Independencia Lineal

Requisitos previos

Definición formal:

Sea $S \subseteq V$ (un subespacio contenido dentro de un espacio vectorial), sea $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ un conjunto de vectores del subespacio S:

Definición

Se dice que el conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ es Linealmente independiente si y solo si

existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (números reales/escalares también se les dice) (por ahora)

para que se cumpla esta ecuación:

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = 0_V \quad \text{(ecuación 1)}$$

números

esto denota el "cero" de ese espacio vectorial

donde (muy importante):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$$

sea la ÚNICA solución de la ecuación (1)

¡Ejercicios resueltos! ☺

Vamos a ver varias formas de probar independencia lineal (tomá lo que + te guste)

Antes de eso...

Conjunto linealmente dependiente: Aquel que tiene la solución $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ y otra, ej: $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$

Método clásico (CBC Pro)

Vectores en $\mathbb{R}^2$

① Quiero ver que $A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \right\}$ es o no l.i.

Bueno, en principio ya sabemos que ese conj no es l.i. dado que:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}_2$$

$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ con lo cual A debería tener 2 o menos vectores para "calificar" como posible conj l.i.

Planteamos la definición:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\1 & -2 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 0\\1 & -2 & 4 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{resto} \\ \text{las 2}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 0\\0 & 5 & 2 & 0\end{array}\right)$$

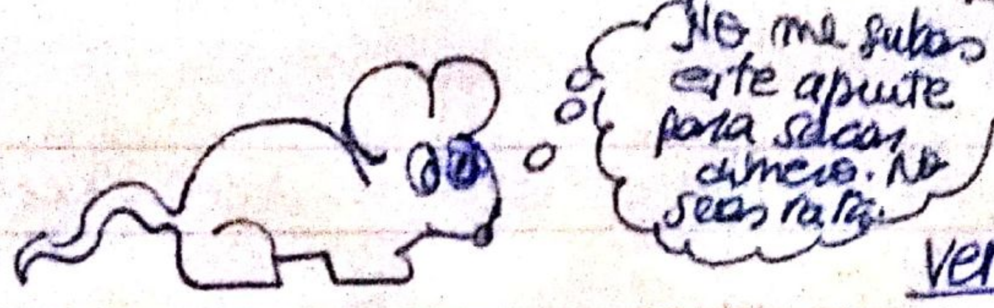
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{divido} \\ \text{la 2°} \\ \text{por 5}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 0\\0 & 1 & 2/5 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sumo} \\ \text{3 veces} \\ \text{la 2° fila}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 16/5 & 0\\0 & 1 & 2/5 & 0\end{array}\right)$$

$\alpha_1 + 16/5\,\alpha_3 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = -\frac{16}{5}\alpha_3}$

$\alpha_2 + 2/5\,\alpha_3 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_2 = -\frac{2}{5}\alpha_3}$

---

(1) ejemplo: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ¡Sólo lo mecanizas vale para matrices!



vero!

Esto me está diciendo que:

$$\left(-16/5\,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{-2}{5}\alpha_3\right)\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \cancel{\alpha_3}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \cancel{\alpha_3}\,\frac{16}{5}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \cancel{\alpha_3}\,\frac{2}{5}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \frac{16}{5}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ como $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ puede ser expresado como combinación lineal de los otros dos vectores

A no es linealmente independiente.

Si me piden que obtenga una base, saco ese y veo si los otros 2 forman un conj li (que sí, lo forman porque ya saqué al vector "problemático")

$$B_A = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

es suma de $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

otra base: $B_{A_2} = \left\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, otra $B_{A_2} = \left\{\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Ahora, ¿es absoluto que el problemático era $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$?

NO, yo podría haber hecho esto:

$$\alpha_3\left(-16/5\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{-2}{5}\alpha_3\right)\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{-2}{5}\cancel{\alpha_3}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \cancel{\alpha_3}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \frac{16}{5}\cancel{\alpha_3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

entonces $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ahora es el que está "de más".

Ventajas de este método: Viene mecanizado del CBC.

DesVentajas: Cuentoso, si triangulas mal, sonaste, perdiste media hora.

② **Ejemplo en $\mathbb{R}^4$:**

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

Ya directamente lo escribo como matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F_1 - F_3$

$F_1 - F_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 \\ 4 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 \\ 1 & 10/4 & 1/4 & 0 \\ 1 & -2 & 5/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & 4/3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 9/2 & -9/4 & 0 \\ 0 & 9 & -9/2 & 0 \\ 0 & \frac{20}{3} & -\frac{10}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$F_1 - F_4$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & -9/2 & 0 \\ 0 & 9 & -9/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\alpha_1 + \alpha_3\left(\frac{-11}{2}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\alpha_2 + \alpha_3(-1/2) = 0 \quad (2)$$

De (1)

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_3\left(-\frac{3}{2}\right) \\ \alpha_2 = \frac{\alpha_3}{2} \end{array}}$$

Pero... en el CBC me enseñaron a "ponerlo en filas".

La realidad es que la matriz que se resuelve es la transpuesta. ¿Por qué pasa esto?

Definamos un par de cosas:

Si tenemos $M \cdot \bar{x} = \bar{0}$ sabemos que

$\bar{x} \subseteq Nul(M)$

y si hacemos $M \mid \bar{0}$ vamos a encontrar todo el $Nul(M)$.

Ahora: si $\det(M) \neq 0 \iff Nul\, M = \{\phi\}$ (vacío) $\iff \bar{x} = \bar{0}$

si $\det(M) = 0 \iff Nul\, M \neq \{\phi\} \iff \bar{x} \neq \bar{0}$

¿Qué tiene que ver esto?

Volvamos al ej ①

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{0}}$$

(*) ya vimos que el conj no era l.i.

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Nul\, M \neq \{\phi\} \Rightarrow \det(M) \neq 0$$

el vector que sacamos (acá siempre es o son los que sacamos)

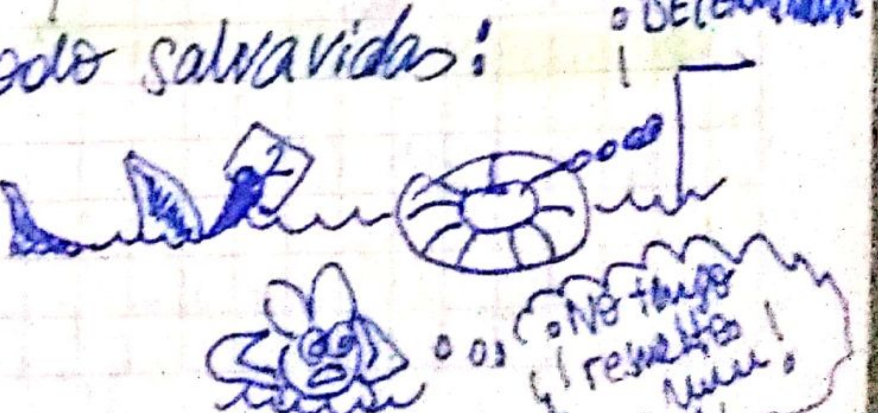
Propiedad: $\boxed{\det(M) = \det(M^T)}$

[Por esto podías hacer esto:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ pero no lo hagas más...

$\sim \begin{pmatrix} \ldots \end{pmatrix} \sim \ldots$]

Te voy a introducir otro método salvavidas:



Método del determinante

Sea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 5/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \bar{x} = 0_{\mathbb{R}_3} \qquad \text{con } \bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

no LI

teníamos que $\det(M) = 0 \Leftrightarrow Nul\, A \neq \{\emptyset\} \Leftrightarrow \bar{x} \neq 0_{\mathbb{R}_3}$

$\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow Nul\, A = \{\emptyset\} \Leftrightarrow \bar{x} = 0_{\mathbb{R}_3}$

conj LI

Busquemos el det (M)

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & 9 \\ 0 & \boxed{0} & 5/4 \\ 1 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

elijo esta

$$\det(M) = -0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5/4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 5/4 \end{vmatrix}$$

$$= -1\left[(2 \cdot 5/4) - (9 \cdot 0)\right] \neq 0$$

$\Rightarrow$ como $\det(M) \neq 0$. el conj A es LI.

Si explicamos lo de arriba (sino es galerazo)

Método de cabeza

$\rightarrow$ Siempre tiene que haber alguno así (literalmente es de fin a ppio)

Alguno lo hace (a mí me encanta)

Sea blabla

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es LI el conj A

si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

y esto no puede pasar porque se ve que:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1, \quad \alpha_3 = -\alpha_1$

no son 0 siempre, pueden valer lo que sea

Otro tema: $\Rightarrow$ el conj no es li

$\boxed{\text{Un conj li está formado por subconjuntos li}}$

Método de los subconjuntos → ¿Matemática Discreta?

Buscar, esto es: 

$$A = \{ \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \}$$

$$A = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}} \cup \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

este conjunto es li pero al estar unido a otros que no lo son, A no es li.

este conj no es li $\Rightarrow$ dado que está incluido en un conjunto + grande el conj más grande no es li

Método de la ortogonalidad (se necesita ver producto interno, tener definido uno)

Un conjunto ortogonal es linealmente independiente:

ej: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ los 2 son ortogonales

$\Rightarrow$ forman un conj l.i.

<u>Método "No soy tu múltiplo"</u>

Si tenemos 2 vectores en un conj y uno no es múltiplo del otro $\Rightarrow$ el conj es l.i.

Solo vale para un conj de 2 vectores.

Cualquier duda de este apunte pregunte a Vero. Agradezco a Wikipedia en Inglés por regalarme la triangulación de una matriz.