Московский физико-технический институт
Факультет молекулярной и химической физики

Задание по курсу
Вычислительная математика
Гиперболические системы уравнений

Выполнил
студент 3 курса
643 группы ФМХФ
Зарубин Всеволод

13 мая 2019 г.

1 Постановка задачи

Необходимо численно решить систему линейных гиперболических уравнений.

1.1 Параметры задачи

Используются разностные схемы:

1. Схема Куранта-Изаксона-Риса
2. Гибридная схема Федоренко.
   Порядок схемы изменяется от второго в областях гладкости решения, до первого в областях больших градиентов.

Модельное уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, a = const > 0 \tag{1}$$

Сетка:

$$xm = mh, m = 0..M, Mh = 1; t^n = n\tau, n = 0..N, N\tau = 1$$

1.2 Рассматривается следующая система линейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{b}(x), 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \mathbf{u}(x,0) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 1 - x^2 \\ x^2 + 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{3}{5} & \frac{128}{5} \\ -1 & \frac{-36}{5} & \frac{-16}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{-19}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1.3 Конкретизация задачи

- Привести систему к характеристическому виду,
  предложить корректную постановку граничных условий.
- Решить численно систему уравнений с использованием указанных разностных схем.
- Определить характер преобладающей ошибки.
- Определить, монотонна ли схема.
- Оценить апосториорно порядок сходимости схем.

2 Решение задачи

2.1 Приведение системы к характеристическому виду

Выполним спектральное разложение матрицы A системы:

$$A = PDP^{-1} \tag{4}$$

2.1.1 Справка

Спектральное разложение матрицы — это представление квадратной матрицы A в виде произведения трёх матриц,

$$A = V \times \Lambda \times V^{-1}, \;\; A = V \times \Lambda \times V^{-1},$$

где V — матрица, столбцы которой являются
собственными векторами матрицы A,
Λ — диагональная матрица с соответствующими собственными
значениями на главной диагонали,
V^{-1} — матрица, обратная матрице V.

С учётом разложения система принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{PDP}^{-1}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

Домножая слева на P^{-1}, получим систему в характеристическом виде:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{P^{-1}u}$

2.1.2 Элементы разложения

$$\lambda_1 = -9, \lambda_2 = -7, \lambda_3 = 1 \tag{7}$$

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} -5 & \frac{-1}{5} & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \mathbf{u}(x,0) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 1 - x^2 \\ x^2 + 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Спектральное разложение:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & \frac{3}{5} & \frac{128}{5} \\ -1 & \frac{-36}{5} & \frac{-16}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{-19}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & \frac{-1}{5} & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{-1}{50} & \frac{12}{25} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{50} & \frac{13}{25} \end{pmatrix} \tag{9}$$

В итоге получаем следующую систему уравнений:

$$\mathbf{u} = \mathbf{PR} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial t} - 9\frac{\partial R_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} - 7\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial R_3}{\partial t} + 1\frac{\partial R_3}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Начальные условия для инвариантов Римана:

$$\mathbf{R}(x,0) = \begin{pmatrix} \frac{-5x^3+25x^2+23}{50} \\ 2 \\ \frac{5x^3+25x^2+27}{50} \end{pmatrix} \tag{12}$$

2.2 Схема КИР

Для третьего уравнения системы применима схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0 \tag{13}$$

Для первого и второго уравнения установим $a < 0$:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0 \tag{14}$$

Согласно определению Фридрихса, данные схемы не являются монотонными. Первое дифференциальное приближение запишется следующим образом:

$$r_{\tau h} = Lu - \frac{ch}{2}\left(1 - \frac{c\tau}{h}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O\left(\tau^2 + h^2\right) \tag{15}$$

Можно видеть, что преобладает диссипативная ошибка.

2.2.1 К определению Фридрихса

Выяснить, является ли явная четырехточечная схема $\dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a\boldsymbol{\Lambda}_{xx}u^n$ *монотонной*. Монотонные разностные схемы (по Фридрихсу) — это схемы, которые при записи в виде, разрешенном относительно u_m^{n+1} при значениях сеточной функции во всех остальных точках шаблона, имеют неотрицательные коэффициенты. Монотонные разностные схемы не дают паразитные осцилляции в решении.

2.2.2 К терминам диссипативная и дисперсионная ошибка

Главный член в выражении для погрешности аппроксимации в рассматриваемом случае пропорционален производной u_{xx}, т. е. он аналогичен диссипативному вязкому члену в одномерном уравнении движения жидкости. Например, если коэффициент вязкости μ постоянен, то градиент вязкого трения в одномерном уравнении Навье — Стокса можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) = \frac{4}{3}\mu \cdot u_{xx}$$

Следовательно, при $r \neq 1$ схема с разностями против потока неявно вводит в уравнение *искусственную вязкость*, которую часто называют *неявной* (*схемной*) искусственной вязкостью в отличие от *явной* искусственной вязкости, которая преднамеренно вводится в разностное уравнение. Искусственная вязкость сглаживает решение уравнения, уменьшая градиенты всех параметров независимо от причины возникновения этих градиентов, физической или вычислительной. Такое свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности аппроксимации производных четного порядка, называют *диссипацией* на разностной сетке.

Другое близкое к физическому свойство разностных схем называют *дисперсией*. Оно непосредственно связано с производными нечетного порядка в выражении для погрешности аппроксимации. Дисперсия приводит к искажению соотношения фаз различных волн. Совместное воздействие диссипации и дисперсии на решение иногда называют *диффузией*. Диффузия приводит к растяжению крутых линий раздела, которые могут появляться в расчетной области. На рис. 5 показаны эффекты диссипации и дисперсии на расчет разрыва. Обычно если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производную четного порядка, то схема обладает в основном диссипативными свойствами, а если производную нечетного порядка— то дисперсионными.

а *б* *в*

Рис. 5. Влияние диссипации и дисперсии:
а — точное решение; *б* — численное решение, полученное в том случае, когда ошибка является в основном диссипативной (такое решение типично для схем первого порядка точности); *в* — численное решение, полученное в случае, когда ошибка является в основном дисперсионной (такое решение типично для схем второго порядка точности) .

2.3 Реализация схемы КИР

Какой то неприятный косяк с размером изображений/
Поэтому реализация второй схемы не будет здесь приводится.
Порядок аппроксимации оценен как второй.

```
In [310]: import abc
          import numpy as np

          class TwoLayerDifferenceScheme(object):
              def __init__(self, t0, te, x0, xe, xsteps, tsteps, init: callable):
                  self.t = t0
                  self.te = te
                  self.xgrid = np.linspace(x0, xe, xsteps + 1)
                  self.h = self.xgrid[1] - self.xgrid[0]
                  self.tgrid = np.linspace(t0, te, tsteps + 1)
                  self.tau = self.tgrid[1] - self.tgrid[0]
                  self.u_current = init(self.t, self.xgrid)

              @abc.abstractmethod
              def step(self):
                  raise NotImplementedError

              def solve(self):
                  yield self.u_current
                  while self.t < self.te:
                      self.step()
                      yield self.u_current
```

Рис. 1: Модель разностной схемы

```
In [311]: class KIRLeft(TwoLayerDifferenceScheme):
              def __init__(self, t0, te, x0, xe, xsteps, tsteps, init: callable, a):
                  super(KIRLeft, self).__init__(t0, te, x0, xe, xsteps, tsteps, init)
                  assert a > 0
                  self.a = a
              def step(self):
                  u = np.zeros_like(self.u_current)
                  u[0] = self.u_current[0]
                  for i in range(1, len(u)):
                      u[i] = self.u_current[i]-(self.tau*self.a/self.h)*(self.u_current[i]-self.u_current[i-1])
                  self.u_current = u
                  self.t += self.tau

          class KIRRight(TwoLayerDifferenceScheme):
              def __init__(self, t0, te, x0, xe, xsteps, tsteps, init: callable, a):
                  super(KIRRight, self).__init__(t0, te, x0, xe, xsteps, tsteps, init)
                  assert a < 0
                  self.a = a
              def step(self):
                  u = np.zeros_like(self.u_current)
                  u[-1] = self.u_current[-1]
                  for i in range(0, len(u)-1):
                      u[i] = self.u_current[i]-(self.tau*self.a/self.h)*(self.u_current[i+1]-self.u_current[i])
                  self.u_current = u
                  self.t += self.tau
```

Рис. 2: Реализация реккурентного задания u_n

2.4 Графики решения

2.5 Схема Федоренко

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h}+\frac{\gamma}{2\tau}\left(\frac{a\tau}{h}-\frac{a^2\tau^2}{h^2}\right)\left(u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n\right)=0 \tag{16}$$

$$\gamma=\left\{\begin{array}{ll} 1, & \left|y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n\right|<\xi\left|y_m^n-y_{m-1}^n\right| \\ 0, & \left|y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n\right|>\xi\left|y_m^n-y_{m-1}^n\right| \end{array}\right. \tag{17}$$

Данная схема при обращении анализатора гладкости решения в ноль переходит в схему Куранта-Изаксона-Риса. Всё, что сказано о ней в предыдущей части остаётся справедливым. В случае $\gamma = 1$ получаем схему второго порядка аппроксимации. В первом дифференциальном приближении (в данном отчёте не приводится ввиду громоздкости выкладок) находятся члены с третьей производной, что говорит о преобладании дисперсионной ошибки. Согласно определению Фридрихса, схема не является монотонной.

В отличие от предыдущего случая, для использования данного метода придётся задать граничные условия для обоих концов рассчётного отрезка. Поэтому решения, полученные при помощи предыдущих схем и схемы Федоренко, будут качественно отличаться друг от друга.

В рассматриваемом примере при изменении параметра ξ не происходит существенных изменений внешнего вида решений.
Далее приводятся графики построенных решений.

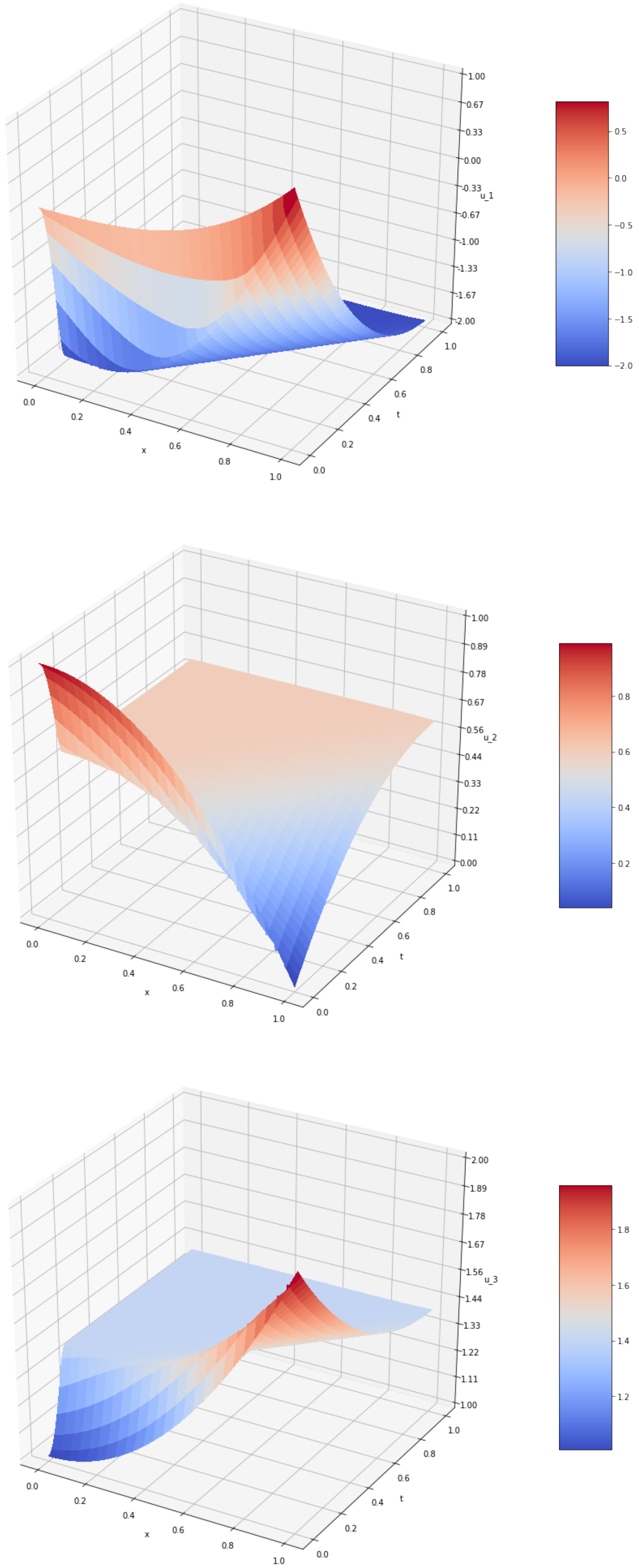

Рис. 3: Схема КИР

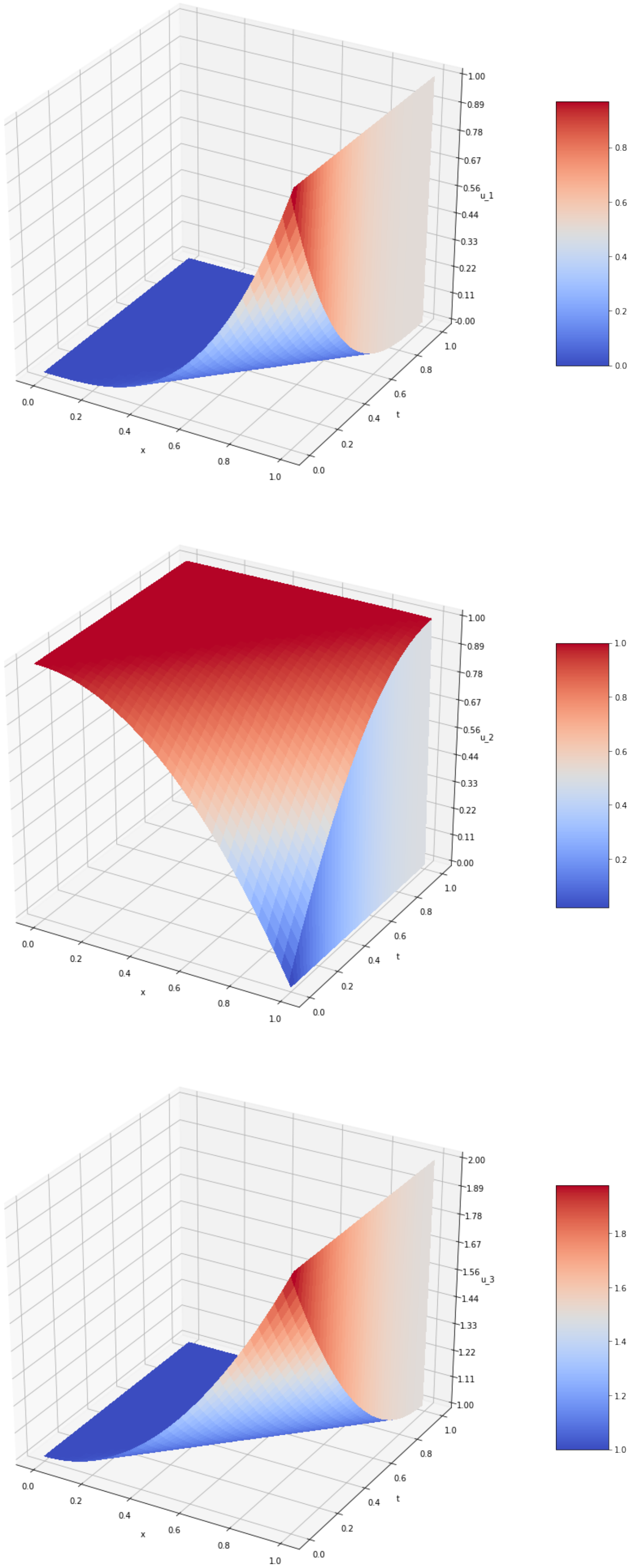

Рис. 4: Гибридная схема Федоренко