1.5 预备知识

王正明　易泰河

系统工程学院　军事建模与仿真系

2019 年 11 月 13 日

1.5 预备知识

1.5.1 矩阵、线性空间与 Hilbert 空间

(1) 矩阵

(2) 线性空间

(3) Hilbert 空间

1.5.2 正态总体及其抽样分布

1.5.3 统计推断

(1) 矩阵的秩

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最大阶数称为该矩阵的秩, 记作 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$;
- 初等变换不改变矩阵的秩, 即等价矩阵具有相同的秩;
- 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列满秩, 则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{CA}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{C})$;
- 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 满秩.

(2) 方阵的迹

- 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 定义为其对角线上元素的和;
- $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$;
- 相似变换不改变矩阵的迹.

(3) 幂等矩阵

- 称方阵 $\boldsymbol{P}$ 为**幂等矩阵**, 也称为**投影矩阵**, 如果 $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$.
- 如果 $\boldsymbol{P}$ 为幂等矩阵, 则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}$ 均为幂等矩阵.
- 幂等矩阵的特征值只可能是 0 和 1.
- 幂等矩阵的秩等于它的迹.

(4) 正定矩阵与二次型

- 如果 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则
  - $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为实数, 不同特征向量互相正交;
  - 存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.
- 称 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 如果对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$.
- 类似地可以定义负定矩阵和非负定矩阵.

(4) 正定矩阵与二次型

- 以下命题等价:
  1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定;
  2. $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均为正数;
  3. 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$;
  4. 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$;
  5. $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式大于零.
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵, $x\in\mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.
  1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都非负, 则 0 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的 ____ 点;
  2. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都非正, 则 0 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的 ____ 点;
  3. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有正有负, 则 0 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的 ____ 点.

(4) 正定矩阵与二次型

- 以下命题等价:
  1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定;
  2. $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均为正数;
  3. 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$;
  4. 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$;
  5. $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式大于零.
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵, $x\in\mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.
  1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都非负, 则 $\mathbf{0}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的 ____ 点;
  2. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都非正, 则 $\mathbf{0}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的 ____ 点;
  3. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有正有负, 则 $\mathbf{0}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的 ____ 点.

(5) 利用 R 进行矩阵运算

- 用于生成矩阵的函数 `matrix()` 和 `diag()`;
- 矩阵的合并 `cbind()` 和 `rbind()`;
- 矩阵转置 `t()`、矩阵加法 $+$ 和乘法 $\% * \%$;
- 求各行各列的和和平均值 `rowSums()`, `rowMeans()`, `colSums()`, `colMeans()`;
- 求行列式 `det()` 和逆 `solve()`;
- 求矩阵的特征值和特征向量 `eigen()`;
- $\cdots$.

设 X 为非空集合, 如果 X 上定义有如下两种线性运算:

(a) X 上定义有二元运算 “+”, 对任意 $x, y, z \in X$, 满足

1. 交换律: $x + y = y + x$;
2. 结合律: $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. X 中存在零元 θ, 使得对任意 $x \in X$ 都有 $x + \theta = x$;
4. 对任意 $x \in X$, 存在加法逆元 $-x$ 使得 $x + (-x) = \theta$.

(b) 对任意 $x \in X$ 以及 $\alpha \in \mathbb{R}$, 存在 X 中唯一一个称为 α 与 x 的乘积的元素, 记为 $\alpha \cdot x$ 或 αx, 满足

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
2. $1 \cdot x = x$;
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

则称 X 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 如果 X 的子集 A 在其线性运算下仍然为线性空间, 则称 A 为 X 的线性子空间, 简称子空间.

- 设 X 是线性空间, $x_1, \cdots, x_n \in X$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, 如果

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$线性无关, 否则称为线性相关.

- 称集合 $A \subset X$ 线性无关, 如果 A 中任意有限个元素均线性无关.

- 如果集合 $A \subset X$ 线性无关, 且任意 $x \in X$ 均可唯一表示为

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

其中,$n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset A$, $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, 则称 A 为 X 的Hamel 基, 简称基, 任意非空线性空间都存在 Hamel 基.

- 设 X 为定义在实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 称映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ 为内积或点积, 如果
  (1) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \theta$;
  (2) 对任意的 $x, y \in X$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
  (3) 对任意的 $x, y, z \in X$, $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
  (4) 对任意 $x, y \in X$ 以及 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.
- 定义了内积的线性空间称为内积空间.
- 定义完备的内积空间为Hilbert 空间.

- 设 I 为一指标集, H 为 Hilbert 空间. 称 $\{e_i : i \in I\} \subseteq H$ 为 H 的标准正交集, 如果

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

- 如果 H 中没有其它标准正交集包含 $\{e_i : i \in I\}$, 则称 $\{e_i : i \in I\}$ 为 H 的标准正交基.
- 如果 H 可分, 则 H 一定存在可数的标准正交基 $\{e_1, e_2, \cdots\}$, 且任意 $x \in H$ 均可表示为

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i,$$

其中 $a_i = \langle x, e_i \rangle$ 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$.

例 (n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$)

n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$ 在线性运算

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$

$$\alpha \cdot (a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots, \alpha a_n)$$

和内积

$$\langle (a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

的意义下构成 n 维 Hilbert 空间.

例 (序列空间 $\ell^2(\infty)$)

集合

$$\ell^2(\infty) := \left\{ (a_1, a_2, \cdots) : a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$$

在线性运算 $(a_1, a_2, \cdots) + (b_1, b_2, \cdots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots)$, $\alpha \cdot (a_1, a_2, \cdots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots)$ 和内积

$$\langle (a_1, a_2, \cdots), (b_1, b_2, \cdots) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i,$$

的意义下构成 Hilbert 空间, 其一组标准正交基为 $\{\boldsymbol{e}_i : i \geq 1\}$, 其中 $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ 表示 $\ell^2(\infty)$ 中第 i 个坐标为 1, 其余坐标全为 i 的元素.

例 (函数空间 $L^2([-1,1])$)

集合

$$L^2([-1,1]) := \left\{ f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R} : \int_{-1}^{1} f(x)^2 \,\mathrm{d}\, x < \infty \right\}$$

在线性运算 $f+g : x \mapsto f(x) + g(x)$, $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$ 以及内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \,\mathrm{d}\, x$$

的意义下构成 Hilbert 空间, 其一组标准正交基为

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi x), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\pi x), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\pi x), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\pi x), \cdots \right\},$$

将函数 $f \in L^2([-1,1])$ 用这组基表示称为函数 f 的 Fourier 展开.

1.5 预备知识

1.5.1 矩阵、线性空间与 Hilbert 空间

1.5.2 正态总体及其抽样分布

(1) 正态随机向量

(2) χ^2 分布

(3) t-分布与 F-分布

1.5.3 统计推断

定义

设 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n]^{\mathrm{T}}$ 由独立同分布的标准正态随机变量组成的随机向量, $\boldsymbol{\mu}$ 为 n 维向量, $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 可逆矩阵, 称向量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\mu}$ 为 n 维正态随机向量.

- $\boldsymbol{\xi}$ 的均值向量为 $\boldsymbol{\mu}$, 协方差矩阵为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 密度函数为

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\boldsymbol{C})^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

其分布记作 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{C})$.

- 当 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ 时, 称为n 维标准正态分布, 其密度函数为:

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right\}.$$

- 服从 $N(0,1)$ 的 n 个独立同分布随机变量的联合分布为 n 维标准正态分布.
- 假设随机误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 为 Gauss 随机向量, 且 $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$.

引理

设 n 维随机向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C})$, 则

1. 如果 $\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵, 则随机变量族 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 互相独立, 且 $\xi_i\sim N(\mu_i,\sigma_{ii}^2)$;
2. 如果 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}\sim N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$;
3. 设
$$\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1\\ \boldsymbol{\xi}_2\end{bmatrix}\sim N\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\end{bmatrix}\right)$$
则
$$\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_2\sim N\left(\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{C}_{12}\boldsymbol{C}_{22}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\mu}_2),\boldsymbol{C}_{11}-\boldsymbol{C}_{12}\boldsymbol{C}_{22}^{-1}\boldsymbol{C}_{21}\right).$$

定义

称 n 维 Gauss 随机向量 $\boldsymbol{\xi} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$ 的二次型

$$\eta := \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I} \boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

的分布为自由度为 n、非中心参数为 $\lambda = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}$ 的 χ^2 分布, 记作 $\eta \sim \chi^2(n, \lambda)$. 当 $\lambda = 0$, 即 $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$ 时, 称 η 的分布为自由度为 n 的中心化 χ^2 分布, 记作 $\eta \sim \chi^2(n)$.

引理

设 $\boldsymbol{\xi} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$, 则

1. $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi} \sim \chi^2\left(\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\mu}\right)$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$;
2. 设 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 均为对称非负定的幂等矩阵, 则 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{\xi}$ 互相独立当且仅当 $\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0}$;
3. 如果幂等矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 k 个对称矩阵 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的和, 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1) + \cdots + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_k)$, 则 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{\xi}, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\xi}$ 互相独立, 且
$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{\xi} \sim \chi^2\left(\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_i), \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{\mu}\right), \quad i = 1, \cdots, k;$$
4. 设 $\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵, $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称方阵, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, 则线性型 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}$ 与二次型 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi}$ 互相独立.

当考虑服从标准正态分布 $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$ 的误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 时,

1. $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon} \sim \chi^2(\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}))$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$;
2. 如果 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵, 可分解为 k 个对称矩阵 $\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 的和, 且

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_1) + \cdots + \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_k),$$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\varepsilon}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\varepsilon}$ 互相独立, 且

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\varepsilon} \sim \chi^2(\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_i)), \quad i = 1, \cdots, k.$$

引理 1.5

若随机变量 $\{\eta_1, \cdots, \eta_m\}$ 互相独立, $\eta_i \sim \chi^2(n_i, \lambda_i)$, 则

$$\eta_1 + \cdots + \eta_m \sim \chi^2\left(n_1 + \cdots + n_m, \lambda_1 + \cdots + \lambda_m\right).$$

- χ^2 分布对加法运算的封闭性.
- 若随机变量 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 互相独立, $\xi_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2\left(n, \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2}\right).$$

定义

设随机变量 ξ 与 η 互相独立.

1. 如果 $\xi \sim N(0,1)$, $\eta \sim \chi^2(n)$, 则称随机变量

$$T := \frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}$$

的分布自由度为 n 的 t 分布, 记作 $t(n)$;

2. 如果 $\xi \sim \chi^2(m)$, $\eta \sim \chi^2(n)$, 则称随机变量

$$F := \frac{\xi/m}{\eta/n}$$

的分布自由度为 m 和 n 的 F 分布, 记作 $F(m,n)$.

引理 1.6

设有两组正态样本 $\{x_1, \cdots, x_n\} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $\{y_1, \cdots, y_m\} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_2, \sigma^2)$,

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{y} := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$S_1^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \qquad S_2^2 := \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2$$

则 $\bar{x}$ 与 S_1^2 互相独立, $\bar{y}$ 与 S_2^2 互相独立, 且

$$\frac{n-1}{\sigma^2}S_1^2 \sim \chi^2(n-1), \qquad \frac{m-1}{\sigma^2}S_2^2 \sim \chi^2(m-1), \tag{1a}$$

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_1)}{S_1} \sim t(n-1), \qquad \frac{\sqrt{m}\,(\bar{y} - \mu_2)}{S_2} \sim t(m-1), \tag{1b}$$

$$\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}\,\frac{(\bar{x} - \mu_1) - (\bar{y} - \mu_2)}{\sqrt{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}} \sim t(m+n-2), \tag{1c}$$

$$S_1^2 / S_2^2 \sim F(n-1, m-1). \tag{1d}$$

- R 中与正态随机变量相关的函数:
  - 分布函数: `dnorm()`;
  - 密度函数: `pnorm()`;
  - 分位数函数: `qnorm()`;
  - 随机变量生成函数: `rnorm()`.
- R 中与 t 分布相关的函数:
  - `dt()`, `pt())`, `qt()`, `rt()`.
- R 中与 F 分布相关的函数:
  - `df()`, `pf()`, `qf()`, `rf()`.

1.5 预备知识

1.5.1 矩阵、线性空间与 Hilbert 空间

1.5.2 正态总体及其抽样分布

1.5.3 统计推断

(1) 统计模型

(2) 参数估计

(3) 假设检验

- 样本的两种表现形式:
  - 只有结果, $\mathcal{D}_n = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$;
  - 有条件和结果, $\mathcal{D}_n = \{(\boldsymbol{x}_i, y_i) : i = 1, 2, \cdots, n\}$.
- 统计模型$\{P_\theta^{(n)} : \theta \in \Theta\}$ 是样本的联合分布, θ 表示未知的参数.
- 参数模型: θ 为有限维向量, 即 Θ 为某欧氏空间中的子集;
- 非参数模型: θ 为无穷维的（如级数或函数）, 有时也把非参数统计模型记为 $\{P^{(n)} : P^{(n)}$为满足某些性质的概率分布$\}$.
- 统计量: 样本的函数.

例 (正态分布参数估计)

设 $\mathcal{D}_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. μ 的无偏估计为

$$\hat{\mu} = \bar{x}. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

σ^2 的无偏估计为

$$\widehat{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\bar{x}. - x_i)^2 .$$

在 R 中, 可利用函数 `mean()` 计算样本均值, 利用函数 `sd()` 计算样本标准差.
由于

$$\mathbb{P}\left(t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{x}. - \mu)}{S} \leq t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha,$$

均值参数 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{x}. - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \bar{x}. - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right].$$

例 (正态均值的 t 检验)

设 $\mathcal{D}_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 考虑如下三个检验问题:

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$;
2. $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu \geq \mu_0$;
3. $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu \leq \mu_0$;

令 $t_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}. - \mu_0)}{S_n}$, 则三个检验问题的检验分别为

$$\phi_1 = \mathbb{1}_{(-\infty, t_{\alpha/2}(n-1))}(t_n) + \mathbb{1}_{(t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)}(t_n),$$

$$\phi_2 = \mathbb{1}_{(t_{1-\alpha}(n-1), \infty)}(t_n), \quad \phi_3 = \mathbb{1}_{(-\infty, t_{\alpha}(n-1))}(t_n).$$

t_n 称为检验统计量, 三个检验的 p 值分别为

$$p_1 = 2\mathbb{P}_t\{(-\infty, -|t_n|)\}, \quad p_2 = 1 - \mathbb{P}_t\{(-\infty, t_n)\}, \quad p_3 = \mathbb{P}_t\{(-\infty, t_n)\}.$$

p 值与样本量有关, 通常 $n \geq 30$ 被认为样本量足够.

在 R 中, 可以使用函数

```
t.test(x, y = NULL, alternative = c("two.sided", "
    less", "greater"), mu = 0, paired = FALSE, var.
    equal = FALSE, conf.level = 0.95, ...)
```

来实现正态均值的 t 检验.

总结

- 矩阵的秩、矩阵的迹、投影矩阵、正定矩阵、二次型;
- 线性空间、Hilbert 空间;
- 多元正态分布、正态随机向量的线性变换与二次型;
- 由正态随机向量构造 χ^2 分布、t 分布与 F 分布;
- 统计模型、统计量、参数估计、假设检验.