2.4 正交设计的一般讨论

王正明　易泰河

系统工程学院　军事建模与仿真系

2019 年 11 月 29 日

知识回顾

- 2^k 设计与 $L_{2^k}(2^{\frac{2^k-1}{2-1}})$ 型正交表;
- 3^k 设计与 $L_{3^k}(3^{\frac{3^k-1}{3-1}})$ 型正交表;
- q^k 设计与 $L_{q^k}(q^{\frac{q^k-1}{q-1}})$ 型正交表;
- 部分实施: 混杂与别名, 定义关系, 字长, 分辨度.

2.4 正交设计的一般讨论

2.4.1 正交表的一般性质

(1) 基本概念

(2) 利用正交表安排试验

(3) 表头设计的基本原则

2.4.2 等水平试验的正交设计

2.4.3 不等水平试验的正交设计

- 正交表 $L_n(q_1^{m_1} \times \cdots \times q_r^{m_r})$ 是一个 $n \times m$ 的矩阵, 其中 $q_i \geq 2$ 为正数, $m = m_1 + \cdots + m_r$, m_i 个列有 q_i 个不同的符号, 使得正任意两列组成的符号对出现的次数相同.

  L: 表示正交表;

  n: 正交表的行数, 也表示试验总数;

  q_i: 列中不同符号的个数, 对应该列可安排因子的水平数;

  m_i: 包含 q_i 个不同符号的列数, 表示最多能容纳的 q_i 水平因子的个数;

  r: 表中不同水平数的数目.

- 称所有的因子水平数相同的正交表为对称正交表或等水平正交表, 记作 $L_n(q^m)$,
- 完备正交表

$$L_{q^k}(q^{\frac{q^k-1}{q-1}}), \qquad k = 2, 3, \cdots,$$

完备正交表在行数不变的情况下不能增加列.

- 当正交表 $L_n(q_1^{m_1} \times \cdots \times q_r^{m_r})$ 中 $r > 1$ 时, 称为非对称正交表或混合水平正交表.
- 正交表查阅网址:
  - http://www.research.att.com/~njas/oadir/;
  - http://support.sas.com/techsup/technote/ts723.html.

- 可通过对称正交表的并列得到混合正交表.
- 把正交表 $L_8(2^7)$ 的 A 列和 B 两列构成的四对水平组合替换成 4 个水平: $(0,0)\to 0$, $(0,1)\to 1$, $(1,0)\to 2$, $(1,1)\to 3$, 并删去它们的交互效应列 AB, 得到 $L_8(4\times 2^4)$.

No.	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1
3	1	0	0	1	1
4	1	1	1	0	0
5	2	0	1	0	1
6	2	1	0	1	0
7	3	0	1	1	0
8	3	1	0	0	1

2.4 正交设计的一般讨论

2.4.1 正交表的一般性质

(1) 基本概念

(2) 利用正交表安排试验

(3) 表头设计的基本原则

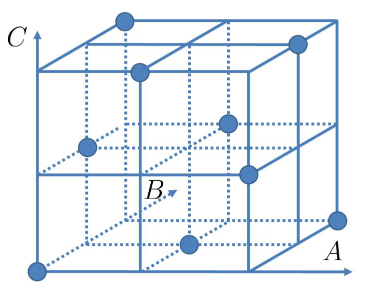
2.4.2 等水平试验的正交设计

2.4.3 不等水平试验的正交设计

- 利用正交表 $L_n(q_1^{m_1} \times \cdots \times q_r^{m_r})$ 设计试验时，最多可安排 m_1 个 q_1 水平因子、m_2 个 q_2 水平因子、$\cdots$，总共做 n 次试验.
- 正交表安排的试验方案具有均衡分散和整齐可比的特点.
  - 均衡分散：挑选出来的处理在全部处理中的分布比较均匀
  - 整齐可比：每一个因子的各水平间具有可比性

Example

利用正交表 $L_9(3^4)$ 的前三列安排 3^3 试验:



- 均衡分散: 任一平面内都包含 3 个试验点, 任一直线上都包含 1 个试验点.
- 整齐可比: 当比较 A 因子不同水平时, B 因子不同水平的效应相互抵消, C 因子不同水平的效应也相互抵消.

2.4 正交设计的一般讨论

2.4.1 正交表的一般性质

(1) 基本概念

(2) 利用正交表安排试验

(3) 表头设计的基本原则

2.4.2 等水平试验的正交设计

2.4.3 不等水平试验的正交设计

一、自由度原则

(a) 主效应的自由度为该因子水平数减一, 交互效应的自由度为该交互效应中各因子的自由度的乘积;

(b) 正交表的自由度为行数减一, 表中各列的自由度为该列的水平数减一;

(c) 因子的自由度应等于所在列的自由度;

(d) 交互效应的自由度应等于所在列的自由度或之和;

(e) 所有因子与交互效应的自由度之和不能超过所选正交表的自由度.

二、避免混杂原则

(a) 如果一列上出现的因子和交互效应不止一个，当该列的效应显著时，无法识别是哪个因子（或交互效应）显著，称这种现象为混杂现象.

(b) 表头设计时应尽量避免出现混杂现象.

Example

为了提高某化工产品的转化率，选择影响转化率的 4 个因子

- A: 催化剂种类，$A_1 = 1$，$A_2 = 2$；
- B: 反应时间，$B_1 = 1.5\mathrm{h}$，$B_2 = 2.5\mathrm{h}$；
- C: 反应温度，$C_1 = 80℃$，$C_2 = 90℃$；
- D: 加减量，$D_1 = 5\%$，$D_2 = 7\%$.

这是一个 2^4 设计，如果采用 $L_{16}(2^{15})$ 设计，虽然可以估计出所有的效应，但试验次数至少需要 16 次.

如果经验告诉我们，没有三因子和四因子交互效应，D 和其它三个因子没有交互效应，而 A，B，C 之间可能有交互效应，能否利用正交表 $L_8(2^7)$ 来设计这个试验呢？

Example (Cont.)

回顾 $L_8(2^7)$ 的交互效应表, 建立如下的列号与各因子及交互效应的对应关系:

列号	1	2	3	4	5	6	7	定义关系
方案一	A	B	$AB \Updownarrow CD$	C	$AC \Updownarrow BD$	$BC \Updownarrow AD$	$D \Updownarrow ABC$	$\mathbf{I} = ABCD$

从表中可以看出, 交互效应 AB 与 CD 混杂、AC 与 BD 混杂、BC 与 AD 混杂、D 与 ABC 混杂, 但经验告诉我们 CD、BD、AD 以及 ABC 不显著, 因而实际上并不存在混杂效应, 该方案是可行的.

三、混杂技术

(a) 如果先验信息和试验资源都不足，则混杂不可避免!

(b) 两条原则（假设）

- 效应稀疏原则：多因子试验中重要效应的个数不会太多;
- 效应有序原则：主效应比交互效应重要，低阶交互效应比高阶交互效应重要，同阶交互效应的重要性相同.

(c) 混杂技术：首先保证估计主效应，其次保证估计低阶交互效应，让混杂发生在次要的交互效应之间.

Example

继续讨论前一例中的 2^4 设计问题，下面是另一种 2^{4-1} 方案:

列号	1	2	3	4	5	6	7	定义关系
方案二	A $\Updownarrow$ BC	B $\Updownarrow$ AC	C $\Updownarrow$ AB	D	AD	BD	CD	$\mathbf{I} = ABC$

若二阶交互效应可能存在，方案一可以估计 4 个因子的主效应，但所有的二阶交互效应互相混杂. 方案只能估计 D 的主效应和三个二阶交互效应. 按照效应系数原则和效应有序原则，我们应该选择方案一，优先保证主效应的估计.

问: 方案一和方案二的分辨度分别为?

小结

1. 正交表的概念: 行数、列数、水平数、正交表的并列
2. 利用正交表安排试验
3. 表头设计的原则: 自由度原子、避免混杂原则和混杂技术

2.4 正交设计的一般讨论

2.4.1 正交表的一般性质

2.4.2 等水平试验的正交设计

(1) 无交互效应情形

(2) 有交互效应情形

2.4.3 不等水平试验的正交设计

Example (无交互效应情形)

为了提高某化工产品的转化率，选择 3 个试验因子：反应温度 A，$A_1 = 80$℃，$A_2 = 85$℃，$A_3 = 90$℃；反应时间 B，$B_1 = 90\mathtt{min}$，$B_2 = 120\mathtt{min}$，$B_3 = 150\mathtt{min}$；用碱量 C，$C_1 = 5\%$，$C_2 = 6\%$，$C_3 = 7\%$. 假设根据过去的经验，所有交互效应都不显著.

- 共有 3 个三水平因子，诸效应的自由度总和为 ____；
- 如需考虑交互效应，所选正交表的列数应不小于 ____；
- 不需考虑交互效应，所选正交表的列数不小于 ____ 即可；
- 选什么表?

试验数据如下:

试验号	A	B	C	转化率 (CP)
1	0(80℃)	0(90min)	0(5%)	31%
2	0(80℃)	1(120min)	1(6%)	54%
3	0(80℃)	2(150min)	2(7%)	38%
4	1(85℃)	0(90min)	1(6%)	53%
5	1(85℃)	1(120min)	2(7%)	49%
6	1(85℃)	2(150min)	0(5%)	42%
7	2(90℃)	0(90min)	2(7%)	57%
8	2(90℃)	1(120min)	0(5%)	62%
9	2(90℃)	2(150min)	1(6%)	64%
T_1	123%	141%	135%	
T_2	144%	165%	171%	
T_3	183%	144%	144%	
m_1	41%	47%	45%	
m_2	48%	55%	57%	
m_3	61%	48%	48%	
R	20%	8%	12%	

(1) 验结果的直观分析

Step 1 计算诸因子在每个水平下的平均转化率和极差. 以第一列为例, “T_1” 行给出在反应温度 80℃ 下三次试验转化率之和,

$$T_1 = 32 + 54 + 38 = 123,$$

其均值

$$m_1 = T_1/3 = 123/3 = 41,$$

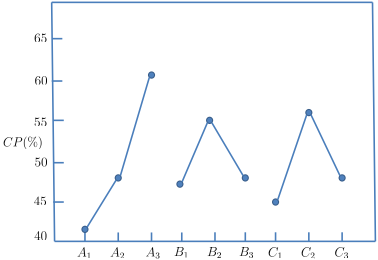
类似地, 在反应温度 85℃ 和 90℃ 下三次试验的平均转化率为 48 和 61, 极差

$$R = \max\{41, 48, 61\} - \min\{41, 46, 61\} = 20$$

列在表的最后一行.

(1) 验结果的直观分析

Step 2 画平均转化率图:



- 温度越高, 转化华越高, 以 90℃ 为最好;
- 反应时间以 120min 转化率最高;
- 用碱量以 6% 转化率最高.

综合起来以处理 (A_3, B_2, C_2) 最好.

(1) 验结果的直观分析

Step 3 将因子对响应的影响排序.

- 利用平均转化率图, 点散布范围越大的因子影响越大, 看出主次关系是 $A > C > B$.
- 利用极差 R: 极差越大的影子影响越大, A、B、C 三个因子的极差分布为 20、8、12, 故 $A > C > B$.

Step 4 追加试验. 9 次试验中不包含推断最佳水平组合为 (A_3, B_2, C_2), 需要追加试验.

利用直观分析可以获得最佳或满意的处理, 还可以区分因子对响应影响的主次.

(2) 固定效应模型与参数估计

- 由于没有交互效应, 固定效应模型为:

$$\begin{cases} y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ijk} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2), \\ i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0, \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

τ_1, τ_2, τ_3 为因子 A 的 3 个水平的主效应; β_1, β_2, β_3 为因子 B 的 3 个主效应; γ_1, γ_2, γ_3 为因子 C 的 3 个主效应.

(2) 固定效应模型与参数估计

- 9 次试验数据可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} y_{111} \\ y_{122} \\ y_{133} \\ y_{212} \\ y_{223} \\ y_{212} \\ y_{313} \\ y_{321} \\ y_{332} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{133} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{223} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{313} \\ \varepsilon_{321} \\ \varepsilon_{332} \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.

(2) 固定效应模型与参数估计

- 由最小二乘法可得

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (50, -9, -2, -3, 5, -5, 7)^{\mathrm{T}};$$

- 由回归分析理论可知

$$\hat{\sigma}^2 = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{y}/(9-7) = 18/2 = 9;$$

- 利用这些估计值来预测最佳处理 (A_3, B_2, C_2) 的响应值:

$$\hat{y}_{322} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_3 + \hat{\beta}_2 + \hat{\gamma}_2 = 50 + 11 + 5 + 7 = 73,$$

确实比所有试验结果都好.

(3) 方差分析

- 考虑反应温度 A 对转化率是否有显著的影响, 就是检验:

$$H_0^A: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0, \quad H_1^A: \tau_1, \tau_2, \tau_3\text{不全为零}.$$

- 利用方差分析和 F 验, 不难获得有关的 F 统计量;
- 正交表的特殊结构便于计算偏差平方和;
- 总平方和

$$\bar{y} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} y_i = 50, \quad SS_T = \sum_{i=1}^{9}(y_i - \bar{y})^2 = 984.$$

(3) 方差分析

- 因子 A 的平方和是它们的 3 个均值 m_1^A, m_2^A, m_3^A 的离差平方和乘以 3, 即

$$\begin{aligned} SS_A &= 3[(m_1^A - \bar{y})^2 + (m_2^A - \bar{y})^2 + (m_3^A - \bar{y})^2] \\ &= 3[(41-50)^2 + (48-50)^2 + (61-50)^2] = 618. \end{aligned}$$

类似的, 由 B 和 C 的均值可算得 $SS_B = 114$, $SS_C = 234$.

- 误差平方和 SS_E 可通过平方和分解公式获得

$$\begin{aligned} SS_E &= SS_T - SS_A - SS_B - SS_C \\ &= 984 - 618 - 114 - 234 = 18. \end{aligned}$$

(3) 方差分析

方差来源	自由度	平方和	均方	F	p 值
A	2	618	309	34.33	0.0283
B	2	114	57	6.33	0.1364
C	2	234	117	13.00	0.0714
误差	2	18	9		
总和	8	984			

- 只有因子 A 在水平 $\alpha = 0.05$ 下显著. 因子 B 和因子 C 在 $\alpha = 0.05$ 下均不显著.

2.4 正交设计的一般讨论

2.4.1 正交表的一般性质

2.4.2 等水平试验的正交设计

(1) 无交互效应情形

(2) 有交互效应情形

2.4.3 不等水平试验的正交设计

Example (有交互效应情形)

为了提高某化工产品的转化率，试验者选择了影响转化率的 4 个主要因子

- A: 催化剂种类，$A_1 = 1$，$A_2 = 2$;
- B: 反应时间，$B_1 = 1.5\text{h}$，$B_2 = 2.5\text{h}$;
- C: 反应温度，$C_1 = 80℃$，$C_2 = 90℃$;
- D: 加减量，$D_1 = 5\%$，$D_2 = 7\%$.

是希望提高转化率，其值越大越好．假设根据经验，认为可能存在交互效应 AB 和 AC.

- 如果全部交互效应都显著, 则需要采用正交表 $L_{16}(2^{15})$. 由于经验表明只存在两个二因子交互效应, 采用 2^{4-1} 实施即可. 如何设计表头?

列名	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	定义关系	分辨度
方案一	A	B	$AB \Updownarrow CD$	C	$AC \Updownarrow BD$	$BC \Updownarrow AD$	$D \Updownarrow ABC$	$\mathrm{I} = ABCD$	IV

- 如果全部交互效应都显著, 则需要采用正交表 $L_{16}(2^{15})$. 由于经验表明只存在两个二因子交互效应, 采用 2^{4-1} 实施即可. 如何设计表头?

列名	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	定义关系	分辨度
方案一	A	B	$AB \Updownarrow CD$	C	$AC \Updownarrow BD$	$BC \Updownarrow AD$	$D \Updownarrow ABC$	$\mathbf{I} = ABCD$	IV

试验号	$A(1)$	$B(2)$	$AB(3)$	$C(4)$	$AC(5)$	$D(7)$	转化率/%
1	1	1(1.5h)	1	1(80℃)	1	1	82
2	1	1(1.5h)	1	2(90℃)	2	2	78
3	1	2(2.5h)	2	1(80℃)	1	2	76
4	1	2(2.5h)	2	2(90℃)	2	1	85
5	2	1(1.5h)	2	1(80℃)	2	2	83
6	2	1(1.5h)	2	2(90℃)	1	1	86
7	2	2(2.5h)	1	1(80℃)	2	1	92
8	2	2(2.5h)	1	2(90℃)	1	2	79
m_1	80.25	82.25	82.75	83.25	80.75	86.25	
m_2	85.00	83.00	82.50	82.00	84.50	79.00	
R	4.75	0.75	0.25	1.25	3.75	7.25	

- m_1 和 m_2 的值对 A, B, C, D 所在的四列反映了四个因子分别在两个水平下的均值, 而 AB 和 AC 所在的两列的 m_1 和 m_2 没有统计意义.

(1) 试验结果的直观分析

- 对于 2^k 设计而言，极差 R 就是效应的估计，因此可用 R 的值来衡量四个因子以及其交互效应的主次关系:

$$D > A > AC > C > B > AB.$$

- 处理 (A_2, B_2, C_1, D_1) 的转化率最高;
- 从各因子的平均转化率大小来看，(A_2, B_2, C_1, D_1) 也是最好的试验条件.

(2) 试验结果的方差分析

方差来源	平方和	自由度	均方	F 值	p 值
A	45.125	1	45.125	40.11	0.0997
B	1.125	1	1.125	1.00	0.5000
C	3.125	1	3.125	2.78	0.3440
D	105.125	1	105.125	93.44	0.0656
AB	0.125	1	0.125	0.11	0.7952
AC	28.125	1	28.125	25.00	0.1257
误差	1.125	1	1.125		
总和	183.875	7			

- 可以断定交互效应 AB 不显著，但因子 B 和 C 的显著性还需要进一步考察，方法是剔除 AB 后再重新作方差分析.

(2) 试验结果的方差分析

- 新的方差分析表明因子 B 是不显著的, 需要剔除. 剔除 B 后得到的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 值	p 值
A	45.125	1	45.125	57.00	0.0048
C	3.125	1	3.125	3.95	0.1411
D	105.125	1	105.125	132.79	0.0014
AC	28.125	1	28.125	35.35	0.0094
误差	2.375	3	0.792		
B	0.125	1			
AB	1.125	1			
BC	1.125	1			
总和	183.875	7			

(3) 确定最佳处理组合

- 由于因子 D 和 A 最显著, 从它们两个水平的平均响应值可知, D 因子应取水平 D_1, A 因子取水平 A_2.
- 由于 AC 也比较显著, 根据 AC 来确定 C 的水平. A 和 C 的四种搭配的试验结果总结如下:

	A_1		A_2	
C_1	82	76	83	92
C_2	78	85	86	79

  最佳搭配为 (A_2, C_1), 其中 A 因子的最优水平与单独考虑 A 因子时的结果一致, C 的最优水平也与单独考虑 C 的因子时一致, 于是得到最优条件 (A_2, C_1, D_1).
- B 的水平对转化率没有显著影响, 但还是可以从数据中选择平均转化率稍大的反应时间 B_2, 最终得到最好的试验条件为 (A_2, B_2, C_1, D_1), 恰好是第 7 号试验.

2.4 正交设计的一般讨论

2.4.1 正交表的一般性质

2.4.2 等水平试验的正交设计

2.4.3 不等水平试验的正交设计

(1) 利用混合水平正交表

(2) 拟水平法

- 如果各因子的水个数不全相等, 如何利用正交表制定试验方案?
- 利用混合水平的正交表: $L_8(4 \times 2^4)$, $L_{16}(4 \times 2^{12})$, $L_{16}(4^4 \times 2^3)$, $\cdots$;
- 利用拟水平法.

Example (利用混合水平正交表)

为了探索缝纫机胶压板的制造工艺，选了如下的因子和水平：

因子水平	压力 (A)	温度 (B)	时间 (C)
1	8kg	95℃	9min
2	10kg	90℃	12min
3	11kg		
4	12kg		

不考虑交互效应的前提下可以直接套用正交表 $L_8(4 \times 2^4)$，

列号	1	2	3	4	5
因子	A	B	C		

该试验由四位有经验的专家打分，最高 6 分，最低 1 分.

试验号	A(kg)	B(℃)	C(min)	打分				总分
1	8(0)	95(0)	9(0)	6	6	6	4	22
2	8(0)	90(1)	12(1)	6	5	4	4	19
3	10(1)	95(0)	9(0)	4	3	2	2	11
4	10(1)	90(1)	12(1)	4	4	3	2	13
5	11(2)	95(0)	9(0)	2	1	1	1	5
6	11(2)	95(0)	9(0)	4	4	4	2	14
7	12(3)	95(0)	12(1)	4	3	2	1	10
8	12(3)	90(1)	9(0)	6	5	4	2	17
T_1	41	48	64					
T_2	24	63	47					
T_3	19							
T_4	27							
m_1	5.1	3.0	4.0					
m_2	3.0	3.9	2.9					
m_3	2.4							
m_4	3.4							
R	2.7	0.9	1.1					

(1) 试验结果的直观分析

- 当水平数不同时，即便两个因子对指标有等同影响，水平多的因子极差应该也要大一些，直接比较 R 是不符合直观.
- 统计学家们采用一个折算公式

$$R' = \sqrt{m} \times R \times \rho$$

来解决这一问题，其中 m 表示在该因子在每一水平下的重复试验次数，ρ 为折算系数，不同水平数因子的折算系数为:

水平数	2	3	4	5	6	7	8	9
折算系数	0.71	0.52	0.45	0.40	0.37	0.35	0.34	0.32

(1) 试验结果的直观分析

- 因子 A 是 4 水平，其折算系数是 0.45，折算结果

$$R_A' = \sqrt{m_A} \times R_A \times 0.45 = \sqrt{8} \times 2.7 \times 0.45 = 3.4,$$

- B 和 C 是二水平，折算系数是 0.71，折算结果为

$$R_B' = \sqrt{m_B} \times R_B \times 0.71 = \sqrt{16} \times 0.9 \times 0.71 = 2.6,$$

$$R_C' = \sqrt{m_C} \times R_C \times 0.71 = \sqrt{16} \times 1.1 \times 0.71 = 3.1,$$

  最后用 R_A', R_B', R_C' 的大小来分主次关系，得到主次关系 $A > B > C$.

- 最佳参数组合为压力 8kg(A_1)，温度 90℃(B_2)，时间 9min(C_1).

(2) 试验结果的方差分析

- 试验的方差分析结果如下, 表明 3 个因子对胶压板质量都有显著的影响.

方差来源	自由度	平方和	均方	F	p 值
压力	3	33.34375	11.11460	9.46	0.0002
温度	1	7.03125	7.03125	5.98	0.0215
时间	1	9.03125	9.03125	7.68	0.0102
误差	26	30.56250	1.17755		
总和	31	79.96875			

2.4 正交设计的一般讨论

2.4.1 正交表的一般性质

2.4.2 等水平试验的正交设计

2.4.3 不等水平试验的正交设计

(1) 利用混合水平正交表

(2) 拟水平法

Example (拟水平法)

为了提高某化工产品的转化率, 选择 3 个试验因子: 反应温度 (A), 反应时间 (B), 用碱量 (C), 每个因子取 3 个水平: $A_1 = 80$℃, $A_2 = 85$℃, $A_3 = 90$℃; $B_1 = 90\texttt{min}$, $B_2 = 120\texttt{min}$, $B_3 = 150\texttt{min}$; $C_1 = 5\%$, $C_2 = 6\%$, $C_3 = 7\%$.

- 如果还要考虑搅拌速度 D 这个因子, 而电动机只有快慢两挡, 能否用 $L_9(3^4)$?
- 解决的方法就是给搅拌速度凑足 3 个水平. 让搅拌速度快的 (或慢的) 一挡多重复一次, 凑成第 3 个水平, 得到试验方案:

因子水平	温度 (A)	时间 (B)	加碱量 (C)	搅拌速度 (D)
1	80℃	90min	5%	快速
2	85℃	120min	6%	慢速
3	90℃	150min	7%	快速

这样一种凑足水平的方法叫做拟水平法.

Example (拟水平法)

为了提高某化工产品的转化率, 选择 3 个试验因子: 反应温度 (A), 反应时间 (B), 用碱量 (C), 每个因子取 3 个水平: $A_1 = 80℃$, $A_2 = 85℃$, $A_3 = 90℃$; $B_1 = 90\texttt{min}$, $B_2 = 120\texttt{min}$, $B_3 = 150\texttt{min}$; $C_1 = 5\%$, $C_2 = 6\%$, $C_3 = 7\%$.

- 如果还要考虑搅拌速度 D 这个因子, 而电动机只有快慢两挡, 能否用 $L_9(3^4)$?
- 解决的方法就是给搅拌速度凑足 3 个水平. 让搅拌速度快的 (或慢的) 一挡多重复一次, 凑成第 3 个水平, 得到试验方案:

因子水平	温度 (A)	时间 (B)	加碱量 (C)	搅拌速度 (D)
1	80℃	90min	5%	快速
2	85℃	120min	6%	慢速
3	90℃	150min	7%	快速

这样一种凑足水平的方法叫做拟水平法.

Example

玻璃绝缘子钢化试验选的因子水平如下:

因子水平	1	2	3	4	5
保温温度 (℃)	700	685	670	710	720
保湿时间 (h)	5.5	4.5	3.5	2.5	1.5
上风压 (kPa)	130	80	110	160	180
下风压 (kPa)	240	300	340	380	440
凤栅形状	I	II	III	IV	
主风嘴大小 (mm)	9	6	12		

- 其中前 4 个因子是 5 水平的, 后 2 个因子是 4 水平和 3 水平, 没有现成的正交表可以套用.
- 比较合适的办法是选正交表 $L_{25}(5^6)$, 将最后两个因子凑足 5 个水平.

- 在风栅形状这个因子中，工程师估计形状 II 效果较好，将它重复一次，凑成第五个水平；
- 在主风嘴大小因子中，估计 9 和 12 比较好，将它们分别重复一次，凑成五个谁平，于是因子、水平变成如下的分布：

因子水平	1	2	3	4	5
保温温度 (℃)	700	685	670	710	720
保湿时间 (h)	5.5	4.5	3.5	2.5	1.5
上风压 (kPa)	130	80	110	160	180
下风压 (kPa)	240	300	340	380	440
风栅形状	I	II	III	IV	II
主风嘴大小 (mm)	9	6	12	9	12

- 拟水平法在实行时方法简单，但处理组合出现的频率不平衡，有时会给试验数据分析带来一些困难.

总结

1. 正交表、表头设计的原则、混杂技术
2. 等水平试验的正交设计
3. 不等水平试验的正交设计