

SUITES DE PUISSANCES

VERTUEUX

RÉSUMÉ. Cet article est une énonciation et démonstration de propriétés sur des suites ayant pour forme $u_{n+1} = u_n^r$ avec $u_0 = k$, $k \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^*$.

Définition 0.1. On appelle une suite de puissances une suite $u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \mapsto u(n)$ avec $k \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^*$, ayant pour forme :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^r \\ u_0 = k \end{cases}$$

Définition 0.2. Toute suite u_n étant une suite de puissances, r est appelé raison de la suite.

Théorème 0.3. Toute suite u_n , une suite de puissances de formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^r$ avec $u_0 = k$ peut s'écrire de la forme $u_n = k^{r^n}$, avec $k \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration. À l'initialisation de la suite u_n , nous avons $u_0 = k$, et $u_1 = k^r$.

Par récurrence, nous savons que $u_2 = (k^r)^r$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = k^{\prod_{i=1}^n r} \iff u_n = k^{r^n}$$

Dans le cas où $r = 0$, on remarque que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 \\ u_0 = k \end{cases}$$

Et d'après la formule précédente, $u_n = k^{0^n} \implies u_0$ est indéfini.

Or, $u_0 = k$, $k \in \mathbb{R}$ d'après la formule de récurrence. Par conséquent, la suite ne peut pas être écrite avec une formule explicite lorsque $r = 0$. □

Théorème 0.4. Toute suite u_n , une suite de puissances de formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^r$ avec $u_0 = k$, et un rang u_p , $p \in \mathbb{N}$, peut s'exprimer par : $u_n = u_p^{r^{n-p}}$.

Démonstration. Considérons trois cas : $p < n$, $p > n$, $p = n$.

Lorsque $p < n$, on remarque qu'afin d'atteindre p , il suffit de multiplier par la raison r selon la distance séparant p et n , soit $n - p$:

$$u_n = u_p^{\prod_{i=1}^{n-p} r} \iff u_n = u_p^{r^{n-p}}$$

Lorsque $p > n \iff n < p$, de manière analogue à $p < n$, on sait que :

$$u_p = u_n^{\prod_{i=1}^{p-n} r} \iff u_p = u_n^{r^{p-n}} \iff u_n = u_p^{r^{n-p}}$$

Lorsque $p = n$, les termes sont de même rang $\implies u_n = u_p$. En considérant le Théorème énoncé aussitôt :

$$u_n = u_p^{r^{n-p}} \iff u_n = up^{r^0} \iff u_n = u_p, \forall r \neq 0$$

Nous retombons bien sur l'égalité avec $u_n = u_p$.

À noter de même que dans le cas où $p = 0$, on a bien : $u_n = u_0^{r^n} = k^{r^n}$.

Connaissant u_p et u_n , on peut donc retrouver la raison r :

$$u_n = u_p^{r^{n-p}} \iff r = \sqrt[n-p]{\frac{\log_{u_p}(u_n)}{\log_{u_p}(u_p)}} \iff r = \sqrt[n-p]{\log_{u_p}(u_n)}$$

Cela fonctionne donc $\forall u_p \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $\forall u_n \in \mathbb{R}_+^*$. \square

LES VARIATIONS DES SUITES DE PUISSANCES

Soit une suite u_n , une suite de puissances de formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^r$ avec $u_0 = k$. En considérant la méthode générale pour étudier les variations de suites, on trouve que :

$$u_{n+1} - u_n \iff k^{r^{n+1}} - k^{r^n} \iff k^{r^n}(k^r - 1)$$

Et l'étude des variations s'en suit. Voici un tableau résumant les variations possibles en fonction de k^{r^n} et $k^{r^n} - 1$.

r	k	Variations de u_n
$r > 1$	$k > 1$	u_n est une suite strictement croissante.
$r > 1$	$k < 0$	u_n est une suite strictement croissante pour k étant pair et strictement décroissante pour k étant impair.
$r > 1$	$k = 0$	u_n est une suite constante ($u_n = 0$).
$r > 1$	$k \in]0, 1[$	u_n est une suite décroissante ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$).
$r > 1$	$k = 1$	u_n est une suite constante ($u_n = 1$).
$r < 0$	$k > 1$	u_n n'est pas une suite monotone.
$r < 0$	$k < 0$	u_n n'est pas une suite monotone ($u_n \in \mathbb{C}$ si $r \in]-1, 0[\implies u_n$ n'est pas continue sur \mathbb{R}).
$r < 0$	$k = 0$	u_n n'est pas une suite monotone ni continue sur \mathbb{R} ($u_n \in \mathbb{C}$, $u_n = 0$ pour n étant pair).
$r < 0$	$k \in]0, 1[$	u_n n'est pas une suite monotone.
$r < 0$	$k = 1$	u_n est une suite constante ($u_n = 1$).
$r \in]0, 1[$	$k > 1$	u_n est une suite décroissante ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$).
$r \in]0, 1[$	$k < 0$	u_n n'est pas une suite monotone ni continue sur \mathbb{R} ($u_n \in \mathbb{C}$).
$r \in]0, 1[$	$k = 0$	u_n est une suite constante ($u_n = 0$).
$r \in]0, 1[$	$k \in]0, 1[$	u_n est une suite croissante ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$).
$r \in]0, 1[$	$k = 1$	u_n est une suite constante ($u_n = 1$).
$r = 1$	$k > 1$	u_n est une suite constante ($u_n = k$).
$r = 1$	$k < 0$	u_n est une suite constante ($u_n = k$).
$r = 1$	$k = 0$	u_n est une suite constante ($u_n = 0$).
$r = 1$	$k \in]0, 1[$	u_n est une suite constante ($u_n = k$).
$r = 1$	$k = 1$	u_n est une suite constante ($u_n = 1$).