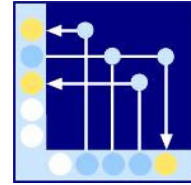




Hochschule Aalen

*Fakultät Elektronik und Informatik
Studienbereich Informatik*



Algorithmen und Datenstrukturen 2

Vorlesung im Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

2. Übungsblatt (14. November 2024)

Aufgabe 5: Vorrangwarteschlangen

Führen Sie auf einer anfangs leeren Vorrangwarteschlange nacheinander die unten genannten Operationen aus und stellen Sie die interne Struktur der Warteschlange nach jeder Operation dar!

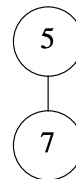
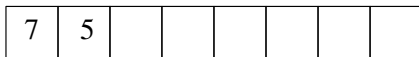
Die Warteschlange soll

- a) eine Maximum-Vorrangwarteschlange sein, die durch eine binäre Halde der Größe 8 implementiert ist.
- b) eine Minimum-Vorrangwarteschlange sein, die durch eine Binomial-Halde implementiert ist.

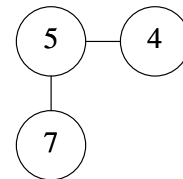
1. Einfügen eines Objekts mit Priorität 5



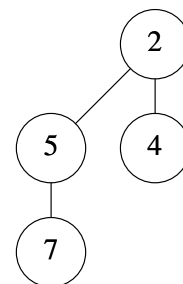
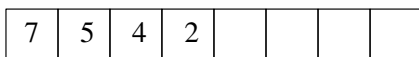
2. Einfügen eines Objekts mit Priorität 7



3. Einfügen eines Objekts mit Priorität 4



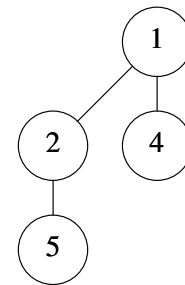
4. Einfügen eines Objekts mit Priorität 2



5. Ändern der Priorität 7 auf 1



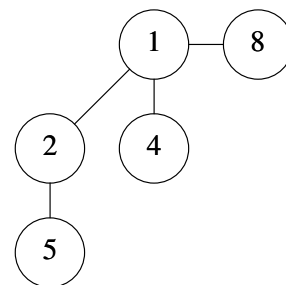
5	2	4	1				
---	---	---	---	--	--	--	--



6. Einfügen eines Objekts mit Priorität 8



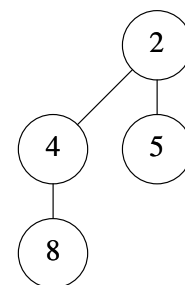
8	5	4	1	2			
---	---	---	---	---	--	--	--



7. Entnehmen eines Objekts mit maximaler bzw. minimaler Priorität (je nach Art der Warteschlange)



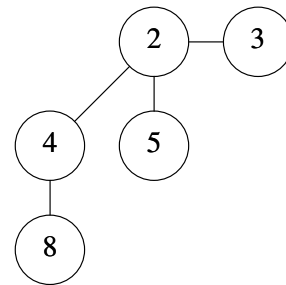
5	2	4	1				
---	---	---	---	--	--	--	--



8. Einfügen eines Objekts mit Priorität 3



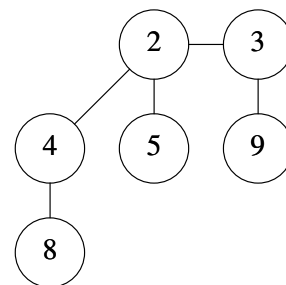
5	3	4	1	2			
---	---	---	---	---	--	--	--



9. Einfügen eines Objekts mit Priorität 9



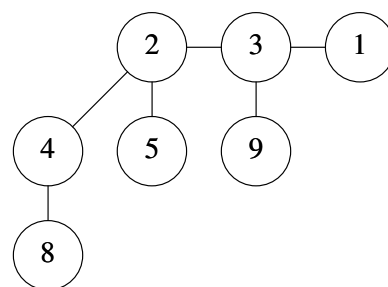
9	3	5	1	2	4		
---	---	---	---	---	---	--	--



10. Einfügen eines Objekts mit Priorität 1



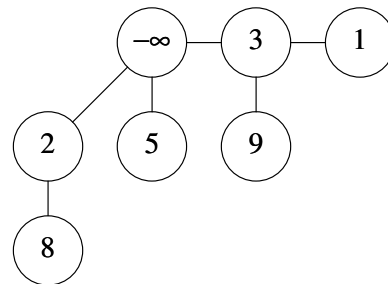
9	3	5	1	2	4	1	
---	---	---	---	---	---	---	--



11. Ändern der Priorität 4 auf 6

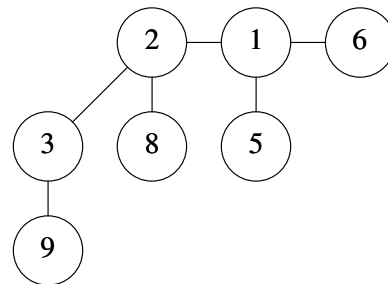


Zwischenschritt:

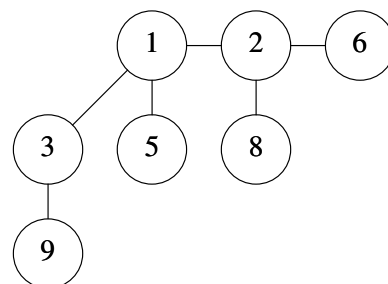


Endergebnis entweder:

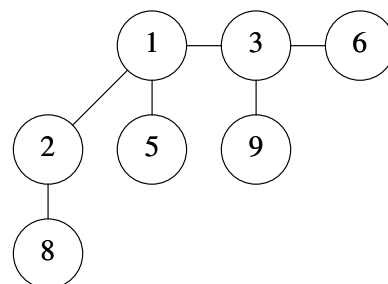
9	3	6	1	2	5	1	
---	---	---	---	---	---	---	--



Oder:



Oder:



Aufgabe 6: Binomialbäume

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

Für jeden Binomial-Baum mit Grad $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1. Die Tiefe des Baums ist k .
2. Der Grad seines Wurzelknotens ist k .
3. Der Grad aller anderen Knoten ist kleiner als k .
4. Die Nachfolger des Wurzelknotens sind Binomial-Bäume mit Grad $k - 1, \dots, 0$.
5. Der Baum besitzt 2^k Knoten.
6. Auf Ebene l ($l = 0, \dots, k$) gibt es genau $\binom{k}{l}$ Knoten.

Betrachten Sie für den Induktionsschritt $k - 1 \rightarrow k$ einen Binomialbaum mit Grad k , der aus zwei Binomialbäumen mit Grad $k - 1$ entstanden ist, die die o. g. Eigenschaften (für $k - 1$ statt k) aufgrund der Induktionsvoraussetzung bereits erfüllen. Verwenden Sie an geeigneter Stelle die bekannte Formel $\binom{k}{l} = \binom{k-1}{l-1} + \binom{k-1}{l}$ für $k = 1, 2, \dots$ und $l = 1, \dots, k - 1$.



- Induktionsanfang $k = 0$:
Für einen Binomial-Baum mit Grad 0 sind die Aussagen offenbar korrekt.
(Beachte: $\binom{0}{0} = 1$.)
- Induktionsschritt $k - 1 \rightarrow k$:
Betrachte einen Binomial-Baum B mit Grad k , der aus zwei Bäumen B_1 und B_2 mit Grad $k - 1$ entstanden ist, indem B_1 zu einem Nachfolger von B_2 gemacht wurde.
 1. Da B_1 und B_2 gemäß Induktionsvoraussetzung beide Tiefe $k - 1$ besitzen und B_1 als Nachfolger in B_2 eingesetzt wird, besitzt der resultierende Baum B offenbar Tiefe k .
 2. Da der Wurzelknoten von B_2 gemäß Induktionsvoraussetzung Grad $k - 1$ besitzt und B_1 als weiterer Nachfolger hinzukommt, besitzt der Wurzelknoten des resultierenden Baums B offenbar Grad k .
 3. Alle anderen Knoten von B entsprechen Knoten von B_1 oder B_2 und besitzen deshalb gemäß Induktionsvoraussetzung jeweils höchstens Grad $k - 1$.
 4. Ein Nachfolger von B ist gemäß Konstruktion der Baum B_1 mit Grad $k - 1$.
Die übrigen Nachfolger von B sind gemäß Konstruktion die Nachfolger von B_2 , die gemäß Induktionsvoraussetzung Binomial-Bäume mit Grad $k - 2, \dots, 0$ sind.
 5. Da B_1 und B_2 gemäß Induktionsvoraussetzung jeweils 2^{k-1} Knoten besitzen, besitzt der resultierende Baum B gemäß Konstruktion $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ Knoten.
 6. Jeder Baum besitzt auf Ebene $l = 0$ genau $1 = \binom{k}{0} = \binom{k}{l}$ Knoten.

Auf Ebene $l = 1, \dots, k - 1$ besitzt der Baum B gemäß Konstruktion und Induktionsvoraussetzung die $\binom{k-1}{l-1}$ Knoten der Ebene $l - 1$ von B_1 sowie die $\binom{k-1}{l}$ Knoten der Ebene l von B_2 , d. h. insgesamt $\binom{k-1}{l-1} + \binom{k-1}{l} = \binom{k}{l}$ Knoten.

Auf Ebene $l = k$ besitzt der Baum B gemäß Konstruktion und Induktionsvoraussetzung den $\binom{k-1}{l-1} = 1 = \binom{k}{l}$ Knoten von B_1 .

