SUITES DE PUISSANCES

VERTUEUX

Résumé. Cet article est une énonciation et démonstration de propriétés sur des suites ayant pour forme $u_{n+1} = u_n^r$ avec $u_0 = k$, $k \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^*$.

Définition 0.1. On appelle une suite de puissance une suite $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \mapsto u(n)$ avec $k \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^*$, ayant pour forme :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^r \\ u_0 = k \end{cases}$$

Définition 0.2. Toute suite u_n étant une suite de puissance, r est appelé raison de la suite.

Théorème 0.3. *Toute suite u_n, une suite de puissance de formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^r$ avec $u_0 = k$ peut s'écrire de la forme $u_n = k^{r^n}$, avec $k \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^*$.*

Démonstration. À l'initialisation de la suite u_n, nous avons $u_0 = k$, et $u_1 = k^r$.

Par récurrence, nous savons que $u_2 = (k^r)^r$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = k^{\prod_{i=1}^{n} r} \iff u_n = k^{r^n}$$

Dans le cas où $r = 0$, on remarque que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 \\ u_0 = k \end{cases}$$

Et d'après la formule précédente, $u_n = k^{0^n} \implies u_0$ est indéfini.

Or, $u_0 = k$, $k \in \mathbb{N}$ d'après la formule de récurrence. Par conséquent, la suite ne peut pas être écrite avec une formule explicite lorsque $r = 0$.

□

Théorème 0.4. *Toute suite u_n, une suite de puissance de formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^r$ avec $u_0 = k$, et un rang u_p, $p \in \mathbb{N}$, peut s'exprimer par : $u_n = u_p^{r^{n-p}}$.*

Démonstration. Considérons trois cas : $p < n$, $p > n$, $p = n$.

Lorsque $p < n$, on remarque qu'afin d'atteindre p, il suffit de multiplier par la raison r selon la distance séparant p et n, soit $n - p$:

$$u_n = u_p^{\prod_{i=1}^{n-p} r} \iff u_n = u_p^{r^{n-p}}$$

Lorsque $p > n \iff n < p$, de manière analogue à $p < n$, on sait que :

$$u_p = u_n^{\prod_{i=1}^{p-n} r} \iff u_p = u_n^{r^{p-n}} \iff u_n = u_p^{r^{n-p}}$$

Lorsque $p = n$, les termes sont de même rang $\implies u_n = u_p$. En considérant le Théorème énoncé aussitôt :

$$u_n = u_p^{r^{n-p}} \iff u_n = up^{r^0} \iff u_n = u_p, \forall r \neq 0$$

Nous retombons bien sur l'égalité avec $u_n = u_p$.

À noter de même que dans le cas où $p = 0$, on a bien : $u_n = u_0^{r^n} = k^{r^n}$.

Connaissant u_p et u_n, on peut donc retrouver la raison r :

$$u_n = u_p^{r^{n-p}} \iff r = \sqrt[n-p]{\frac{\log_{u_p}(u_n)}{\log_{u_p}(u_p)}} \iff r = \sqrt[n-p]{\log_{u_p}(u_n)}$$

Cela fonctionne donc $\forall u_p \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $\forall u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

$\square$