

Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

Dr.-Ing. Miriam Hommel

Aktueller Stand und Wiederholung



Quiz-Name:

DMLA_SoSe24_03_Teilbarkeit2

https://arsnova.click/quiz/dmla_sose24_03_teilbarkeit2

Wiederholung: Erweiterter euklidischer Algorithmus

Sie haben den erweiterten euklidischen Algorithmus implementiert und erhalten beim Aufruf mit den Werten $m = 105$ und $n = 30$ die folgenden Rückgabewerte:

$$d = 5, \quad x = 1, \quad y = -3$$

- Wie können Sie mit nur einem Rechenschritt eine erste Überprüfung vornehmen, ob ihre Implementierung richtig sein kann?

Nach Theorem 2 muss gelten: $x \cdot m + y \cdot n = \text{ggT}(m, n) = d$

Einsetzen: $1 \cdot 105 + (-3) \cdot 30 = 105 - 90 = 15 \neq 5$

- Zu welchem Ergebnis kommen Sie? Die Implementierung kann nicht stimmen.

Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Wiederholung Prüfstoffen

Dr.-Ing. Miriam Hommel

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

- EAN (Europäische Artikelnummer/ European Article Number):
 - Strichcode bzw. 13-stellige Ziffernfolge auf vielen Artikeln
 - Berechnung der Prüfziffer
 - Berechne gewichtete Quersumme der ersten 12 Ziffern
 - Gewichte: abwechselnd 1 und 3 beginnend mit der 1
 - Prüfziffer = kleinste Zahl, die man zur Quersumme addieren muss, damit die Summe durch 10 teilbar ist
 - Hier: $(1 \cdot 5 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + p) \bmod 10 = 0$

$$(83 + p) \bmod 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 7$$



Quelle:; Von VaGla - own work created in Inkscape based on the graphics by Grzeks, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1642759>

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

- ISBN-10 (Internationale Standardbuchnummer / International Standard Book Number):
 - 10-stellige Nummer zur eindeutigen Identifizierung von Büchern
 - Berechnung der Prüfziffer
 - Berechne gewichtete Quersumme der ersten 9 Ziffern
 - Gewichte: 1. Ziffer: 1; 2. Ziffer: 2; 3. Ziffer: 3; ...
 - Prüfziffer = gewichtete Quersumme modulo 11
 - Wenn Prüfziffer gleich 10, notiere X.
 - Hier: $p = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 0) \bmod 11 = 171 \bmod 11 = 6$

Beispiel:

„Diskrete Strukturen 1“
von Angelika Steger

3 – 540 – 46660 – 6

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

- Neue ISBN-13 (seit 2007):
 - Überführung der ISBN-10 in die zum Buch gehörende 13-stellige EAN durch Voranstellen der Ziffernfolge 978 (bzw. 979) und Neuberechnung der Prüfziffer
 - Beispiel:

$$3 - 540 - 46660 - 6 \quad \Rightarrow \quad 978 - 3 - 540 - 46660 - 4$$

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

Aufgabe:

- a) Berechnen Sie die Prüfziffer des folgenden EAN-Codes: 83 40394 61730 ?
- b) Überprüfen Sie, ob der folgende EAN-Code korrekt ist: 39 27738 20002 3
- c) Bestimmen Sie die fehlende Ziffer des folgenden EAN-Codes: 40 45?12 00704 3
- d) Berechnen Sie die Prüfziffer der folgenden ISBN-10: 3 – 642 – 37971 – ?
- e) Überprüfen Sie, ob die folgende ISBN-10 korrekt ist: 3 – 728 – 83923 – X
- f) Bestimmen Sie die fehlende Ziffer in der folgenden ISBN-10: 3 – 540 – 5?101 – X

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

Aufgabe – Lösung:

- a) Berechnen Sie die Prüfziffer des folgenden EAN-Codes: 83 40394 61730 **2**
- b) Überprüfen Sie, ob der folgende EAN-Code korrekt ist: 39 27738 20002 3 **nicht korrekt**
- c) Bestimmen Sie die fehlende Ziffer des folgenden EAN-Codes: 40 45**6**12 00704 3
- d) Berechnen Sie die Prüfziffer der folgenden ISBN-10: 3 – 642 – 37971 – **0**
- e) Überprüfen Sie, ob die folgende ISBN-10 korrekt ist: 3 – 728 – 83923 – X **korrekt**
- f) Bestimmen Sie die fehlende Ziffer in der folgenden ISBN-10: 3 – 540 – 5**9**101 – X

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

Aufgabe:

a) Berechnen Sie die Prüfziffer des folgenden EAN-Codes: 83 40394 61730 ?

$$(1 \cdot 8 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + p) \bmod 10 = 0$$

$$(8 + 9 + 4 + 0 + 3 + 27 + 4 + 18 + 1 + 21 + 3 + 0 + p) \bmod 10 = 0$$

$$(98 + p) \bmod 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 2$$

\Rightarrow Die Prüfziffer lautet: 2

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

Aufgabe:

b) Überprüfen Sie, ob der folgende EAN-Code korrekt ist: 39 27738 20002 3

$$(1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 3) \bmod 10$$

$$= (3 + 27 + 2 + 21 + 7 + 9 + 8 + 6 + 0 + 0 + 0 + 6 + 3) \bmod 10$$

$$= 92 \bmod 10 = \underbrace{2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Der EAN-Code ist nicht korrekt.}$$

Achtung: Die gewichtete Summe modulo 10 muss 0 ergeben, wenn der EAN-Code korrekt ist, da die Prüfziffer die kleinste Zahl ist, die man zur gewichteten Quersumme addieren muss, damit die Summe durch 10 teilbar ist.

Daher wird das Ergebnis hier mit der 0 verglichen. Es darf nicht mit der Prüfziffer (hier: 3) verglichen werden. Diese steckt bei der EAN in der Berechnung der gewichteten Summe.

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

Aufgabe:

c) Bestimmen Sie die fehlende Ziffer des folgenden EAN-Codes: 40 45?12 00704 3

$$(1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot x + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 3) \bmod 10 = 0$$

$$(4 + 0 + 4 + 15 + x + 3 + 2 + 0 + 0 + 21 + 0 + 12 + 3) \bmod 10 = 0$$

$$(64 + x) \bmod 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

\Rightarrow Die fehlende Ziffer lautet: 6

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

Aufgabe:

d) Berechnen Sie die Prüfziffer der folgenden ISBN-10:

3 – 642 – 37971 – ?

$$p = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 1) \bmod 11$$

$$= (3 + 12 + 12 + 8 + 15 + 42 + 63 + 56 + 9) \bmod 11$$

$$= 220 \bmod 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0$$

\Rightarrow Die Prüfziffer lautet: 0

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfwziffern

Aufgabe:

e) Überprüfen Sie, ob die folgende ISBN-10 korrekt ist:

3 – 728 – 83923 – X

$$p = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3) \bmod 11$$

$$= (3 + 14 + 6 + 32 + 40 + 18 + 63 + 16 + 27) \bmod 11$$

$$= 219 \bmod 11 = 10 \quad \Rightarrow \quad p = X \checkmark$$

\Rightarrow Die ISBN-10 ist korrekt.

1. Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

Aufgabe:

f) Bestimmen Sie die fehlende Ziffer in der folgenden ISBN-10: 3 – 540 – 5?101 – X

$$p = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot x + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 1) \bmod 11$$

$$= (3 + 10 + 12 + 0 + 25 + 6x + 7 + 0 + 9) \bmod 11 = (66 + 6x) \bmod 11 = 10$$

=> Alle in Frage kommenden Ziffern (0; 1; ...; 9) ausprobieren:

x	$66 + 6x$	$(66 + 6x) \bmod 11$	x	$66 + 6x$	$(66 + 6x) \bmod 11$
0	66	0	5	96	8
1	72	6	6	102	3
2	78	1	7	108	9
3	84	7	8	114	4
4	90	2	9	120	10

10 ✓ => Die fehlende Ziffer lautet: 9

Wiederholung

Aufgabe 1:

- Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 6141 und 3243.

$\text{ggT}(6141; 3243) = 69$ (Bestimmung mit erweitertem Euklidischen Algorithmus)

- Ist die Gleichung $6141x + 3243y = 207$ für $x, y \in \mathbb{Z}$ lösbar? \Rightarrow ja, da $207 = 3 \cdot 69$

Falls ja, geben Sie die Lösung an.

Der erweiterte Euklidische Algorithmus liefert oben: $-19 \cdot 6141 + 36 \cdot 3243 = 69$

$$207 = 3 \cdot 69 = 3 \cdot (-19 \cdot 6141 + 36 \cdot 3243) = -57 \cdot 6141 + 108 \cdot 3243$$

$$\Rightarrow x = -57, \quad y = 108$$