from 3.6 to 13 GHz
- Optimum spectrum efficiency through 64 MLQAM, 128 MLQAM and XPIC (Cross Polarization Interference Canceller)
- Full software download capability
- Outstanding compact building practice and low power consumption
- Highly robust system architecture providing high MTBF (Mean Time Between Failure)
- Multiple protection schemes
- The modern design provides lowest cost of ownership
- Plug and Play for Spare Part Handling

Greater frequency band utilization
Up to ten RF channels can be used, depending on the frequency pattern. Using XPIC, each RF channel can be used on two polarizations, thus doubling the transmission capacity. This means that up to twenty STM-1 or five STM-4 signals can be transmitted via a single antenna.

ERICSSON

7) $f(z) = z^2$

$u + iv = x^2 - y^2 + 2xy\, i$

$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy$

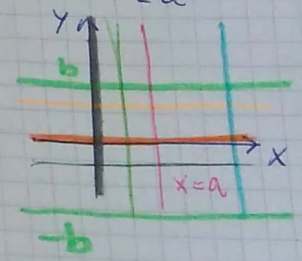
¿Cómo transforma la red cartesiana? conjunto de rectas $x = cte$, $y = cte$

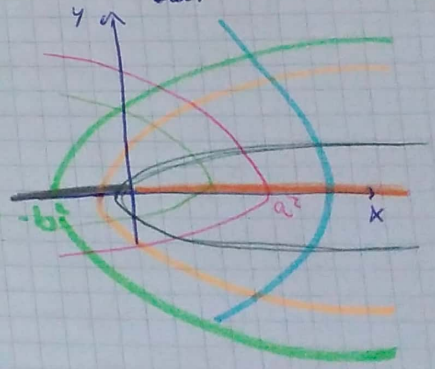
$x = a$ se transforma en:

$u = a^2 - y^2 \quad , \quad v = 2ay \quad y \in \mathbb{R}$

$\gamma(y) = (u(y), v(y)) = (a^2 - y^2, 2ay)$

si $a \neq 0$ $\quad y = \frac{v}{2a} \qquad u = a^2 - \left(\frac{v}{2a}\right)^2$





$y = b$ se transforma en

$\left.\begin{array}{l} u = x^2 - b^2 \\ v = 2xb \end{array}\right\}$ si $b \neq 0$, $x = \frac{v}{2b}$

$u = \left(\frac{v}{2b}\right)^2 - b^2$

Familias ortogonales de parábolas

$y = 0$ se transforma

$u = x^2$

$v = 0$

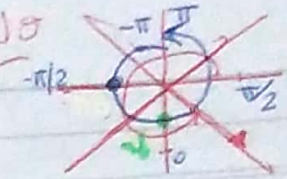
$x = 0$ se transforma en

$u = -y^2$

$v = 0$

Hasta el 39

No



log conmis

2π $\frac{\pi}{4}$

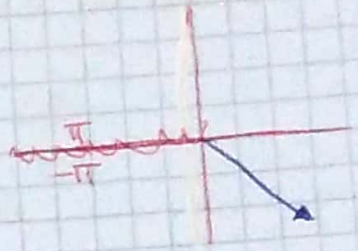
Cosas pendientes

(25)

b) $Lg(1-i) = Lg(e^{-\pi i}\sqrt{2})$

$= \ln|\sqrt{2}| + i\arg(1-i)$

$= \ln|\sqrt{2}| - i\frac{\pi}{4}$



c) $(-i)^{2i} \underset{\text{arg ppal}}{=} (e^{-i\pi/2})^{2i} = e^{-i\frac{\pi}{2}2i} = e^{\pi}$

(26) b) $\exp(i\pi/2) = e^0\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + ie^0\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$

c) $\exp(z+i\pi) = -\exp(z)$

$= e(x+yi+i\pi) = e^x\cos(y+\pi) + ie^x\operatorname{sen}(y+\pi)$

$= -e^x\cos(y) - ie^x\operatorname{sen}(y) = -\exp(z)$

d) $\overline{\exp z} = \overline{e^x\cos y + ie^x\operatorname{sen} y} = e^x\cos y - ie^x\operatorname{sen} y$

$= e^x\cos(-y) + ie^x\operatorname{sen}(-y)$

$= \exp(\bar{z})$

$-\operatorname{sen}(y) = \operatorname{sen}(-y)$

$\cos(y) = \cos(-y)$

$\cos(y+\pi) = -\cos(y)$

$\operatorname{sen}(y+\pi) = -\operatorname{sen}(y)$

27) a)

$\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$

sii

$\boxed{z = k\pi}$

• $\exp(i(x-iy)) = \exp(y+ix)$

$= e^y\cos(x) + ie^y\operatorname{sen}(x)$

• $\overline{\exp(iz)} = e^{-y}\cos(x) - ie^{-y}\operatorname{sen}(x)$

$\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$ sii $e^y\cos(x) = e^{-y}\cos(x)$

$e^y\operatorname{sen}(x) = -e^{-y}\operatorname{sen}(x)$

Si $\cos(x) \neq 0 \Rightarrow e^{y} = -e^{-y}$ sea $y=0$

Si $\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k \neq 0$

en (2) $e^{y} = -e^{-y}$ Abs

Si $y=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$

Sii $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{z = k\pi + i0}$

b) $\cos(i\bar{z}) = \cos(i(x-iy)) = \cos(y+ix)$

$$= \frac{e^{i(y+ix)} + e^{-i(y+ix)}}{2}$$

se cumple siempre

$$\overline{\cos(iz)} = \overline{\cos(i(ix+yi))} = \overline{\cos(-y+ix)} = \overline{\frac{e^{i(-y+ix)} + e^{-i(-y+ix)}}{2}}$$

c) $$\operatorname{sen}(i\bar{z}) = \frac{e^{i(x-iy)} - e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{y} - e^{-ix}e^{-y}}{2i} \quad (*)$$

$$\overline{\operatorname{sen}(iz)} = \overline{\frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}} = \overline{\frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i}}$$

$$= \frac{e^{ix-y}}{2i} - \frac{e^{-ix}e^{y}}{2i} = \frac{-i}{2}e^{ix-y} - \left(\frac{-i}{2}\right)e^{-ix}e^{y}$$

$$= \frac{i}{2}e^{-ix-y} - \frac{i}{2}e^{ix}e^{y}$$

$$= \frac{i}{2}\left(e^{-ix}e^{-y} - e^{ix}e^{y}\right)$$

$$= \frac{e^{i\pi/2}}{2}\left(e^{-ix}e^{-y} - e^{ix}e^{y}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{-ix+i\pi/2}e^{-y} - e^{ix+\pi/2}e^{y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-ix+\pi/2}e^{-y} + e^{ix+\frac{3}{2}\pi}e^{-y}\right)$$

$e^{i\pi}$

$$(*) \quad -i\,e^{ix}e^{y} + i\,e^{-ix}e^{-y}$$

$$= -e^{i\pi/2}e^{ix}e^{y} + e^{i\pi/2}e^{-ix}e^{-y}$$

$$= \frac{-e^{i(x+\pi/2)}e^{y} + e^{i(\pi/2-x)}e^{-y}}{2} = \frac{-e^{-i(x-\pi/2)}e^{-y} + e^{i(x+\pi/2)}e^{y}}{2}$$

$$-e^{i(x+\pi/2)}e^{2y} + e^{i(\pi/2-x)} = -e^{i(-x+\pi/2)} + e^{i(x+\pi/2)}e^{2y}$$

$$2e^{i(\pi/2-x)} = 2e^{i(x+\pi/2)}e^{2y}$$

Sii $\boxed{y=0} \rightarrow \pi/2 - x = x + \pi/2$

$-x = x \rightarrow \boxed{e^{0}x = 0?}$ ¡No!

... mucho lío, le creo que $\boxed{\overline{\operatorname{sen}(i\bar{z})} = \operatorname{sen}(iz) \text{ Sii } z = k\pi i}$

(28) $\operatorname{sen} z = 0$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0$$

$$e^{2iz} - 1 = 0$$

$w = e^{iz} \Rightarrow w^2 - 1 = 0$

$w^2 = 1$

$\boxed{w = \pm 1}$

(1) $\rightarrow x_1 = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

(-1) $\rightarrow x_2 = \pi + 2k'\pi = (2k'+1)\pi$

$\rightarrow x = k\pi$

$$e^{iz} = \pm 1$$

$$e^{-y}e^{ix} = \pm 1$$

$$|\pm 1| = e^{0} = e^{\pm i\theta}$$

$y=0$

$e^{ix} = e^{i0}$

$e^{ix} = e^{i\pi}$

$\rightarrow x = 0 \vee x = \pi$

$x = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$e^{-y} = \pm 1 \Leftrightarrow \ln(\pm 1) = 0$

¿Por qué no me salían soluc?

$\frac{1}{3!}$

$\frac{1}{2}$

37-b)

$f(z) = \log\left(\frac{1}{z(z-1)}\right)$

$D_f = \mathbb{C} - \left\{ z / \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) \leq 0 ; \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) = 0 \right\}$

$\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) = \frac{1}{z(z-1)} \cdot \frac{\bar{z}(\bar{z}-1)}{\bar{z}(\bar{z}-1)}$

$= \frac{\bar{z}(\bar{z}-1)}{|z|^2 |z-1|^2} = \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}}{|z|^2 |z-1|^2}$

$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{(x-iy)^2 - (x-iy)}{(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}$

$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) = \frac{x^2-y^2-x}{(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)} \leq 0$

$\Updownarrow$

$x^2 - y^2 - x \leq 0$ (2)

$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right) = \frac{-2xy+y}{(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)} = 0$

si

$-2xy + y = 0$ (1)

si $y = 0$ $\operatorname{Im}(z)$ $x^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0$

si $\cancel{x} - 2x = 0$ en 2 $x^2 - x \leq 0$ si x

$(x = 1/2)$

$\frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} \leq 0$

$-\frac{1}{4} - y^2 \leq 0 \rightarrow$ se vuelve $\forall r$

$y = 0$
$x \in [0, 1]$

31. Probar que:
    (a) $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$ ✓
    (b) $|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sen}^2(y)$
    (c) $|\operatorname{ch} z|^2 = \operatorname{sh}^2(x) + \cos^2(y) = \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$

32. Determinar si existen los siguientes límites en el plano complejo ampliado $\mathbb{C}^*$:
    (a) $\lim_{z\to\infty} \exp z$ (b) $\lim_{z\to\infty} \exp(-z^2)$ clase (c) $\lim_{z\to 0} \exp(-|z|^2)$ clase OK

33. (a) Para las funciones del ejercicio 29, determinar los puntos en que son continuas, derivables y/o holomorfas.
    (b) Calcular $f'(z)$ en $z = z_0$, siendo:
    (i) $f(z) = \operatorname{sh}(\operatorname{sen} z)$ $z_0 = \pi/4$ (ii) $f(z) = \exp(2\operatorname{ch} z)$ $z_0 = i$
    (iii) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ $z_0 = 2i$ (iv) $f(z) = \operatorname{Log}(\cos^2 z)$ clase $z_0 = \pi(1+i)$

34. Estudiar continuidad y holomorfía de:
    (a) $f(z) = \operatorname{tg} z$ ✓ (b) $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}$
    (c) $f(z) = \frac{1}{\exp z + 3}$ (d) $f(z) = \frac{1}{(\exp z - 1)(\operatorname{sen}(1+i)z)}$
    (e) $f(z) = e^{(x^2-y^2)}(\cos(2xy) + i\operatorname{sen}(2xy))$
    (f) $f(z) = \operatorname{sen}(\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}})\operatorname{ch}(\underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}) - i\cos(\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}})\operatorname{sh}(\underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}})$ $= \operatorname{sen}(g)$

$\boxed{g = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}}$

$\ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

35. Hallar todos los valores de $\log(1+i)$ y de $(1+i)^{3+4i}$. ✓

N 36. Comprobar que:
    (a) $\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2)$
    (b) $\log z_1 - \log z_2 = \log\frac{z_1}{z_2}$ pero $\operatorname{Log}(-1-i) - \operatorname{Log} i \neq \operatorname{Log}(\frac{-1-i}{i})$
    (c) $z^a z^b = z^{a+b}$
    (d) $\frac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$
    (e) $\log z^a = a \log z$ pero $\operatorname{Log} i^3 \neq 3\operatorname{Log} i$

$\log(z_1) = \ln|z_1| + i\arg(z_1)$
$-\log(z_2) \quad -\ln|z_2| - i\arg(z_2)$

$\log(-1-i) = \ln|-1-i| + \operatorname{Arg}(-1-i)$
$-\log(i) \quad -\ln|i| - \operatorname{Arg}(i)$
$= \ln\left|\frac{-1-i}{i}\right| + \operatorname{Arg}(-1-i) - \operatorname{Arg}(i)$

37. Para cada una de las siguientes funciones, describir el mayor dominio posible de holomorfía y calcular su valor en $z = i$:
    (a) $f(z) = \operatorname{Log}(2z+i)$ (b) $f(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{z(z-1)}\right)$ x. este con duda

38. Determinar los puntos de ramificación y uniformizar las siguientes funciones:
    (a) $(z-1+i)^{\frac{1}{2}}$ (b) $((z-i)(z-1))^{\frac{1}{2}}$ (c) $\log((z-2i)(z+3i))$

clase

$D_f = \mathbb{C} - \{z = x+iy,\ y=0\ \ x \in [0,1]\} \cup \{z = \frac{1}{2} + iy,\ y \in \mathbb{R}\}$

$f(i) = \log\left(\frac{1}{i(i-1)}\right) = \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{4}\pi$

38-b)

$f(z) = (z^2-1)^{1/2}$ $\qquad z^w = e^{w\log(z)}$

$\| $

$e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$

¿Puntos ramificación? z tal que $z^2-1=0$ → $z=1$, $z=-1$

"UNIFORMIZAR" → elija un corte para "log"

F1) Elijo $f(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}$ $\qquad z^2-1 = x^2-y^2-1 + i2xy$

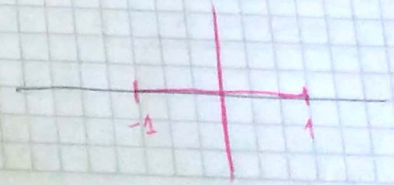
$\text{Corte} = \{z \,/\, \operatorname{Im}(z^2-1)=0,\ \operatorname{Re}(z^2-1) \leq 0\}$

$\operatorname{Im}(z^2-1)=0 \Leftrightarrow 2xy=0$

$\operatorname{Re}(z^2-1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2-y^2-1 \leq 0$

Si $x=0$ en (2): $-y^2-1 \leq 0\ \ \forall y \in \mathbb{R}$

Si $y=0$ en (2) $\quad x^2-1 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$

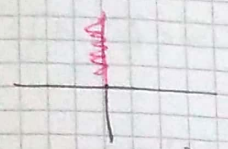


$D_{f_1} = \mathbb{C} - \{z = \text{[illegible]}\}$

$\frac{1}{3!}$ +

2) Elijo $\alpha = 0$

3) $\alpha = \pi/2$

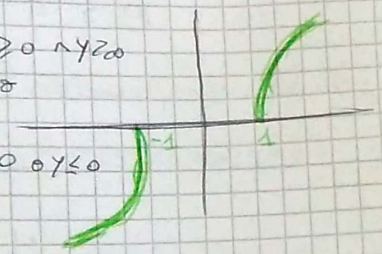


$$f_3(z) = e^{\frac{1}{2}\log_{\frac{\pi}{2}}(z^2-1)}$$

corte $= \{ z \,/\, Re(z^2-1) = 0 \,,\, Im(z^2-1) \geq 0 \}$

$2xy \geq 0 \;;\; x^2 - y^2 - 1 = 0$

$$xy \geq 0 \begin{cases} x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ \text{o} \\ x \leq 0 \text{ o } y \leq 0 \end{cases}$$



39-b) $G(z) = 1 + z^{1/3}$

$z^{1/3}$ def en $\mathbb{C} - \{ z \,/\, z = iy \,,\, y \geq 0 \}$,

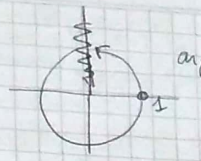
$1^{1/3} = 1$

$$z^{1/3} = e^{1/3 \log z} = |z|^{1/3} e^{i\frac{\arg z}{3}}$$

$$|1|^{1/3} e^{i\frac{\arg(1)}{3}} = 1 = e^{i2k\pi}$$

$\arg 1 = 6k\pi$

$\boxed{\text{tomamos } k = 0}$



$\arg 1 = 0$

Luego tomamos

$-\frac{3}{2}\pi \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$

$$G(-1) = 1 + (-1)^{1/3}$$
$$= 1 + |-1|^{1/3} \cdot e^{i\frac{\arg(-1)}{3}}$$
$$= 1 + e^{i\frac{\arg(-1)}{3}} = 1 + e^{\frac{-i\pi}{3}}$$
$$= 1 + \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$G(-i) = 1 + (-i)^{1/3} = 1 + |-i|^{1/3} \cdot e^{i\frac{\arg(-i)}{3}}$$
$$= 1 + 1 \cdot e^{i\frac{\arg(-i)}{3}} = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} = 1 + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

40 - a) $1^{1/2} = 1$ $\quad (-1)^{1/2} = i$

$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

Si $z = x \,,\, x > 0$ $\quad x^{1/2} = |x|^{1/2} e^{i\frac{\arg z}{2}} = x^{1/2} e^{i\frac{\arg z}{2}}$

$|z|\,x$ $\quad = \sqrt{x}\, e^{i\frac{\arg z}{2}} = \sqrt{x}$

Tomamos $\arg z = 0$ si $z = x \,,\, x > 0$ $\quad$ se cumple para $2k\pi$

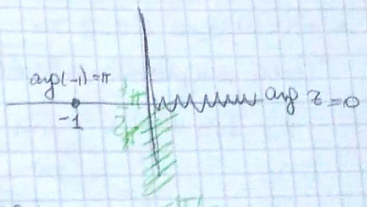
Además, $(-1)^{1/2} = i$

$$\underbrace{|-1|^{1/2}}_{1} e^{i\frac{\arg(-1)}{2}} = i = e^{i\pi/2}$$

Tomamos $\arg(-1) = \pi$

$-\pi/2 < \arg z < \frac{3}{2}\pi$

no es única, puede tomarse el corte en cualquier semirrecta del semip. inferior

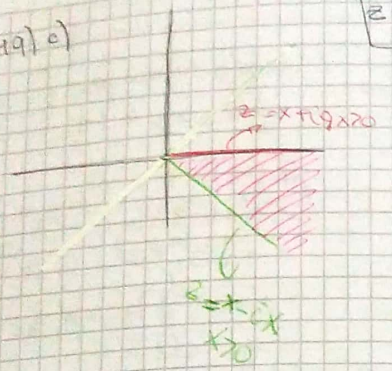


49) c)

$$\boxed{z^2 = w = u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi}$$

$u = x^2 - y^2$

$v = 2xy$



Los puntos $z = x + i0$, $x > 0$ se transforman en

$u = x^2 \geq 0$

$v = 0$

Los puntos $z = x - ix$, $x > 0$ se transforman

$u = x^2 - (-x)^2 = 0$

$v = 2x(-x) = -2x^2$

$D = \{ z \mid -\pi/4 < \arg z < 0 \}$

$z^2 = |z|^2 e^{i 2\arg z} = w$

$-\frac{\pi}{2} < \arg w = 2\arg z < 0$

$f(z) = 1/z$

$w = 1/z = u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$

$zw = 1$

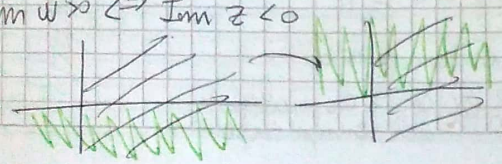
$|z||w| = 1$

Si $|z| < 1 \Rightarrow |w| > 1$
$|z| = 1 \Leftrightarrow |w| = 1$ } lleva int de circunf de radio 1 en exterior de circunf de radio 1.

$u = \mathrm{Re}\, w > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z > 0$

"lleva semiplano derecho en semiplano derecho"

$v = \mathrm{Im}\, w > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, z < 0$



$\mathrm{Im}(0) = \infty$ en el plano w

Si $\underbrace{|z| = \varepsilon}_{\text{chico}} \Leftrightarrow \underbrace{|w| = \frac{1}{\varepsilon}}_{\text{grande}}$

Circunferencias

$a(x^2+y^2) + bx + cy + d = 0$

Recta

$bx + cy + d = 0$

} Rectas y circunf.
Si $a = 0$ recta, c.o.c. circunf.
Si $d = 0$, pasa por el origen.

$d \neq 0$ no pasa por el origen

$w = \frac{1}{z}$ sii $z = \frac{1}{w}$

$x + iy = \frac{u}{u^2+v^2} - \frac{iv}{u^2+v^2}$

$$\boxed{x = \frac{u}{u^2+v^2} \qquad y = \frac{-v}{u^2+v^2}}$$

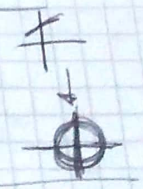
Reemplazando en (*)

$$a\left(\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2\right) + b\frac{u}{u^2+v^2} - \frac{cv}{u^2+v^2} + d = 0$$

$$a\left(\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}\right) + b\frac{u}{u^2+v^2} - \frac{cv}{u^2+v^2} + d = 0$$

$$a + bu - cv + d(u^2+v^2) = 0$$

a \ d	$d = 0$	$d \neq 0$
$a = 0$	recta por el origen → recta por el eje	recta no por origen → circunf x origen
$a \neq 0$		

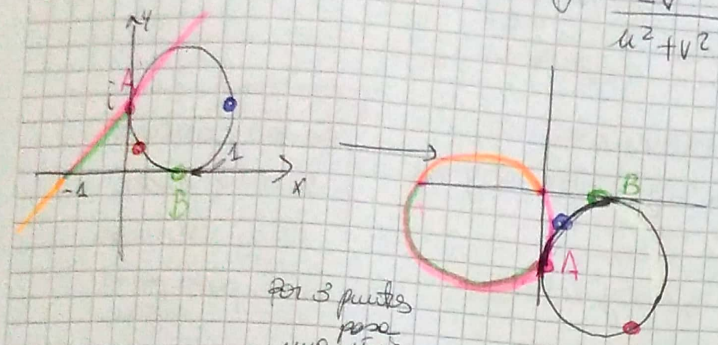


$C_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

$x = \dfrac{u}{u^2+v^2}$

$y = \dfrac{-v}{u^2+v^2}$



Por 3 puntos pasa una única circunferencia

$L_1 : y = x + 1$

$0 = x - y + 1$

$\dfrac{u}{u^2+v^2} - \left(\dfrac{-v}{u^2+v^2}\right) + 1 = 0$

$u + v + u^2 + v^2 = 0$

$(u + 1/2)^2 + (v + \frac{1}{2})^2 = 1/2$

Homográfica

$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$= \dfrac{a(z + b/a)}{c(z + d/c)} = \dfrac{a}{c} \dfrac{(z + d/c - d/c + b/a)}{(z + d/c)}$

$a \neq 0$
$c \neq 0$

$= \dfrac{a}{c}\left[1 + \dfrac{(b/a - d/c)}{z + d/c}\right]$

$= \dfrac{a}{c} + \dfrac{cb - da/c^2}{z + d/c}$

$= \dfrac{a}{c} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{(bc - ad)}{z + d/c}$

$= \dfrac{a}{c} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{(bc - ad)}{z + d/c} = \boxed{\dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c} \cdot \dfrac{1}{cz + d}}$

$\boxed{\text{Si } ad - bc = 0}$

$f(z) = a/c$

La homográfica con $c \neq 0$, $a \neq 0$ es compos de:

rotación y escala (cz)

traslación $(cz + d)$

inversión $(1/(cz+d))$

rotación y escala $\left(\dfrac{bc - ad}{c} \dfrac{1}{cz+d}\right)$

traslación $\left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c} \cdot \dfrac{1}{cz+d}\right)$

$\boxed{\text{Si } c = 0}$ $f(z) = \dfrac{a}{d} z + \dfrac{b}{d}$ rotación y escala + traslación.

$\boxed{\text{Si } a = 0}$ $f(z) = \dfrac{b}{cz+d}$ rotación y escala, traslación, inversión, rotación y escala

Ej: $f(z) = \dfrac{2z+3}{iz-1} = \dfrac{2(z+3/2)}{i(z+i)} = \dfrac{2}{i}\left[\dfrac{z + i - i + 3/2}{z+i}\right]$

$= \dfrac{2}{i}\left(1 + \dfrac{3/2 - i}{z+i}\right) = \dfrac{2}{i} + \dfrac{\frac{2}{i}\left(\frac{3}{2} - i\right)}{z+i} = \dfrac{2}{i} + \dfrac{\left(\frac{3}{i} - 2\right)}{z+i}$

Esta f es composición de:

$f_1(z) = z + i = z_1$

$f_2(z_1) = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z+i} = z_2$

$f_3(z_2) = \left(\frac{3}{i} - 2\right) z_2 = \frac{3/i - 2}{z+i} = z_3$

$f_4(z_3) = z_3 + \frac{2}{i} = \frac{3/i - 2}{z+i} + 2/i = f(z) = w$

La homográfica transforma rectas y circunf en rectas y circunf.

Exponencial $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$

$w = e^z$

$u + iv = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$

$u = e^x \cos y$

$v = e^x \operatorname{sen} y$

Cómo transforma la red cartesiana (conj de rectas $x = cte$, $y = cte$)

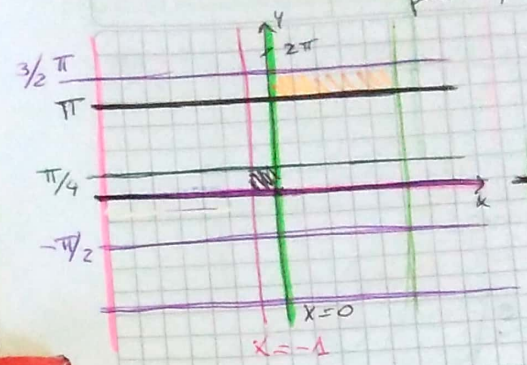
$x = a$

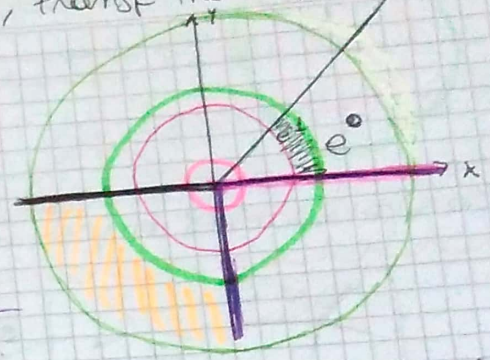
$u = e^a \cos(y)$

$v = e^a \operatorname{sen}(y)$

se transforma en circunferencia de radio e^a

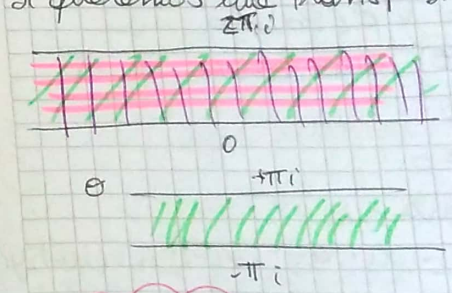
Lo cubre infinitas veces el plano, transf no biyectiva

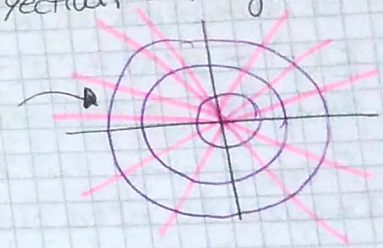




La exponencial transforma sectores rectangulares en sectores circulares.

Si queremos que transf biyectiva, restringimos los z.





Logaritmo $w = f(z) = \log_\alpha(z) = \ln(z) + i \arg z$

$\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$

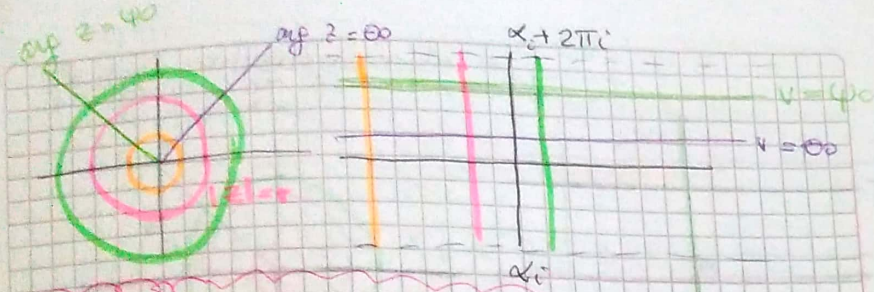
$u = \ln|z|$

$v = \arg(z) \Rightarrow \alpha < v < \alpha + 2\pi$

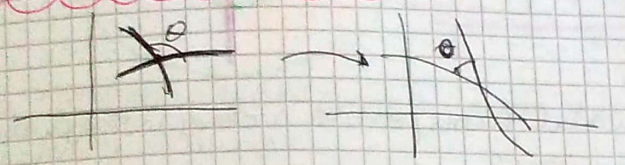
¿Cómo transforma la red polar?

$|z| = r$ $\quad r$ cte $\Rightarrow u = \ln r = cte$

$\arg z = \theta_0$ $\quad \theta_0$ cte $\Rightarrow v = \theta_0$



transformaciones conformes



Una transformación $w = f(z)$ es conforme en z_0 si f es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$.

Sea $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ una curva en el plano complejo, $z(t_0) = z_0$

Sea f conforme en z_0.

La Imagen de esta curva es:

$$w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + i\,v(x(t), y(t))$$
$$= U(t) + i\,V(t)$$

La velocidad de $w(t)$:

$$w'(t) = \frac{d}{dt}\left(U(t) + i\,V(t)\right) = \frac{dU(t)}{dt} + i\,\frac{dV(t)}{dt}$$

f conforme en z_0, f es derivable en z_0.

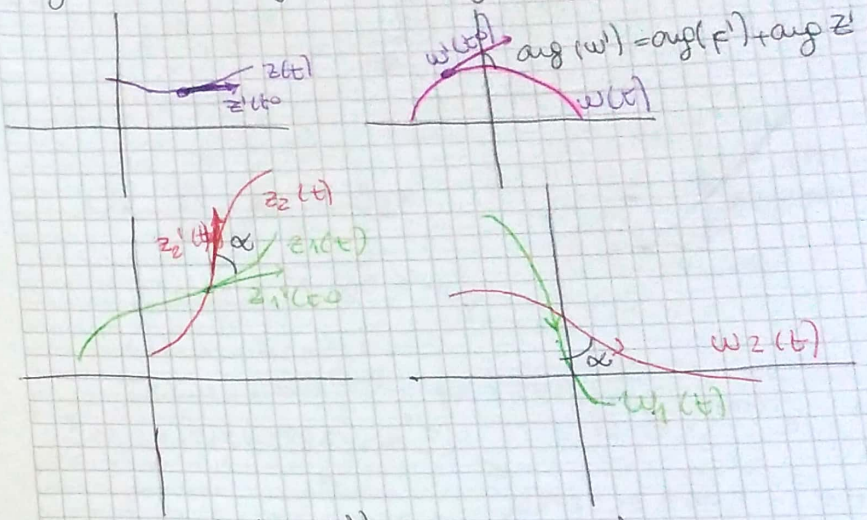
$$= u'_x x' + u'_y y' + i\left(V'_x x' + V'_y y'\right)$$
$$= (u'_x + i V'_x)\,x' + (u'_y + i V'_y)\,y'$$
$$= (u'_x + i V'_x)\,x' + i\,(V'_y - i u'_y)\,y'$$
$$\underset{\text{CR}}{=} (u'_x + i V'_x)\,x' + i\,(u'_x + i V'_x)\,y = \underbrace{(u'_x + i V'_x)}_{f'(z_0)}\underbrace{(x' + i y')}_{z'(t_0)}$$

f conforme en z_0 $f'(z_0) \neq 0$

$w'(t_0)$

$f'(z_0) \neq 0$

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0))$$



$$\arg(z_1'(t)) + \alpha = \arg(z_2'(t))$$

$$\arg(z_2'(t)) - \arg(z_1'(t)) = \alpha$$

$$\arg(w_2'(t)) - \arg(w_1'(t)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z_1'(t_0)) - \left[\arg(f'(z_0)) + \arg(z_2'(t_0))\right]$$

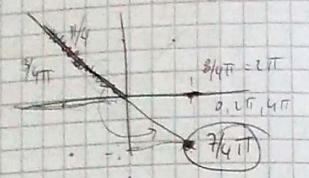
$$= \arg(z_2'(t_0)) - \arg(z_1'(t_0))$$

se mantiene α

$\log_\alpha z = \ln|z| + i\arg(z)$, $\alpha \le \arg(z) \le \alpha + 2\pi$

$e^{\log_\alpha z} = e^{\ln|z|} e^{i\arg(z)} = |z| \frac{z}{|z|} = z$

$e^{i\arg(z)}$



$\arg(1-i) = -\pi/4 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{3}{4}\pi < \arg(z) < \frac{11}{4}\pi$

euler

$e^{iz} = e^{i(x+y)} = e^{-y} e^{ix}$ | $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\qquad \mathrm{sen}(3+2i) = \frac{e^{-2+3i} - e^{2+3i}}{2i}$

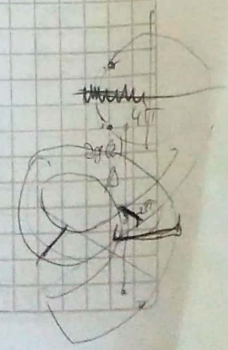
$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ (multivalado)

$\arg(z) = \alpha$ / $e^{i\alpha} = \frac{z}{|z|}$

$\arg(z) = \alpha_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$e^{\log z} = z$

$z = e^{\ln|z|} e^{i\arg(z)} = |z| \frac{z}{|z|} = z$ ✓



$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z)$ / $\lambda \le \arg(z) < \lambda + 2k\pi$

$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$

(28) b) $\cos(z) = 0$

$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \quad z \neq 0$

$e^{i2z} + 1 = 0$

$e^{i2z} = -1$

$e^{iz} = \omega$

$\omega^2 = -1$

$\omega \to i = e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}$

$\omega \to -i = e^{i(-\pi/2 + 2k\pi)}$

$\omega = e^{i(\pi/2 + k\pi)}$

$e^{iz} = e^{iz} = \pm i$

$e^{iz} = \boxed{\begin{matrix} e^{-y} e^{ix} = i \\ e^{-y} e^{ix} = -i \end{matrix}}$

(1) $1 = 1$

(2) $x = \pi/2 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$

(3) $1 = 1$

(4) $x = -\pi/2 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$

$\boxed{x = \pi/2 + 2k\pi}$

$\boxed{z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i0 \; ; \; k \in \mathbb{Z}}$

c) $\cos(z) = 10$

$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 10$

$e^{iz} + e^{-iz} = 5$

$e^{2iz} + 1 - 5e^{iz} = 0$

$\omega^2 - 5\omega + 1 = 0$

$\omega = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$e^{iz} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$e^{-y} e^{ix} = \left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right) e^{i(0 + 2k\pi)}$

$y = -\ln\left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right) ; \; x = 0 + 2k\pi$

$\boxed{z_{1,2,k} = -\ln\left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right) i + 2k\pi \; , \; k \in \mathbb{Z}}$

$\frac{1}{3!}$ +

e) $\boxed{\operatorname{sen} z = a}$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = a$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2ia$$

$$e^{2iz} - 1 - 2ia\,e^{iz} = 0$$

$$w^2 - 2iaw - 1 = 0$$

$$w = \frac{-(-2ia) \pm \sqrt{(-2ia)^2 - 4(-1)}}{2}$$

$$w = \frac{2ia \pm \sqrt{-4a^2+4}}{2}$$

$$w = \frac{2ia \pm \sqrt{4(-a^2+1)}}{2}$$

$$w = \frac{2ia \pm 2\sqrt{1-a^2}}{2}$$

$$\boxed{w = 2ai \pm \sqrt{1-a^2}}$$

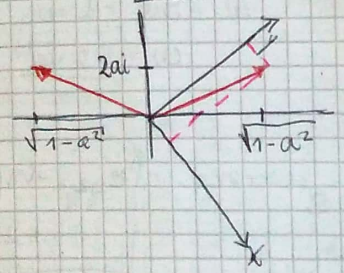
$$|w| = \sqrt{(2a)^2 + \left(\sqrt{1-a^2}\right)^2} = \sqrt{4a^2+1-a^2} = \boxed{\sqrt{3a^2+1}}$$

$$e^{iz} = e^{ix}\,e^{-y} = 2ai \pm \sqrt{1-a^2}$$

$\operatorname{atan2}(y,x)$

$$e^{-y} = \sqrt{3a^2+1}$$

$$\boxed{y = -\ln\left(\sqrt{3a^2+1}\right)}$$



$$w = (c+di) \pm \sqrt{1-(c^2-d^2+2icd)}$$

$a = x+iy$

$a^2 = x^2-y^2+2ixy$

$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{arctg}(2x+$

$$2c+2di \pm \sqrt{1-c^2+d^2-2icd}$$

debe quedar así

$e^{iz} = w$

$\log(e^{iz}) = \log(w)$

$iz = \operatorname{Log}(w)$

$z = -i\operatorname{Log}(w) = \ldots(\ln|w| + i\operatorname{Arg}(w))$

Poshito haciendolio

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(c+di) = \frac{e^{i(c+di)} - e^{-i(c+di)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{ic}e^{-d} - e^{-ic}e^{d}}{2i}$$

$$2i\operatorname{sen}(z) = e^{-d}e^{ic} - e^{d}e^{-ic} = e^{d}\left(e^{ic} - e^{-ic}\right)$$

$$= e^{-(\frac{d}{2}-\frac{d}{2})}e^{ic} - e^{\frac{d}{2}+\frac{d}{2}}e^{-ic}$$

$\cos(c) + i\operatorname{sen}(c)$

f) $$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{e^{z}-e^{-z}} = \frac{\cosh(z)}{\operatorname{senh}(z)}$$

esto para la guía es cosh, lo cual es una mala abreviatura

$$e^{-z} + e^{z} = \frac{1}{2}e^{z} - \frac{1}{2}e^{-z}$$

$$\frac{3}{2}e^{-z} = -\frac{1}{2}e^{z}$$

$$\frac{3}{\cancel{2}} = -\frac{1}{\cancel{2}}e^{2z} \Rightarrow -e^{2z} = 3$$

$$-e^{2(x+iy)} = 3$$

$$-\left[e^{2x}\cdot e^{i2y}\right] = 3$$

$$e^{2x}\,e^{i2y} = -3 = 3e^{i(\pi+2k\pi)}$$

$$e^{2x} = 3$$

$$e^{i2y} = e^{i(\pi+2k\pi)}$$

$$\boxed{x = \frac{\ln(3)}{2} \qquad y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$e^{z} + e^{-z} = 1$$

$$e^{2z} + 1 = e^{z} \qquad w = e^{z}$$

$$w^2 - w + 1 = 0$$

$$\hookrightarrow w = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|w| = 1$$

$$\arg(w) = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$e^{z} = e^{x}e^{iy} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = |w|e^{i\arg w}$$

$$e^{x} = 1 \rightarrow \boxed{x = \ln(1) = 0}$$

$$e^{iy} = e^{i\arg w} \Rightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{3} + k\pi}$$

$\frac{1}{3!}$ +

$(\operatorname{Log} z)^2 + \operatorname{Log} z = -1$

$w = \operatorname{Log} z$

$w^2 + w + 1 = 0$

$\to w = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$|w| = 1$

$\operatorname{Log} z = -1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\ln r = -1/2 \to r = e^{-1/2} = |z|$

$i\theta = \pm\sqrt{3}/2\, i \to \theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{Arg}(z)$

$-\pi \leq \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \pi$ ✓

$$\boxed{z_{1,2} = e^{-1/2}\, e^{i(\pm\sqrt{3}/2)}}$$

29 i) $f(z) = \exp(z)$ $\quad \operatorname{Dom} f = \mathbb{C} = \operatorname{Im} f$

$f(z) = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))$

$\operatorname{Re}(\exp(z)) = e^x \cos(y)$

$\operatorname{Im}(\exp(z)) = e^x \operatorname{sen}(y)$

$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = 1 \cdot e^z \Rightarrow$ La función exponencial es periódica con período $2\pi i$

$\exp(z) = 0$ sii $z = -\infty$

- $\exp(z)$ es dif ya que u y v son dif. por ser compos. de trig con exp.
- CR

$u_x = v_y = e^x \cos(y) = e^x \cos(y)$ ✓

$u_y = -v_x = -e^x \cos(y) = -e^x \cos(y)$ ✓

Se cumple $\forall \mathbb{R}^2$

$\hookrightarrow$ $\boxed{f \text{ es entera}}$

Funciones Elementales y Multiformes

24. Para las siguientes funciones:
(i) $f(z) = az + b$ (ii) $f(z) = \frac{1}{z}$ (iii) $f(z) = \bar{z}$ (iv) $f(z) = z^2$ (v) $f(z) = |z|$
(a) Indicar dominio, imagen y puntos de continuidad. ✓
(b) Hallar la relación inversa indicando si es univaluada o multivaluada.

25. Escribir las siguientes expresiones en forma binomial:
(a) e^{2+i2} (b) $e^3 e^{i2}$ (c) e^i
(d) $\operatorname{sen}(4+i2)$ (e) $\cos(e^{1+3i})$ (f) $\operatorname{tg}(i)$
(g) $\operatorname{sh}(\frac{1}{1-i})$ (h) $\operatorname{Log}(1-i)$ ✓ (i) $(-i)^{2i}$ ✓ (sólo el valor principal)

$\ln|i| + i\operatorname{Arg}(-i)$

$e^{\log(-i)2i}$

$\frac{e^z - e^{-z}}{2}$

26. Verificar que:
(a) $\exp(0) = 1$ (b) $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$ ✓ (c) $\exp(z + i\pi) = -\exp(z)$ ✓ (d) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ ✓

27. Demostrar que:
(a) $\exp(i\bar{z}) \neq \overline{\exp(iz)}$, a menos que $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ✓
(b) $\cos(i\bar{z}) = \overline{\cos(iz)}$ para todos los valores de z. ✓
(c) $\operatorname{sen}(i\bar{z}) \neq \overline{\operatorname{sen}(iz)}$, a menos que $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. ✗

28. Resolver las siguientes ecuaciones:
(a) $\exp z = 1$ ✓ (b) $\cos z = 0$ ✓ (c) $\cos z = 10$ ✓
(d) $\operatorname{sen} z = 0$ (e) $\operatorname{sen} z - a = 0$ $(|a| \leq 1)$ (f) $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$
(g) $\operatorname{sh} z = 2i$ (h) $\operatorname{Log} z = i\frac{\pi}{2}$ (i) $\operatorname{sh}(2z - 1) = 2i$
(j) $(\exp z - 1)^3 = 1$ (k) $\cos(\frac{1}{z}) + 1 = 0$ (l) $(\operatorname{Log} z)^2 + \operatorname{Log} z = -1$

29. Para las siguientes funciones:
(i) $f(z) = \exp z$ ✓ (ii) $f(z) = \operatorname{sen} z$ (iii) $f(z) = \cos z$ (iv) $f(z) = \operatorname{sh} z$ todos enteros
(v) $f(z) = \operatorname{ch} z$ (vi) $f(z) = \operatorname{Arg} z$ ✓ (vii) $f(z) = \operatorname{Log} z$ ✓
(a) Obtener $\operatorname{Re}(f)$ y $\operatorname{Im}(f)$.
(b) Indicar dominio e imagen. Hallar sus ceros. Estudiar periodicidad.

30. (a) Demostrar que $f(z) = \exp(iz)$ está acotada en el semiplano superior (es decir, probar que $\exists M > 0 / |f(z)| < M$, $\forall z$: $\operatorname{Im}(z) > 0$). ¿Qué puede afirmar al respecto de $f(z) = \exp(-iz)$? ✓
(b) Investigar si $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ están, o no, acotadas en el semiplano superior y en el inferior. ✓

$iz = i(x+iy) = ix - y$

$-iz = -ix + y$

ii) $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ es compos de func dif

$\Rightarrow$ es dif salvo donde se anula el denom. (*)

veamos CRi

$$\frac{e^{-y}(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) - e^{y}(-\cos(x) - i\operatorname{sen}(x))}{2i}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-y}(-i)(\cos x + i\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} e^{y} i(-\cos x - i\operatorname{sen} x)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y} e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}(\cos x + i\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} e^{y} e^{i\pi/2 + 2k\pi}(-\cos x - i\operatorname{sen} x)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y}\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}_{0} + i\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}_{1,\ \text{regreso}}\Big](\cos x + i\operatorname{sen} x) + \ldots$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y}(i\cos x - \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} e^{y}(-i\cos x + \operatorname{sen} x)$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})(i\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\operatorname{sen} z) = -\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})(-\operatorname{sen} x) \\ \operatorname{Im}(\operatorname{sen} z) = -\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})(\cos x) \end{cases} \quad (*)$$

$$u_x = -\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})\cos x = -\frac{1}{2}(-e^{-y} + e^{y})\cos(x)$$

[ceros de $\operatorname{sen}(z)$] $= k\pi$

ceros del coseno $= k\pi + \frac{\pi}{2}$

$k \in \mathbb{Z}$

• $f(z) = \operatorname{Log} z = \ln r + i\theta \quad -\pi < \theta < \pi \;,\; r > 0$

$\theta = \operatorname{Arg} z$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} f = \ln r = u(x,y) \\ \operatorname{Im} f = \theta = v(x,y) = \operatorname{Arg} z \end{cases}$$ → ecuaciones diferenc.

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta = \frac{1}{r}$ ✓

$-v_r = 0 = \frac{1}{r} \cdot 0 = \frac{1}{r} \cdot u_\theta$ ✓

cumplen CR $\forall \mathbb{R}^2$

↓

$\operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{0\}$

$\operatorname{Img} f = \mathbb{C}$

$\boxed{f \text{ es holomorfa en } \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} / z = x + i0, x \leq 0\}}$

$\operatorname{Log} z = 0$

$\ln r + i\theta = 0$

↳ $\theta = 0$

$\ln r = 0$

$\boxed{r = 1}$

1 es el cero de $\operatorname{Log}(z)$

• $f(z) = \operatorname{Arg} z$

$\operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{0\}$

$\operatorname{Img} f = \mathbb{R} \in (-\pi, \pi]$

$\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Arg} z$

$\operatorname{Im}(f) = 0$

f es holomorfa en $\mathbb{C} - \left\{ \begin{array}{l} z = x + iy \\ x \leq 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$

$\operatorname{Arg} z = 0 \iff \boxed{z = x + 0i \;,\; x > 0}$

(30) a) $f(z) = \exp(iz)$

$$|f(z)| = |e^{iz}| = |e^{-y}e^{ix}| = \underbrace{e^{-y}}_{} \geq 0$$

por ser un módulo

$D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ $\quad y \geq 0$

$e^{-y} \leq e^{0}$

$-1 \leq f(z) \leq 1 \longleftarrow e^{-y} \leq 1$

con D

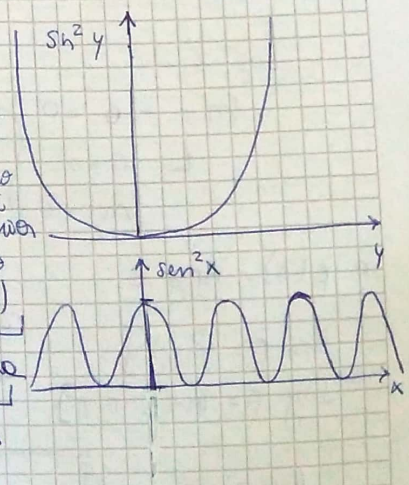
$f(z) = \exp(-iz) \Rightarrow |f(z)| = e^{y}$

↳ no está acotado, puede llegar hasta ∞

b) $|\operatorname{sen} z|^2 = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{\text{acotado } \forall x} + \underbrace{\operatorname{sh}^2 y}_{}$

no está acotado en el semiplano sup ni el inferior ($y \leq 0$ o $y \geq 0$)

no está acotado



$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$

(31)

a) $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$

$s = \operatorname{sen}(x)$
$c = \cos(x)$
$sh = \operatorname{senh}(y)$
$ch = \cosh y$

$(\operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x)^2$
$+ (\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y)^2$
$= s^2 ch^2 + (i\, sh\, c)^2 + \cancel{2 s\, ch\, c\, sh\, i}$
$+ c^2 ch^2 + (-i\, s\, sh)^2 - \cancel{2 c\, ch\, s\, sh\, i}$
$= ch^2 - sh^2 c^2 - s^2 sh^2 = ch^2 - sh^2(s^2 + c^2) = -sh^2 + ch^2 = 1$

b) $|sh\, z|^2 = |sh(x)c(y) + i\, ch(x) s(y)|^2$
$= sh(x)^2 c(y)^2 + ch(x)^2 s(y)^2$ → no llego a donde busco

$|sh(z)|^2 = |-i \operatorname{sen}(iz)|^2 = |\operatorname{sen}(-y + ix)|^2$ ok, cómo hago ahora?

$|\operatorname{sen} z|^2 = |s\, x\, ch\, y + i\, c\, x\, sh\, y|^2$
$= s^2 ch^2 + c^2 sh^2 = ch(y)^2 + sh(y)^2$ eh, no, tampoco.

$$|sh\, z|^2 = \left|\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right|^2 = \left|\frac{e^{x}e^{iy} - e^{-x}e^{-iy}}{2}\right|^2$$

$$= \frac{|e^{x}(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)) - e^{-x}(\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y))|^2}{4}$$

$$= \frac{|e^{x}\cos(y) + e^{x} i \operatorname{sen}(y) - e^{-x}\cos y + i \operatorname{sen} y\, e^{-x}|^2}{4}$$

$$= \frac{|(e^{x} - e^{-x})\cos y + i(e^{x} + e^{-x}) \operatorname{sen} y|^2}{4} = \frac{(e^{x} - e^{-x})^2}{4}$$

$\frac{1}{3!} +$

$$\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sen}^2(y)$$

$$= \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x}}{4} - \frac{2e^{x}\cdot e^{-x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^{i2y}}{(2i)^2} - \frac{2e^{iy}e^{-iy}}{(2i)^2} + \frac{e^{-2iy}}{(2i)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{e^{i2y}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2iy}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} - \frac{(\cos(2y) + i\operatorname{sen}(2y))}{4} - (\cos(-2y) + i\operatorname{sen}(-2y))$$

no ver

$$= \frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{\cos(2y)}{2}$$

$$\frac{(2\operatorname{senh}^2(x) + 1)}{2} \left[-\cos(2y) - i\operatorname{sen}(2y) - \cos(-2y) - i\operatorname{sen}(-2y)\right] \frac{1}{4}$$

$$= \operatorname{senh}^2(x) + \frac{1}{2} - \frac{\cos(2y)}{2}$$

$$= \operatorname{senh}^2(x) + \operatorname{sen}^2(y) \quad \boxed{\text{Loop}}$$

(34)

a) $f(z) = \operatorname{tg}(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$

$$= \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{i(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y})}$$

$$= \frac{(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))e^{-y} - (\cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x))e^{y}}{(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))e^{-y} + (\cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x))e^{y}} \frac{1}{i}$$

$$= \frac{(e^{-y} - e^{y})\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)(e^{-y} + e^{y})}{(e^{-y} + e^{y})\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)(e^{-y} + e^{y})}$$

ok no sirve de mucho.

- $\operatorname{tg}(z)$ es composición de funciones holomorfas
  - $\Rightarrow$ es holomorfa salvo donde se anula el denominador, o sea los $z = \frac{\pi}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg}(z)$ es continua por ser compos. de func continuas salvo donde se anule el denominador.

Pregunta: ¿$\overline{f(z)}$ es holomorfa?

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - i\,v(x,y)$$

$$u_x(x,y) = -v_y(x,y) \quad \downarrow$$

$$u_y(x,y) = v_x(x,y)$$

$\frac{1}{3!}$ +

$$\overline{\operatorname{sen}(z)} = \frac{\overline{e^{iz} - e^{-iz}}}{2i} = \frac{\overline{e^{iz}} - \overline{e^{-iz}}}{\overline{2i}}$$

$$= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{-2i} = \frac{-\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{(-)2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$= \operatorname{sen} z$

(f) va a ser ~~entera~~ holomorfa en $\mathbb{C} - \{(x,y) \,/\, x^2+y^2=0\}$

(c) se hizo en clase.

35) $\log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

$$(1+i)^{3+4i} = e^{\log(1+i)(3+4i)} = e^{\left(\ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)(3+4i)}$$

$$= e^{\left[3\ln(\sqrt{2}) - \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right] + i\left[3\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) + 4\ln(\sqrt{2})\right]}$$

(42) $\{z = x+iy \,/\, ax+by = c\}$

$y =$ $\quad$ $x = ck$

$z = ki, \quad k \in \mathbb{R}$

$y = cte$

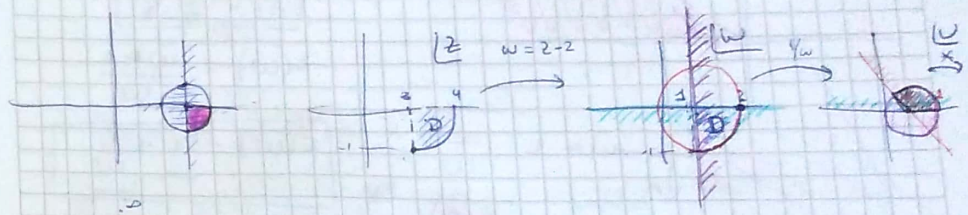
$$f(z) = \frac{1+3(x+iy)}{2+x+iy} =$$

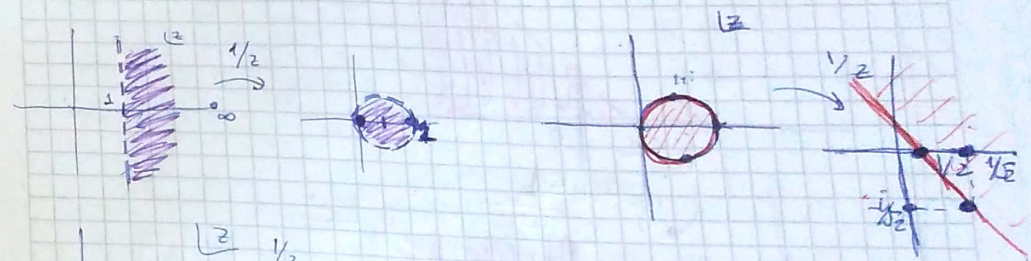
$$f(z) = f(ki) = \frac{1+3ki}{2+ki} = \frac{1+3ki}{2+ki} \cdot \frac{2-ki}{2-ki} = \frac{2-ki+6ki+3k^2}{4+k^2}$$

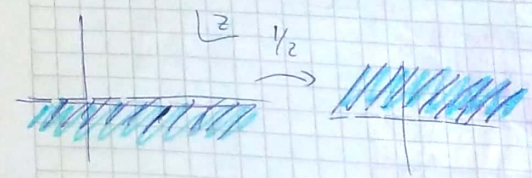
$$f(z) = \frac{2+3k^2}{4+k^2} + \frac{5k}{4+k^2}i, \quad k \in \mathbb{R}$$

$\to$ mb, country ball

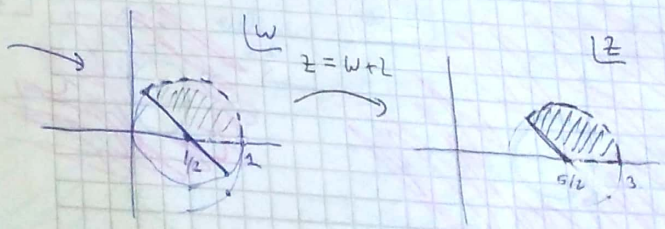
43) $f(z) = \frac{1}{z-2}$, $\quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \le 1,\ \operatorname{Re}(z) > 3,\ \operatorname{Im}(z) < 0\}$



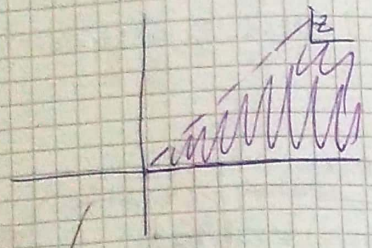




$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$



b) $D = \{ z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4 \}$



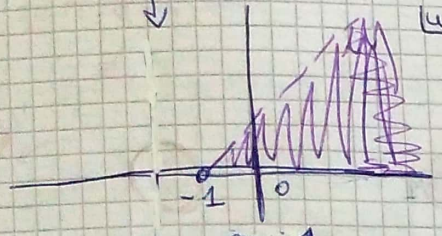
$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\boxed{w = z - 1}$$

$$f(w) = \frac{w+1}{w}$$

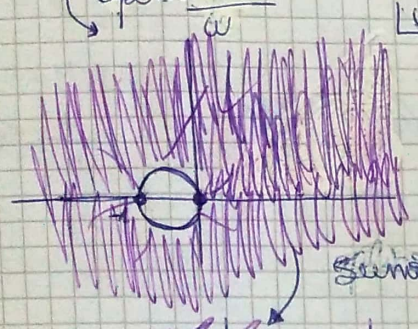
$$\boxed{\tilde{f}(w) = \underbrace{1} + \underbrace{\frac{1}{w}}}$$

como 1

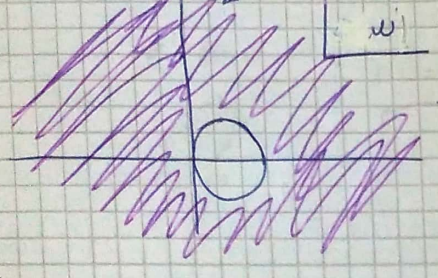


$\frac{1}{w}$

aplico $\frac{1}{w}$



sumo 1



vuelvo a z

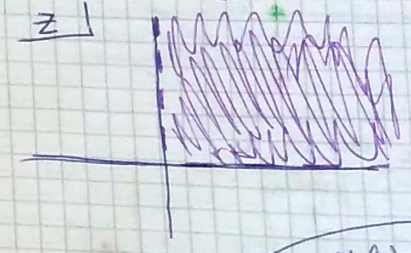
f(z)

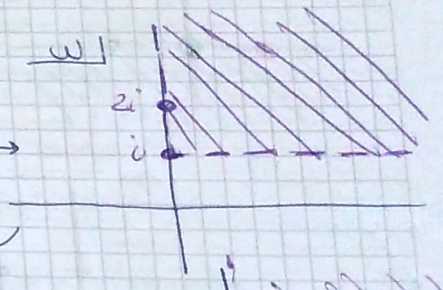
c) $D = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0 \}$

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i} \qquad \boxed{w = z + i}$$

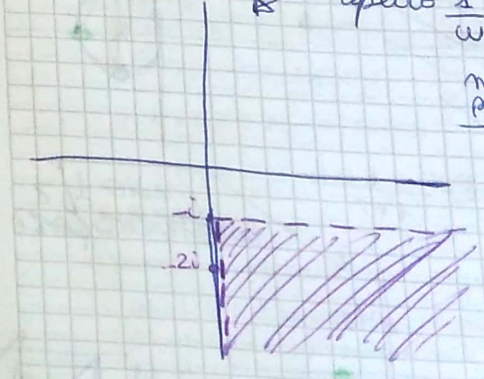
$$\downarrow$$

$$\tilde{f}(w) = \frac{w - 2i}{w} = 1 - \frac{2i}{w}$$

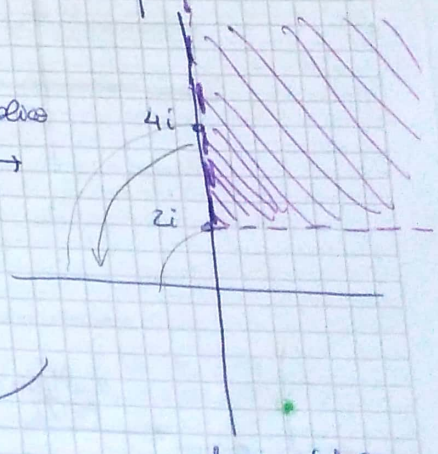




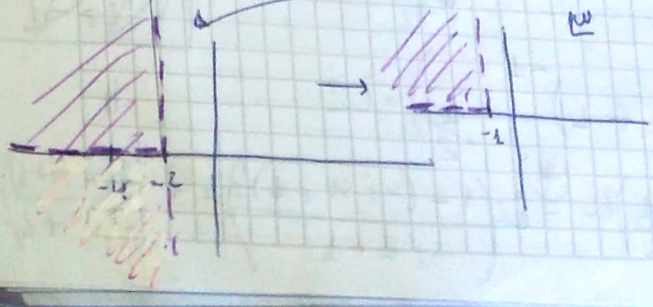
aplico $\frac{1}{w}$



multiplico por -2

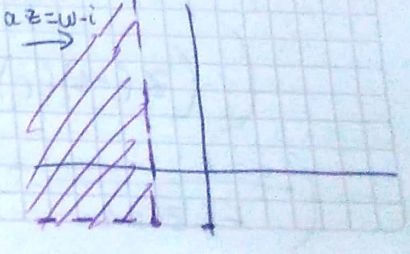


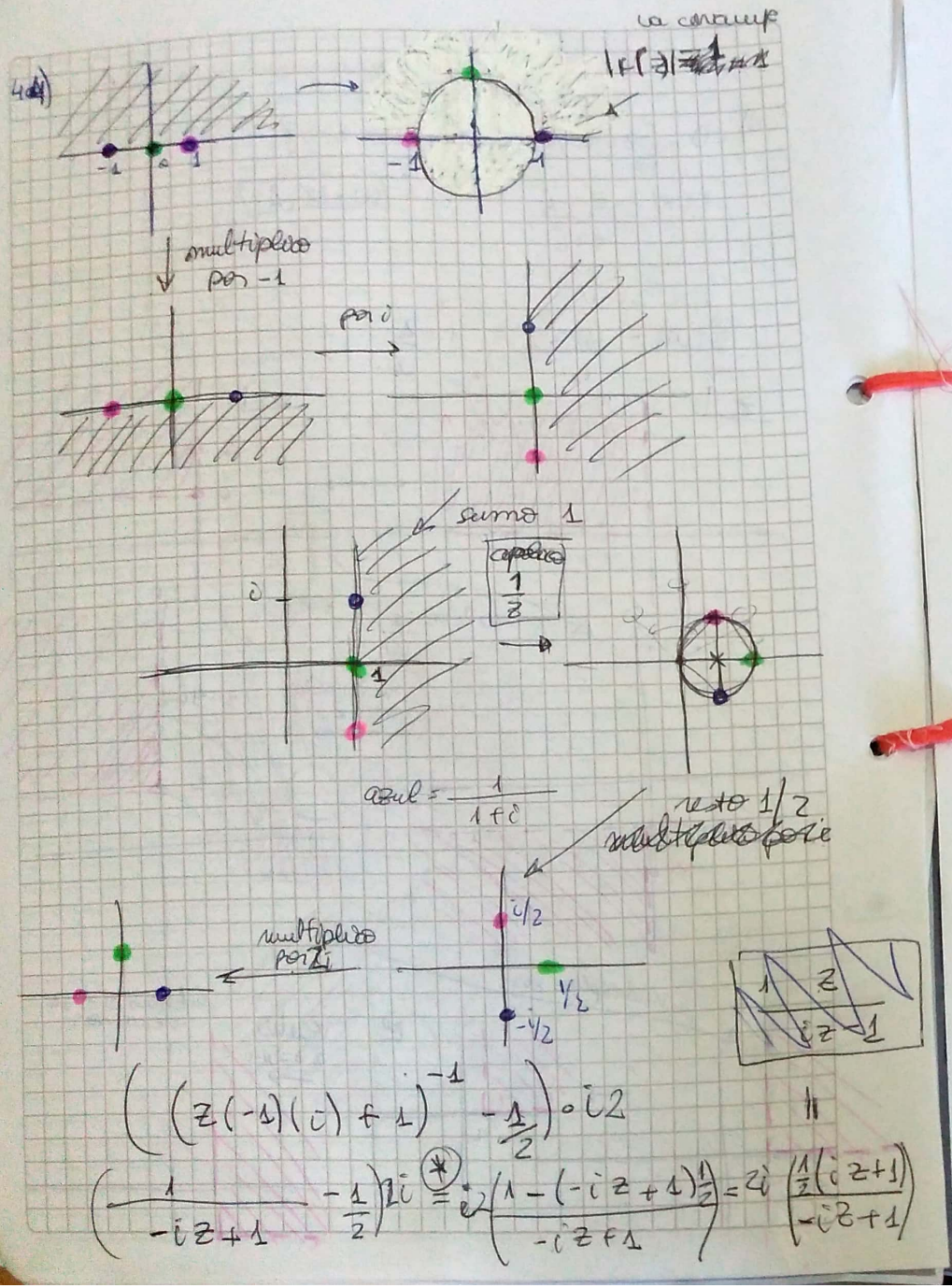
multiplico por i



vuelvo a $z = w - i$

entonces f(z) se ve como:





$$\left(\left(z(-1)(i)+1\right)^{-1}-\frac{1}{2}\right)\circ 2i$$

$$\left(\frac{1}{-iz+1}-\frac{1}{2}\right)2i \overset{*}{=} 2i\left(\frac{1-(-iz+1)\frac{1}{2}}{-iz+1}\right)=2i\left(\frac{\frac{1}{2}(iz+1)}{-iz+1}\right)$$

39.) (a) Sea $F(z)$ una rama del logaritmo cuyo corte es la semirrecta $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$ y $F(-1) = -i\pi$. Hallar: $F(1)$, $F(-ie)$, $F(-e+ie)$, $F(-\sqrt{3}+i)$ y $F(e^{3i\pi/4})$.

(b) Sea $G(z) = 1 + z^{\frac{1}{3}}$. Se considera la determinación de la $z^{\frac{1}{3}}$ definida para $z \neq iy$ con $y \geqslant 0$ cuyo valor en 1 es 1. Calcular $G(-1)$ y $G(-i)$.

(c) Sea $H(z) = z + \log(z-3)$. Si se considera la determinación del $\log z$ definida en $\mathbb{C} - \{z = iy\ ,\ y \geqslant 0\}$, cuyo valor en $z = 1$ es 0, calcular el valor de $H(5)$, $H(2)$ y $H(3-i)$.

40.) (a) Determinar una rama de $z^{\frac{1}{2}}$ tal que restringida a los reales positivos coincida con la raíz cuadrada y $(-1)^{\frac{1}{2}} = i$. ¿Es única?

(b) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en su dominio con valores: $\sqrt[3]{-1} = -1$ y $\sqrt[3]{1} = 1$. ¿Cómo se relaciona esta función con la multivaluada raíz cúbica compleja?

41.) Sean: (a) $w = \mathrm{arcsen}\, z$ (b) $w = \arccos z$ (c) $w = \mathrm{argsh}\, z$ (d) $w = \mathrm{argch}\, z$, las relaciones inversas de las funciones sen z, cos z, sh z y cos z respectivamente. Explicar por qué son multivaluadas y obtener la expresión de cada una de ellas en forma logarítmica. → leer

Transformaciones del Plano Complejo

42.) ¿En qué se transforman las rectas x=cte e y=cte bajo la aplicación $f(z) = \dfrac{1+3z}{2+z}$?

43.) Transformar la región D del plano complejo mediante las funciones indicadas:

(a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leqslant 1\ ,\ \mathrm{Re}\, z > 3\ ,\ \mathrm{Im}\, z < 0\}$ $\qquad f(z) = \dfrac{1}{z-2}$

(b) $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Arg}\, z < \frac{\pi}{4}\}$ $\qquad f(z) = \dfrac{z}{z-1}$

(c) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\ ,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ $\qquad f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2 \wedge |z-1| > 1\ ,\ \mathrm{Re}\, z < 1\ ,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ $\qquad f(z) = \dfrac{1}{z}$ ✗

(e) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\ ,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ $\qquad f(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$ ✗

44.) Encontrar la transformación homográfica que transforma los puntos:

(a) $-1,\ 0,\ 1$ en los puntos $1,\ i,\ -1$ respectivamente.

(b) $-1,\ i,\ 1+i$ en los puntos $i,\ \infty,\ 1$ respectivamente.

(c) $-1,\ \infty,\ i$ en los puntos $0,\ \infty,\ 1$ respectivamente.

} no les iban a dar atención.

$$\boxed{\begin{array}{l} b=i \\ c=-i \quad a\neq 0 \\ d=1 \end{array}}$$

$$(1-iz)(1+iz) = 1 - iz + iz + iz(-iz) + z^2$$

$$(*)\left(\frac{1}{-iz+1} - 0{,}5\right)i2 = \left(\frac{1-0{,}5(-iz+1)}{-iz+1}\right)i2$$

$$= \left(\frac{0{,}5\,iz + 0{,}5}{-iz+1}\right)2i = \boxed{\frac{0{,}5\,(iz+1)2i}{-iz+1}} = i\left(\frac{iz+1}{(iz-1)}\right)\left\{\frac{z-i}{iz-1}\right.$$

$$= 0{,}5\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)2i = 0{,}5\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\cdot\frac{1+iz}{(1+iz)}\cdot i$$

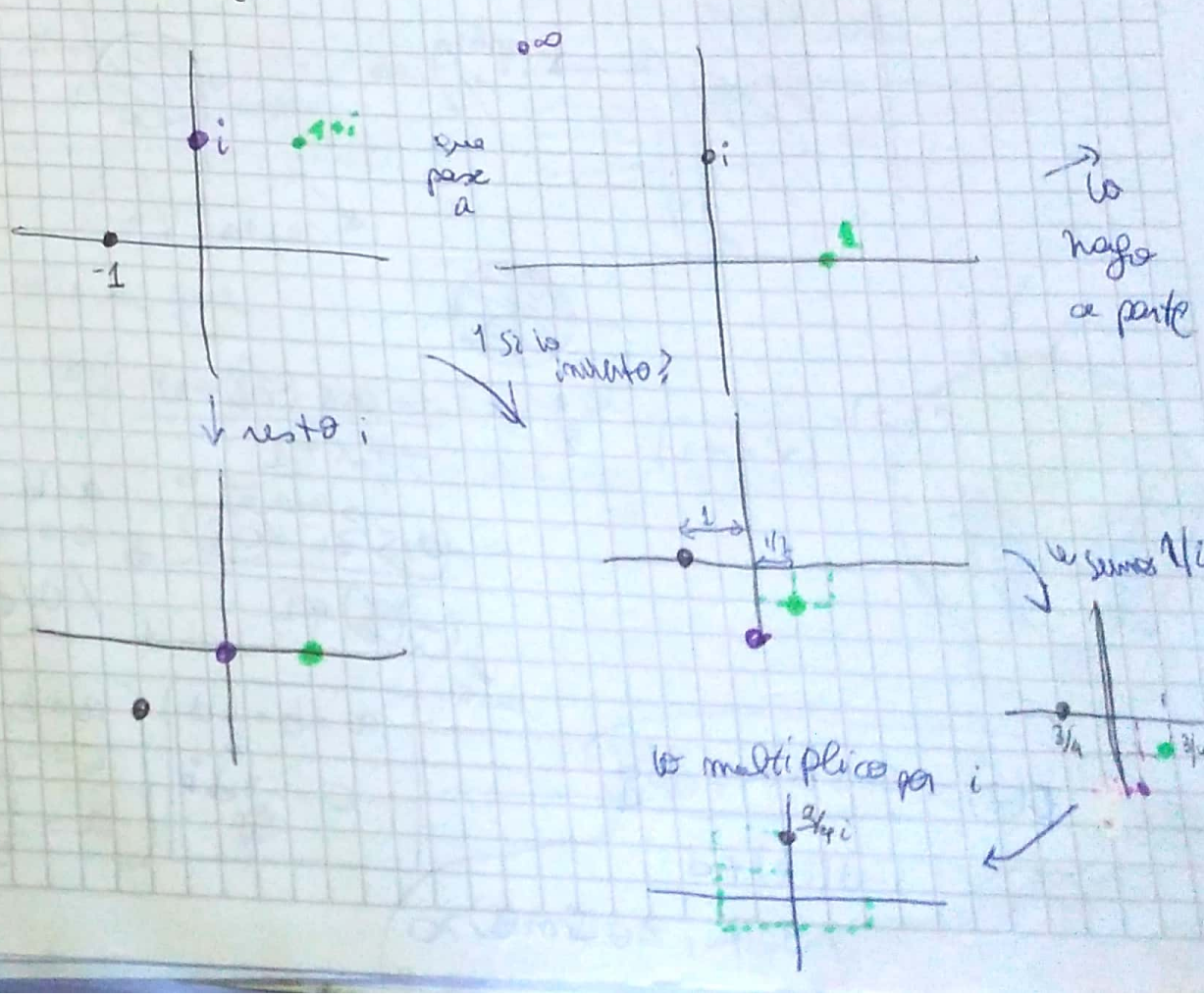
$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+iz)^2}{1+z^2}\,i$$

~~prueba de que las mujeres son complicadas.~~

$$= \frac{i-z}{1-iz}$$

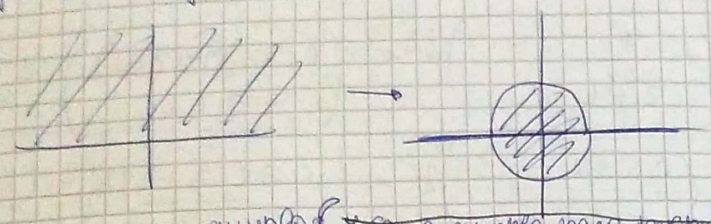
equiv

b)

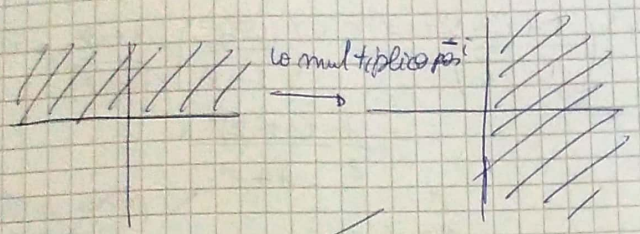


4 parte me de que no existe.

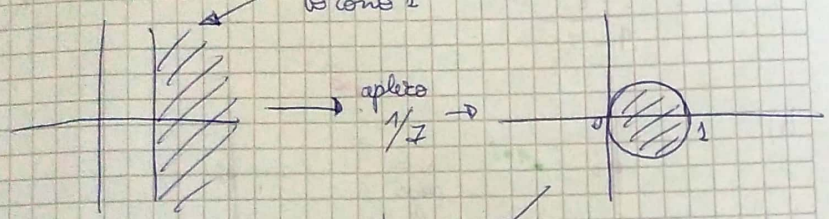
45)



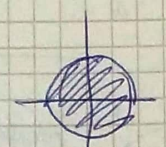
Barco 1 que cumple (~~y como cumple para infinitos puntos tiene sol~~)



lo como 1



resto 1/2



$$f(z) = \frac{1}{(-zi+1)} - \frac{1}{2} = \frac{1-0{,}5(-zi+1)}{-zi+1}$$

$$= \frac{0{,}5zi + 0{,}5}{-zi+1} \Rightarrow \begin{array}{l} a=b \\ c=-d \\ / a/d = 1/2 \end{array}$$

(0,5 → una a; 0,5 → una b; −zi → una c; 1 → una d)

$$\boxed{\begin{array}{l} a=b=\frac{1}{2}d \\ c=-\frac{1}{2}d \end{array}} \quad \left\{ \begin{array}{l} a=b \\ c=-d \\ a=\frac{1}{2}d \end{array} \right.$$

$$f(z) = \frac{0{,}5dzi + 0{,}5d}{-d(iz)+d}$$

$/ d \in \mathbb{R},\ z \in \mathrm{Im}(z) > 0$

Una transformación es conforme en z_0 si es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$

Sea $z_1(t)$ una curva en $\mathbb{C}$:

$f(z(t)) = w(t)$ que es la imagen de esta curva.
$/ z_1(t_0) = z_0$ con $z_1(t) = x(t) + i(y(t))$

La velocidad de $w(t)$ en z_0 es

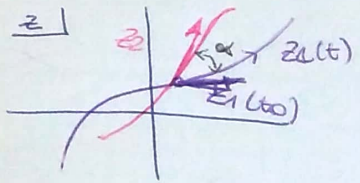
$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z_1'(t_0)$$

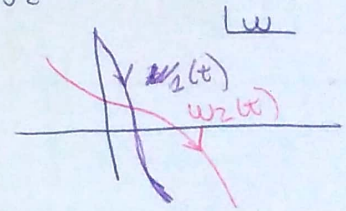
Y además:

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0))$$

Sea otra curva:

$z_2(t) \ / \ z_2(t) = x_2(t) \ i \ y_2(t)$





ocurre que

$$\arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0) = \alpha$$
$$= \arg w_2'(t_0) - \arg w_1'(t_0)$$

Por último, pero no por eso menos importante, se pudo comprobar que los conocimientos adquiridos en la materia junto a la diversidad de conocimientos y aptitudes que aporta el trabajo en equipo, son suficientes para poder implementar enlaces satelitales y terrestres que resuelvan situaciones problemáticas reales.

$f(z) = z^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{Re(f(z))=u} + \overbrace{2xy}^{Im(f(z))=v}\, i$ $\qquad$ f es entera

$z = (x+yi)$

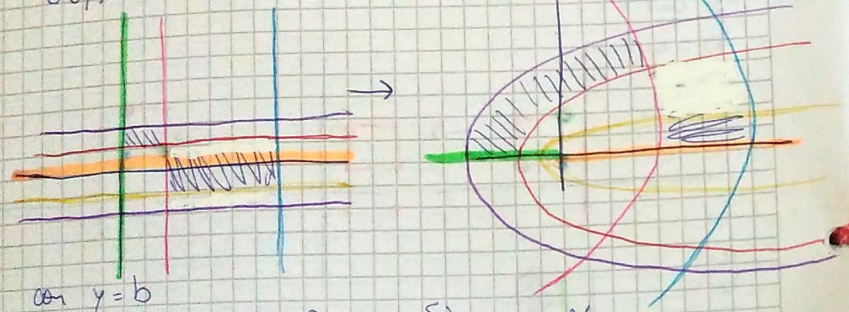
Si $x = a = cte$

$\hookrightarrow u = a^2 - y^2 \;,\; v = 2ay \;,\; y \in \mathbb{R}$

forma de parábola

con $a \neq 0 \Rightarrow y = \dfrac{v}{2a} \Rightarrow \boxed{u = a^2 - \dfrac{v^2}{4a^2}}$

$\gamma(y) = (a^2-y^2, 2ay)$



con $y = b$

$u = x^2 - b^2$ $\Rightarrow$ Si $b \neq 0$ $\quad x = \dfrac{v}{2b}$

$v = 2xb$ $\qquad u = \dfrac{v^2}{4b} - b^2$

también una parábola pero mirando para el otro lado

$y = 0 \Rightarrow u = x^2$

$v = 0$

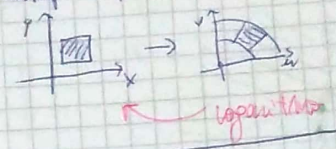
$x = 0 \Rightarrow u = -y^2$

$v = 0$

$f'(z) = 2z = 2x + 2iy$

f es entera y conforme $\forall z - \{0\}$

La transf exponencial:



S1 - a) $D = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < Im(z)\}$

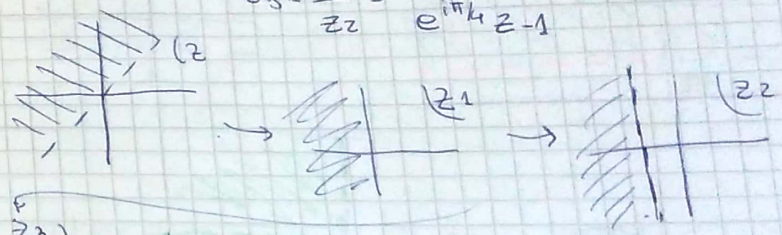
$\hookrightarrow$ círculo unitario

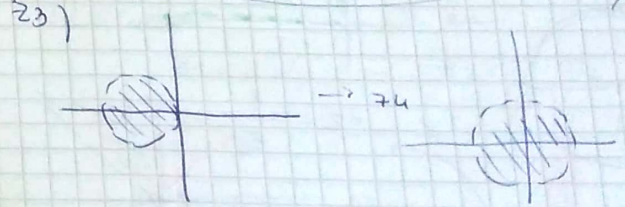
$T(D) = \{z / |z| < 1\}$

$z_1 = e^{i\pi/4} z \to z_2 = z_1 - 1 = e^{i\pi/4} z - 1$

$\downarrow$

$z_3 = \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{e^{i\pi/4} z - 1} \to z_4 = z_3 + 1/2$





$W = 2z_4$

$W = 2(z_3 + 1/2)$

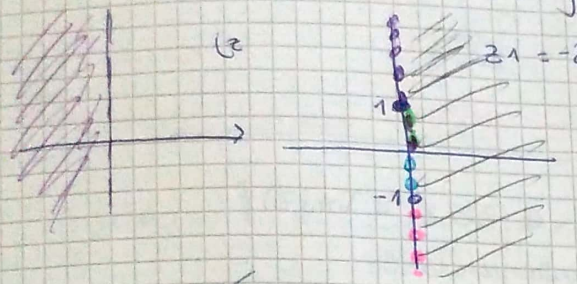
$W = 2\left(\dfrac{1}{z e^{i\frac{\pi}{4}} - 1} + \dfrac{1}{2}\right)$

$T(z) = 2\left(\dfrac{1}{z e^{i\pi/4} - 1} + \dfrac{1}{2}\right)$

$\tilde{T}(z) = e^{i\theta_0} T(z)$

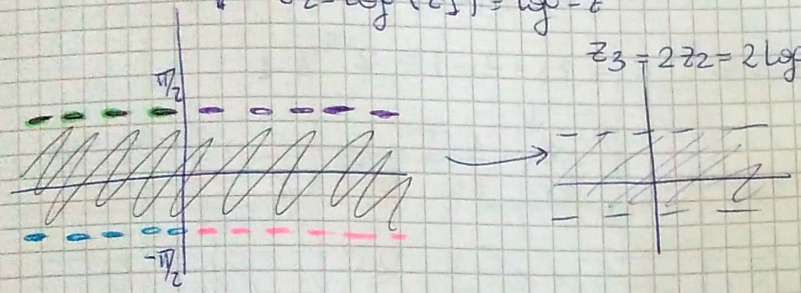
5) - b) $D = \{ z \in \mathbb{C} / Re(z) < 0 \}$

$T(D) = \{ z \in \mathbb{C} / -\pi < Im\, z < \pi \}$

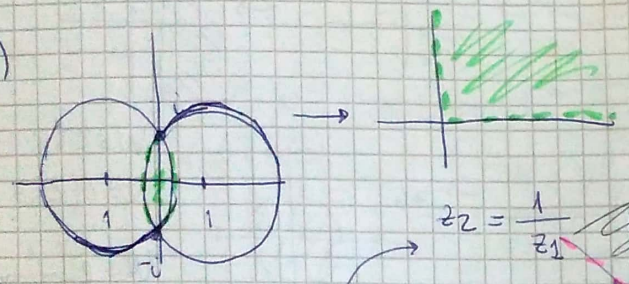


$z_2 = Log(z_1) = Log\, -z$

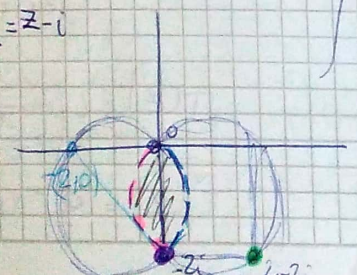
$z_3 = 2 z_2 = 2 Log(-z)$



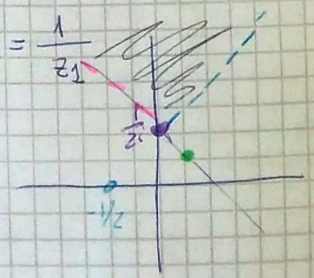
d)

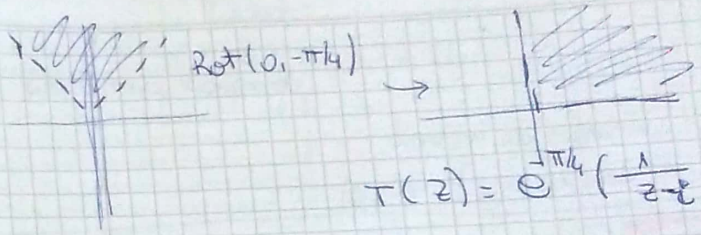


$z_1 = z - i$



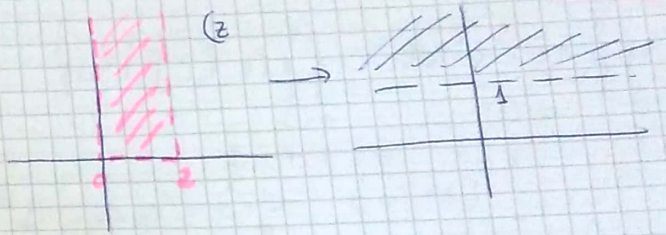
$z_2 = \frac{1}{z_1}$



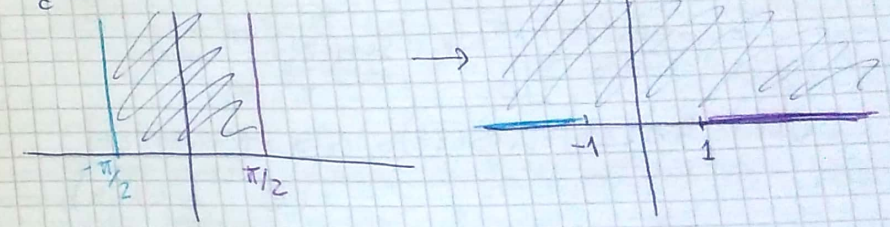


$T(z) = e^{-\pi/4} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2} i \right)$

e)



¿sen(z)?

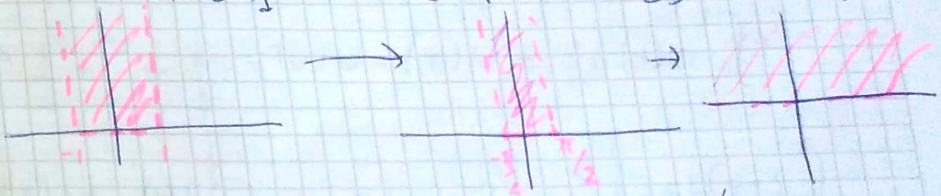


Volviendo

$z_1 = z - 1$

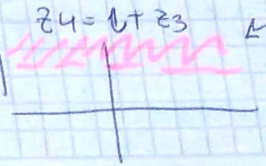
$z_2 = z_1 \cdot \pi/2$

$z_3 = sen(z_2)$



$z_4 = i + z_3$

$w = i + sen\left(\frac{\pi}{2}(z-1)\right)$



ocw.mit.edu curso 18.013 A

Tod S
↓
complex functions

curvas de nivel
de $u(x,y)$ $v(x,y)$

Integración 13/04/18

1 a) $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{1+it^2}_{w(t)}\,dt = \int_0^1 1\,dt + i\int_0^1 t^2\,dt$

$= 1 + i\frac{1}{3}$

c) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}(2t) + i\cos(2t)\,dt = \int_0^\pi \operatorname{sen}(2t)\,dt + i\int_0^\pi \cos(2t)\,dt$

$= -\frac{\cos(2t)}{2}\Big|_0^\pi + i\,\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\Big|_0^\pi = 0$

$w(t) = \operatorname{sen}(2t) + i\cos(2t) = i(\cos 2t - i\operatorname{sen} 2t)$

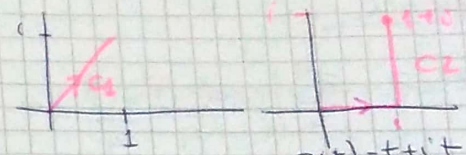
$= ie^{-2ti} = U'(t)$

$\Rightarrow U(t) = \frac{ie^{-2ti}}{-2i} = -\frac{1}{2}e^{-2ti}$

$\displaystyle\int_0^\pi w(t)\,dt = U(\pi) - U(0) = -\frac{1}{2}e^{-2\pi i} + \frac{1}{2}e^{0i} = 0$

$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_a^b \underbrace{f(z(t))\cdot z'(t)}_{w(t)}\,dt$ C: $z(t)$, $t\in[a,b]$

2 a) $\displaystyle\int_{C_k} \operatorname{Re} z\,dz$ $k=1,2$



$f(z(t)) = \operatorname{Re}(z(t)) = t$

$f(z) = \operatorname{Re} z$ $C_1: x = y$ $z(t) = t + it$, $z'(t) = 1+i$

$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 t(1+i)\,dt = (1+i)\int_0^1 t\,dt = \boxed{\frac{1+i}{2}}$

C_2: $z_1(t) = t + 0i$ $t\in[0,1]$

$z_1'(t) = 1$ $f(z_1(t)) = \operatorname{Re}(t+0i) = t$

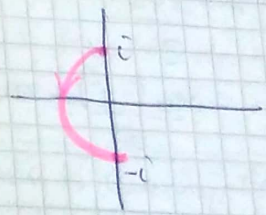
$z_2(t) = 1 + ti$ $t\in[0,1]$

$z_2'(t) = i$ $f(z_2(t)) = \operatorname{Re}(1+ti) = 1$

Como por 2 caminos no da lo mismo no es holomorfa

Si la integral no dep del camino tiene primitiva.

Si $\displaystyle\int_C z^3\,dz$ / C: semicircunf desde $z=i$ a $z=-i$ con $\operatorname{Re}(z)<0$



$z(t) = e^{it}$ $t\in[\pi/2, 3/2\pi]$

$z'(t) = ie^{it}$

$f(z(t)) = z(t)^3 = e^{i3t}$

$\displaystyle\int_C z^3\,dz = \int e^{i3t}\cdot ie^{it}\,dt = i\int_{\pi/2}^{3/2\pi} e^{i4t}\,dt = i\,\frac{e^{i4t}}{4i}\Big|_{\pi/2}^{3/2\pi} \Rightarrow$

$= \frac{1}{4} e^{i6\pi} - \frac{1}{4} e^{i2\pi} = 0$

otra forma

$$\int_C z^3 dz = \frac{z^4}{4}\Big|_i^{-i} = \frac{(-i)^4}{4} - \frac{(i)^4}{4} = 0$$

Si $\int_C \frac{1}{z^4} dz = 0$

C: circunf centro (0,0) radio 1/2.

$f(z) = \frac{1}{z^4}$ tiene primitiva ya que $F'(z) = \frac{1}{z^4}$

con $F(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{z^3}$, C cerrada

$$\int_C z\,\text{sen}(z^2) dz = I$$

(4) c) C: contorno que une los puntos $-iz$ con iz

$f(z) = z\,\text{sen}(z^2) = F'(z)$

$F(z) = \frac{-\cos(z^2)}{2}$

$I = F(i\pi) - F(-i\pi) = -\frac{\cos(-\pi^2)}{2} + \frac{\cos(-\pi)}{2} = 0$

3) $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-in\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \frac{e^{i(m-n)\theta}}{i(m-n)}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$m \neq n$

Si $m = n$ $\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$

$\int_C z^m \bar{z}^n dz$, X: circunf centro origen radio r

$z(t) = re^{i\theta}$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$z'(t) = ri e^{i\theta}$ $f(z(\theta)) = z(\theta)^m \bar{z}(\theta)^n$

$= re^{i\theta} \cdot (\overline{re^{i\theta}})^n$

$= r^{(m+n)} e^{i(m-n)\theta}$

$$\int_C z^m \cdot \bar{z}^n dz = \int_C (r^{m+n+1})\, i\, e^{i(m-n+1)\theta} d\theta$$

$$= r^{m+n+1} i \int_C e^{i(m-n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m-n+1 \neq 0 \\ r^{m+n+1} i 2\pi & m-n+1 \neq 0 \end{cases}$$

Vimos f tiene primitiva $\Rightarrow \int_C f dz = 0$ si C es cerrada

Veremos, si f es holomorfa en C y en el interior de C, C cerrada $\Rightarrow \int_C f dz = 0$

$\boxed{\text{Teorema de Cauchy-Goursat}}$

Sea $f \in H(D)$, D dominio (D abierto conexo) y sea C, contorno cerrado simple contenido en D / f es holomorfa en C y el int C, f' continua en C y RI(C) $\Rightarrow$

$\frac{1}{3!}$ +

$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$

Recordemos teo de Green $F=(P,Q)$ un campo de $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, F es C^2 en una curva cerrada simple C y en su interior, $C \cup RI(C) \subset D$

Dem: $\int_C F(x,y)\,dl$

$= \iint_{RI(C)} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$

Ahora $\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)(dx+i\,dy)$

$= \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy = \int_C (u,-v)\,dl + i\int_C (v,u)\,dl$

Los campos $(u,-v)$ y (v,u) satisfacen hipótesis de Teo de Green, luego

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_{RI(C)} (-v'_x - u'_y)\,dx\,dy + i\iint_{RI(C)} (u'_x - v'_y)\,dx\,dy$$

u, v satisfacen C-R: $u'_x = v'_y$; $u'_y = -v'_x$

Luego $\int_C f(z)\,dz = 0$

Cauchy lo demostró con estas hipótesis

Goursat " demuestra sin hipótesis de f' continua.

Extensión 1

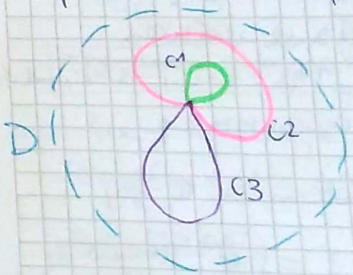
Sea D un dominio simplem conexo, $f \in H(D)$, C contorno cerrado simple en D.

$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$

(Al ser D simplemente conexo, nos aseguramos que $RI(C) \subset D \Rightarrow f$ es holomorfa en $RI(C)$)

Extensión 2

Si D es dominio s.c. y C un contorno cerrado (posiblem no simple) en $D \Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

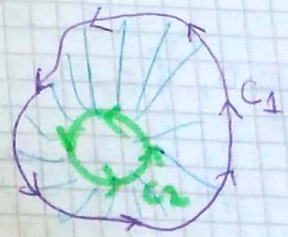
C_1, C_2, C_3 son simples

$\int f(z)\,dz = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f + \int_{C_3} f$

$= 0$

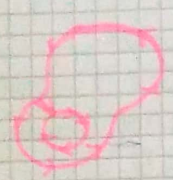
Extensión 3

Sean C_1 y C_2 contornos cerrados simples / $C_2 \subset RI(C_1)$ y sea f una función holomorfa en C_1, C_2 y $RE(C_2) \cap RI(C_1)$



y consideramos C_1 y C_2 orientados $\oplus$

$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$



$C = C_1 \cup L \cup C_2^- \cup L^-$

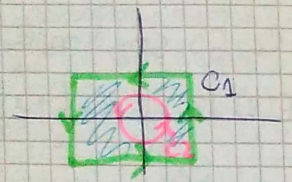
$\int_C = \int_{C_1} + \int_L + \int_{C_2^-} + \int_{L^-}$

$\int_C F = \int_{C_1} F - \int_{C_2} F = 0$

$\Rightarrow \boxed{\int_{C_1} F = \int_{C_2} F}$

Resultado tmb conocido como Invarianza homotópica o ppio de deformación de camino.

Ej: $f(z) = \frac{e^z}{z}$ C: cuadrado de vértices $1+i, 1-i, -1-i, -1+i$, orientado +.



f es holom en $\mathbb{C} - \{0\}$

$\int_{C_1} \frac{e^z}{z} dz = \int_{C_2} \frac{e^z}{z}$ siendo C_2 circunf de radio $r < 1$ orientada ⊕

Corolario si f es holomorfa en un dominio SC, $\Rightarrow$ tiene primitiva allí.

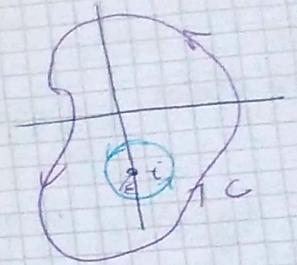
Por qué?

Para cualquier curva cerrada en D, $\int_C f = 0$

Por teo. de la clase que falté

$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$

Ej: $\int_C \frac{1}{z+i} dz$ $\quad \frac{1}{z+i}$ es holom en $\mathbb{C} - \{-i\}$



Por invarianza homotópica

$\int_C \frac{1}{z+i} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z+i} dz$

$C_2: z(t) = -i + \varepsilon e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$

$z'(t) = i\varepsilon e^{it}$

$\int_{C_2} \frac{1}{z+i} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} i \varepsilon e^{it} = \boxed{2\pi i}$

Teorema integral de Cauchy

Sea f holomorfa en $C \cup RI(C)$, C contorno cerrado simple, y sea $z_0 \in RI(C)$ $\Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

orientado ⊕

Dem:

Sea C_2: circ centro z_0, radio r, interior a C, orientado ⊕

Por Int. homot: $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

$\left| \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{C_2} \frac{1}{z-z_0} dz\, f(z_0) \right|$

$$= \left| \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \int_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz \right| = \left| \int_{C_2} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \right| \rightarrow$$ veremos que esto es tan

(*) veremos que esto es tan chico como uno quiere.

Como acotar $\left| \int_C g(z)\,dz \right|$

$$\left| \int_C g(z)\,dz \right| = \left| \int_a^b g(z(t)) \cdot z'(t)\,dt \right| \leq$$

$$\int_a^b \left| g(z(t)) \cdot z'(t) \right| dt = \int_a^b |g(z(t))| \cdot |z'(t)|\,dt \leq \text{algo}$$

Si $|g(z)| \leq M \ \forall z \in C$

$$\leq \int_a^b M\,|z'(t)|\,dt = M \int_a^b |z'(t)|\,dt = ML$$ L longitud de C

o sea: $\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq ML$ con M cota de $|g(z)|$ sobre C, L long de C.

En la demostración

$g(z) =$ cte incremental

f es holom $\Rightarrow$ f es continua, en part en z_0

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 \,/\, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Trabajo Práctico Nro. 3

Integrales Complejas

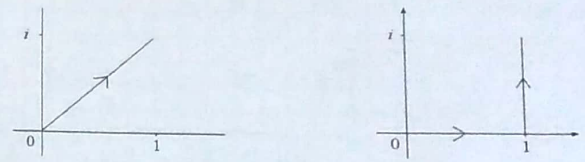
1. Calcular las siguientes integrales:

   (a) $\int_0^1 (1+it^2)dt$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi/4} te^{-it^2}dt$

   (c) $\int_0^{\pi} (\text{sen}2t + i\cos 2t)dt$ (d) $\int_1^2 \text{Log}(1+it)dt$

2. Calcular las siguientes integrales de línea:

   (a) $\int_C \text{Re}(z)\,dz$ a lo largo de las siguientes trayectorias:



   (b) $\int_C \frac{1}{z}\,dz$ C: semicircunf. superior de $|z|=1$ desde $z_1=-1$ hasta $z_2=1$.

   (c) $\int_C (2|z|+3)\,dz$ C: segmento del eje real que une $z_1=-1$ y $z_2=2$.

   (d) $\int_C \pi\, e^{(\pi \bar{z})}\,dz$ C: borde del cuadrado de vértices $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=1+i$ y $z_4=i$, recorrido en sentido positivo.

3. Mostrar que para $m, n \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 2\pi & \text{si } m = n \end{cases}$ y obtener el valor de $\int_\gamma z^m \bar{z}^n\,dz$ siendo γ la circunferencia centrada en el origen, de radio r, recorrida en sentido antihorario.

4. Sea la circunferencia $C: z - a = r_0 e^{i\theta}$ donde $r_0 > 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, recorrida en sentido positivo. Demostrar que $\int_C f(z)\,dz = ir_0 \int_0^{2\pi} f(a + r_0 e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta$.

Tomando $r < \delta \Rightarrow$ sobre C, $|z - z_0| = r < \delta \Rightarrow$

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

sobre C: $|g(z)| = \dfrac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < \dfrac{\varepsilon}{r} = M$

Veremos que $(*) \leq M\underbrace{L}_{\text{largo de } C_r} = \dfrac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi \cdot r = \underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{es tan chico como quiera}}$

Luego $\left| \displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi i f(z) \right| = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z)}$$

Ej $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z}\, dz$ con C: cuadrado vértices $1+i, 1-i, -1-i, -1+i$

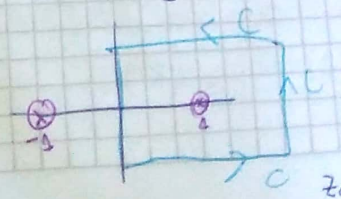
$f(z) = e^z \to$ holom en $C \cup RI(C)$

$z_0 = 0 \to \in RI(C)$

$$\int_C \frac{e^z}{z}\, dz \underset{\text{TIC}}{=} 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

Ej $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{sen}(3z+i)}{z^2 - 1}\, dz$ C: cuadrado de vértices $i, -i, 2+i, 2-i$

$$\int_C \frac{\operatorname{sen}(3z+i)}{z^2-1}\, dz = \int_C \frac{f(z)}{z-1}\, dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \frac{\operatorname{sen}(3+i)}{1+i}$$



$f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(3z+i)}{z+1}$ holom en C y $RS(C)$

$z_0 = 1 \in RS(C)$

Teorema integral de Cauchy generalizado

f es holom en C y $RI(C)$, C contorno cerrado simple, $z_0 \in RI(C)$

$\Rightarrow$ f tiene derivadas de todos los órdenes en z_0 y

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad n=0,1,2\ldots$$

④ $$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a+r_0e^{i\theta})\, r_0 i e^{i\theta}\,d\theta$$

$z = a + r_0 e^{i\theta}$

$dz = r_0 i e^{i\theta}\,d\theta$

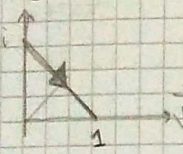
$|f(z)| \le M \;\forall z \in C$ $\boxed{\text{Prop 5}}$

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le M\,\text{Long}(C)$$

⑦ $$\left|\int_C \frac{1}{z^4}\,dz\right| \le M\sqrt{2}$$

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^4} \le (\sqrt{2})^4 = 4$$

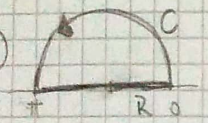
Sobre C $\boxed{|f(z)| \le 4}$



$\frac{1}{\sqrt{2}} \le |z| \le 1$ $\quad \sqrt{2} \ge \frac{1}{|z|} \ge 1$

→ Prop (5) contorno.

Uso Lema de Jordan

⑧ 

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$$

$$M_R = \max_{\theta\in[0,\pi]} \frac{1}{|a^2+R^2e^{2i\theta}|} = \frac{1}{R^2-a^2}$$

$z(t) = Re^{it}$ $\quad t\in[0,\pi]$

$z'(t) = Rie^{it}$

$D_f = \mathbb{C} - \{ia, -ia\}$

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \pi R M_R$$

$$\lim_{R\to\infty} g(R) = 0 \text{ sii } \lim_{R\to\infty} |g(R)| = 0 \quad (1)$$

$$|g(R)| = \left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi R}{R^2-a^2}$$

$0 \le |g(R)| \le \frac{\pi}{R^2-a^2}$

$$0 \le \lim_{R\to\infty}|g(R)| \le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi R}{R^2-a^2} = 0 \quad \therefore \boxed{\lim_{R\to\infty} g(R) = 0}$$

por (1)

Buena, preguntas: 7, 8, 9 que tienen la misma idea.

Multiplemente conexo

16

Otra forma de acotarlo:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} \qquad |f(z)| = \frac{|e^{iz}|}{|z^2+a^2|} \le \frac{|e^{iz}|}{||z|^2-a^2|}$$

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

Sobre γ

$$e^{iz} = e^{-R\operatorname{sen}\theta}\, e^{iR\cos\theta} \qquad |e^{iz}| = e^{-R\operatorname{sen}\theta} \quad 0\le\theta\le\pi$$

$0 \le \operatorname{sen}\theta \le 1$

$0 \ge -\operatorname{sen}\theta \ge -R$

Después lo pedís igual a mí.

$\frac{1}{3!}$ +

8) b) $\lim_{R\to\infty} \int_\gamma \underbrace{\frac{\log z}{z^2}}_{f(z)} dz = 0$

$$f(z) = \frac{\ln R + i\overset{Arg(z)}{\theta}}{R^2 e^{i2\theta}}$$

$$|f(z)| = \frac{|\ln R + i\theta|}{R^2} \le \frac{|\ln R| + |\theta|}{R^2}$$

Tomaremos $R \to \infty$ (ooo $R > 1$)

$$|f(z)| \le \frac{\ln R + \pi}{R^2}$$

$$\left| \int_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right| \le \frac{\ln R + \pi}{R^2} \pi R = \frac{\ln R + \pi}{R}$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\ln R + \pi}{R} \underset{L'H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty} \frac{\log(z)}{z^2} dz = 0$$

26) f holomorfa $z / |z - z_0| < R$

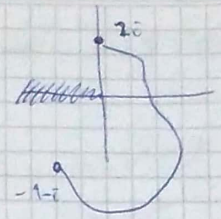
f continua $z / |z - z_0| = R$

con $|f(z)| \le M$ para $z / |z - z_0| = R$

Probar: $\left| f^{(n)}(z_0) \right| \le \frac{n! M}{R^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

sigo en la otra hoja

$$\int_C \frac{1}{z} dz =$$



uso un log que no me corte la recta

$f(z) = F'(z)$

$F(z) = \log z$

$= \ln|z| + i \arg z \quad , \quad -\pi < \arg z < \pi$

$$\int_C \frac{1}{z} dz = F(-1-i) - F(2i)$$

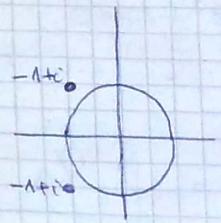
$$= \ln|-1-i| + i\arg(-1-i) - (\ln(2i) + i\arg(2i))$$

$$= \ln\sqrt{2} - i\frac{3}{4}\pi - \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{5}{4}\pi$$

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 2z + 2} dz \qquad C: |z| = 1$$

uso T. int de Cauchy

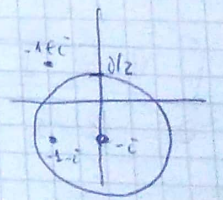


$$\int_C \frac{1}{(z-(-1-i))(z-(-1+i))}$$

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \quad \text{es } H(C) \text{ y } RI(C) \Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$$

Ahora con $|z + i| = 3/2$

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 2z + 2} dz = \int_C \frac{1/(z+1-i)}{(z-(-1-i))}$$

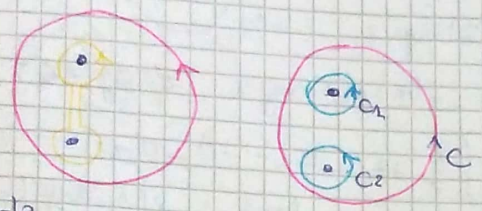


Aplicamos TIC con $z_0 = -1-i$ $\quad f(z) = \dfrac{1}{z-(-1+i)}$

$$\int_C \frac{1}{z^2+2z+2}\,dz = 2\pi i\, f(-1-i) = 2\pi i \frac{1}{-2i} = -\pi$$

$C: |z| = 5$

$$\int_C \frac{1}{z^2+2z+2}$$



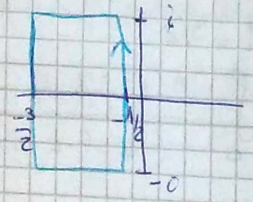
$$= \int_{C_1} \frac{1}{z^2+2z+2}\,dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2+2z+2}\,dz$$

Porque $g(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$ es H en $RI(C) \cap RE(C_1) \cap RE(C_2)$ y en C_1, C_2, C

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} \frac{1/(z-(-1-i))}{z-(-1+i)}\,dz + \int_{C_2} \frac{1/(z-(-1+i))}{(z-(-1-i))}\,dz$$

$$\underset{\text{TIC}}{=} 2\pi i \left[\frac{1}{(-1+i)-(-1-i)} + \frac{1}{(-1-i)-(-1+i)}\right] = 0$$

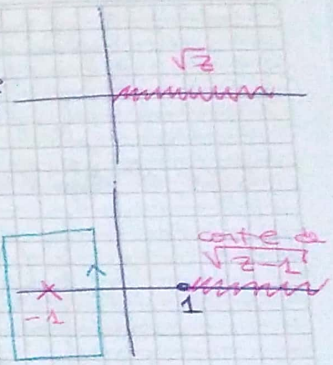
$$\int_C \frac{\sqrt{z-1}}{z+1}\,dz$$



Siendo $\sqrt{z}$ holom en $\mathbb{C} - \{z / z = x, x \geq 0\}$

$/\sqrt{1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\sqrt{z-1}}{z+1}$ es holom en $\mathbb{C} - \{z = -1\}$
$- \{z / z = x, x \geq 1\}$



$\sqrt{z-1}$ es H (C) y H (RI (C))

$z_0 = -1 \in RS(C)$

C cerrado ⊕,

$$\text{TIC: } \int_C \frac{\overbrace{\sqrt{z-1}}^{f(z)}}{z+1}\,dz = 2\pi i \overbrace{\sqrt{-1-1}}^{(f(z_0))}$$

$$\sqrt{-2} = e^{+1/2 \log(-2)} = 2\pi i\, e^{1/2 \ln|-2| + i \arg(-2)}$$
$$= 2\pi i\, 2^{1/2} e^{i \frac{\arg(-2)}{2}} = (*)$$

Como:

$$\sqrt{i} = e^{1/2 \ln|i| + i \arg i} = e^{\frac{i \arg i}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\arg i}{2} = \pi/4 \xrightarrow{\text{tomo}} \boxed{\arg i = \frac{\pi}{2}}$$

$$= (*) = 2\pi i\, 2^{1/2} \cdot e^{i\pi/2} = 2\pi \cdot 2^{1/2} i = -2\pi\, 2^{1/2}$$

21) i) $\displaystyle\int_C \frac{z^3-2}{(z+1)^2}\,dz \quad C: |z| = 5$ | $f(z) = z^3 - 2 \to$ holo en C, $z_0 = -1$

$$\int_C \frac{z^3-2}{(z+1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = 6\pi i$$

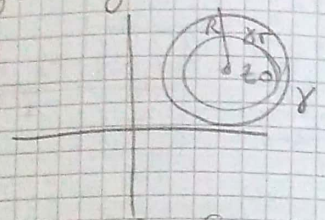
$\dfrac{1}{3!} +$

4) i) $f(z) = \operatorname{sh}(2z+4) \to$ holo en $\mathbb{C}$

$$\int_C \frac{\operatorname{sh}(2z+4)}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \pi i\, 4\operatorname{sh}(2\cdot 0+4)$$

$$= 4\pi i \operatorname{sh}(4)$$

Sigo el ej 26



f H en $RI(\gamma)$,
f cont en γ

Por TICG $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

$0 < r < R$

$$\frac{2\pi}{n!}\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right|$$

No tendrían que ir adentro los módulo?

sobre γ_r

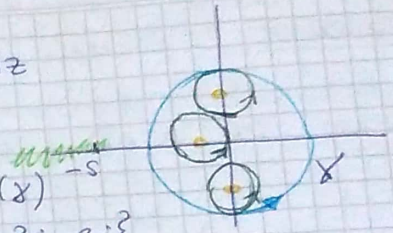
$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|f(z)|}{r^{n+1}}$$

$$\frac{2\pi}{n!}\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{2\pi}{r^2}|f(z)| \to \frac{2\pi}{R^2} M$$

Tomo lim para $r \to R$

$$\therefore \left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{R^n} M$$

19) d) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\operatorname{Log}(z+5)}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz$



f holomorfa sobre γ y en $RI(\gamma) - \{-1, 2i, -2i\}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

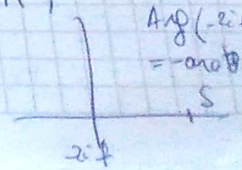
$$\int_{\gamma_3} \frac{\overbrace{\frac{\operatorname{Log}(z+5)}{z^2+4}}^{f_3(z)}}{(z+1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f_3'(-1) = \frac{2\pi i\,(5+8\ln 4)}{100}$$

$$f_3'(-1) = \left.\frac{\frac{1}{z+5}(z^2+4) - 2z\operatorname{Log}(z+5)}{(z^2+4)^2}\right|_{-1} = \frac{\frac{5}{4} + 2\ln(4)}{25}$$

$$f_3'(-1) = \frac{\frac{5}{4} + 2\ln(4)}{25}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{\overbrace{\frac{\operatorname{Log}(z+5)}{(z+1)^2(z-2i)}}^{f_2}}{(z+2i)}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f_2(-2i)$$

$$f_2(z)\Big|_{-2i} = \left.\left(\frac{\operatorname{Log}(z+5)}{(-2i+1)^2(-4i)}\right)\right|_{-2i} = \frac{\ln\sqrt{29} + i\operatorname{Arg}(-2i+5)}{-4i(-3-4i)}$$



$\operatorname{Arg}(-2i+5) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{5}\right)$

$\frac{d}{3!}$ +

Consecuencias de TIC y TICG

Corolario $f = u + iv$ es $H(D) \Rightarrow u, v$ son C^∞ en D

Dem: sea $z_0 \in D$ f holom en $z_0 \Rightarrow f$ tiene todas las derivadas de f en z_0.

$$f'(z_0) = u'_x + i v'_x = u'_x - i v'_y$$

OR

$$f''(z_0) = u'_{xx} + i v'_{xx} = u'_{xx} - i u'_{yx}$$

$$f'''(z_0) = u'_{xxx} + i v'_{xxx} = u'_{xxx} - i u'_{yxx}$$

$\Rightarrow u$ y v se pueden derivar tantas veces como uno quiera

Corolario: Teorema de Liouville si f es entera y acotada $\Rightarrow f$ es cte

Dem f es holo en todo $\mathbb{C}$

f acotada $\exists M > 0$ $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Sea γ una circunf de centro z_0 y radio R

$\Rightarrow$ TICG $$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \text{ para cualquier } R \geq 0$$

$$\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M\, n!}{R^n}}$$

$\Rightarrow |f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$ $\forall z_0$

$f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = cte$ (Prob 28.3.1)

Corolario 2: Si f es entera y no cte $\Rightarrow f$ no está acotada en $\mathbb{C}$

Ej: $f(z) = \operatorname{sen}(z)$, $f(z) = e^z$, $f(z) = z^3 + 2iz$ } enteras no ctes $\Downarrow$ no acotadas en $\mathbb{C}$

Corolario 3: (Teo Morera) Sea f continua en D y $\int_C f(z)dz = 0$ para cualquier contorno cerrado C en $D \Rightarrow f$ es holomorfa en D.

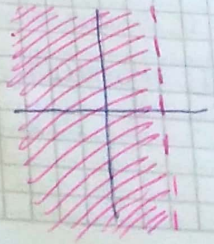
Dem si $\int_C f(z)dz = 0$ para cualquier contorno cerrado C en $D \Rightarrow f$ tiene primitiva en D. Existe $F(z)$ holomorfa / $F'(z) = f(z)$ como $F(z)$ es holo en $D \Rightarrow f$ tiene todas sus derivadas $\Rightarrow F''(z) = f'(z)$ $\forall z \in D \Rightarrow f$ es holomorfa en D.

Principio de módulo máximo

Si f es holom en dominio abierto $D \Rightarrow f$ no alcanza mód máx en D

Def f alcanza mód máx en D si: $\exists z_0 /$ $|f(z)| \leq |f(z_0)|$

Ejemplo $f(z) = e^z$ / $D = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z < 1\} = \{z = x + iy / x < 1\}$



$|f(z)| = |e^{x+iy}| = e^x < e$ → cota sup

pero no alcanza esa cota en D

$\nexists z_0 \in D / |f(z)| \leq |f(z_0)|$

máximo cota sup

supremo

Consecuencias de TIC y TICG

Corolario $f = u + iv$ es $H(D) \Rightarrow u, v$ son C^∞ en D

Dem: sea $z_0 \in D$ f holom en $z_0 \Rightarrow f$ tiene todas las derivadas de f en z_0.

$$f'(z_0) = u'_x + i v'_x \underset{\text{OR}}{=} u'_x - i v'_y$$

$$f''(z_0) = u''_{xx} + i v'_{xx} = u''_{xx} - i u''_{yx}$$

$$f'''(z_0) = u'''_{xxx} + i v'_{xxx} = u'''_{xxx} - i u'''_{yxx}$$

$\Rightarrow u$ y v se pueden derivar tantas veces como uno quiera

Corolario: Teorema de Liouville si f es entera y acotada $\Rightarrow f$ es cte

Dem f es holo en todo $\mathbb{C}$

f acotada $\exists M > 0$ $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Sea γ una circunf de centro z_0 y radio R

$\Rightarrow$ TICG $$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \text{ para cualquier } R \geq 0$$

$$\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M n!}{R^n}}$$

$\Rightarrow |f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$ $\forall z_0$

$C_R(z_0)$: $z = z_0 + Re^{i\theta} \Rightarrow dz = iRe^{i\theta} d\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\Rightarrow$ TICG $$f^{n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta} d\theta}{R^{n+1} \cdot e^{i(n+1)\theta}}$$

$$|f^{n}(z_0)| = |\text{todo}| \Rightarrow |f^{n}(z_0)| \leq \frac{|n!|}{|2\pi i|} \int_0^{2\pi} |f(z_0+Re^{i\theta})| \left|\frac{iRe^{i\theta}}{R^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}\right| d\theta = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \frac{1}{R^n} d\theta = \frac{n! M}{2\pi R^n}$$

$f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = cte$ (Finido 28,3,1)

Corolario 2: Si f es entera y no cte $\Rightarrow f$ no está acotada en $\mathbb{C}$

Ej: $f(z) = \operatorname{sen}(z)$, $f(z) = e^z$, $f(z) = z^3 + 2iz$ $\Big\}$ enteras no ctes $\Downarrow$ no acotadas en $\mathbb{C}$

Corolario 3: (Teo Morera) Sea f continua en D y $\int_C f(z)dz = 0$ para cualquier contorno cerrado C en $D \Rightarrow f$ es holomorfa en D.

Dem si $\int_C f(z)dz = 0$ para cualquier contorno cerrado C en $D \Rightarrow f$ tiene primitiva en D. Existe $F(z)$ holomorfa / $F'(z) = f(z)$ como $F(z)$ es holo en $D \Rightarrow f$ tiene todas sus derivadas $\Rightarrow F''(z) = f'(z)$ $\forall z \in D \Rightarrow f$ es holomorfa en D.

Principio de módulo máximo

f es holom en dominio abierto $D \Rightarrow f$ no alcanza mod máx en D

$|f(z)| = |e^{\ldots}| = e^{\ldots} < e$ ↳ cota sup

pero no alcanza esa cota en D

$\nexists z_0 \in D$ / $|f(z)| \leq |f(z_0)|$

máximo cota sup supremo

Recordemos

Teo. de Weierstrass: una func continua en un conj D, cerrado y acotado, alcanza máx y mín.

Corolario (del ppio de mód máx)

Sea f holomorfa en un dominio abierto acotado D, continua en la frontera de D (∂D) $\Rightarrow$ f alcanza módulo máx en ∂D

(Prob 29, 30)

(Es decir, $\exists z_0 \in \partial D \,/\, |f(z)| \leq |f(z_0)| \;\forall z \in D \cup \partial D$

$\boxed{\text{Funciones armónicas}}$

$u: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es armónica en D si es C^2 en D y $\Delta u = 0$

laplaciano de u.

$\Delta u = u''_{x_1x_1} + \dots + u''_{x_nx_n}$

En $\mathbb{R}^3$ $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$

En $\mathbb{R}^2$ $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$

En $\mathbb{R}$ $\Delta u = u''_{xx}$

¿Cuáles son las func. armónicas en $\mathbb{R}$?

Satisf $u''_{xx} = 0 \Rightarrow u(x) = ax + b \to$ lineales.

en $\mathbb{R}^2$?

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= ax + by + c \\ u(x,y) &= xy \\ u(x,y) &= x^2 - y^2 \\ u(x,y) &= \cos(x)\,\mathrm{senh}(y) \end{aligned}\right\} \text{armónicas en } \mathbb{R}^2$$

$u(x,y) = \ln(x^2+y^2) \to$ armónica $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

$u(x,y) = e^x \cos(y)$

$u(x,y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sen}(y)$

Teorema: Si $f = u + iv$ es holomorfa en D $\Rightarrow$ u y v son armónicas en D.

Dem: como f tiene todas sus derivadas $\Rightarrow$ u, v son C^∞ en D $\Rightarrow$ son C^2

Se verifica C-R $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ en D

Deriv $u_{xx} = v_{yx}$ como v es $C^2 \to v_{xy} = v_{yx}$

Deriv $u_{yy} = -v_{xy}$

Luego: $u_{xx} = -u_{yy}$ o $\boxed{u''_{xx} + u''_{yy} = 0}$

$\Downarrow$

u es armónica en D.

Similarmente v es armónica

Def Si $f = u + iv$ es holom. en D se dice que v es armónica conj de u

$\frac{1}{3!}$ +

Ejs de armónica u y su armónica conj v

$u(x,y)$	$v(x,y)$	$f(z)$
x^2-y^2	$2xy$	z^2
xy	$\frac{y^2-x^2}{2}$	$-i\frac{z^2}{2}$
$\operatorname{sh} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{ch} x \cos y$	$\operatorname{sh} z$
$e^x \cos y$	$e^x \operatorname{sen} y$	e^z
$e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$	$e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy)$	e^{z^2}
$e^{\operatorname{Re} z^2}\cos \operatorname{Im} z^2$		
$\ln\sqrt{x^2+y^2}$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\mathbb{1}\{x>0\}$ $+\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi\right]\mathbb{1}\{x<0, y>0\}$ $+\frac{\pi}{2}\mathbb{1}\{x\le 0, y>0\}$ $+\frac{-\pi}{2}\mathbb{1}\{x=0, y<0\}$	$\operatorname{Log}(z)$

<u>Teorema</u>: Sea u armónica en D y D simp conexo $\Rightarrow \exists$ una armónica conj v en D

<u>Dem</u>: Sea $F(x,y) = (-u'_y, u'_x) = (p,q)$

$q'_x = u''_{xx}$ Como $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$p'_y = -u''_{yy}$ $q'_x - p'_y = 0$

$q'_x = p'_y$

$\Rightarrow F$ tiene matriz jacobiana simétrica. Al ser D simpl conexo $\Rightarrow F$ es conservativo.

Existe función potencial v / $F(x,y) = \nabla v(x,y) = (v'_x, v'_y)$

Pero $F(x,y) = (-u'_y, u'_x) = (v'_x, v'_y)$

$\Rightarrow \begin{cases} -u'_y = v'_x \\ u'_x = v'_y \end{cases}$ CR. u es dif por ser C^2 y v tmb es C^2 v tmb es dif.

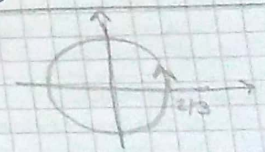
Definimos $f(z) = u + iv \Rightarrow f$ es holom en D

$\Rightarrow v$ es conj armónica de u.

$g(z) = -if(z) = v - iu \Rightarrow -u$ es conj arm de v

7)

b) $\left|\int_C \frac{\bar z}{\bar z+1}\,dz\right| \le \frac{8}{3}\pi$



$f(z) = \frac{\bar z}{\bar z+1} \Rightarrow |f(z)| = \frac{|\bar z|}{|\bar z+1|} = \frac{|z|}{|\bar z+1|}$

$\le \frac{|z|}{\big||\bar z| - |1|\big|} = \frac{|z|}{\big||z|-1\big|}$

$= \frac{2/3}{|2/3-1|} = \frac{2/3}{1/3}$

$= 2 = M$

Por Prop 5

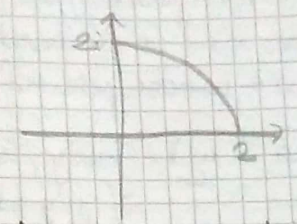
$\left|\int_C \frac{\bar z}{\bar z+1}\,dz\right| \le M L_C = M\, 2\pi \cdot \frac{2}{3}$

$= M\frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$

$\frac{1}{3!}$ +

c) $\left| \int_C \frac{1}{z^2+1}\, dz \right| \leq \frac{\pi}{3}$

Circunf. $|z|=2$ en el 1° cuad.



$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{\big||\underbrace{z^2}_{|z|^2}| - |1|\big|} = \frac{1}{|4-1|} = \frac{1}{3} = M$

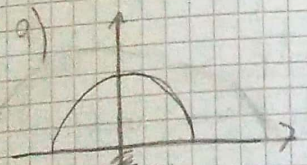
$|z-w| \leq |z+w| \leq |z|+|w|$

$\frac{1}{||z|-|w||} \geq \frac{1}{|z+w|} \geq \frac{1}{|z|+|w|}$

$\left| \int_C \frac{1}{z^2+1}\, dz \right| \leq M L_C = \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$

$L_C = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2}{4} = \pi$

g)



$z = 2e^{i\theta}$

$\int_C \frac{z-2}{z}\, dz = \int_C \left(1 - \frac{2}{z}\right) dz$

$= \pi - 2\int_C \frac{1}{z}\, dz = (+)$

$f(z) = \frac{z-2}{z} = 1 - \frac{2}{z}$

$z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$

$-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3}{2}\pi$

Elijo corte de rama:

$z \in \mathbb{C} / \{y<0, x=0\}$

$g(z) = \frac{1}{z} = G'(z)$

$G(z) = \log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

5. Sea $f : A \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ continua en A y γ una curva simple orientada incluída en A. Demostrar que $\mathrm{Re}(\int_\gamma f(z)dz)$ y $\mathrm{Im}(\int_\gamma f(z)dz)$ dan respectivamente, la circulación a lo largo de γ y el flujo del campo vectorial $(u, -v)$ a través de γ. HT

6. Calcular la longitud del arco del cicloide, curva cerrada parametrizada como: $z(t) = a(t - \operatorname{sen} t) + a\,i(1 - \cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ con a un real positivo. ✓ Se hacen

7. Sin calcular la integral, obtener las siguientes acotaciones:

   (a) $\left| \int_C \frac{1}{z^4}\, dz \right| \leqslant 4\sqrt{2}$ $\quad C$: segmento que une los puntos $z_1 = i$ y $z_2 = 1$.

   (b) $\left| \int_C \frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}\, dz \right| \leqslant \frac{8}{3}\pi$ $\quad C$: circunferencia $|z| = \frac{2}{3}$, recorrida en sentido positivo.

   (c) $\left| \int_C \frac{1}{z^2+1}\, dz \right| \leqslant \frac{\pi}{3}$ $\quad C$: circunferencia $|z| = 2$, en el primer cuadrante.

8. Sea γ la semicircunferencia superior de $|z| = R$. Probar que:

   (a) $\lim_{R \to +\infty} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\, dz = 0$ $\quad$ (b) $\lim_{R \to +\infty} \int_\gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\, dz = 0$

9. Evaluar (i) $\int_C \frac{z-2}{z}\, dz$ y (ii) $\int_{-C} |z|^{1/2} \exp(i \operatorname{Arg} z)\, dz$ donde C es la semicircunferencia $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

10. Calcular la integral $\int_\gamma \frac{dz}{z-c}$ con γ un contorno que encierra a $z_0 = c$, recorrido una vez en sentido antihorario. Analizar en qué varía el resultado si se recorre γ n-veces, $n \in \mathbb{N}$. ¿Contradice la independencia de la parametrización?

11. Clasificar a los conjuntos conexos del ejercicio 21 (a) del Trabajo Práctico Nro. 2 en simplemente o multiplemente conexos.

12. Denotamos $\mathcal{H}(D) = \{f : D \to \mathbb{C}$ holomorfas en $\mathbb{C}\}$. Decir qué condiciones debe cumplir un conjunto D de $\mathbb{C}$ para que:

   (a) si $f \in \mathcal{H}(D)$, entonces cualquiera sea el contorno cerrado $\Gamma \subseteq D$, resulta $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$, (confrontar con el ejercicio 3) D conexo

   (b) si f es continua en D, y para todo contorno cerrado $\Gamma \subseteq D$, $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$, entonces $f \in \mathcal{H}(D)$. D abierto y conexo

$$= (*) = \pi - 2\int_0^{\pi} \frac{1}{z}\,dz = \pi - \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)\Big|_{2}^{1} \cdot 2 \rightarrow$$

$$= \pi - 2\int_0^{\pi} \frac{1}{\cancel{2e^{i\theta}}} \cdot \cancel{2}ie^{i\theta}\,d\theta = \pi - 2i\pi = (1-2i)\pi$$

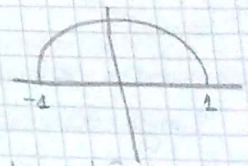
ii) $$-\int_{\gamma} |z|^{1/2} e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}\,dz = -\int_0^{\pi} |2e^{i\theta}|^{1/2} e^{i\,\mathrm{Arg}(2e^{i\theta})} \cdot 2ie^{i\theta}\,d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi} 2^{1/2} e^{i\theta} \cdot 2ie^{i\theta}\,d\theta$$

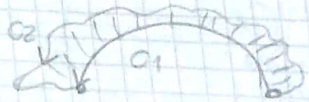
$$= -\int_0^{\pi} i\,2\sqrt{2}\,e^{i2\theta}\,d\theta = -2\sqrt{2}\,i\,\frac{e^{i2\theta}}{2i}\Big|_0^{\pi} = -2\sqrt{2}\,\frac{\overbrace{e^{i2\pi}}^{0} - 1}{2i} = 0$$

(13) b)

i) $f(z) = \frac{1}{z}$ sale como 9) i)



ii) Cto Teo de Inv homotópico

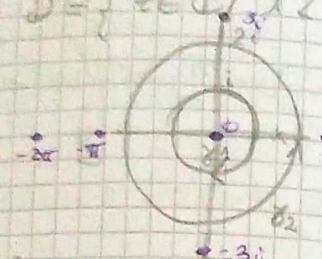


f es holom en C_1, C_2 y $RI(C_2) \cap RI(C_1)$

(14) b) $f(z) = z^3 \rightarrow$ tiene primitiva en $\mathbb{C}$

$\rightarrow \int_C f(z)\,dz$ no depende del camino sólo de punto inicial y final

(15) $D = \{ z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < 2 \}$ $\quad \gamma \in \partial D$

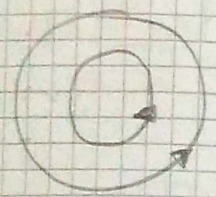


$\frac{e^z}{z^2+9}$ es holom por ser compos de puro enteros salvo en $-3i$ y $3i$

$\frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)}$ es holom (...) salvo en $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz$$

Por inv homotópica se que si f es holom en C_1, C_2 y $RI(C_2) \cap RE(C_1)$ orientados (+)



$$\Rightarrow \int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz$$

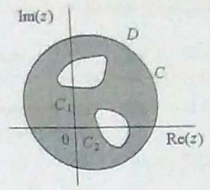
Para ambas f's la región entre γ_1 y γ_2 no tiene singularidades y al estar ambas orientadas en sentido opuesto a la otra, ocurre que por inv homot:

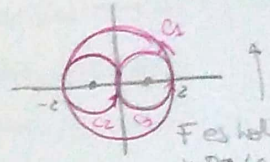
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -\int_{-\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{-\int_{-\gamma_2} f(z)\,dz} + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz + \int_{C_3} f\,dz$$

por +ce de inv homotópica





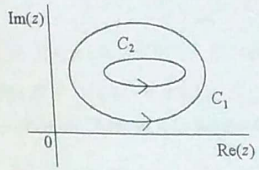
F es holom y $RI(C_1) \cap RE(C_2) \cap RE(C_3)$ no contiene singularidades, (1 y -1)

$\frac{1}{3!}$ +

(b) Mostrar:

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1}\,dz = \int_{|z-1|=1/2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1}\,dz + \int_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1}\,dz$$

(c) Analizar bajo qué condiciones $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ siendo $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ y C_1 y C_2 como se indican en el gráfico:



a y b no pueden pertenecer a $RI(C_1) \cap RE(C_2)$

18. Aplicando la fórmula integral de Cauchy, integrar la función $f(z) = \frac{2z^2-4}{z^2+1}$ a lo largo del círculo de radio 1 y recorrido una vez en sentido antihorario, con centro en:

(a) $z = i$ (b) $z = \frac{1}{2}$ (c) $z = -i$

19. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_{|z|=1} \frac{z^2+4}{z}\,dz$ (b) $\int_{|z|=4} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z+1} + \frac{2e^z}{z-3} \right) dz$ (c) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{Log}(z+2)}{(z+1)(z^2+4)}\,dz$

20. Calcular todos los posibles valores de la integral $\int_\Gamma \frac{dz}{z(z^2-1)}$ para diferentes contornos cerrados Γ que no pasen por $0, 1$ y -1.

f tiene primitiva

f holomorfa en γ y λ y sus regiones en dominio entre

13. (a) Explicar bajo qué condiciones es válido $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\lambda f(z)\,dz$, para dos curvas $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ tales que $\gamma(a)=\lambda(a)$ y $\gamma(b)=\lambda(b)$ (independencia del camino).

(b) Analizar si es posible utilizar, y cómo, el resultado del ejercicio 2 (b) para calcular:

(i) $\int_C \frac{1}{z}\,dz$ $\quad C$: semicircunf. inferior de $|z|=1$ desde $z_1=1$ hasta $z_2=-1$.

(ii) $\int_C \frac{1}{z}\,dz$ $\quad C$: curva definida por $x^4+y^4=1$ desde $z_1=-1$ hasta $z_2=1$.

14. Calcular, en cada caso, la integral de línea de la función f a lo largo de los contornos C indicados:

(a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+2}$ $\qquad C=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$.

(b) $f(z)=z^3$
(i) $C=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$,
(ii) C: recta que une los puntos $z=1$ y $z=i$,
(iii) C: arco de circunferencia de centro 0 y radio 1 que une los puntos $z=1$ y $z=i$,
(iv) C: un contorno que une los puntos $z=1$ y $z=i$.

HC (c) $f(z)=z\,\mathrm{sen}(z^2)$ $\qquad C$: contorno que une los puntos $z=-i\pi$ y $z=i\pi$.

15. Sea $D=\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|<2\}$ y γ la frontera de D, orientada de modo que los puntos de D están a la izquierda de γ. Probar que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para:

(a) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+9}$ $\qquad$ (b) $f(z)=\mathrm{ctg}\,z$

$\frac{z+1}{z+1}$ → es primitiva de z^i

16. Calcular, si es posible, $\int_C f(z)dz$ siendo $f(z)=z^i$ (valor principal) según sea:

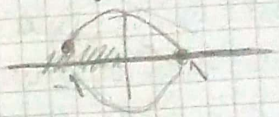
(a) C: contorno en el semiplano superior que une los puntos $z=1$ y $z=-1$.
(b) C: contorno en el semiplano inferior que une los puntos $z=1$ y $z=-1$.
(c) C: cualquier contorno que une los puntos $z=1$ y $z=-1$.

17. (a) Sean D y los contornos C, C_1 y C_2 como se indican en la figura que sigue. Probar que si f es holomorfa en D y continua sobre los contornos C, C_1 y C_2, el valor de la integral de f sobre la frontera de D es cero (o sea que bajo estas condiciones, se puede extender el teorema de Cauchy a dominios múltiplemente conexos). Deducir la relación entre las integrales de f sobre C, C_1 y C_2. (Pag 130 Churchill)

$z^i = e^{i\log z}$

$z^{i+1} = \dfrac{e^{(i+1)\log z}}{i+1}$

(16) $f(z) = z^i = F'(z)$ si $D = \mathbb{C} - \{z / x \leq 0, y = 0\}$



$$F(z) = \frac{z^{i+1}}{i+1}$$

$$\int_C z^i \, dz = \int_1^{-1} z^i \, dz \underset{\Delta \sim 0}{\approx} \int_1^{-1 \pm \Delta i} z^i \, dz = \left. \frac{z^{i+1}}{i+1} \right|_1^{-1 \pm \Delta i}$$

para retener problemas con el corte de rama

$$= \frac{e^{(i+1)\operatorname{Log} z}}{i+1} \quad \ln|-1 \pm \Delta i| + i \arg(-1 \pm \Delta i)$$

$$= \frac{e^{(i+1)\operatorname{Log}(-1 \pm \Delta i)}}{i+1} - \frac{e^{(i+1)\operatorname{Log}(1)}}{i+1}$$

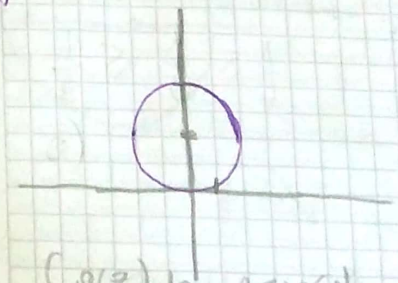
$$= \frac{e^{(i+1)\operatorname{Log}(-1)} - 1}{i+1}$$

$\Delta \sim 0$

=

(18) $f(z) = \dfrac{2z^2 - 4}{z^2 + 1}$

a)



$$\int_C \frac{g(z)}{z - i} \, dz = 2\pi i \, g(i)$$

$$= 2\pi i \cdot 3i = -6\pi$$

$g(i) = \dfrac{2(-1) - 4}{2i} = \dfrac{-6}{2i} = 3i$

F es holomorfa por ser compos de func enteras salvo donde se anule el denominador, o sea $z = \pm i$

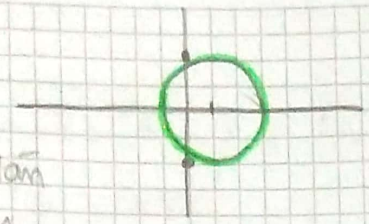
Sea $g(z) = 2z^2 - 4 / (z - (-i))$

Para el caso a), $g(z)$ es holom en C y $RI(C)$ siendo C un contorno sple cerrado

↳ puedo aplicar el Teorema int de Cauchy

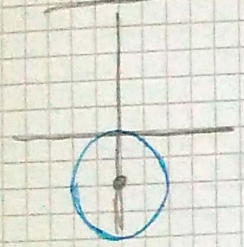
Análogamente en b):

... Pero me doy cuenta que las singularidades están fuera de la curva, al estar f en una curva cerrada y siendo f holomorfa en C y $\underbrace{RI(C)}_{\text{simpl conexo}}$, siendo C contorno cerrado



$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$$

c) Ahora sí, análogamente en c):



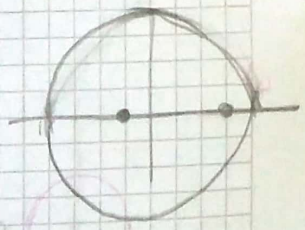
$$g(z) = \frac{2z^2+4}{z-i}$$

(...)

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{g(z)}{z-(-i)} = 2\pi i\, g(-i)$$

$$= 2\pi i \cdot (-3i) = 6\pi$$

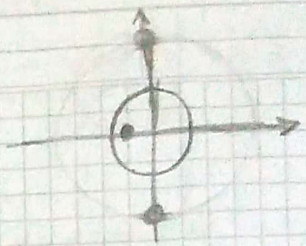
(19) b) $$\int_{|z|=4} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z+1} + \frac{2e^z}{z-3} \right) dz$$



$$= \int_{|z|=4} \frac{\cos(\pi z)}{z+1}\,dz + \int_{|z|=4} \frac{2e^z}{z-3}\,dz$$

$$= 2\pi i \underbrace{(\cos(\pi \cdot -1))}_{-1} + 2\pi i \cdot 2 e^3 = (-1+e^3)\,2\pi i$$

c) $$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{Log}(z+2)}{(z+1)(z^2+4)}\,dz$$



$$= 2\pi i \cdot \frac{\operatorname{Log}(-1+2)}{(-1)^2+4} = 0$$

(20) La integral va a dar cero porque f es holomorfa en RI(Γ) y Γ y RI[Γ] es simplconexo.

$\frac{1}{z(z^2-1)}$

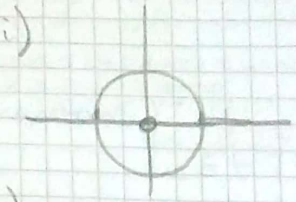
0, 1, -1 pueden estar en RI(C)

o sea que tengo que poner los dos 2 resultados de TIC

(21) iv) $f(z) = \frac{e^z}{z^n}$ $n > 0$

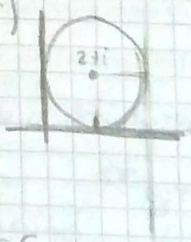
TICG

Para i)



$$\int_{|z|=0} \frac{e^z}{z^n}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{n}(0) = \frac{2\pi i}{n!}$$

Para ii)



como f es holo en RI(C) y C y RI(C) es simpl conexo

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$$

(22) TICG

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

Si f es holo en γ ∪ int(γ) (asumo sple) ⇐ si $a \in int(\gamma)$

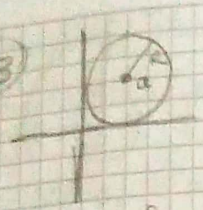
por TIC

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} \; ?$$

Si $a \notin int(\gamma)$ ⇒ las integrales dan 0 y se verifica si es simpl conexo

$f(a) \quad i e^{it} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi i}\frac{f(a+Re^{it})}{Re^{it}} \cdot Rie^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,dt$

(23)



$dz = iRe^{it}\,dt$

$z = a + Re^{it}$ ✓

$f(z)$ holom $\Rightarrow f(z)$ continua

$$\int_{|z-a|=R} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,Rie^{it}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i f(a+Re^{it})(z-a)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{i f(z)(z-a)}{z-a}\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i f(a+Re^{it})\,Re^{it}}{z-a}\,dt$$

$$= 2\pi i \cdot f(a)$$

(31) f entera

$f(z) = f(z+1) = f(z+i)\ \forall z$] Doblemente periódica

Si $f(z) = f(z+1)\ \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ es periódica de período 1

S. $f(z) = f(z+i)\ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ es periódica de período i

$f(z) = \operatorname{sen}(2\pi z)$ $\qquad g(z) = e^{2\pi z}$

$f(z) = f(z+1)$ $\qquad g(z+i) = e^{2\pi(z+i)} = e^{2\pi z + 2\pi i} = e^{2\pi z} \cdot e^{2\pi i} = e^{2\pi z} = g(z)$

f por ser continua es acotada en $D = [0,1] \times [0,1]$

$\boxed{D}$ $|f(z)| \le M\ \forall z \in D$

Dado $z \in \mathbb{C}\ \exists k, n \in \mathbb{Z} \,/\, \hat{z} = z - k - ni \in D$

$f^2(-1) = \frac{2\pi i}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z+1)^2}\,dz \Rightarrow = \pi i \cdot (-6)$

Teo Cauchy para

$z^3 - z \downarrow 3z^2 - 1 \downarrow 6z$

21. Calcular la integral de línea de las siguientes funciones:

(i) $f(z) = \dfrac{z^3 - z}{(z+1)^2}$ $\qquad$ (ii) $f(z) = \dfrac{z^4}{(z-1)^2(z-3)}$ $\rightarrow = 2\pi i \cdot \dfrac{3^4}{(3-1)^2} = \dfrac{\pi i\, 81}{2}$

(iii) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}$ $\qquad$ (iv) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^n}$ para $n > 0$

sobre el círculo de radio 2 y centro en: (a) $z = 0$, (b) $z = 2 + i$.

$\frac{1}{3!} +$

22. Mostrar que si $f(z)$ es holomorfa en $\Gamma \cup \operatorname{int}(\Gamma)$ donde Γ es un contorno cerrado en $\mathbb{C}$, entonces $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = \int_\Gamma \frac{f'(z)}{(z-a)}\,dz, \quad \forall a \notin \Gamma.$

(H)

23. Probar que si $f(z)$ es holomorfa en un dominio D y si el disco cerrado $|z-a| \leqslant R$ está en D, entonces $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + Re^{it})\,dt.$

Este resultado puede interpretarse como un teorema del valor medio que expresa el valor de f en el centro de la circunferencia como un "promedio" de los valores sobre la misma.

24. Sea $f(z)$ una función holomorfa en $|z-a| < R$. Si $0 < r < R$, demostrar que $f'(a) = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,e^{-it}\,dt.$

$f \in H(D) \Rightarrow f \in C_2(D) \Rightarrow$ cae

25. Explicar por qué si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio D, existen todas las derivadas parciales de u y de v y son continuas en D. $\boxed{\text{clase}}$

26. Demostrar que si f es holomorfa en $|z - z_0| < R$ y continua en $|z - z_0| = R$ con $|f(z)| \le M$ en $|z - z_0| = R$, entonces

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{R^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

TCG, tomando módulos de ambos lados y con prop 4

27. Probar que si $f(z)$ es holomorfa y $|f(z)| < \dfrac{1}{1-|z|}$ en $B(0,1)$ entonces $|f'(0)| \le 4$.

28. Justificar que, a excepción de la función nula, no existe función entera que tenga límite 0 en ∞.

29. (a) Hallar el máximo de $|ze^z + z^2|$ y el de $|iz^2 - 2z|$ sobre el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1 \text{ y } \operatorname{Im}(z) \ge 0\}$

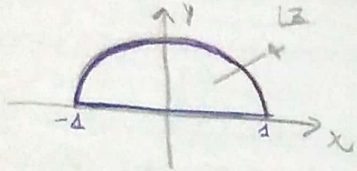
(b) Hallar el máximo de $|\cos z|$ sobre el cuadrado $\{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z \le 2\pi, 0 \le \operatorname{Im} z \le 2\pi\}$

30. Sea f holomorfa en $B(0,1)$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le 1$ si $|z| < 1$. Probar que $|f(z)| \le |z|$ si $|z| < 1$ y $|f'(0)| \le 1$. (Sugerencia: considerar $\dfrac{f(z)}{z}$ en $\bar{B}(0,r)$).

(29) a) Máx $|ze^z+z^2|$, $z \in \mathbb{K} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

Sea $f(z) = ze^z + z^2$

↳ f entera



Sabemos

1) $|f(z)| \leq M \;\; \forall z \in \mathbb{K}$

2) Máx $\{|f(z)|, z \in \mathbb{K}$ está en $\partial(\mathbb{K})\}$

Analizo $|f(z)|$; $z \in \partial\mathbb{K}$

$z = x$; $|x| \leq 1$

$|f(x)| = \underbrace{|x\, e^x + x^2|}_{g(x)} = \underbrace{|x|}_{\leq 1} \underbrace{|e^x + x|}$

$g'(x) = e^x(x+1) + 2x$ → que

$g(x)$ estrictam creciente ⇒ para $x \in [-1,1]$ el máx lo alcanza en 1

$\boxed{|f(x)| = 1(e+1)}$

• $z = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$

$|f(e^{it})| = |e^{it}(e^{e^{it}} + e^{it})| = |e^{\cos(t) + i\operatorname{sen}(t)} + e^{it}|\underbrace{|e^{it}|}_{1}$

$\leq \ldots$ (11/W)

$f(z) = z(e^z + z)$

$|f(z)| = |z|\,|e^z + z| \leq |z|\,(|e^z| + |z|) \leq e+1$

Ver que existe $z_0 \in \partial\mathbb{K}$ / $|f(z_0)| = e+1$

$f(1) = e+1$; máx $\{|f(z)|, z \in \mathbb{K}\} = e+1$

entera
lim o en ∞ } → función nula.

$f(z) = f(\hat{z} + k + ni) = f(\hat{z} + n) = f(\hat{z})$

per i per 1

$\Rightarrow |f(z)| \leq |f(\hat{z})| \leq M$ por ser $\hat{z} \in D$

Dado $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M \Rightarrow f$ es acotada (y entera)

⇒ por T de Liouville, f es cte.

(28) Si f entera, $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \;\forall z \in \mathbb{C}$

Si $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$

dado $\varepsilon > 0 \;\exists K > 0$ / $|z| > K \Rightarrow |f(z) - 0| < \varepsilon$

En $|z| \leq K$ (interior de la circunf), f está acotada por ser continua.

Es decir, $\exists M$ / $|f(z)| \leq M \;\forall z$ / $|z| \leq K$

Sea $\hat{M} = \max\{\varepsilon, M\}$

Luego $|f(z)| \leq \hat{M} \;\; \forall z \in \mathbb{C}$

f está acotada, por T de Liouville, f es cte,

$f(z) = c \;\; \forall z \in \mathbb{C}$

Como $\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} c = c = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \;\forall z \in \mathbb{C}$

$\frac{d}{3!}$ +

33 a) $u(x,y) = e^{-x}\cos(y)$

$u_{xx} = e^{x}\cos(y)$, $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

$u_{xx} = e^{x}\cos(y)$

$u_{yy} = -e^{-x}\cos(y)$ $\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$

$\Rightarrow u$ es armónica en $\mathbb{R}^2$

b)

$u(x,y) = \ln(x^2+y^2$ $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 - \{0,0\})$

$u_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$; $u_{xx} = \dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$u_{yy} = \dfrac{-2y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $u_{xx}+u_{yy}=0$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

c) $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

¿Alguna otra forma para ver si u es armónica?

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, f holom D, abierto conexo

$\Rightarrow \begin{cases} u \text{ armónica en } D, \\ \text{además: C-R, } u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

31. Mostrar que si f es una función entera tal que $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ para todo z complejo, entonces f es constante.

32. Supongamos que $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en $\bar{B}(0,r)$ y holomorfas en $B(0,r)$ con $f(z) \neq 0$ y $g(z) \neq 0$ $\forall z \in \bar{B}(0,r)$. Si $|f(z)| = |g(z)|$ en $|z| = r$, probar que existe una constante c tal que $|c| = 1$ y $f(z) = cg(z)$ $\forall z \in \bar{B}(0,r)$.

Funciones Armónicas

33. Determinar si las siguientes funciones son armónicas indicando el dominio en que lo son.

(a) $u(x,y) = e^{-x}\cos y$ (b) $u(x,y) = e^{x}(x\cos y - y \operatorname{sen} y)$

(c) $v(x,y) = x^2 - y^2 + e^{x}\cos y + x$ (d) $v(x,y) = e^{xy}\cos(x^2-y^2)$

(e) $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ (f) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

(g) $v(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

34. Hallar una función holomorfa $u + i\,v$ tal que su parte real (respectivamente, su parte imaginaria) coincida con la función u (respectivamente, v) de cada ítem del ejercicio 31. Especificar su dominio de holomorfía.

35. Establecer las condiciones que deben cumplir a, b y $c \in \mathbb{R}$ para que las siguientes funciones sean armónicas en $\mathbb{R}^2$:

(a) $u(x,y) = ax + bxy + cy$ (b) $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

36. Probar que si $\phi(x,y)$ es armónica en un dominio S entonces $\psi = \phi_x - i\phi_y$ es holomorfa en S (la función ψ se llama el gradiente conjugado de ϕ).

37. Justificar por qué si $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa, la función $3u^2v - v^3$ es armónica respecto a (x,y).

38. ¿Es la suma de funciones armónicas en un dominio D una función armónica en D? ¿Qué se puede decir respecto al producto?

39. (a) ¿Es cierto que si las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas conjugadas en un dominio D del plano entonces $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es holomorfa en D?

(b) Explicar por qué una función armónica en un dominio D admite una conjugada armónica local en D.

40. Obtener una conjugada armónica de $x^2 - y^2 + e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y)$. Hallar la curva ortogonal a la curva definida por $x^2 - y^2 + e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y) = 1$ en $(1,1)$.

b) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y)$

$f(z) = z e^z = (x+iy)e^x(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$

↳ entera

$Re(f) = x e^x \cos y - y e^x \operatorname{sen} y = u(x,y)$

$Im(f) = x e^x \operatorname{sen}(y) + y e^x \cos(y) = v(x,y)$

34) Halle g holom en $\mathbb{C}$ /

$Im(g) = v(x,y) = e^x(x\cos(y) - y \operatorname{sen}(y))$

$g(z) = i f(z) = i z e^z$ holom en $\mathbb{C}$

$Re(g) = -(x e^x \operatorname{sen} y + y e^x \cos y)$

$Im(g) = e^x(x\cos(y) - y \operatorname{sen} y)$

f holomorfa en D

$f(z) = u + iv$

- v es conj armónica de u

$g(z) = i f(z)$ holomorfa en D

$g(z) = -v + iu$

- u es conj arm de $-v$

37) $w(x,y) = 3u^2(x,y)\, v(x,y) - v^3(x,y)$ $\quad u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1° forma verif derivando

2° forma

$(u+iv)^3 = u^3 + 3u^2 iv + 3u(-v^2) + (-iv^3)$

$= (u^3 - 3v^2) + i(3u^2 v - v^3) = f(z)^3$

41. (a) Probar que la ecuación de Laplace en coordenadas polares es: $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$.
    (b) Caracterizar las funciones armónicas $u = u(r)$. Lo mismo si $u = u(\theta)$.
    (c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n(r,\theta) = r^n(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$. Probar que $u_n(r,\theta)$ es armónica y hallar su conjugada armónica $\tilde{u}_n(r,\theta)$.
    (d) Comprobar que $u(x,y) = (x^2+y^2)\cos(2\operatorname{arctg}(y/x))$ es armónica.

Aplicaciones sobre armónicas conjugadas

42. En un cierto medio donde la constante de conductividad térmica es igual a 0.1, las componentes del flujo de calor están dadas por $Q_x \equiv 3$ y $Q_y \equiv -4$. Hallar la distribución de temperatura $\phi(x,y)$, suponiendo que $\phi(0,0) = 0$ y la función de flujo $\psi(x,y)$ tal que $\psi(0,0) = 0$. Describir y graficar las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

43. Sea $\phi(x,y) = 2x - 6y$ la distribución de temperatura estacionaria de un sólido bidimensional. ¿Cuál es la temperatura compleja? Describir las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

44. El potencial complejo de un flujo de fluido está dado por $\Phi(z) = 1/z$ para $z \neq 0$. Hallar la velocidad compleja. Mostrar que la curva equipotencial que pasa por $(1,1)$ es $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Obtener la línea de corriente que pasa por $(1,1)$. Graficar ambas curvas.

45. Encontrar el potencial complejo de un fluido que se mueve con velocidad constante v_0 y cuya dirección forma un ángulo θ con el semieje real positivo. Hallar las componentes del campo de velocidad. Esbozar las curvas equipotenciales y las líneas de corriente.

46. Explicar por qué $d(x,y) = y + ix$ puede ser un flujo eléctrico complejo pero no puede serlo $\tilde{d}(x,y) = x + iy$. Hallar el potencial electrostático, las curvas equipotenciales y las líneas de corriente asociadas a $d(x,y)$.

47. Determinar si las siguientes ecuaciones describen las líneas de corriente de un fluido ideal. En caso afirmativo, calcular el correspondiente potencial complejo:
    (i) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x+1}\right) = cte$,
    (ii) $\dfrac{x-y}{x^2+y^2} = cte$,
    (iii) $e^{(x^2-y^2)}\operatorname{sen}(2xy) + x^2 - y^2 = cte$

$g(z) = f^3(z)$ es holom en D por ser comp de f c. holom

$h(z) = z^3 \quad g(z) = (h \circ f)(z)$

entero

$\Rightarrow Im(g) = 3u^2 v - v^3$ es arm.

34 Halle f entera / $Im(f) = v(x,y) = x^2 - y^2 + e^x \cos y + x = Im(iz^2) + Im(ie^z) + Im(iz)$

$v_1(x,y) = x^2 - y^2 = Re(z^2) = Im(iz^2)$

$v_2(x,y) = e^x \cos(y) = Re(e^z) = Im(ie^z)$

$v_3(x,y) = x = Re(z) = Im(iz)$

u, v arm en D

¿$u \cdot v$ arm en D? No necesariamente

Aplicaciones de funciones armónicas

Fluido bidimensional estacionario (no depende del tpo)

Campo de velocidad incompresible irrotacional

$\bar{v}(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$

irrotacional (rot = 0)

$\nabla \times (p, q, 0) = (0, 0, q_x - p_y)$

$q_x - p_y = 0 \Rightarrow v$ tiene jacob. simétrico

~~simétrico~~ $\Rightarrow$ si el dom es simpl conexo, v es conservativo,

$\bar{v}$ es conservativo $\Rightarrow \exists u \; C^1 /$

$\bar{V} = \nabla u = (u'_x, u'_y) = (p, q)$

Incompresible $\Rightarrow \nabla \cdot \bar{V} = 0$

$\nabla \cdot (p, q) = p'_x + q'_y = 0$

$\Rightarrow p'_x = u''_{xx}$ $\quad \nabla \cdot \bar{V} = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$q'_y = u''_{yy}$ $\quad \Rightarrow u$ es armónica!

u se llama potencial de velocidad

Como asumimos dominio SC $\Rightarrow \exists$ conj armónico de u, llamémoslo v:

$f(z) = u + iv$ es holom en el dominio.

Esa f se denomina potencial complejo

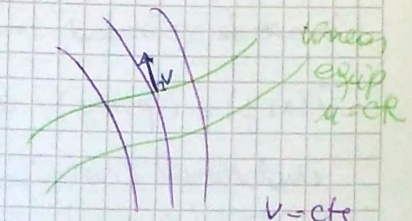
$f'(z) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y$

$= p - iq$

$\overline{f'(z)} = p + iq = \bar{v}$

u potencial

Curvas $u(x,y) = cte$ se denominan equipotenciales

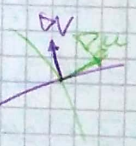


$v = cte$ líneas de campo o líneas de corriente

Proposición: Si $f(z) = u + iv$ es holomorfa $\Rightarrow$ curvas nivel de u son ortogonales a curvas nivel de v.

Dem ∇u es $\perp$ a $u = cte$

∇v es $\perp$ a $v = cte$



$\nabla u \cdot \nabla v = (u_x, u_y) \cdot (v'_x, v'_y)$

$= (u_x, u_y) \cdot (-u_y, u_x) = 0$

Resumen

$\bar{V} = (p, q) = \nabla u$: campo de velocidad

u: potencial de velocidad

v: arm conj de u

función de corriente.

$f(z) = u + iv$ potencial complejo.

$f'(z) = \bar{V}$

$u = cte$ líneas equip

$v = cte$ " de campo o de cte.

Ej 44

pot complejo $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad z \neq 0$

Hallar $\bar{V}$

$f'(z) = \frac{-1}{z^2}$ $\quad \overline{f'(z)} = \overline{\left(\frac{-1}{z^2}\right)} = -\overline{\left(\frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2+y^2)^2}\right)}$

$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\bar{V} = (p, q) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$

Potencial de velocidad

$u(x,y) = Re(f(z)) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Líneas equip: $u(x,y) = c$

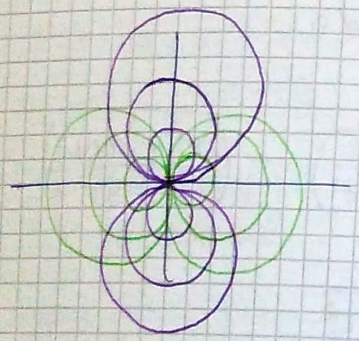
$\frac{x}{x^2+y^2} = c$

$\boxed{\frac{1}{4c} = \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2}$

Líneas de campo $v(x,y) = k$

$\frac{-y}{x^2+y^2} = k$

$\frac{1}{4k^2} = x^2 + \left(y + \frac{1}{2k}\right)^2$



Para Flujo de calor

u: temp de cuerpo bidimensional estacionario no se genera ni se destruye energía térmica

$u(x,y)$

λ: difusividad térmica

Flujo de calor: $\overline{Q} = -\lambda \nabla u$ (Ley de Fourier)

Flujo de Fluidos, Electrostática y Flujo de Calor

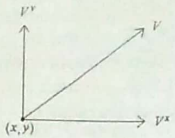
1 Flujo de fluidos

Muchos problemas importantes en dinámica de fluidos se resuelven mediante métodos de variable compleja, con las siguientes suposiciones:

1– El flujo de fluido es bidimensional, es decir, el modelo del flujo y las características del movimiento del fluido en un plano, son esencialmente las mismas en todo plano paralelo. Esto permite confinar nuestra atención no más que a un plano simple, el cual tomamos igual al plano z (o plano (x, y)), en donde las figuras construidas en este plano se interpretan como secciones transversales de "cilindros infinitos" perpendiculares al plano (x, y). Un cilindro infinito no es nada más que un *modelo matemático* de un cilindro físico el cual es tan largo, que los efectos lejanos se pueden despreciar razonablemente.

2– El flujo es estacionario (o uniforme), o sea, la velocidad del fluido en un punto, depende solamente de la posición y no depende del tiempo.

3– Las componentes de la velocidad se derivan de un potencial, es decir, si

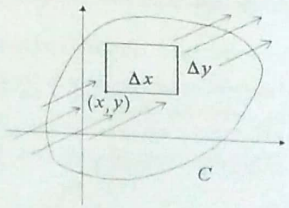


V^x y V^y denotan las componentes de la velocidad V del fluido en (x, y) en las direcciones x e y positivas respectivamente, existe una función Φ, que se llama la *velocidad potencial*, tal que:

$$V^x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad V^y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

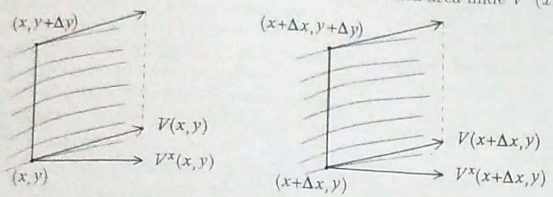
(es lo mismo que decir que (V^x, V^y) es un campo de gradientes).

4– El fluido es incompresible, es decir, si C es una curva simple cerrada en el plano (x, y), la cantidad de fluido contenido dentro de C es constante (la cantidad de fluido que entra a C es igual a la cantidad de fluido que sale de C).



5- El fluido es no viscoso, es decir, no tiene viscosidad o fricción interna. Un fluido que es no viscoso e incompresible, se llama *fluido ideal* y es un modelo matemático de un fluido real, en el cual los efectos de viscosidad y fricción interna son despreciables.

Consideremos el rectángulo formado por los puntos (x, y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ de la figura anterior. Si Δy es chico puedo suponer que V es constante y la cantidad de fluido que pasa a través del segmento formado por (x, y) y $(x, y+\Delta y)$ es el área del paralelogramo que forma este segmento con el vector V. Esta área mide $V^x(x, y)\Delta y$.



Si Δx es chico, la cantidad de fluido que sale por el segmento formado por $(x+\Delta x, y)$ y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ mide $V^x(x+\Delta x, y)\Delta y$. Restando uno a otro, tenemos la razón de pérdida de flujo entre ambos lados:

$$\left(\frac{V^x(x+\Delta x, y)-V^x(x, y)}{\Delta x}\right)\Delta x\Delta y \approx \frac{\partial V^x}{\partial x}(x, y)\Delta x\Delta y = \Phi_{xx}(x, y)\Delta x\Delta y \qquad (1)$$

Análogamente, la razón de pérdida de flujo entre los otros dos lados es

$$\left(\frac{V^y(x, y+\Delta y)-V^y(x, y)}{\Delta y}\right)\Delta y\Delta x \approx \frac{\partial V^y}{\partial y}(x, y)\Delta x\Delta y = \Phi_{yy}(x, y)\Delta x\Delta y \qquad (2)$$

Como el flujo sólo entra y sale por estos cuatro lados, entonces sumando (1) y (2) tenemos

$$\Phi_{xx}(x, y) + \Phi_{yy}(x, y) = 0$$

es decir, Φ satisface la ecuación de Laplace.

1.1 El Potencial Complejo

Como la velocidad potencial Φ es una función armónica, e int(C) es un conjunto simplemente conexo, se deduce que debe existir una función Ψ armónica conjugada de Φ, tal que la función

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

es holomorfa en C. Esta función Ω, de fundamental importancia en la caracterización de un flujo, se llama *potencial complejo*. Por derivación tenemos

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \Phi_x(x, y) + i\Psi_x(x, y) = \Phi_x(x, y) - i\Phi_y(x, y) = V^x - iV^y$$

Siendo así, la velocidad está dada por

$V(z) = V^x(x, y) + iV^y(x, y) = \overline{\Omega'(z)}$ se llama la *velocidad compleja*, y

$\mathcal{V} = \|V(z)\| = \sqrt{(V^x)^2+(V^y)^2} = |\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)|$ es la *magnitud* de la velocidad compleja.

1.2 Líneas y Trayectorias Equipotenciales

La familia de curvas $\Phi(x, y) = \alpha$ (α=cte.) (curvas de nivel de Φ) se llaman *curvas equipotenciales*. La familia de curvas $\Psi(x, y) = \beta$ (β=cte.) (curvas de nivel de Ψ) se llaman *curvas de corriente*, o *líneas de corriente*, o *trayectorias*.

Φ se llama *función velocidad potencial*

Ψ se llama *función de corriente*

Obs: Como Φ y Ψ son armónicas conjugadas se tiene que $\nabla\Phi \perp \nabla\Psi$, luego, las curvas equipotenciales y las curvas de corriente son perpendiculares también (allí donde Ω' es conforme, es decir, $\Omega'(z) \neq 0$).

1.3 Fuentes y Sumideros

En todo lo anterior supusimos que no existían puntos en el plano (x, y) en los cuales el fluido aparece o desaparece. Tales puntos se llaman *fuentes y sumideros* respectivamente. En tales puntos, que son puntos singulares, la ecuación de Laplace no se cumple. Ninguna dificultad surge al utilizar la teoría anterior siempre que se tenga la precaución de identificar a estos puntos como singularidades en el dominio del potencial complejo $\Omega(z)$ y observar que la ecuación de Laplace vale en una región que excluya a estos puntos singulares.

2 Flujo de Calor

Consideremos un sólido bidimensional que tiene una distribución de temperatura (estacionaria) $\Phi(x, y)$. Interesa la cantidad de calor conducido por unidad de área en unidad de tiempo a través de la superficie. Esta cantidad viene dada por el $\nabla\Phi$:

$F = -k\nabla\Phi$ y se llama *flujo de calor*

k es la constante de conductividad térmica y depende del material del cual está hecho el sólido.

Como Φ es armónica (si $F \in \mathcal{C}^2$), si existe Ψ conjugada armónica, tenemos que las curvas

$\Phi = cte.$ se llaman *isotermas* o *líneas isotérmicas*,

$\Psi = cte.$ se llaman *líneas de flujo* y

$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ se llama *temperatura compleja*.

3 Electrostática

3.1 Ley de Coulomb

Sea r la distancia entre dos puntos con carga eléctrica q_1 y q_2. Entonces la fuerza entre ellas está dada en magnitud por la ley de Coulomb, la cual dice que

$$F = \frac{q_1 q_2}{kr^2}$$

y es de repulsión o atracción según que las cargas sean de igual tipo, o diferentes (una positiva y otra negativa). k es una *constante dieléctrica* y depende del medio ambiente (en el vacío k=1).

3.2 Intensidad del Campo Eléctrico. Potencial Electrostático

Supongamos que tenemos una distribución de carga (bidimensional). Esta distribución de carga produce un campo eléctrico. Si una unidad de carga positiva se coloca en un punto a del plano (x, y) (no ocupado por otra carga), la fuerza que actúa sobre esta carga se llama la *intensidad del campo eléctrico* en a y se denota ε. Esta fuerza se deduce de un potencial Φ el cual se llama *potencial electrostático*. En símbolos,

$$\mathcal{E} = -\nabla\Phi$$

entonces

$$\mathcal{E} = E^x + iE^y = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \text{donde} \quad E^x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\ ,\ E^y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

En una región <u>no</u> ocupada por la carga a, vale (como consecuencia del teorema de Gauss) que

$$\frac{\partial E^x}{\partial x} + \frac{\partial E^y}{\partial y} = 0$$

luego

$$\Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$$

es decir, Φ es armónica en todos los puntos no ocupados por carga. Si existe Ψ conjugada armónica de Φ, entonces la función

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

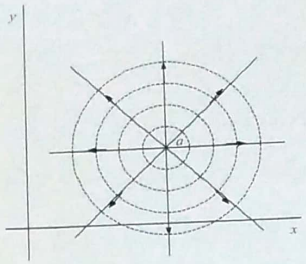
es holomorfa en la región no ocupada por la carga y se llama *potencial complejo electrostático*. En términos de esto, tenemos

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -\overline{\frac{d\Omega}{dz}} = -\overline{\Omega'(z)}$$

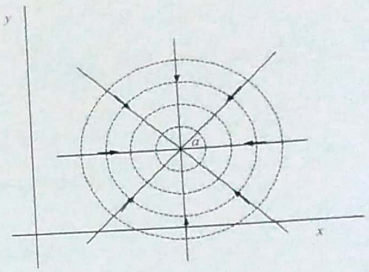
y la magnitud de $\mathcal{E}$ está dada por $E = |\mathcal{E}| = |-\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)|$.
Las curvas $\Phi(x, y) = \alpha$, $\Psi(x, y) = \beta$ se llaman *líneas equipotenciales* y *líneas de flujo* respectivamente.

Se ve entonces que la analogía de flujo de calor y electrostática con flujo de fluidos es muy clara: el campo eléctrico en problemas electrostáticos corresponde al campo de velocidad en los problemas de flujo de fluidos, siendo la única diferencia un cambio de signo en los potenciales complejos correspondientes. Por lo tanto, el potencial complejo electrostático debido a una carga q en un punto $z = a$ (en el vacío) representará una fuente o sumidero según sea que $q < 0$ ó $q > 0$.

Fuente en $z = a$ $(q < 0)$



Sumidero en $z = a$ $(q > 0)$



En la primera figura el fluido está brotando con velocidad constante de una fuente en $z = a$, en la segunda, el fluido está desapareciendo en un sumidero $z = a$. En ambos casos las trayectorias se muestran gruesas mientras que las líneas equipotenciales están punteadas.

$\bar{Q}$ conservativo

$\nabla \cdot \bar{Q} = 0$

$\nabla \cdot Q = -\lambda \nabla \cdot \nabla u = -\lambda \Delta u = 0 \Rightarrow u$ es armónica

En un SC tiene arm conj v

$f(z) = u + iv$: es holomorfa

f: temperatura compleja

$u = cte$: isotermas

$v = cte$: líneas de campo

$f'(z) = u'_x + i v'_x = u'_x - i u'_y$

$\overline{f'(z)} = u'_x + i u'_y = \nabla u = \dfrac{\bar{Q}}{-\lambda}$

Resumen

$\bar{Q} = -\lambda \nabla u$ flujo de calor

u: temperatura

v: arm conj de u, punación de cte

$f(z) = u + iv$ temperatura compleja

$\overline{f'(z)} = \dfrac{\bar{Q}}{-\lambda}$ $u = cte$ líneas isotermas

$v = cte$ " de flujo.

Electroestática

Resumen

u: potencial electroestático

$E = -\nabla u$: campo eléctrico

u armónico

v arm conj

$f(z) = u + iv$ potencial complejo

$f'(z) = -E$

$\boxed{\text{Sucesiones numéricas}}$ (reales)

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ lista infinita de nros reales.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Se dice que la sucesión converge a L si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Esto es: dado $\varepsilon > 0$, $\exists N / n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Se denota:

$$a_n \to L$$

Si no converge, se dice que diverge

Ej: $a_n = (-1)^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge

2) $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$a_n \to 0$

3) $a_n = r^n$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \to 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 1 & r = 1 \\ \nexists & \end{cases}$

$a_n \to 0$ si $|r| < 1$

$a_n \to 1$ si $r = 1$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge si $|r| > 1$ o $r = -1$

4) $a_n = n!$ diverge

5) $-\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$

6) $\sqrt[n]{n} \to 1$

7) $\sqrt[n]{r} \to 1$

8) $a_n = \frac{r^n}{n!} \to 0$ para cq r

Series numéricas

Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, la serie de términos a_1 es una sucesión.

$S_1 = a_1$ $\qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_2 = a_1 + a_2$ $\qquad S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$

Se dice que la serie converge si $\exists \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$

En tal caso, escribimos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_k$$

Si $\nexists$ límite la serie diverge

Ej $a_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$

$$S_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

converge?

$$S_{2k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2k}$$

$$S_{2k} - S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k}$$

$$k + 2 \leq k + k = 2k$$

$$\frac{1}{k+2} \geq \frac{1}{2k}$$

$$S_{2k} - S_k \geq \frac{1}{2}$$

$$S_{2k} \geq \frac{1}{2} + S_k$$

$$S_2 \geq \frac{1}{2} + S_1 = \frac{1}{2} + 1 = 3/2$$

$$S_4 \geq \frac{1}{2} + S_2 \geq \frac{1}{2} + 3/2 = \frac{4}{2}$$

$$S_8 \geq \frac{1}{2} + S_4 \geq \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = 5/2$$

$$S_{2^k} \geq \frac{1}{2}(k+2)$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{k \to \infty} S_k$$

Ej: "La Señora Serie"

Serie de términos r^n

existe $\lim_{k \to \infty} S_k$?

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} r^n = 1 + r^1 + r^2 + \dots + r^k$$

$$(1-r) S_k = (1 + r + \dots + r^k)(1-r)$$

$$= 1 + r + r^2 + \dots - r - r^2 - \dots - r^k - r^{k+1} = 1 - r^{k+1}$$

Si $r \neq 1$ $S_k = \frac{1 - r^{k+1}}{1-r}$

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1 - r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r} \lim_{k \to \infty} r^{k+1} = \frac{1}{1-r}$$

si $|r| \leq 1$

Si $|r| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Si $|r| > 1$ o $r = -1$, como $\lim_{k \to \infty} r^{k+1} \nexists$, la serie converge

Si $r = 1$:

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} 1^n = 1 + 1^2 + \dots + 1^k = k+1$$

$\lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} k+1 \nexists$ la serie converge si $|r| < 1$

Se dice que la serie de términos a_n converge abs si converge la serie $\tilde{S}_k = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| = \sum_{n=1}^{k} |a_n|$

la serie converge condicionalmente si converge pero no converge absolutamente

Proposición

Si la serie de términos a_n converge absolutamente $\Rightarrow$ converge.

$dz = ire^{it}$

$z = a + re^{it}$ $\quad 0 < r \leq R$

(26) $f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|\leq R} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|\leq R} \frac{f(a+re^{it})}{(re^{it})^2}\cdot ire^{it}\,dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}}\,dt = \frac{1}{2\pi r}\int f(a+re^{it})\,e^{-it}\,dt$ ✓

(27) • $f(z)$ holom en $B(0,1)$ $\quad |f(z)| < \frac{1}{1-|z|}$

no sabía ✗ $\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-0}\,dz = f(0)$ $\quad \left|\int_C f(z)\,dz\right| < \frac{2\pi}{1-|z|}$

$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz$ ✓

$|f'(0)| \leq M\cdot\frac{2\pi}{2\pi}\cdot R$

$M = \left|\frac{f(z)}{z^2}\right| = \frac{|f(z)|}{|z^2|} = \frac{|f(z)|}{|z|^2} \leq \frac{1}{(1-R)}\cdot R^2$ $\quad |z| = R$

• $|f'(z_0)| \leq \frac{R}{(1-R)R^2}$ $\quad \forall\, 0 < R < 1$

con $R = \frac{1}{2}$ $\quad |f'(z_0)| \leq \frac{1}{(1-\frac{1}{2})\frac{1}{2}} = 4$

No sabía ✗

(30) $\frac{1}{2\pi i}\int_{B(0,r)} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(0) = 0$

$|f(0)| = \left|\int_{B(0,r)} \frac{f(z)}{z}\,dz\right| \leq M\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot r = 0$

(36) $\phi(x,y)$ es armónica en S $\Rightarrow C^2$ en S

$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$

$\psi = \underbrace{\phi_x}_{u} + i\underbrace{\phi_y}_{v}$ $\Rightarrow$ ② ver CR para S

① • u, v son C^1, son diferenciables

$\phi_{xx} = u_x = v_y = -\phi_{yy}$

$\phi_{xy} = \phi_{yx}$ → se cumple ig porque $-\phi_y$ es C^1

ϕ_x es C^1 ya que ϕ es C^2

$\Rightarrow$ como se cumplen las condiciones ① y ②

ψ es holomorfa en S ✓

(39) u, v son armónicas conj $\Rightarrow f$ es holomorfa?

a) u y v son arm conj en D

$\Rightarrow u_x = v_y$

$u_y = -v_x$

en D

y u, v son C^2 en D $\Rightarrow$ son armónicas en D

Si $f = u + iv$

• por CR $u_x = v_y$ ✓

$u_y = -v_x$ en D

• siendo u y v $C^2 \Rightarrow$ son dif en D en D

$\Rightarrow f$ es holom en D ✓

· por qué

b) u armónica en D $\Rightarrow$ v función arm con v en D

la parte real e imag. de cualq función holomorfa en D son funciones armónicas y como una función holomorfa verifica las cond de CR en D, necesariamente si u es una función armónica en D, va a cumplir esto último con alguna otra función armónica, o sea, u va a ser localmente la parte real o imag. de la función holom cumpliendo CR con otra función armónica siendo parte real o imag localmente de la holom.

...?

(40) $Re(z^2) = x^2 - y^2$

$Im(z^2) = 2xy$

$e^{2\pi(x-1)} \cos(2\pi y)$

$$\boxed{v(x,y) = 2xy + e^{2\pi(x-1)} \operatorname{sen}(2\pi y)}$$ ✓

$$e^{2\pi(z-1)} = e^{2\pi(x+iy-1)} = e^{2\pi(x-1)} e^{iy2\pi}$$

$$= e^{2\pi(x-1)} (\cos(2\pi y) + i \operatorname{sen}(2\pi y))$$

$$Re(e^{2\pi(z-1)}) = e^{2\pi(x-1)} \cos(2\pi y)$$

$$Im(e^{2\pi(z-1)}) = e^{2\pi(x-1)} \operatorname{sen}(2\pi y)$$ ✓

$\Rightarrow u = Re(z^2 + e^{2\pi(z-1)})$ $\quad \nabla u \perp$ a $u = cte$

$v = Im(z^2 + e^{2\pi(z-1)})$ $\quad \nabla v$ es $\perp$ a $v = cte$

$\nabla u = (u_x, u_y)$ $\quad \nabla v = (v_x, v_y) \underset{CR}{=} (-u_y, u_x)$

$\nabla u \cdot \nabla v = 0$

$\rightarrow$ las curvas de nivel de u son $\perp$ a las curvas de nivel de v.

$\therefore v(1,1) = 2 + e^{2\pi(1-1)} \operatorname{sen}(2\pi \cdot 1) = 2$

de ahí se deducen ambas curvas

$\Rightarrow$ la curva de nivel ortogonal a la curva C en $(1,1)$ es $\boxed{v(x,y) = 2}$ ✓

(41) CR en polares:

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \rightarrow \boxed{u_{r\theta} = \frac{1}{r} v_{\theta\theta}}$

$u_\theta = -\frac{1}{r} v_r \rightarrow \boxed{u_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} v_{r\theta}}$

$\boxed{u_{rr} = -\frac{1}{r^2} v_{\theta r}}$

$\boxed{u_{\theta r} = \frac{1}{r^2} v_{rr}}$

$u(x,y)$: $x = r$, θ; $y = r$, θ

$u_x = v_r \operatorname{sen}\theta + \frac{v_\theta}{r} \cos\theta$

$v_y = v_r \operatorname{sen}\theta + \frac{v_\theta}{r} \cos\theta$ ✗

es cero

$u_r = u'_x \cdot x'_r + u'_y \cdot y'_r$

$u_{rr} = (u'_{xx} \cdot x'_r + u'_{xy} y'_r) x'_r + u'_x \cdot x''_{rr} + \ldots$

(42) $\lambda = 10$ $\quad u(0,0) = 0$

Q $\quad V(0,0) = 0$

$u(x,y)$?

$V(x,y)$

$\bar{Q} = (-\nabla u \cdot \lambda)$ $\qquad \bar{Q} = (3, -4)$

$(3, -4) = -0{,}1\,(u'_x, u'_y)$

$\left.\begin{array}{l} u'_x = -0{,}3 \\ u'_y = 0{,}4 \end{array}\right\} \Rightarrow u(x,y) = -0{,}3\,x + 0{,}4\,y$

$f(z) = u(x,y) + i\,V(x,y)$

$u(x,y) = Re(f(z)) = -0{,}3x + 0{,}4y$ ← dato

$-0{,}3\,x = Re(f_1(z))$ $\qquad Re(f_2(z)) = 0{,}4\,y$

$f_1(z) = -0{,}3\,z$ $\qquad f_2(z) = -0{,}4\,i\,z$

$\Rightarrow f(z) = (-0{,}3 - 0{,}4i)\,z + di \quad d \in \mathbb{R}$

$V(x,y) = Im(f(z)) = -0{,}3\,y - 0{,}4\,x + d$

(46) $\bar{E}(x,y) = y + ix \rightarrow$ campo eléctrico complejo

$\bar{E}(x,y) = (y, x) = -\nabla u(x,y)$

u pot eléctrico

$\left.\begin{array}{l} u'_x = -y \\ u'_y = -x \end{array}\right. \Rightarrow u(x,y) = -xy$

y $\nabla \cdot E = 0 \Rightarrow$ puede ser campo eléctrico

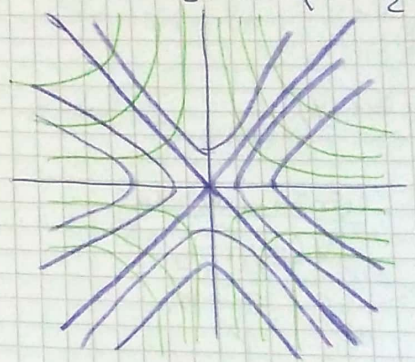
Potencial complejo

$f(z) = u + iV$ $\qquad \overline{f'(z)} = E$

$\overline{f'(z)} = \bar{E}$ $\qquad \overline{f'(z)} = (y + ix)$

$f'(z) = y - ix = -iz$

$f(z) = -i\frac{z^2}{2} = -i\left(\frac{x^2 - y^2}{2} + i\left(\frac{2xy}{2}\right)\right) + c = \underbrace{xy}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(\frac{y^2 - x^2}{2}\right)}_{V(x,y)}$



en el otro caso no es campo eléctrico

$\nabla \cdot E \neq 0$

$\nexists$ f holom.

$\overline{f'(z)} = E$

$\overline{f'(z)} = z$

$f'(z) = \bar{z}$! no.

Fluido ideal

$\bar{V} // (x,y)$

$\bar{V} = (x,y)$ no es ideal $\nabla \cdot \bar{V} \neq 0$

$V(x,y) = g(x,y)\,(x,y)$ $\qquad D: \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

$V(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\hat{r}}{\|r\|^2}$

Potencial complejo $f(z)$ / $\overline{f'(z)} = \bar{V}$

$\overline{f'(z)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$

$$f'(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

$$f(z) = \log z + cte = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

u → pot de velocidad

v → función de cte

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$v(x,y) = \theta = \arg(x+iy)$$

<u>Líneas equip</u>

$$u(x,y) = a$$

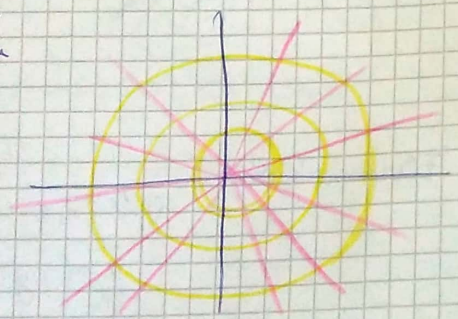
$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = a$$

$$x^2+y^2 = e^{2a}$$

<u>Líneas de cte</u>

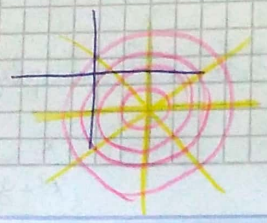
$$v(x,y) = b$$

$$\theta = b$$



$$\bar{v}(x,y) = \left(\frac{x-3}{(x-3)^2+(y+1)^2}, \frac{y+1}{(x-3)^2+(y+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(z) = \log(z-(3-i))$$



1-k) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \boxed{a_n \to 0}$

$$|a_n| = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\underbrace{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \to 0 \quad n \to \infty$$

2) Sucesión compleja

$z_n = x_n + i y_n$ $\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suc de nºs reales

<u>Resulta</u>

$$z_n \to a+ib \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to a \\ y_n \to b \end{cases}$$

2-b) $z_n = \underbrace{\dfrac{n}{n+3i}}_{\alpha_n} - \underbrace{\dfrac{in}{n+1}}_{\beta_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3i} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-in}{n+1} = -i$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1-i$$

2-c) $z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ $\quad |z_n| = \left(\dfrac{|1+i|}{2}\right)^n = \underbrace{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{<1}^n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0 \text{ sii } \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

2-h) $z_n = \cos(t) + i\operatorname{sen}(t)$ $\quad z_n = (e^{it})^n$, $t \in \mathbb{R}$ (Fijo)

Si $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\to z_n = 1 \to 1$

Si $t \neq 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$; no existe $\lim_{n\to\infty} (e^{it})^n$

Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n \to$ conv absolutamente si $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge

$z_n \in \mathbb{C}$

$|z_n|_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión $\mathbb{R}$

Sea la serie $\sum_{n=0} a_n$

Cond nec conv $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv $\Rightarrow a_n \to 0$

Criterios para series de términos $\oplus$

1) Criterios de comparación

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ / $0 \le a_n \le b_n$ si $n \ge n_0$

Entonces

$\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum a_n$ conv

$(\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div$)$

2) crit comp por paso al límite

$\sum a_n, \sum b_n, a_n \ge 0, b_n > 0$

/ $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

Entonces:

1) Si $0 < L < \infty$

$\sum a_n$ conv $\Leftrightarrow \sum b_n$ conv

2) Si $L = 0$

Si $\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum a_n$ conv

3) Si $L = \infty$

si $\sum b_n$ div $\Rightarrow \sum a_n$ div.

3) Crit de D'Alembert (cociente

Sea $\sum a_n$, $a_n > 0$

tal que $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow$ si $0 \le L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ conv

si $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ div

4) crit de Cauchy (raíz)

Sea $\sum a_n$; $a_n \ge 0$ /

$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L$

$\Rightarrow$ si $0 \le L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ conv

si $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ div

Nota: Dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Si $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow$

existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y además $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \to$ conv si $|r| < 1$

$\to$ div si $|r| \ge 1$

$|r| < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \to$ conv si $\alpha > 1$

$\to$ div si $\alpha \le 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$

como $\frac{1}{n^2}$ conv

$\xrightarrow{\text{crit comp}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$ conv

$0 < \frac{1}{n(n+4)} \le \frac{1}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+5}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ div

(no cond nec conv)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n} = a_n$

c D'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overbrace{(n+1)!}^{=(n+1)n!}}{100^{n+1}} = \frac{n+1}{100} \to \infty$$

$L = \infty > 1 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$ div.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ serie conv

$a > 0$

D'A $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0$

como conv $\to \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 0$

7-c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

crit raíz

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

$\Rightarrow \sum a_n$ div, además $a_n \to \infty$

8-d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{6^k} = a_n$ $\quad$ Analizo conv de $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{6^k}$

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k)^{1/k}}{6} = 1/6 < 1$$

$\Rightarrow \sum |a_k|$ conv

$\Downarrow$

$\sum a_k$ conv

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-1)^n}{\sqrt{n}} \to a_n$

Analizo conv de: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

no informa sobre conv de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

se hace de otra forma.

invento:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{k+1}\,\ln(k+1)}{k^3}}_{a_k}$$

probar que converge

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n+7}}{n^2-1} \to a_n$

$\frac{\sqrt{n+7}}{n^2-1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$

$\downarrow$

n grande

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+7}}{n^2-1}}{\frac{1}{n^{3/2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\sqrt{n+7}}{n^2-1} = 1$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ conv $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv

$\frac{1}{3!} +$

$\frac{1}{2}$

Criterio de Leibnitz (para series alternadas

Sea $a_n \geq 0$ una sucesión monótona decreciente con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

Ej $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ Sabemos que no conv absolut

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ monótona dec.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

Como la serie converge pero no conv absolut la serie conv condic.

Criterio de Dirichlet

Sea a_n una suc monótona dec. con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n una sucesión con sumas parciales son acotadas (es decir $\left|\sum_{n=0}^{N} b_n\right| < M$ para algún $M > 0$)

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge

Ej $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $b_n = (-1)^n$

$\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} (-1)^n\right| = -1+1-1 \cdots \leq 1$

b_n sucesión cuyas sumas parciales son acotadas

$a_n = \frac{1}{n}$ monótona dec, $\lim_{n\to\infty}$

$\Rightarrow \sum a_n b_n = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

Series de n°s complejos

Dada una sucesión $(z_n)_{n=0}$, $z_n \in \mathbb{C}$, la serie de términos z_n es la sucesión de sumas parciales

$S_k = \sum_{n=0}^{k} z_n$

La serie converge si $\exists \lim_{k\to\infty} S_k$

En tal caso denotamos $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} z_n$

Proposición Dada la suc $\boxed{z_n = x_n + i y_n}$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge a $z = x+iy$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n = x+iy\right)$

Sii $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge a x y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ converge a y