Московский физико-технический институт
Факультет молекулярной и химической физики

Задание по курсу
Вычислительная математика
Гиперболические системы уравнений

Выполнил
студент 3 курса
643 группы ФМХФ
Зарубин Всеволод

13 мая 2019 г.

1 Постановка задачи

Необходимо численно решить систему линейных гиперболических уравнений.

1.1 Параметры задачи

Используются разностные схемы:

1. Схема Куранта-Изаксона-Риса
2. Гибридная схема Федоренко.
   Порядок схемы изменяется от второго в областях
   гладкости решения, до первого в областях больших градиентов.

Модельное уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, a = const > 0 \tag{1}$$

Сетка:

$$xm = mh, m = 0..M, Mh = 1; t^n = n\tau, n = 0..N, N\tau = 1$$

1.2 Рассматривается следующая система линейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{b}(x), 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \mathbf{u}(x,0) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 1 - x^2 \\ x^2 + 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{3}{5} & \frac{128}{5} \\ -1 & \frac{-36}{5} & \frac{-16}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{-19}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1.3 Конкретизация задачи

- Привести систему к характеристическому виду,
  предложить корректную постановку граничных условий.
- Решить численно систему уравнений с использованием указанных разностных схем.
- Определить характер преобладающей ошибки.
- Определить, монотонна ли схема.
- Оценить апосториорно порядок сходимости схем.

2 Решение задачи

2.1 Приведение системы к характеристическому виду

Выполним спектральное разложение матрицы A системы:

$$A = PDP^{-1} \tag{4}$$

Справка:

Спектральное разложение матрицы — это представление квадратной матрицы A в виде произведения трёх матриц, $A = V\Lambda V^{-1} A = V\Lambda V^{-1}, VV^{-}, A, \Lambda\Lambda^{-},$

$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{PDP^{-1}}\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0(5)$ Домножая слева на P^{-1}, получим систему в характеристическом виде:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{P^{-1}u}$ В итоге получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial t} - 9\frac{\partial R_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} - 7\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial R_3}{\partial t} + 1\frac{\partial R_3}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Начальные условия для инвариантов Римана:

$$\mathbf{R}(x,0) = \begin{pmatrix} \frac{-5x^3+25x^2+23}{50} \\ 2 \\ \frac{5x^3+25x^2+27}{50} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Восстановление естественных переменных возможно по формуле:

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{R} \tag{9}$$