TFJM

PHILATÉLIE

LES MATHERNELLES
LYCÉE BELLEVUE, TOULOUSE

Résumé. Cet article présente des propositions de réponses aux questions du problème n°1 du concours TFJM. Les méthodes et théorèmes utilisés afin de démontrer les différents résultats obtenus ont majoritairement été le théorème de Pythagore (notamment pour la question , 1.2, et 1.3), les propriétés de la fonction carré (pour la question 1.1), de polygones convexes (question 2) ainsi que la réutilisation des propriétés démontrées auparavant (pour la question 4.1, 4.3 et 6.1).

Introduction

Nous disposons principalement de quatre types de figures géométriques : un rectangle, un disque, un triangle rectangle isocèle, ainsi qu'un polygone convexe. L'objectif est de déterminer le, ainsi que les plus grands carrés inscrits dans ces derniers, en ayant des côtés parallèles aux axes.

Table des matières

Définitions

Appelons :

T,	triangle rectangle isocèle de côtés égaux de longueur a $\in \mathbb{R}_+^*$.
A_c,	l'aire du plus grand carré inscrit de côté $c \in \mathbb{R}_+^*$
$A_{c'}$,	second carré plus grand inscrit de côté $c' \in \mathbb{R}_+^*$.
A_{dis},	aire maximale possible en plaçant deux carrés disjoints.
A_{lib},	aire maximale issu de l'union de deux carrés.
Équilatéral,	polygone aux côtés de même longueur.
Équiangle,	polygone aux angles internes égaux.

Notations

Notons :

A_x,	l'aire du carré de côté $x \in \mathbb{R}_+^*$.
A_{xy},	rectangle de largeur x et longueur y, avec $(x; y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.
n-gone,	polygone convexe régulier à $n \in \mathbb{N}^*$ côtés et angles.
$\mathbb{R}_+^*$,	ensemble des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$,	ensemble des nombres entiers strictement positifs.

Question 1.1

Théorème 0.1. *Soit $(a;b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, un carré A_c de côtés $c \in \mathbb{R}_+^*$ et un rectangle A_{ab}. Le plus grand carré A_c inscrit dans A_{ab} a pour aire maximale a^2 si $a < b$ et b^2 si $b < a$.*

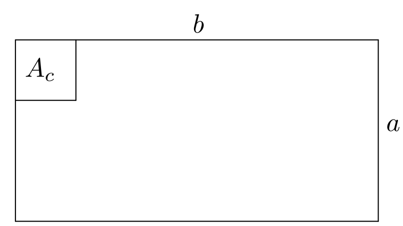
Démonstration. Supposons $a < b$.

Soit un rectangle A_{ab} de longueur et largeur $(b;a) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ et $c \in]0;a]$, afin de ne pas dépasser la largeur a (et donc d'obtenir un carré dépassant A_{ab}), avec $A_c = c^2$.

Étant donné que la fonction carré est une fonction croissante, nous aurons donc $A_c \in]0;a^2]$. Or, nous cherchons le maximum, nous aurons donc $A_c = a^2$.

Donc, le plus grand carré A_c, de côtés $c \in \mathbb{R}_+^*$ inscrit dans un rectangle A_{ab} de longueur et largeur $(b;a) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ a une aire maximale correspondant à a^2.

On peut raisonner de manière analogue si $b < a$. L'aire maximale sera alors b^2. $\square$



Question 1.2

Théorème 0.2. *Soit D un disque de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$. Soit A_c, carré de côté $c \in \mathbb{R}_+^*$. Le plus grand carré A_c inscrit dans D a pour aire $2r^2$.*

Démonstration. Soit D un disque de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ et deux segments AB et CD inscrits dans D, avec $(AB \perp CD) = 2r$, se coupant au centre de D.

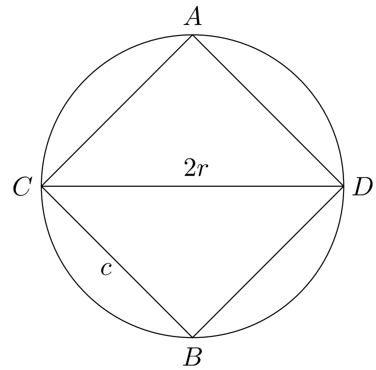
Soit $c = AD \vee AC \vee BD \vee BC \in \mathbb{R}_+^*$ et CAD, triangle rectangle isocèle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$(2r)^2 = 2c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{2}r$$

Soit A_c, carré de côtés c.

$$A_c = c^2 \Leftrightarrow A_c = 2r^2$$

Donc, le plus grand carré A_c de côté c inscrit dans un disque de rayon r correspond à $2r^2$.



∎

QUESTION 1.3

Théorème 0.3. *Soit A_c, carré de côté c et T triangle isocèle rectangle de côté a, le plus grand carré A_c inscrit dans T a une aire de $\frac{a^2}{4}$.*

Démonstration. Soit T, triangle rectangle isocèle de côtés égaux de longueur $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$, la longueur de l'hypoténuse de T. D'après le théorème de Pythagore :

$$h^2 = 2a^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{2}a$$

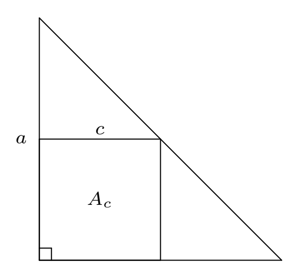
Utilisons la réciproque du théorème de Pythagore afin de former un nouveau triangle rectangle de côté $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $a - c$,avec une longueur d'hypoténuse deux fois plus petite que l'initiale, permettant d'isoler c, côté du carré A_c. Soit :

$$(\frac{\sqrt{2}a}{2})^2 = (a-c)^2 + c^2 \Leftrightarrow c = \frac{a}{2}$$

.

Or, nous cherchons l'aire de A_c, carré de côtés c, donc $A_c = \frac{a^2}{4}$.

Donc, le plus grand carré A_c inscrit dans un triangle rectangle isocèle de côtés a correspond à un carré d'aire $\frac{a^2}{4}$. ∎



Question 2

Réponse 0.4 Dans le cas d'un polygone convexe « classique », le nombre de façons d'inscrire un carré de taille maximale inscrit dans ce dernier dépendra de sa forme et emplacements de ces arêtes. En revanche, nous pouvons remarquer qu'au sein des polygones convexes réguliers, il existe le même nombre de façons d'inscrire un tampon maximal que le nombre de *n-gone*, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$.

Cela se justifie car ces derniers seront équilatéraux et équiangles, le plus grand carré A_c aura le même nombre de possibilités que n.

D'après une propriété des polygones réguliers convexes, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$, il existe un polygone régulier convexe à n côtés. Par conséquent, il existe une infinité de polygones réguliers convexes, nous aurons donc une infinité de façons possibles, tant que $n \geq 3$.

Question 3

Conjecture 0.5 Dans tous les cas où l'on essaye d'obtenir l'aire maximale, nous pouvons remarquer que soit $A_{dis} = A_g$. Dans le cas où ils ne peuvent pas être égaux, nous pouvons remarquer que $A_{dis} \leq A_g$. Nous pouvons donc émettre une conjecture pour les trois cas de figures géométriques présentées stipulant que $A_{dis} = A_g$. De même, $\frac{A_{dis}}{A_g} = 1$.

Question 4.1

Théorème 0.6 *Les plus grands carrés A_{dis} inscrits dans un rectangle A_{ab} de longueur et largeur $(b; a) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ ont pour aire totale maximale $A_{dis} = (b-a)^2 + a^2$ si $b < 2a$ et $A_{dis} = 2a^2$ si $b \geq 2a$.*

Démonstration. Soit un rectangle A_{ab} de longueur et largeur $(b; a) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ et A_c un carré de côté $c \in \mathbb{R}_+^*$. Le plus grand carré A_c inscrit dans A_{ab} a une aire maximale de a^2.

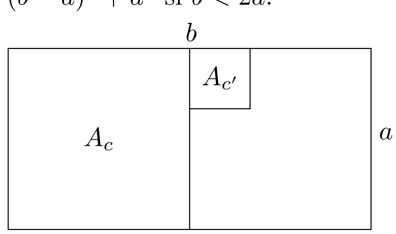
Si $b \geq 2a$, soit alors $A_{a'b'}$, deuxième rectangle de longueur et largeur $(b-a; a)$ inscrit dans A_{ab}. D'après le **Théorème 0.1**, le plus grand carré $A_{c'}$ inscrit dans A_{ab} a pour aire a^2, donc $A_{c'} = a^2$.

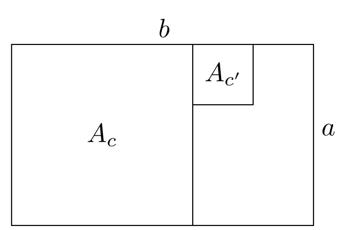
Si l'on additionne les deux carrés, nous aurons donc $A_{dis} = 2a^2$.

Si $b < 2a$, soit alors $A_{a''b''}$, deuxième rectangle de longueur et largeur$(a; b-a)$ inscrit dans A_{ab}. Dans un rectangle A_{cd} de largeur d, le plus grand carré inscrit a une aire de d^2. Donc le plus grand carré $A_{c'}$ inscrit dans $A_{a''b''}$ a une aire égale à $(b-a)^2$.

En additionnant les deux carrés, nous aurons donc $A_{dis} = (b-a)^2 + a^2$.

Soit donc, les deux plus grands carrés A_{dis} inscrit dans dans un rectangle A_{ab} de longueur et largeur $(b; a) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, auront une aire maximale égale à a^2, si $b \geq 2a$, et $(b-a)^2 + a^2$ si $b < 2a$.





$\square$

Question 4.3

Théorème 0.8 *Les deux plus grands carrés A_{dis} inscrits dans un triangle rectangle isocèle de côté de l'angle droit $a \in \mathbb{R}_+^*$ ont une aire maximale $A_{dis} = \frac{5a^2}{16}$.*

Démonstration. Soit T, triangle rectangle isocèle de côtés égaux de longueur $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit A_c, carré de côtés $c \in \mathbb{R}_+^*$. Comme nous l'avons vu précédemment (dans la question 1.3), le plus grand carré A_c inscrit dans T a une aire de $\frac{a^2}{4}$.

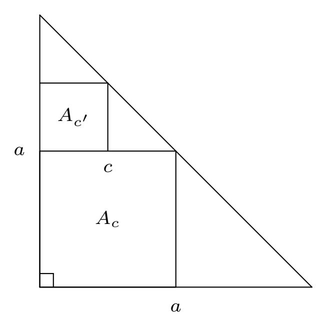
Or, nous savons donc que nous avons formé deux nouveaux triangles isocèles rectangles de côtés égaux $\frac{a}{2}$. En effet, en divisant la longueur de l'hypoténuse par deux, nous donc divisé la longueur de a par deux.

À partir de cette information, nous pouvons utiliser le **Théorème 0.3** afin de calculer $A_{c'}$, soit :

$$A_{c'} = \frac{(\frac{a}{2})^2}{4} \Leftrightarrow A_{c'} = \frac{a^2}{16}$$

En effectuant $A_c + A_{c'}$, nous aurons comme aire maximale $A_{dis} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}$, soit $A_{dis} = \frac{5a^2}{16}$.

Les deux plus grands carrés A_{dis} inscrit dans un triangle rectangle isocèle de côtés égaux de longueur $a \in \mathbb{R}_+^*$ auront donc une aire maximale égale à $\frac{5a^2}{16}$.



□

Question 6.1

Théorème 0.9 *Soit $(a; b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, un carré A_c de côtés $c \in \mathbb{R}_+^*$ et un rectangle A_{ab}. Les deux plus grands carrés superposés A_{lib} ont une aire maximale égale à ab.*

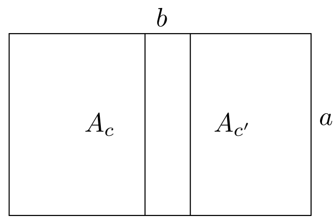
Démonstration. Soit A_{ab}, rectangle de largeur a et longueur b, avec $(b; a) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Nous ne prendrons que les cas où $b < 2a$, dans le cas contraire, il ne serait pas nécessaire de les superposer.

Soit A_c, carré de côté $c \in \mathbb{R}_+^*$ inscrit dans A_{ab}. D'après le **Théorème 0.1**, son aire maximale correspond à a^2. Comme nous avons le droit de superposer les deux carrés, soit $A_{c'}$, deuxième plus grand carré inscrit dans A_{ab}, ayant pour aire maximale a^2.

L'aire totale $A_{dis} = 2a^2$. Dans le cas où l'on ne pourrait pas superposer A_c et $A_{c'}$, comme l'explique le **Théorème 0.6**, alors $b \geq 2a$. Cependant, comme nous le pouvons, nous déduisons que nous pourrons former deux carrés superposés A_{lib}

ayant une aire correspondante à celle de A_{ab}, soit ab.

Les deux plus grands carrés superposés A_{lib} inscrit dans un rectangle de longueur et largeur $(b; a) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ on donc une aire maximale égale à ab.



$\square$