

# ÉLECTRON LIBRE

BELLEVUE (BLV)

RÉSUMÉ. Cet article contient la résolution de nombreuses questions du problème « Électron libre » de la quatorzième édition du Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens. La résolution de problème est composée de lemmes, théorèmes et conjectures énoncés à la suite. Notez que pour la résolution de certains problèmes dans un plan quelconque, on a jugé que la création d'un plan orthonormé ne présentait pas de soucis.

## TABLE DES MATIÈRES

### 1. INTRODUCTION

Nicolas joue dispose d'un canon à électrons immergé dans un champ magnétique constant uniforme. À l'aide de son canon, il peut émettre un électron circulant alors à vitesse constante en décrivant un cercle dans le sens trigonométrique, que l'on a supposé de rayon 1.

Il dispose aussi d'un bouton qui permet de faire faire demi-tour à l'électron tel qu'au moment où il appuie, la vitesse de l'électron reste la même mais progresse dans la direction opposée.

Le coeur du problème réside dans l'optimisation entre la longueur totale de la courbe de la trajectoire, du nombre d'appuies, ainsi que la restriction de la taille de la trajectoire selon l'espace.

## 2. DÉFINITIONS

**Définition 2.1.** On appelle **trajet** une courbe permettant de relier deux points  $A, B$  dans un plan quelconque. Voici des exemples de trajets :



FIGURE 1. Un trajet circulaire.



FIGURE 2. Un trajet étant le segment  $[AB]$ .

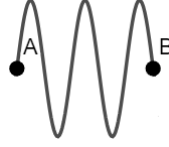


FIGURE 3. Un trajet sinusoïdal.

**Définition 2.2.** On appelle  $\lambda(A, B)$  la longueur d'une courbe (trajet) dans un plan quelconque reliant deux points  $A, B$ . Dans le cadre de la courbe d'une fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ , on considère donc que :

$$\lambda(A, B) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f'^2} dx$$

(La démonstration est à l'annexe).

**Définition 2.3.** On appelle  $n_{bouton}$  le nombre de fois que l'on appuie sur le bouton permettant de changer le sens trigonométrique de la trajectoire.

**Définition 2.4.** On appelle un **demi-cercle trigonométrique perpétuel** un trajet composée de plusieurs addition d' $1/2$  circonférence d'un cercle trigonométrique (soit  $\pi$ ) en considérant aussi l'incomplétion du demi-cercle trigonométrique.

**Définition 2.5.** On appelle un **demi-cercle trigonométrique perpétuel complet** un trajet composée de plusieurs addition d' $1/2$  circonférence d'un cercle trigonométrique (soit  $\pi$ ). Voici une illustration ci-dessous :



FIGURE 4. Un demi-cercle trigonométrique perpétuel complet répété 3 fois.

**Définition 2.6.** On appelle **distance absolue** la plus petite distance séparant deux points  $A, B$  dans un plan quelconque, soit le segment  $[AB]$  (Voir le **Théorème 3.3.**). On la note  $d_{abs}$  avec  $d_{abs} \in \mathbb{R}^+$  (une longueur étant toujours positive). On la note aussi  $d_{abs,XY}$  dans des cas particuliers hormis  $A$  et  $B$  (considérant donc d'autres points  $X$  et  $Y$ ).

**Définition 2.7.** On appelle **distance minimale** la plus petite distance séparant deux points  $A, B$  dans un plan quelconque, avec un trajet circulaire (ou de demi-cercles trigonométrique perpétuels). On la note  $d_{min}$  avec  $d_{min} \in \mathbb{R}^+$  (une longueur étant toujours positive).

### 3. THÉORÈMES UTILITAIRES

La démonstration des Théorèmes utilitaires est réalisé à l'annexe de l'article.

**Théorème 3.1.** Soit  $f$  une fonction continue tel que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ . Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . On considère la longueur de la courbe de  $f$  allant de  $a$  à  $b$  étant égale à :

$$\lambda(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2} dx$$

**Théorème 3.2.** Soit  $A, B$  deux points dans un plan quelconque. On admet que le trajet le plus court afin d'aller de  $A$  à  $B$  est une ligne droite.

### 4. THÉORÈMES POUR LA QUESTION 1

**Théorème 4.1.** Dans le cas où  $n_{bouton} = 0$  (soit  $d_{abs} \leq 2$ ),  $d_{min} = 2\sin^{-1}(\frac{d_{abs}}{2})$

*Démonstration.* Pouvant choisir l'orientation initiale du canon, on sait que l'on peut former un arc de cercle permettant d'atteindre  $B$  à partir de  $A$ . Voici deux approches :

**Approche 1 :** On considère le repère orthonormé  $(O; I; J)$  tel que  $\vec{OI} \perp \vec{OJ}$ . On considère de même le cercle trigonométrique  $C$  centré au point  $O$  et le point  $A(1; 0)$  inscrit dans  $C$ . Soit le point  $B$  inscrit dans  $C$  (sur sa circonférence). Soit  $\theta$  l'angle séparant  $A$  et  $B$  à travers le cercle  $C$ .

Nous pouvons donc former le triangle  $\widehat{BOA}$  isocèle en  $O$  avec  $BO = 1$ ,  $OA = 1$  et  $AB = d_{abs}$ . Soit  $D$ , milieu segment  $[AB]$  tel que  $OD$  coupe  $\theta$  en deux. Nous avons donc deux triangles rectangles égaux  $\widehat{ODA}$  et  $\widehat{ODB}$ .

D'après les propriétés trigonométrique d'un triangle rectangle, nous avons :

$$\sin(\frac{\theta}{2}) = \frac{d_{abs}}{2} \Leftrightarrow \theta = 2\sin^{-1}(\frac{d_{abs}}{2})$$

Étant dans un cercle trigonométrique, nous savons que  $d_{min} = \theta$  (car  $r = 1$ ,  $r$  étant le rayon du cercle), soit :

$$d_{min} = 2\sin^{-1}(\frac{d_{abs}}{2})$$

Voici une illustration géométrique de la preuve :

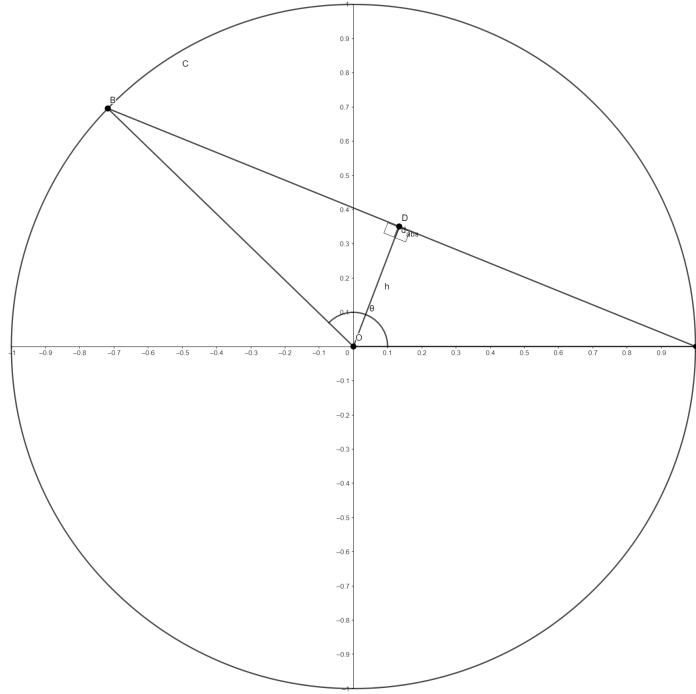


FIGURE 5. Un repère orthonormé avec le cercle trigonométrique  $C$  de rayon  $r = 1$ .

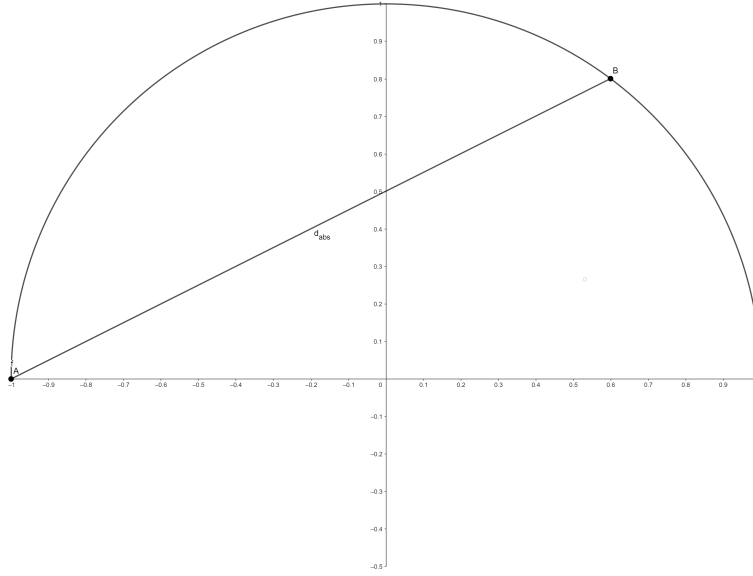
**Approche 2 :** On considère de même le repère orthonormé  $(O; I; J)$  tel que  $\vec{OI} \perp \vec{OJ}$ . On considère de même le cercle trigonométrique  $C$  centré au point  $O$  et le point  $A(-1; 0)$  inscrit dans  $C$ . Soit le point  $B(x_B, y_B)$  inscrit dans  $C$  (sur sa circonférence).

Nous pouvons modéliser  $C$  à partir de l'équation modélisant un cercle dans un repère orthonormé. Soit  $r, x, y \in \mathbb{R}$  avec  $y$  représentant les ordonnées,  $x$  les abscisses et  $r$  le rayon, tel que :

$$r^2 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

À partir de cette égalité, nous considérons dans notre cas que  $r = 1$ , car il s'agit du cercle trigonométrique. Nous pouvons définir la fonction  $f, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}, \forall x \in [-1; 1]$ .

Voici une illustration géométrique de la courbe de  $f$  ainsi que les points associés :

FIGURE 6. Représentation de  $f$  avec  $B(\approx 0.6; \approx 0.8)$ .

Nous savons que :

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in ]-1; 1[$$

D'après le **Théorème 3.2**, nous avons donc :

$$d_{min} = \lambda(A, B) = \int_{-1}^{x_B} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_{-1}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^{x_B} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

On admet que :

$$\int_{-1}^{x_B} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}(x) \Big|_{-1}^{x_B} = \sin^{-1}(x_B) - \sin^{-1}(-1)$$

Soit donc  $d_{min} = \sin^{-1}(x_B) + \frac{\pi}{2}$ .

Étant dans un repère orthonormé, nous savons aussi que, d'après le Théorème de Pythagore :

$$d_{abs}^2 = (x_B - x_A)^2 + (f(x_B) - f(x_A))^2 \Leftrightarrow d_{abs}^2 = 2(1 + x_B) \Leftrightarrow x_B = \frac{d_{abs}^2}{2} - 1$$

Soit donc :

$$d_{min} = \sin^{-1}\left(\frac{d_{abs}^2}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}$$

Si l'on définit une fonction  $f_1 = d_{min}, f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto f_1(x)$ , pour l'**Approche 1** et  $f_2 = d_{min}, f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto f_2(x)$ , pour l'**Approche 2** avec  $x = d_{abs}$ , nous avons pour  $f_1(x) = 2\sin^{-1}(\frac{x}{2})$  et  $f_2(x) = \sin^{-1}(\frac{x^2}{2} - 1) + \frac{\pi}{2}$ .

En comparant les courbes des fonctions  $f_1, f_2$  des deux approches, on remarque que :

$$f_2(x) = |f_1(x)|$$

Cela peut se justifier par le fait que l'**Approche 2** est basée sur une fonction  $f(x) \geq 0 \forall x \in [-1; 1]$  car un carré est toujours positif. De plus, on préférera l'utilisation de la fonction  $f_1$  car, comme  $f_1$  et  $f_2$  modélisent  $d_{min}$  selon  $d_{abs}$ , il n'est pas cohérent de considérer une longueur négative, une longueur quelconque  $l \in \mathbb{R}^+$ . Dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $f_1$  et  $f_2$  sont semblables. Dans tous les cas,  $d_{min}, d_{abs} \in \mathbb{R}^+$ , donc on peut négliger cette différence.  $\square$

**Théorème 4.2.** *L'appuie idéal sur la courbe d'un cercle trigonométrique est à sa circonférence divisée par 2 (soit  $\pi$ ).*

*Démonstration.* Voici deux approches :

**Approche 1 :** Du **Théorème 4.2** découle la propriété disant que :

$$d_{min} = 2\sin^{-1}\left(\frac{d_{abs}}{2}\right) \Leftrightarrow d_{abs} = 2\sin\left(\frac{d_{min}}{2}\right)$$

Soit  $x = d_{min}$  et une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, x \longmapsto f(x)$  tel que  $f(x) = d_{abs}$ . Nous avons donc :

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

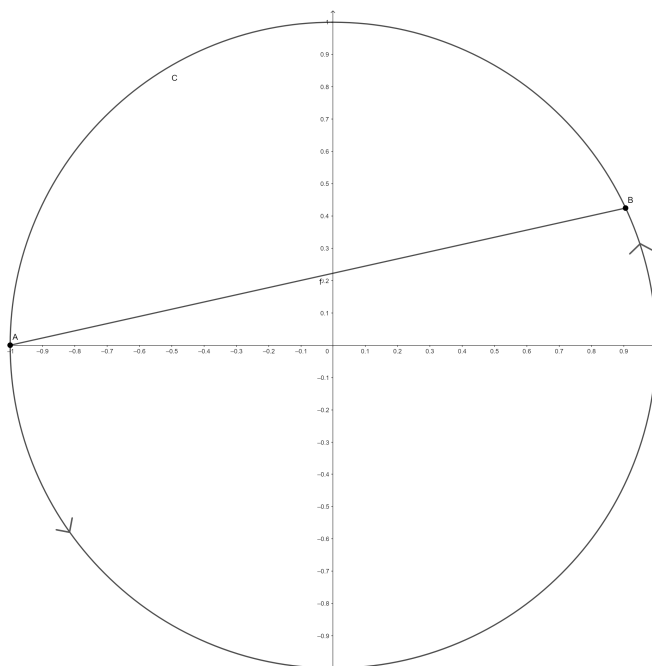
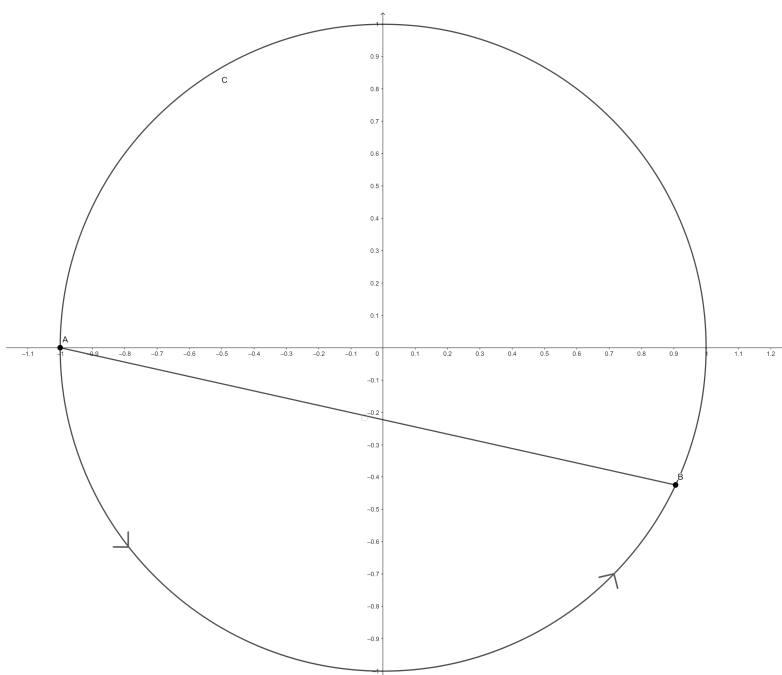
Ainsi que :

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

On admet que  $f'(x) = 0$  lorsque  $x = \pi$  dans l'intervalle  $I = [0; 2\pi]$ , soit donc un maximum avec  $f(\pi) = 2 \Leftrightarrow d_{abs} = 2$  pour  $d_{min} = \pi$ .

En d'autres termes, toutes les valeurs  $d_{min}$  n'amèneront pas aussi loin que son diamètre, comme  $d_{abs} = 2$ . Cela laisse donc considérer l'idée d'appuyer sur le bouton à ce maximum afin d'effectuer un nouveau cercle trigonométrique. (cela laisse aussi supposer, que par récurrence, il faudra toujours appuyer sur le bouton à la moitié de la circonférence pour progresser efficacement dans le plan).

**Approche 2 :** En se basant plus sur la logique, on remarque bien qu'afin d'amener notre électron le plus loin possible, il faut arrêter le trajet et appuyer sur le bouton au demi-cercle. En effet, si l'on appuie au delà de la circonférence, nous effectuons un trajet plus long avec une distance absolue  $d_{abs}$  plus courte. Voici une illustration :

FIGURE 7. Un trajet long avec  $d_{abs} = 1.95$ .FIGURE 8. Un trajet moins long avec  $d_{abs} = 1.95$ .

On comprend donc qu'avec la possibilité de choisir l'orientation initiale, on peut toujours s'arranger pour former un demi-cercle trigonométrique amenant l'électron de  $A$  vers  $B$ . En considérant ce demi-cercle, on remarque bien que le trajet amenant le plus loin est à la moitié de sa circonférence, soit  $\pi$ , et qu'il n'est pas nécessaire de laisser l'électron progresser au delà. On considère donc l'appuie du bouton à un tel emplacement.

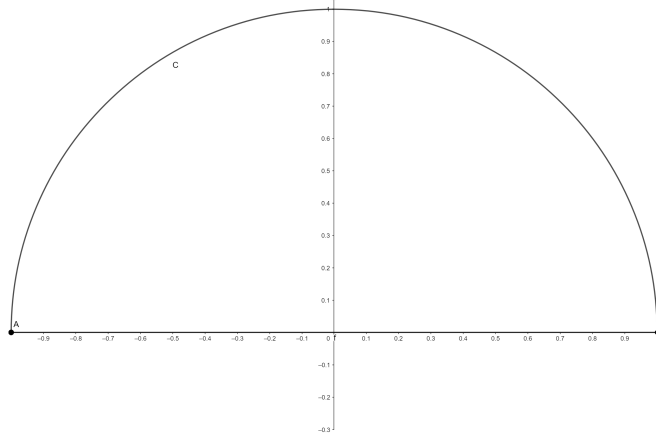


FIGURE 9. Un trajet idéal avec  $d_{abs} = 2$ , le diamètre étant le maximum.

□

**Théorème 4.3.** *Soit  $A, B$  deux points dans un plan orthonormé. Avec un trajet formant un demi-cercle trigonométrique perpétuel de  $A$  à  $B$  et la possibilité de changer de direction à des points  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n$  (selon l'énoncé),  $n \in \mathbb{N}$ , le trajet le plus court est le demi-cercle trigonométrique perpétuel de  $A$  à  $B$ , avec le centre des cercles associés aux points  $A, C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n$  et  $B$  alignés.*

*Démonstration.* On comprend qu'avec le **Théorème 3.3**, afin de maximiser la distance minimale entre  $A$  et  $B$ , il faut que la courbe passant par  $A$  et  $B$  aie une forme se rapprochant d'une droite. Le problème réside donc dans la question : Il y a-t-il un moyen de conformer les points  $A, C_0, C_1, \dots, C_n$  et  $B$  afin de faire une courbe se rapprochant d'une droite, voire même, est-il possible que  $d_{min} \approx d_{abs}$ .

Connaissant, d'après le **Théorème 4.2**, qu'il faut appuyer idéalement à la moitié de la circonférence, on peut d'ores-et-déjà déduire le fait que par récurrence, appuyer perpétuellement à la moitié de la circonférence amènera l'électron le plus loin possible (soit donc former des demi-cercles trigonométriques perpétuels avec un alignement nécessaire entre les centres des cercles associés au tirs). Mais, nous pouvons affirmer ce principe par une autre justification :

Dans le cas où  $n_{bouton} = 0$ , le **Théorème 4.1**, démontre la distance  $d_{min}$  selon  $d_{abs}$  et nous considérons  $d_{min}$  tel un unique demi-cercle trigonométrique.

Dans le cas où  $n_{bouton} = 1$ ,



2-2.png

FIGURE 10. La figure de droite est de  $d_{abs} = 4$ , à son maximum.

Dans le cas où  $n_{bouton} = 2$ , prenons une version simplifiée du problème. On définit un repère orthonormé  $(A; I; J)$  tel que  $\overrightarrow{AJ} \perp \overrightarrow{AB}$ . On considère donc les points  $A(x_A = 0, y_A = 0)$  et  $B(x_B, y_B = 0)$  ainsi que les points  $C$  et  $D$ , l'emplacement de l'électron lorsque le bouton a été appuyé.

Soit le cercle trigonométrique  $Z'$  de centre  $Z(0; 1)$  passant par  $A$ , le cercle trigonométrique  $X'$  de centre  $X$  passant par  $C$ , et le cercle trigonométrique  $Y'$  de centre  $Y(x_B; 1)$  passant par  $B$ .

On remarque que  $d_{abs} = x_B - x_A = x_B$  et la distance  $d_{ZY} = x_Y - x_Z = x_B$  entre les points  $Z$  et  $Y$ , soit  $d_{abs} = d_{ZY}$ .

Le cercle trigonométrique ayant un rayon  $r = 1$ , on sait que  $d_{absZX} = d_{absXY} = 2$ . On définit le triangle isocèle  $ZXY$ , isocèle en  $X$  et  $\theta$ , l'angle de  $\widehat{XZY}$  et  $\widehat{YXZ}$ . Voici une illustration du repère et des objets géométriques :

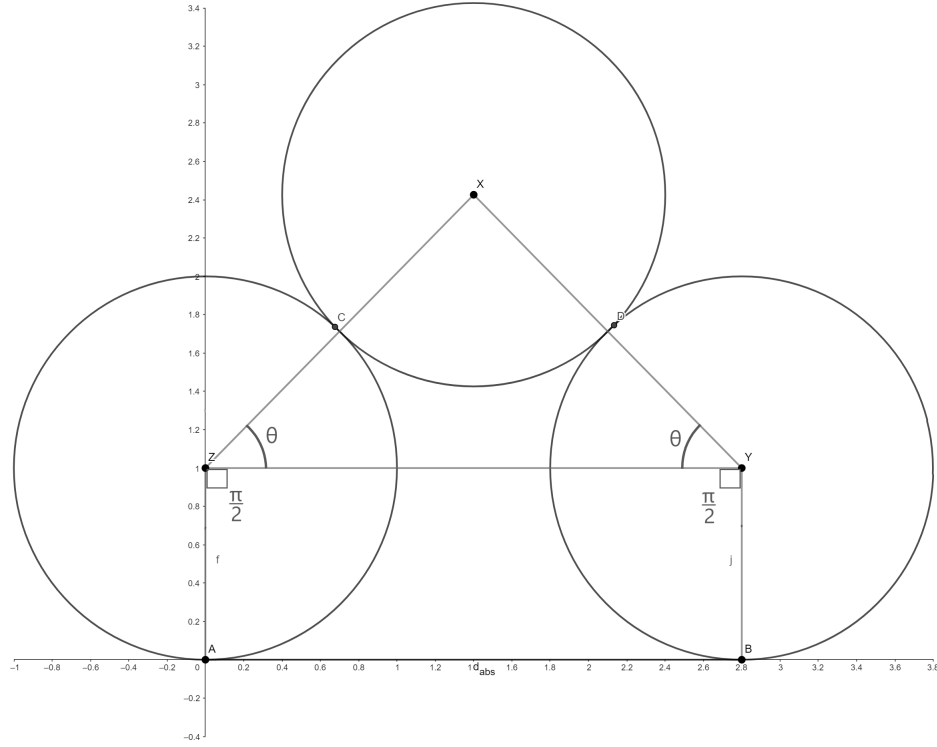


FIGURE 11. Représentation du repère avec les objets géométriques énoncées.

La somme des angles d'un triangle équivalent à  $\pi$ , on sait que  $\widehat{ZXY} = \pi - 2\theta$ . D'après le Théorème d'Al-Kashi, nous savons que :

$$d_{absZY}^2 = ZX^2 + XY^2 - 2ZX \times YX \times \cos(\pi - 2\theta) \Leftrightarrow d_{absZY}^2 = 8 + 8\cos(2\theta)$$

Avec simplification, nous avons donc :

$$d_{abs} = d_{absZY} = 2\sqrt{2}\sqrt{\cos(2\theta) + 1}$$

(On ne considère pas la racine négative étant donné qu'une longueur est toujours positive).

Si l'on définit une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto f(x)$  avec  $x = \theta$  et  $d_{abs} = f(x)$ , nous aurons :

$$f(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{\cos(2x) + 1}$$

On admet que cette fonction admet un maximum en  $x = 0$  dans l'intervalle  $I = [0; \pi]$ , avec  $f(x) = 4$ . En d'autres termes, la distance absolue  $d_{abs}$  la plus grande possible est égale à 4, avec  $\theta = 0$ . Géométriquement, cela nous la représentation suivante :

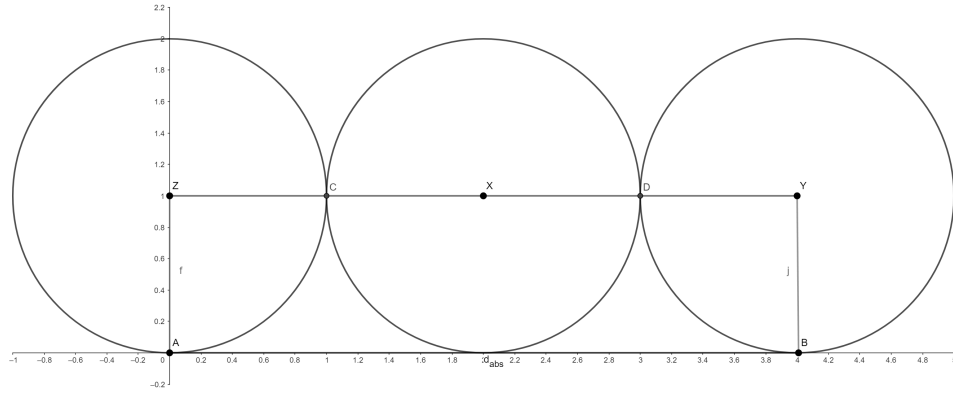


FIGURE 12. Représentation du repère avec  $d_{abs} = 4$ .

On reconnaît donc des demi-cercles trigonométrique perpétuels. Si l'on mesure la longueur du trajet de l'électron, nous avons bien  $d_{min} = \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi$  (résultat notamment en accord avec la réponse à la question 1.b. À noter aussi que la Figure 10 et la Figure 12 illustrent aussi le principe d'un même trajet avec un nombre d'appuis différent).

Si l'on souhaite aussi avoir un trajet maximal avec le même nombre d'appuis ( $n_{bouton} = 2$ ), on préférera considérer le point  $A$  aux coordonnées  $(-1; 1)$  et le point  $B(6; 1)$  avec  $d_{abs} = 6$  et  $d_{min} = 3\pi$ .

On considère par la suite des réponses aux questions que  $d_{min}$  selon  $d_{abs}$  peut-être trouvé à partir de demi-cercles trigonométriques perpétuels. □

**Théorème 4.4.** *Soit  $A, B$  deux points dans un plan quelconque. Il est toujours possible d'atteindre  $B$  en partant de  $A$  en formant des demi-cercles trigonométrique perpétuels et en pouvant choisir l'orientation initiale.*

*Démonstration.* On considère un point  $A$  dans un plan quelconque et  $C_a$ , le cercle trigonométrique passant par  $A$ .

À  $n_{bouton} = 0$ , pouvant choisir l'orientation de base du cercle trigonométrique, on en déduit que l'on peut former un nouveau cercle  $C_{a'}$  selon les possibilités

d'orientation.  $C_{a'}$  a donc pour rayon  $r_{a'} \in \mathbb{R}^+$ ,  $r_{a'} = 2$ , étant le diamètre du cercle trigonométrique. Cela couvre donc tous les points ayant une distance  $d = 2$  de  $A$ , soit donc une surface de  $4\pi$ .

Après avoir parcouru un trajet  $T = \pi$ . D'après le **Théorème 4.3**, on considère le fait d'appuyer sur le bouton ( $n_{bouton} = 1$ ) pour pouvoir progresser dans le plan. Par le même raisonnement que lorsque  $n_{bouton} = 0$ , on en déduit que l'on peut former un nouveau cercle  $C_{a''}$  selon les possibilités d'orientation.  $C_{a''}$  a donc pour rayon  $r_{a''} = 2r_{a'} = 4$  et une surface de  $16\pi$ .

Par récurrence, on déduit que l'on peut toujours former un cercle  $C_k$  de rayon  $r_k = 2(n_{bouton} + 1)$  impliquant que lorsque  $n_{bouton} \rightarrow +\infty$ ,  $r_k \rightarrow +\infty \implies \pi r_k^2 \rightarrow +\infty$ , couvrant ainsi l'ensemble du plan.

On comprend donc qu'il est possible à partir du point  $A$  d'atteindre n'importe quel point  $B$  dans le plan.

Voici une représentation visuelle permettant d'expliquer le raisonnement :

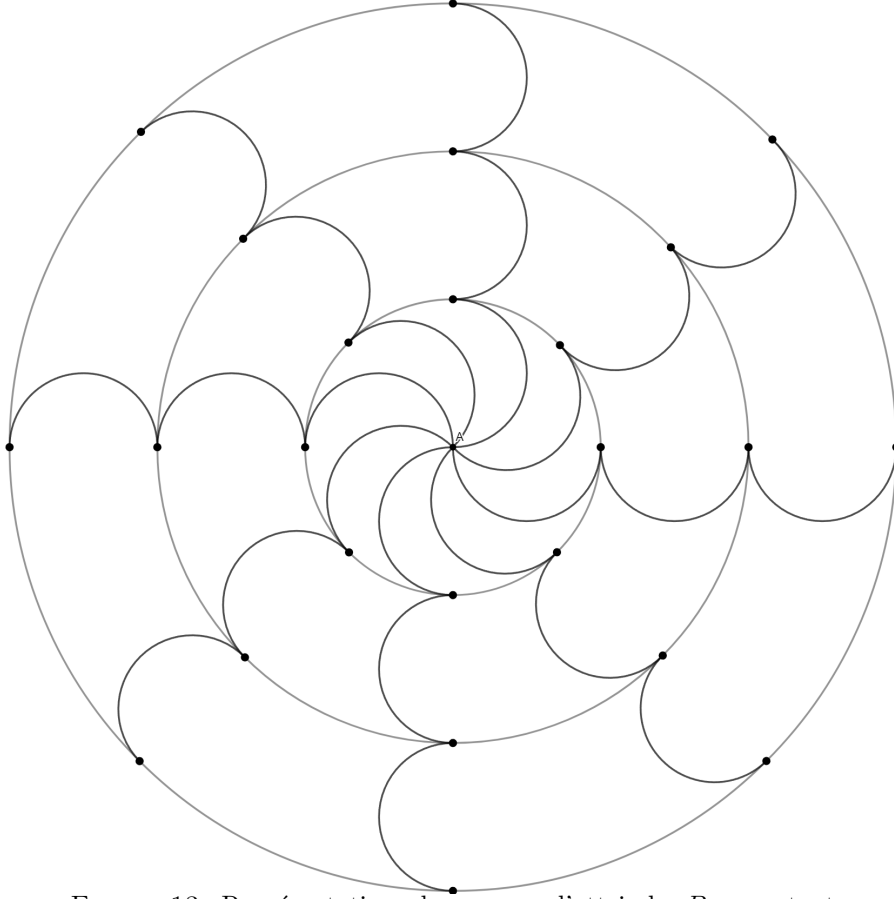


FIGURE 13. Représentations des moyens d'atteindre  $B$  en partant de  $A$  avec une division=8 selon l'orientation (les points des courbes circulaires ont donc un angle de  $45^\circ$  entre eux selon le point  $A$ ) avec  $n_{bouton} = 2$ . Les points noirs sont des points  $B$  avec la longueur du segment  $[AB]$  un multiple de 2.

□

## 5. RÉPONSE À LA QUESTION 1

**Réponse 1.a :** Comme l'explique le **Théorème 4.4**, il est toujours possible d'atteindre un point  $B$  à partir d'un point  $A$  avec des demi-cercles perpétuels, impliquant que Nicolas peut toujours guider l'électron du point  $A$  au point  $B$ .

À partir du même théorème, du **Théorème 4.2**, ainsi qu'à l'aide de la Figure 13, on remarque que Nicolas doit appuyer lorsque le trajet  $d_{abs} = 2$ , soit donc, lorsque  $d_{abs}$  est un multiple de 2,  $n_{bouton} \mapsto n_{bouton} + 1$  (lorsque  $d_{abs} \leq 2, n_{bouton} = 0$ , lorsque  $d_{abs} \in ]2, 4]$ ,  $n_{bouton} = 1$ , lorsque  $d_{abs} \in ]4, 6]$ ,  $n_{bouton} = 2$ , etc...

On peut donc définir  $d_{abs}$  tel que  $d_{abs} = 2(n_{bouton} + 1)$ , en considérant  $d_{abs}$  en tant que la longueur maximale  $\in \mathbb{N}$ .

Si l'on effectue le raisonnement inverse en cherchant  $n_{bouton}$  en fonction de  $d_{abs}$ , on trouve que  $n_{bouton} = \frac{d_{abs}}{2} - 1$ . Or  $d_{abs} \in \mathbb{R}^+$ , on s'arrange donc afin de prendre la plus petite valeur entière selon  $d_{abs}$

On trouve que :

$$n_{bouton} = \lceil \frac{d_{abs} - 1}{2} \rceil$$

**Réponse 1.b :** On considère les points  $A$  et  $B$  dans un plan quelconque et  $d_{abs} = AB$  (par définition). Comme nous l'avons affirmé précédemment avec le **Théorème 4.3**, nous considérons la formation de demi-cercles perpétuels comme le trajet amenant l'électron le plus loin avec la distance minimale la plus courte possible. Il ne nous reste plus qu'à s'arranger pour former des demi-cercles perpétuels optimisés selon la distance  $d_{abs}$  avec l'orientation du canon de manière optimale.

Soit le point  $D$  et  $C$  tel que  $DC = 1$  et  $CB = 1$  (en d'autres termes,  $C$  est le centre du cercle trigonométrique passant par  $D$  et  $B$ ) avec  $A, D, C$  alignés.

On définit aussi le point  $D$  tel qu'il soit le nombre de demi-cercles complets possibles à réaliser à partir de la distance absolue  $d_{abs}$  en partant du point  $A$ , soit le plus petit entier naturel étant divisible (et non pas divisé) par le diamètre du cercle trigonométrique selon  $d_{abs}$ . On le définit donc à partir du point  $A$  tel que  $AD = 2\lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil$ . Soit  $\alpha$  l'angle  $\widehat{DCB}$ , égal aussi au trajet circulaire de  $D$  à  $B$ , étant dans un cercle trigonométrique.

Nous aurons donc une représentation semblable à la figure ci-dessous :

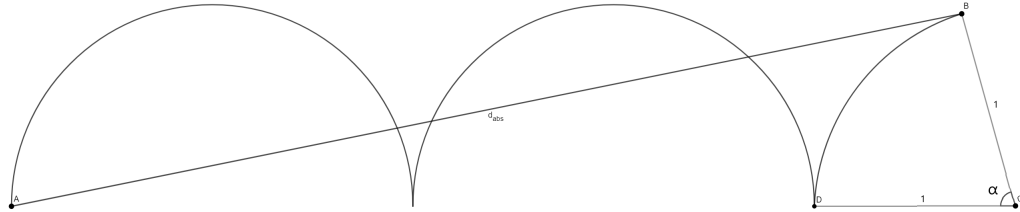


FIGURE 14. Représentation des points A,B,C,D, dans le cas où  $n_{bouton} = 2$ .

Nous avons donc que  $AC = 2\lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil + 1$ .

D'après le Théorème d'Al-Kashi, nous savons que :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\alpha)$$

Soit :

$$d_{abs}^2 = (2\lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil + 1)^2 + 1 - 2(2\lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil + 1)\cos(\alpha)$$

En isolant  $\alpha$ , nous avons :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{-2BC \times AC}\right)$$

En d'autres termes,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{d_{abs}^2 - (2\lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil + 1)^2 - 1}{-2(2\lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil + 1)}\right)$$

$AD$  représentant le nombre de demi-cercles trigonométriques complets, on sait qu'à chaque diamètre traversé, on y associe un trajet  $d_{min} = \pi$  sur le cercle trigonométrique. On définit donc  $d_{demi-cercle} = \lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil \pi$ , avec  $d_{demi-cercle} \in \mathbb{R}^+$  désignant la valeur de demi-cercles trigonométriques complets.

$\alpha$  étant aussi le trajet circulaire de  $D$  à  $B$ , on trouve comme distance minimale de l'électron pour aller de  $A$  à  $B$  en trajet circulaire :

$$d_{min} = d_{demi-cercle} + \alpha$$

Soit :

$$d_{min} = \lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil \pi + \arccos\left(\frac{d_{abs}^2 - (2\lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil + 1)^2 - 1}{-2(2\lceil \frac{d_{abs}}{2} \rceil + 1)}\right)$$

## 6. ANNEXE

**Théorème 6.1.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $b > a$ . Soit  $f, g$  deux fonctions continues sur  $]a, b[$  avec  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x)$ . Si  $f(x) \geq g(x) \forall x \in ]a, b[ \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

*Démonstration.* Puisque  $f(x) \geq g(x) \forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \forall x \in ]a, b[$ . Par le théorème fondamental de l'analyse, si  $f(x)$  est continue sur  $]a, b[$ , alors son intégral  $F(b) - F(a)$  sur  $]a, b[$  est définie comme :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

De même, l'intégral de  $g$ ,  $G(b) - G(a)$ , est définie comme :

$$G(b) - G(a) = \int_a^b g(x) dx$$

On sait aussi que, comme  $f(x) - g(x) \geq 0$ , cela implique que l'aire en dessous de cette différence est supérieure à zéro. Intégrons cette inégalité de  $a$  à  $b$  :

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) - g(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow F(x) - G(x) \Big|_a^b \geq 0 \Leftrightarrow F(b) - G(b) - (F(a) - G(a)) \geq 0$$

Soit donc :

$$F(b) - F(a) \geq G(b) - G(a) \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

□

**Théorème 6.2.** Soit  $f$  une fonction continue tel que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ . Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . On considère la longueur de la courbe de  $f$  allant de  $a$  à  $b$  étant égale à :

$$\lambda(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2} dx$$

*Démonstration.*

□

**Théorème 6.3.** Soit  $A, B$  deux points dans un plan quelconque. On admet que le trajet le plus court afin d'aller de  $A$  à  $B$  est une ligne droite.

*Démonstration.* Considérons deux points  $A, B$  dans un plan quelconque. Soit le repère orthonormé  $(A; I; J)$  tel que  $\overrightarrow{AJ} \perp \overrightarrow{AB}$ . On considère donc les points  $A(x_A = 0, y_A = 0)$  et  $B(x_B, y_B = 0)$ .

Soit  $f_q, f_q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto f_q(x)$ , une fonction continue sur  $[x_A, x_B]$  modélisant le trajet de  $A$  à  $B$  (n'étant pas une droite, avec  $f_q(x) = 0$  nécessairement à  $x_A$  et  $x_B$ , pour compléter la courbe). Soit  $f_k, f_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto 0$  une fonction continue sur  $[x_A, x_B]$  modélisant la droite entre  $A$  et  $B$ .

En effectuant un raisonnement par l'absurde, supposons que  $f_q(x_A) = f_q(x_B) = 0$  mais non  $f_q(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$  (en d'autres termes,  $\exists x_p$  (au moins un  $x_p$  ou plus) tel que  $f_q(x_p) \neq 0$ ), avec  $\lambda_q(A, B) < \lambda_k(A, B)$ .

0 étant une constante, on sait que  $f_k'(x) = 0$  :

$$\Rightarrow \lambda_k(A, B) = \int_{x_A}^{x_B} 1 \, dx \Leftrightarrow \lambda_k(A, B) = x \Big|_{x_A}^{x_B} \Leftrightarrow \lambda_k(A, B) = x_B - x_A \Leftrightarrow \lambda_k(A, B) = x_B$$

Or  $\exists x_p$  tel que  $f_q(x_p) \neq 0$ , impliquant que  $f_q(x)$  doit avoir une valeur dépendant de  $x$  (et non pas juste d'une constante  $k$  ou  $kx, k \in \mathbb{R}^*$ , car dans un tel cas,  $f_q(x_A) \neq f_q(x_B)$ ).

$$\Rightarrow \lambda_q(A, B) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f_q'(x)^2} \, dx$$

Nous savons donc que :

$$1 \leq \sqrt{1 + f_q'(x)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$  car  $f_q'(x)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , avec la fonction racine carré étant croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \int_{x_A}^{x_B} 1 \, dx \leq \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f_q'(x)^2} \, dx$$

(D'après le **Théorème 6.1**).

Or  $\exists x_p$  tel que  $f_q(x_p) \neq 0 \Rightarrow f_q'(x_p)^2 > 0$ . Par conséquent, on comprend bien que  $\int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f_q'(x)^2} \, dx$ , étant une somme infinie (la convergence de la somme de Riemann), cette somme doit admettre nécessairement à la valeur  $x_p$ ,  $1 < \sqrt{1 + f_q'(x_p)^2}$ . On en déduit que :

$$\int_{x_A}^{x_B} 1 \, dx < \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f_q'(x)^2} \, dx$$

Soit donc  $\lambda_k(A, B) < \lambda_q(A, B)$ , soit le trajet le plus court pour aller de  $A$  à  $B$  étant une ligne droite.  $\square$