2.3 3^k 因子设计及其部分实施

王正明　易泰河

系统工程学院　军事建模与仿真系

2019 年 11 月 29 日

引言

- 2^k 因子试验与正交表 $L_{2^k}(2^{2^k-1})$.
- 混杂, 别名, 定义关系, 定义关系子群, 字长型, 分辨度
- 如何把 2^k 因子设计及其部分实施的方法推广到 3^k 因子设计中去?

2.3 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

2.3.1 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

(1) 3^2 设计的固定效应模型

(2) 正交表 $L_9(3^4)$ 的构造

(3) 正交表 $L_9(3^4)$ 的应用

2.3.2 3^k 因子设计与正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$

2.3.3 3^k 因子试验的部分实施

- 3^2 设计: 2 个因子 A 与 B, 3 个水平分别 0、1 和 2, 全部处理为 $\{(i,j) : i,j = 0,1,2\}$ 共 9 个.

- 设每个处理重复 m 次, 则 3^2 试验的固定效应模型为

$$
\begin{cases}
y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ijk} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,\sigma^2), \\
i = 0,1,2, \quad j = 0,1,2, \quad k = 1,\cdots,m, \\
\sum_{i=0}^{3} \tau_i = 0, \quad \sum_{j=0}^{3} \beta_j = 0, \\
\sum_{i=0}^{2} (\tau\beta)_{ij} = 0, \quad j = 0,1,2, \quad \sum_{j=0}^{2} (\tau\beta)_{ij} = 0, \quad i = 0,1,2.
\end{cases}
$$

- 如何估计诸效应? 如何检验诸效应是否显著?

- 3^2 设计: 2 个因子 A 与 B, 3 个水平分别 0、1 和 2, 全部处理为 $\{(i,j): i,j=0,1,2\}$ 共 9 个.
- 设每个处理重复 m 次, 则 3^2 试验的固定效应模型为

$$\begin{cases} y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ijk} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,\sigma^2), \\ i=0,1,2, \quad j=0,1,2, \quad k=1,\cdots,m, \\ \sum_{i=0}^{3} \tau_i = 0, \quad \sum_{j=0}^{3} \beta_j = 0, \\ \sum_{i=0}^{2} (\tau\beta)_{ij} = 0, \quad j=0,1,2, \quad \sum_{j=0}^{2} (\tau\beta)_{ij} = 0, \quad i=0,1,2. \end{cases}$$

- 如何估计诸效应? 如何检验诸效应是否显著?

2.3 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

2.3.1 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

(1) 3^2 设计的固定效应模型

(2) 正交表 $L_9(3^4)$ 的构造

(3) 正交表 $L_9(3^4)$ 的应用

2.3.2 3^k 因子设计与正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$

2.3.3 3^k 因子试验的部分实施

正交表 $L_9(3^4)$ 共 9 行 4 列, 每列 3 个水平:

试验号	A	B	AB	A^2B
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	2	2	2
4	1	0	1	2
5	1	1	2	0
6	1	2	0	1
7	2	0	1	1
8	2	1	0	2
9	2	2	1	0

- A 为三分列, B 为九分列, 称它们为主效应列或基本列;
- AB 列由 A 列和 B 列按照运算$x_1 + x_2 \mod 3$生成, A^2B 列由 A 列和 B 列按照运算$2x_1 + x_2 \mod 3$, 它们表示交互效应 $A \times B$ 的两个部分.

正交表 $L_9(3^4)$ 共 9 行 4 列, 每列 3 个水平:

试验号	A	B	AB	A^2B
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	2	2	2
4	1	0	1	2
5	1	1	2	0
6	1	2	0	1
7	2	0	1	1
8	2	1	0	2
9	2	2	1	0

- A 为三分列, B 为九分列, 称它们为主效应列或基本列;
- AB 列由 A 列和 B 列按照运算$x_1 + x_2 \mod 3$生成, A^2B 列由 A 列和 B 列按照运算$2x_1 + x_2 \mod 3$, 它们表示交互效应 $A \times B$ 的两个部分.

正交表 $L_9(3^4)$ 共 9 行 4 列, 每列 3 个水平:

试验号	A	B	AB	A^2B
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	2	2	2
4	1	0	1	2
5	1	1	2	0
6	1	2	0	1
7	2	0	1	1
8	2	1	0	2
9	2	2	1	0

- A 为三分列, B 为九分列, 称它们为主效应列或基本列;
- AB 列由 A 列和 B 列按照运算$x_1 + x_2 \mod 3$生成, A^2B 列由 A 列和 B 列按照运算$2x_1 + x_2 \mod 3$, 它们表示交互效应 $A \times B$ 的两个部分.

正交表 $L_9(3^4)$ 共 9 行 4 列, 每列 3 个水平:

试验号	A	B	AB	A^2B
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	2	2	2
4	1	0	1	2
5	1	1	2	0
6	1	2	0	1
7	2	0	1	1
8	2	1	0	2
9	2	2	1	0

- 每列的自由度均为 2, 四列一共 8 个自由度.
- 任意两列按照两种模 3 加法运算得到剩余两列, 称这种关系为任意两列的交互效应是其余两列.

正交表 $L_9(3^4)$ 共 9 行 4 列, 每列 3 个水平:

试验号	A	B	AB	A^2B
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	2	2	2
4	1	0	1	2
5	1	1	2	0
6	1	2	0	1
7	2	0	1	1
8	2	1	0	2
9	2	2	1	0

- 每列的自由度均为 2, 四列一共 8 个自由度.
- 任意两列按照两种模 3 加法运算得到剩余两列, 称这种关系为任意两列的交互效应是其余两列.

- 如果表 $L_9(3^4)$ 的第四列按照 $x_1 + 2x_2 \mod 3$ 生成，得到新的正交表 $L_9(3^4)$. 这两张正交表有什么关系?

试验号	A	B	AB	AB^2
1	0	0	0	0
2	0	1	1	2
3	0	2	2	1
4	1	0	1	1
5	1	1	2	0
6	1	2	0	2
7	2	0	1	2
8	2	1	0	1
9	2	2	1	0

2.3.1 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

(1) 3^2 设计的固定效应模型

(2) 正交表 $L_9(3^4)$ 的构造

(3) 正交表 $L_9(3^4)$ 的应用

2.3.2 3^k 因子设计与正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$

2.3.3 3^k 因子试验的部分实施

- 正交表 $L_9(3^4)$ 的主效应列 A 和 B 组成 3^2 因子试验的全面实施;
- A 列用于计算因子 A 的平方和, B 列用于计算因子 B 的平方和;
- AB 列和 A^2B 列用于计算交互效应 $A \times B$ 的平方和;
- 每列的自由度都为 2, 交互效应 $A \times B$ 的自由度为 4, 被分解为两个自由度均为 2 的部分.

- 正交表 $L_9(3^4)$ 的主效应列 A 和 B 组成 3^2 因子试验的全面实施;
- A 列用于计算因子 A 的平方和, B 列用于计算因子 B 的平方和;
- AB 列和 A^2B 列用于计算交互效应 $A \times B$ 的平方和;
- 每列的自由度都为 2, 交互效应 $A \times B$ 的自由度为 4, 被分解为两个自由度均为 2 的部分.

试验号	A	B	AB	A^2B	试验结果
1	0	0	0	0	$y_{00\cdot}$
2	0	1	1	1	$y_{01\cdot}$
3	0	2	2	2	$y_{02\cdot}$
4	1	0	1	2	$y_{10\cdot}$
5	1	1	2	0	$y_{11\cdot}$
6	1	2	0	1	$y_{12\cdot}$
7	2	0	2	1	$y_{20\cdot}$
8	2	1	0	2	$y_{21\cdot}$
9	2	2	1	0	$y_{22\cdot}$
自由度	2	2	2	2	
T_0	$y_{0\cdot\cdot}$	$y_{\cdot 0\cdot}$	$y_{00\cdot}+y_{12\cdot}+y_{21\cdot}$	$y_{00\cdot}+y_{11\cdot}+y_{22\cdot}$	$T=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} y_{ij\cdot}$
T_1	$y_{1\cdot\cdot}$	$y_{\cdot 1\cdot}$	$y_{01\cdot}+y_{10\cdot}+y_{22\cdot}$	$y_{01\cdot}+y_{12\cdot}+y_{20\cdot}$	
T_2	$y_{2\cdot\cdot}$	$y_{\cdot 2\cdot}$	$y_{02\cdot}+y_{11\cdot}+y_{20\cdot}$	$y_{02\cdot}+y_{10\cdot}+y_{21\cdot}$	

- 平方和计算公式

$$\begin{cases} SS_A = 3m\sum_{i=0}^{2}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot\cdot})^2 = \dfrac{T_{A_0}^2+T_{A_1}^2+T_{A_2}^2}{3m}-\dfrac{T^2}{9m}, \\ SS_B = 3m\sum_{j=0}^{2}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot\cdot})^2 = \dfrac{T_{B_0}^2+T_{B_1}^2+T_{B_2}^2}{3m}-\dfrac{T^2}{9m}, \\ SS_{AB} = \dfrac{T_{(AB)_0}^2+T_{(AB)_1}^2+T_{(AB)_2}^2}{3m}-\dfrac{T^2}{9m}, \\ SS_{A^2B} = \dfrac{T_{(A^2B)_0}^2+T_{(A^2B)_1}^2+T_{(A^2B)_2}^2}{3m}-\dfrac{T^2}{9m}, \\ SS_{A\times B} = SS_{AB}+SS_{A^2B}. \end{cases}$$

其中，$T_{(\cdot)_i}$ 分别表示对应列的 T_i.

- 利用 F 统计量检验诸效应是否显著, 如当 A 的效应不显著时
$$F = \frac{SS_A/2}{SS_E/f_E}$$
服从自由度为 $(2, f_E)$ 的 F 分布.

- 在 2^k 设计中, 以 "AB" 表示两因子交互效应; 这里以 "$A \times B$" 表示两因子交互效应, AB 和 A^2B 分别表示它的两个互相正交的部分, 为什么?

- 利用 F 统计量检验诸效应是否显著, 如当 A 的效应不显著时
$$F = \frac{SS_A/2}{SS_E/f_E}$$
服从自由度为 $(2, f_E)$ 的 F 分布.

- 在 2^k 设计中, 以 "AB" 表示两因子交互效应; 这里以 "$A \times B$" 表示两因子交互效应, AB 和 A^2B 分别表示它的两个互相正交的部分, 为什么?

2.3 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

2.3.1 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

2.3.2 3^k 因子设计与正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$

(1) 3^k 设计的效应与自由度

(2) 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的构造

(3) 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的应用

(4) 列名的标准化与完备化

2.3.3 3^k 因子试验的部分实施

- 每个因子主效应的自由度为 2;
- C_k^2 个二因子交互效应, 自由度均为 $(3-1)^2=4$;
- 一般地, $C_k^h(h\le k)$ 个 h 因子交互效应, 自由度均为 $(3-1)^h=2^h$.
- 如果每个处理均重复 m 次, 则有 3^km-1 个总自由度和

$$(3^km-1)-\sum_{h=1}^{k}C_k^h2^h=3^k(m-1)$$

个误差自由度.

小测试

3^3 因子试验中,

(1) 每个因子的主效应的自由度为 ____;

(2) 二因子交互效应的自由度为 ____;

(3) 三因子交互效应的自由度为 ____;

(4) 如果每个处理组合均重复试验 m 次, 则总自由度为 ____, 误差自由度为 ____.

2.3.1 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

2.3.2 3^k 因子设计与正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$

(1) 3^k 设计的效应与自由度

(2) 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的构造

(3) 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的应用

(4) 列名的标准化与完备化

2.3.3 3^k 因子试验的部分实施

Step 1 构造三分列, 该列的前 3^{k-1} 行置水平 0, 中间 3^{k-1} 行置水平 1, 后 3^{k-1} 行置水平 2, 列名记作 A;

Step 2 构造九分列, 列名记作 B, 并按照两种模 3 加法运算构造交互效应列 AB 和 A^2B;

$\cdots$

Step k 构造 3^k 分列, 该列按照 $0, 1, 2, 0, 1, 2, \cdots$ 的次序交替排列, 列名记作 K, 并利用两种模 3 加法运算依次得到 3^k 分列与前面各列的交互效应列 AK, A^2K, BK, B^2K, $\cdots$.

- 三分列、九分列、3^k 分列统称为基本列或主效应列.
- 为什么正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的列数为 $\frac{3^k-1}{3-1}$?

Step 1 构造三分列, 该列的前 3^{k-1} 行置水平 0, 中间 3^{k-1} 行置水平 1, 后 3^{k-1} 行置水平 2, 列名记作 A;

Step 2 构造九分列, 列名记作 B, 并按照两种模 3 加法运算构造交互效应列 AB 和 A^2B;

$\cdots$

Step k 构造 3^k 分列, 该列按照 $0, 1, 2, 0, 1, 2, \cdots$ 的次序交替排列, 列名记作 K, 并利用两种模 3 加法运算依次得到 3^k 分列与前面各列的交互效应列 AK, A^2K, BK, B^2K, $\cdots$.

- 三分列、九分列、3^k 分列统称为基本列或主效应列.
- 为什么正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的列数为 $\frac{3^k-1}{3-1}$?

Step 1 构造三分列，该列的前 3^{k-1} 行置水平 0, 中间 3^{k-1} 行置水平 1, 后 3^{k-1} 行置水平 2, 列名记作 A;

Step 2 构造九分列，列名记作 B, 并按照两种模 3 加法运算构造交互效应列 AB 和 A^2B;

$\cdots$

Step k 构造 3^k 分列，该列按照 $0, 1, 2, 0, 1, 2, \cdots$ 的次序交替排列，列名记作 K, 并利用两种模 3 加法运算依次得到 3^k 分列与前面各列的交互效应列 AK, A^2K, BK, B^2K, $\cdots$.

- 三分列、九分列、3^k 分列统称为基本列或主效应列.
- 为什么正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的列数为 $\frac{3^k-1}{3-1}$?

Step 1 构造三分列, 该列的前 3^{k-1} 行置水平 0, 中间 3^{k-1} 行置水平 1, 后 3^{k-1} 行置水平 2, 列名记作 A;

Step 2 构造九分列, 列名记作 B, 并按照两种模 3 加法运算构造交互效应列 AB 和 A^2B;

$\cdots$

Step k 构造 3^k 分列, 该列按照 $0, 1, 2, 0, 1, 2, \cdots$ 的次序交替排列, 列名记作 K, 并利用两种模 3 加法运算依次得到 3^k 分列与前面各列的交互效应列 AK, A^2K, BK, B^2K, $\cdots$.

- 三分列、九分列、3^k 分列统称为基本列或主效应列.
- 为什么正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的列数为 $\frac{3^k-1}{3-1}$?

Example

与 3^3 设计对应的正交表是 $L_{27}(3^{13})$，它一共有 27 行 13 列，第一列、第二列和第五列为主效应列，其余 10 列为交互效应列. 其构造步骤如下:

Step 1 构造三分列 $A = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2]^{\mathrm{T}}$;

Step 2 构造九分列 $B = [0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,2,2,2]^{\mathrm{T}}$，并利用两种模 3 加法运算得到第三列 AB 和第四列 A^2B;

Step 3 构造二十七分列 $C = [0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2]^{\mathrm{T}}$，并利用两种模 3 加法运算依此得到第六列 AC、第七列 A^2C、第八列 BC、第九列 B^2C、第十列 ABC、第十一列 A^2B^2C、第十二列 A^2BC 和第十三列 AB^2C.

Example

与 3^3 设计对应的正交表是 $L_{27}(3^{13})$, 它一共有 27 行 13 列, 第一列、第二列和第五列为主效应列, 其余 10 列为交互效应列. 其构造步骤如下:

Step 1 构造三分列 $A = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2]^{\mathrm{T}}$;

Step 2 构造九分列 $B = [0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,2,2,2]^{\mathrm{T}}$, 并利用两种模 3 加法运算得到第三列 AB 和第四列 A^2B;

Step 3 构造二十七分列 $C = [0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2]^{\mathrm{T}}$, 并利用两种模 3 加法运算依此得到第六列 AC、第七列 A^2C、第八列 BC、第九列 B^2C、第十列 ABC、第十一列 A^2B^2C、第十二列 A^2BC 和第十三列 AB^2C.

2.3 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

2.3.1 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

2.3.2 3^k 因子设计与正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$

(1) 3^k 设计的效应与自由度

(2) 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的构造

(3) 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的应用

(4) 列名的标准化与完备化

2.3.3 3^k 因子试验的部分实施

- 主效应列用于安排试验;
- 各列均可用于计算效应的平方和, 计算公式与 3^2 中一样;
- 以因子 A 为例, 其平方和计算公式为

$$SS_A = \frac{T_{A_0}^2 + T_{A_1}^2 + T_{A_2}^2}{3^{k-1}m} - \frac{T^2}{3^k m},$$

  - T_{A_0} 表示水平 0 对应的试验数据之和,
  - T_{A_1} 表示水平 1 对应的试验数据之和,
  - T_{A_2} 表示水平 2 对应的试验数据之和,
  - $T = T_{A_0} + T_{A_1} + T_{A_2}$ 表示所有数据的和.

- AB 和 A^2B 两列可用于计算交互效应 $A \times B$ 的平方和, 即

$$SS_{A\times B} = SS_{AB} + SS_{A^2B};$$

- 类似地, AC 和 A^2C 两列可用于计算交互效应 $A \times C$ 的平方和, BC 和 B^2C 两列可用于计算交互效应 $B \times C$ 的平方和, $\cdots$;
- ABC、A^2B^2C、A^2BC 和 AB^2C 四列可用于计算交互效应 $A \times B \times C$ 的平方和, 即

$$SS_{A\times B\times C} = SS_{ABC} + SS_{A^2B^2C} + SS_{A^2BC} + SS_{AB^2C}.$$

- $\cdots$

2.3 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

2.3.1 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

2.3.2 3^k 因子设计与正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$

(1) 3^k 设计的效应与自由度

(2) 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的构造

(3) 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的应用

(4) 列名的标准化与完备化

2.3.3 3^k 因子试验的部分实施

- 称一个列名为标准化列名, 如果它最后一个字母的指数是 1, 否则称为非标准化列名.
- 称一组列名为完备的, 如果该组列名包含所有基本列的列名和任意两列的列名运算得到的列名.
- 称一组列名为标准化完备列名, 如果它们既是标准化的又是完备的.
- 正交表 $L_{2^k}(2^{2^k-1})$ 和 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的列名都是标准化完备列名.

Example

正交表 $L_9(3^4)$ 中, 列名 A^2B 是标准化列名, 而 AB^2 为非标准化列名.

(1) $L_8(2^7)$ 的列名组成的集合 $\{A, B, AB, C, AC, BC, ABC\}$ 是标准化完备的;

(2) 从正交表 $L_8(2^7)$ 中挑选出的列名集合 $\{A, BC, ABC\}$ 是不完备的, 它虽然对列名运算封闭, 但是没有包含基本列名 B 和 C;

(3) $L_9(3^4)$ 的列名组成的集合 $\{A, B, AB, A^2B\}$ 是标准化完备的.

- 在 3^k 因子设计中, 标准化列名与非标准化列名可通过列名的平方互相转化:

$$(A^2B)^2 = A^4B^2 = AB^2, \quad (AB^2)^2 = A^2B^4 = A^2B.$$

- 列名的平方运算恰好对应水平置换: $0 \to 0$, $1 \to 2$, $2 \to 1$. 表明标准化列名与非标准化列名对应的正交表互相同构.
- 注意, 二水平正交表列名运算是在代数运算的基础上对幂指数进行模 2 运算, 而三水平正交表的列名运算是在代数运算的基础上对幂指数进行模 3 运算.

- 在 3^k 因子设计中, 标准化列名与非标准化列名可通过列名的平方互相转化:

$$(A^2B)^2 = A^4B^2 = AB^2, \quad (AB^2)^2 = A^2B^4 = A^2B.$$

- 列名的平方运算恰好对应水平置换: $0 \to 0$, $1 \to 2$, $2 \to 1$. 表明标准化列名与非标准化列名对应的正交表互相同构.
- 注意, 二水平正交表列名运算是在代数运算的基础上对幂指数进行模 2 运算, 而三水平正交表的列名运算是在代数运算的基础上对幂指数进行模 3 运算.

2.3 3^2 因子设计与正交表 $L_9(3^4)$

- k 越大, 3^k 设计高阶交互效应越多, 全面实施次数越多;
- 如果有高阶交互效应不显著的先验信息, 那么可以采用部分实施;
- 如果没有高阶交互效应不显著的先验信息, 部分实施带来效应混杂,
  - 效应稀疏原则: 实际问题中, 往往只有少部分两因子交互效应存在, 而其它两因子交互效应和高阶因子交互效应都不存在;
  - 效应有序原则: 尽量考虑低阶交互效应和放弃高阶交互效应.

- k 越大，3^k 设计高阶交互效应越多，全面实施次数越多；
- 如果有高阶交互效应不显著的先验信息，那么可以采用部分实施；
- 如果没有高阶交互效应不显著的先验信息，部分实施带来效应混杂，
  - 效应稀疏原则：实际问题中，往往只有少部分两因子交互效应存在，而其它两因子交互效应和高阶因子交互效应都不存在；
  - 效应有序原则：尽量考虑低阶交互效应和放弃高阶交互效应.

- k 越大, 3^k 设计高阶交互效应越多, 全面实施次数越多;
- 如果有高阶交互效应不显著的先验信息, 那么可以采用部分实施;
- 如果没有高阶交互效应不显著的先验信息, 部分实施带来效应混杂,
    - 效应稀疏原则: 实际问题中, 往往只有少部分两因子交互效应存在, 而其它两因子交互效应和高阶因子交互效应都不存在;
    - 效应有序原则: 尽量考虑低阶交互效应和放弃高阶交互效应.

Example

当已知 3^3 设计的因子间的交互效应都不存在时，可使用正交表 $L_9(3^4)$ 安排试验，有两种可供选择的表头设计方案：

列名	A	B	AB	A^2B	定义关系	分辨度
方案一	A	B	C		$\mathbf{I}=ABC^2$	III
方案二	A	B		C	$\mathbf{I}=A^2BC^2$	III

这里 $\mathbf{I}$ 表示全部由 0 组成的列. 表中还有一个空白列，在作方差分析时，这个列的平方和可以作为误差平方和. 表中两个方案都只包含 3^3 设计的 9 个试验点，都称为3^3 设计的一个 $1/3$ 实施，或3^3 设计的一个 3^{3-1} 实施. 它们的分辨度都为 III(字的平方也只能算一个字). 能否写出这两个部分实施方案的定义关系子群?

Example

当 3^4 设计的因子间的交互效应不存在时，可以采用正交表 $L_9(3^4)$ 安排试验，表头设计如下:

列名	A	B	AB	A^2B	定义关系	分辨度
因子	A	B	C	D	$\mathbf{I} = ABC^2 = A^2BD^2$	III

表中已没有空白列，$L_9(3^4)$ 的 8 个自由度全部用来估计因子主效应了. 如果要作方差分析，需要作重复试验，才能计算误差平方和. 这个设计只包含 3^4 设计的 9 个试验点，称为3^4 设计的一个 $1/9$ 实施，或3^4 设计的一个 3^{4-2} 实施. 能否写出它的定义关系子群?

总结

1. 3^2 设计与正交表 $L_9(3^4)$;
2. 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的构造;
3. 正交表 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的应用;
4. 概念: 标准化列名, 完备列名组与完备正交表, 定义关系, 分辨度, 字长.

习题

1. 利用正交表 $L_{27}(3^{13})$ 可以把交互效应 $A \times B \times C$ 的平方和分解为

$$SS_{A\times B\times C} = SS_{ABC} + SS_{A^2B^2C} + SS_{A^2BC} + SS_{AB^2C},$$

试写出每一分量的表达式.

2. 试利用正交表 $L_{27}(3^{13})$ 分析讲义中例 2.5 的数据.

3. 能否根据正交表 $L_{2^k}(2^{2^k-1})$ 和 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 的构造规律, 归纳出一般的完备正交表 $L_{q^k}(q^{\frac{q^k-1}{q-1}})$ 的构造方法.