Name	Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Hochschule Aalen **Fakultät für Elektronik und Informatik**

Studiengänge: DS, IN-AI, IN-MI, IN-SE, IN-ITS

Vorlesung: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

Dr.-Ing. Miriam Hommel 07. Februar 2023

Prüfung Wintersemester 2022/23

Wichtige Hinweise:

- Bearbeitungszeit: **90 min**
- Erlaubte Hilfsmittel: **ein eigenhändig geschriebenes DIN-A4-Blatt** (2 Seiten)
- Tragen Sie oben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihren **Studiengang** ein.
- Schreiben Sie **nicht** in **roter Farbe** oder mit **Bleistift**.
- Bei Berechnungen muss der **Lösungsweg ausführlich und nachvollziehbar** dokumentiert sein. Die Angabe des Ergebnisses allein ist nicht ausreichend.
- **Vereinfachen** Sie alle Ergebnisse soweit wie möglich.
- Lassen Sie den **Prüfungsbogen** bitte unbedingt **zusammengeheftet**. Alle Aufgabenblätter sind am Ende abzugeben.
- **Schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter** (ggf. auch auf die Rückseite der entsprechenden Aufgabe). Sollte der vorgesehene Platz nicht reichen, können Sie zusätzliche Blätter abgeben. Schreiben Sie in diesem Fall **auf alle zusätzlichen Blätter** Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der zugehörigen Aufgabe**. **Vermerken** Sie außerdem **bei der Aufgabe**, dass ein Teil der Lösung auf einem extra Blatt steht.
- Die Klausur besteht aus insgesamt 13 Seiten mit 14 Aufgaben. **Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Blätter erhalten haben und ob diese gut lesbar sind.**
- Bei jedem Täuschungsversuch wird die Prüfungsleistung mit „nicht ausreichend“ (5,0) bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Summe
max.	4	2,5	5	5	6,5	12,5	5	4,5	9	8	4,5	6	11,5	6	90
Punkte															

Aufgabe 1 (1 + 1,5 + 1,5 = 4 Punkte):

Mit welchen mathematischen Symbolen werden die folgenden Mengen beschrieben?

Geben Sie außerdem die Elemente der Mengen in mathematischer Schreibweise an.

a) Menge der möglichen Reste, die sich bei ganzzahliger Division durch 4 ergeben

b) Menge der gemeinsamen Teiler von 9 und -15

c) Äquivalenzklasse von $2 \text{ modulo } 7$

a) $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ 0.5 0.5

b) $T_{9;-15} = \{1;\ 3\}$ 0.5 1.0 $\quad T_9 = \{1; 3; 9\}$, $T_{-15} = \{1; 3; 5; 15\}$

c) $[2]_{\equiv 7} = \{7 \cdot t + 2 \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 0.5 1.0

Aufgabe 2 (1 + 1,5 = 2,5 Punkte):

Berechnen Sie (geben Sie mindestens einen Zwischenschritt an):

a) $-17 \bmod 7$

b) $(16n + 28) \bmod (4n + 6) \qquad$ mit $\qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

a) $-17 \bmod 7 = -17 - \lfloor \frac{-17}{7} \rfloor \cdot 7 = -17 - (-3) \cdot 7 = -17 + 21 = \underline{\underline{4}}$ 0.5 0.5

$= (-3 \cdot 7 + 4) \bmod 7 = 4$

b) $(16n + 28) \bmod (4n+6) = 16n + 28 - \lfloor \frac{16n+28}{4n+6} \rfloor \cdot (4n+6)$ 0.5

$= 16n + 28 - \lfloor \frac{16n + 24 + 4}{4n+6} \rfloor \cdot (4n+6)$

A: $(4(4n+6)+4) \bmod (4n+6)$ 1.0 $= \underline{\underline{4}}$ 0.5

$= 16n + 28 - \underbrace{\lfloor \frac{4(4n+6)+4}{4n+6} \rfloor}_{= \lfloor 4 + \underbrace{\frac{4}{4n+6}}_{<1} \rfloor} (4n+6)$

$= 16n + 28 - 4(4n+6) = 16n + 28 - 16n - 24$ 0.5

$= \underline{\underline{4}}$ 0.5

Aufgabe 3 (2 + 3 = 5 Punkte):

Wenden Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus auf folgende Zahlenpaare an:

a) $(27, 243)$

b) $(4^m, 4^n)$ für $0 \leq m < n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

a)

i	m_i	n_i	$\lfloor \frac{n_i}{m_i} \rfloor$	d	$x_i = y_{i-1} - \lfloor \frac{n_i}{m_i} \rfloor \cdot x_i$	$y_i = x_{i-1}$
0	27	243	9		1	0
1	0	27		27	0	1

2.0
0.5 Abzug pro Fehler

b)

i	m_i	n_i	$\lfloor \frac{n_i}{m_i} \rfloor$	d	x_i	y_i
0	4^m	4^n	4^{n-m} 1.0		1	0
1	0	4^m		4^m	0	1
	0.5	0.5				1.0

Aufgabe 4 (5 Punkte): Prüfziffern

Überführen Sie die folgende ISBN-10 in die zum Buch gehörende neue ISBN-13 (13-stellige EAN (Europäische Artikelnummer)) durch Voranstellen der Ziffernfolge 978 und Neuberechnung der Prüfziffer:

$$3 - 540 - 24999 - 0$$

ISBN 13: 978 3 540 24999 p (p = Prüfziffer)
0.5

Berechne Prüfziffer p:

$$(1\cdot 9 + 3\cdot 7 + 1\cdot 8 + 3\cdot 3 + 1\cdot 5 + 3\cdot 4 + 1\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot \overset{4}{\cancel{8}} + 3\cdot 9 + 1\cdot 9 + 3\cdot 9 + p) \bmod 10 \overset{!}{=} 0$$
1.0

$$(9 + 21 + 8 + 9 + 5 + 12 + 6 + 4 + 27 + 9 + 27 + p) \bmod 10 \overset{!}{=} 0$$
1.0

$$(30 + 20 + 10 + \underbrace{14 + 36}_{50} + \overset{137}{27} + p) \bmod 10 \overset{!}{=} 0$$

$$(\overset{27}{27} + p) \bmod 10 = 0$$ 1.0

$$\Rightarrow p = 3$$ 1.0

ISBN 13: 978 3 540 24999 3 0.5

Aufgabe 5 (1 + 5,5 = 6,5 Punkte):

a) Wann besitzt die Gleichung $cx \equiv d \pmod{e}$ eine eindeutig Lösung x mit $x \in \mathbb{Z}_e$?

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $26x - 17 \equiv 8 \pmod{7}$ in $\mathbb{Z}$.

a) Wenn $c \perp e$ ($ggT(c;e)=1$) und somit das Inverse existiert. 1.0

b) $26x - 17 \equiv 8 \pmod{7}$

$26x \equiv 25 \pmod{7}$ 0.5

$5x \equiv 4 \pmod{7}$ 1.0

Berechnung des Inversen zu 5 modulo 7 (existiert, da $5 \perp 7$)

m	n	$\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$	x	y
5	7	1	$1-(-2)=3$	-2
2	5	2	-2	1
1	2	2	1	0
0	1		0	1

1.0

m	n	$\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$	x	y
7	26	3	$-2-9=-11$	3
5	7	1	$1+2=3$	-2
2	5	2	-2	1
1	2	2	1	0
0	1		0	1

1.0

Probe: $3 \cdot 5 + (-2) \cdot 7 = 15 - 14 = 1$ ✓

Probe: $-11 \cdot 7 + 3 \cdot 26 = -77 + 78 = 1$ ✓

Inverses zu 5 modulo 8: 3 0.5

Inverses zu 26 mod 7 = 3 0.5

Kongruenz mit Inversem umformen:

$3 \cdot 5x \equiv 3 \cdot 4 \pmod{7}$ 0.5

$x \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$ 1.0

$3 \cdot 26x \equiv 3 \cdot 25 \pmod{7}$ 0.5

$x \equiv 75 \equiv 5 \pmod{7}$ 1.0 1.0

Lösung in $\mathbb{Z}_7$: $x = 5$

75
12

alle Lösungen in $\mathbb{Z}$: $[5]_{\equiv 7} = \{5 + t \cdot 7 \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 1.0

Aufgabe 6 (3 + 9,5 = 12,5 Punkte):

Gegeben seien die beiden folgenden Gleichungssysteme:

1.)	$x \equiv 3 \pmod 6$	2.)	$x \equiv 8 \pmod{10}$
	$x \equiv 2 \pmod 3$		$x \equiv 2 \pmod 3$
	$x \equiv 5 \pmod 9$		$x \equiv 4 \pmod 7$

Welches davon ist mithilfe des Chinesischen Restsatzes lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Bestimmen Sie anschließend alle Lösungen dieses Gleichungssystems.

Das 2.), da die Module paarweise teilerfremd sein müssen. 1.0

Bei 1.) gilt: $6 \not\perp 3$, $6 \not\perp 9$, $3 \not\perp 9$ $\Rightarrow$ nicht paarweise teilerfrem 1.0

Bei 2.) gilt: $10 \perp 3$, $10 \perp 7$, $3 \perp 7$ $\Rightarrow$ paarweise teilerfremd. 1.0

Lösung von 2.):

$x \equiv 8 \pmod{10}$
$x \equiv 2 \pmod 3$
$x \equiv 4 \pmod 7$

Voraussetzung erfüllt (s.o.)

- $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$ 1.0

$k_1 = \frac{m}{m_1} = \underbrace{3 \cdot 7}_{m_2 \cdot m_3} = 21$ 0.5, $k_2 = \frac{m}{m_2} = \underbrace{10 \cdot 7}_{m_1 \cdot m_3} = 70$ 0.5, $k_3 = \frac{m}{m_3} = \underbrace{10 \cdot 3}_{m_1 \cdot m_2} = 30$ 0.5

- Bestimmung der Inversen x_i mit $k_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$

$21 x_1 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow x_1 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow x_1 = 1$ 1.0
$70 x_2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x_2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x_2 = 1$ 1.0
$30 x_3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2x_3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow x_3 = 4$ 1.0 $\equiv -3 \pmod 7$

da $4 \cdot 2 - 1 \cdot 7 = 1$

- Bestimmung einer Lösung:

$x = \sum_{j=1}^{3} k_j x_j a_j = 21 \cdot 1 \cdot 8 + 70 \cdot 1 \cdot 2 + 30 \cdot \overset{(-3)}{4} \cdot 4 = 168 + 140 + \overset{-360}{480}$
$= 788$ 2.0 $= 308 - 360 = -52$

- Einfachste Lösung: $x \bmod m = \overset{-52}{788} \bmod 210 = 158$

- alle Lösungen: $158 + t \cdot 210$ mit $t \in \mathbb{Z}$ bzw. $\overset{-52}{788} + k \cdot 210$ mit $k \in \mathbb{Z}$ 2.0

$\mathbb{L} = [158]_{\equiv 210} = \{158 + t \cdot 210 \mid t \in \mathbb{Z}\} = \{788 + k \cdot 210 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{-52 + l \cdot 210 \mid l \in \mathbb{Z}\}$

Aufgabe 7 (5 Punkte):

Berechnen Sie $15^{65} \bmod 13$.

$15^{65} \bmod 13$

13 ist prim 0.5 ⇒ kleiner Satz von Fermat anwendbar 0.5

$a^{13} \equiv a \pmod{13}$

$15^{13} \equiv 15 \pmod{13}$ 1.0

$15^{65} = 15^{5 \cdot 13} = (15^{13})^5 \equiv 15^5 \equiv 2^5 = 32 \equiv 6 \pmod{13}$

0.5 0.5 0.5 0.5 0.5

$15^{65} \bmod 13 = \underline{\underline{6}}$ 0.5

$15^5 = 15^2 \cdot 15^2 \cdot 15 = 225 \cdot 225 \cdot 15 \equiv 4 \cdot 4 \cdot 15 = 240 \equiv 6$ 0.5 0.5 0.5

$17 \cdot 13 = 221$

$18 \cdot 13 = 234$

Aufgabe 8 (4,5 Punkte):

Wie lautet der private Schlüssel beim RSA-Verfahren, wenn $p = 11$ und $q = 5$ als Primzahlen und $e = 23$ als öffentlicher Schlüssel gewählt werden?

$p = 11$, $q = 5$, $e = 23$

$N = p \cdot q = 11 \cdot 5 = 55$ 0.5 , $\varphi(N) = \varphi(55) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 4 = 40$ 0.5

öffentlicher Schlüssel: $(e; N) = (23; 55)$

Gesucht: d für privaten Schlüssel mit

$e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$

$23 d \equiv 1 \pmod{40}$ 0.5

Erw. Euklid. Algorithmus:

m	n	$\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$	x	y
23	40	1	3+4=7	-4
17	23	1	-1-3=-4	3
6	17	2	1+2=3	-1
5	6	1	-1	1
1	5	5	1	0
0	1		0	1

1.5

$d = 7$ 0.5

privater Schlüssel:

$(d; N) = (7; 55)$ 1.0

Probe: $7 \cdot 23 - 4 \cdot 40 = 161 - 160 = 1$ ✓

Aufgabe 9 (5,5 + 3,5 = 9 Punkte):

a) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit es sich bei der algebraischen Struktur $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ um einen Körper handelt?

b) Begründen Sie, warum $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ kein Körper sein kann.

Addition und Multiplikation sind dabei immer modular zu verstehen, also z.B. $3 + 4 \equiv 1 \pmod 6$ und $3 \cdot 4 \equiv 2 \pmod 5$.

a) Damit $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ein Körper ist, muss gelten:

- $(\mathbb{Z}_n, +)$ ist eine Abelsche Gruppe 1.0
- $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Abelsche Gruppe 1.0
- Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_n$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ 1.0

für eine Abelsche Gruppe muss gelten:

- Abgeschlossenheit 0.5
- Assoziativgesetz 0.5
- Existenz eines neutralen Elements e 0.5
- Existenz inverser Elemente $\forall a \in \mathbb{Z}_n$ 0.5
- Kommutativgesetz 0.5

b) $\mathbb{Z}_8 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Prüfe ob* $\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ eine Abelsche Gruppe ist: 0.5

0.5 * $(\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot)$ mit

- Abgeschlossenheit:

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	$\boxed{0}$			
3							
4							
5							
6							
7							

0.5

$0 \notin \mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}$ 0.5

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot)$ ist nicht abgeschlossen 0.5

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot)$ ist keine Abelsche Gruppe 0.5

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ ist kein Körper 0.5

Aufgabe 10 (8 Punkte):

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ a & b & c \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 7 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ rechnersich so, dass B die inverse Matrix von A ist.

B ist die inverse Matrix von A, wenn gilt: $A \cdot B = B \cdot A = E_3$ 0.5

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ a & b & c \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 7 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6a+7b+2c & 7a-8b-3c & 5a-6b-2c \\ 0 \;\; 1.0 & 0 \;\; 1.0 & 1 \;\; 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -6a + 7b + 2c &= 0 \quad 0.5 \\ 7a - 8b - 3c &= 1 \quad 0.5 \\ 5a - 6b - 2c &= 0 \quad 0.5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 7 & 2 & 0 \\ 7 & -8 & -3 & 1 \\ 5 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |7Z_1 + 6Z_2 \\ |5Z_1 + 6Z_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |Z_2 + Z_3 \end{array}$$

0.5

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

0.5

Z_3: $-6c = 6 \Rightarrow \underline{c = -1}$ 0.5

Z_2: $b - 4c = b + 4 = 6 \Rightarrow \underline{b = 2}$ 0.5

Z_1: $-6a + 7b + 2c = -6a + 14 - 2$

$= -6a + 12 = 0$

$\Rightarrow \underline{a = 2}$ 0.5

Probe:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 7 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark \quad 0.5$$

Alternative 1 Bestimme die Inverse von B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 7 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |7Z_1 + 6Z_2 \\ |3Z_3 + Z_1 \end{array} 0.5 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 7 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1.0 \\ |+2Z_2 \;\; 1.0 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 7 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 15 & 12 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |:(-3) \end{array} 1.0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 7 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |-5Z_3 \\ |+Z_3 \\ \end{array} 1.0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 7 & 0 & 26 & 20 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |7 \\ * \\ \end{array} 1.0 \;\; 1.0$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 12 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:(6) \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a &= 2 \quad 0.5 \\ b &= 2 \quad 0.5 \\ c &= -1 \quad 0.5 \end{aligned}$$

Alternative 2: B ist die Inverse von A, wenn gilt $A\cdot B = B\cdot A = E_3$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 7 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ a & b & c \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+7a-25 & 6+7b-28 & 12+7c-5 \\ -14-8a+30 & -7-8b+24 & -14-8c+6 \\ -4-3a+10 & -2-3b+8 & -4-3c+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7a-13 & 7b-14 & 7c+7 \\ -8a+16 & -8b+17 & -8c-8 \\ -3a+6 & -3b+6 & -3c-2 \end{pmatrix} \quad 4.5$$

$\Rightarrow 7a-13 \overset{!}{=} 1 \quad 0.5 \quad \Rightarrow 7a = 14 \quad \Rightarrow a = 2 \quad 0.5$

$7b-14 \overset{!}{=} 0 \quad 0.5 \quad \Rightarrow 7b = 14 \quad \Rightarrow b = 2 \quad 0.5$

$7c+7 \overset{!}{=} 0 \quad 0.5 \quad \Rightarrow 7c = -7 \quad \Rightarrow c = -1 \quad 0.5$

Probe:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 7 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark \quad 0.5$$

Aufgabe 11 (4,5 Punkte):

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2x & 1 & -x \\ -1 & x & x \end{pmatrix}$ den Rang 3 hat.

Die Matrix A hat den Rang 3 (maximaler Rang), wenn gilt:

$\det(A) \neq 0$ 1,0

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2x & 1 & -x \\ -1 & x & x \end{vmatrix} = 2x + 0 - 2x^2 - (+1 - 2x^2 + 0) = 2x - 2x^2 - 1 + 2x^2$$

$$= 2x - 1$$ 2.0

$2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq +1/2$ 1.0

$\Rightarrow$ A hat den Rang 3 für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ 0.5

Alternative:

Bringe A in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2x & 1 & -x \\ -1 & x & x \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ | - x \cdot Z_1 \\ | + 1/2 Z_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & x - 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0.5 \\ | - x \cdot Z_2 \\ 0.5 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x - 1/2 \end{pmatrix}$$ 0.5

Der Rang einer Matrix ist gleich der Anzahl der Zeilen, die nicht 0 sind. 0.5

$\Rightarrow$ Der Rang der Matrix ist 3, wenn alle Zeilen $\neq 0$ sind. 1.0

$\Rightarrow x - 1/2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1/2$ 1.0

$\Rightarrow$ A hat den Rang 3 für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ 0.5

Aufgabe 12 (6 Punkte):

Bestimmen Sie für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Lösung X der Gleichung

$$A \cdot X + B \cdot X = 3C$$

$AX + BX = 3C$

$(A+B)X = 3C$ 1.0

$X = (A+B)^{-1} \cdot 3C = 3(A+B)^{-1}C$ 1.0

$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ 0,5

Bestimmung von $(A+B)^{-1}$:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 & 1 \end{array}\right) | 3Z_2 - Z_1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 3 \end{array}\right) | \cdot 2$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) | -4Z_2 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 9 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) | :3 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right)$ 2.0

$(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ 1.0 0,5

Aufgabe 13 (1 + 2 + 3 + 2,5 + 3 = 11,5 Punkte):

a) Berechnen Sie die Länge des Vektors $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Geben Sie den Einheitsvektor an, der dieselbe Richtung hat wie der Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) Wie lautet der Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten $A = (4, -4, 1)$ und $B = (-2, -2, -2)$?

Welchen Abstand haben die beiden Punkte voneinander?

d) Prüfen Sie, ob die beiden Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen.

Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

e) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ stehen die beiden Vektoren $a = \begin{pmatrix} 4x \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9x \\ -6 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

a) $|u| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$ 1.0

b) $v_0 = \frac{v}{|v|}$ 0.5 $= \frac{1}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9+36+4}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{49}} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}}}$ 1.5

(1.0 Betrag
0.5 Vektor)

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 - 4 \\ -2 - (-4) \\ -2 - 1 \end{pmatrix}$ 0.5 $= \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 1.0

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = \underline{\underline{7}}$ 1.5

d) $a \perp b \iff \langle a, b \rangle = 0$ 0.5

$\langle a, b \rangle = 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2)$ 0.5 $= 4 + 1 - 4 = 1$ 0.5 $\neq 0$ 0.5

$\Rightarrow a \not\perp b$ 0.5

e) $a \perp b \iff \langle a, b \rangle = 0$ 0.5

$\langle a, b \rangle = 4x \cdot 3 + (-1) \cdot 9x + (-2) \cdot (-6)$ 0.5 $= 12x - 9x + 12$

$= 3x + 12$ 0.5 $\stackrel{!}{=} 0$ 0.5

$3x = -12$

$x = -4$ 0.5

$\Rightarrow$ Für $x = -4$ stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander
0.5

Aufgabe 14 (6 Punkte):

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert -1.

Bestimmen Sie den Eigenvektor zu diesem Eigenwert.

Geben Sie außerdem den Eigenraum zum Eigenwert -1 an.

Hinweis: Die restlichen Eigenwerte der Matrix brauchen Sie nicht zu bestimmen.

Eigenvektor zum Eigenwert -1:

$(A - (-1) E_3) x = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1.0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |+z_1 \\ |-z_1 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |-z_2 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

0.5 0.5

z_3: x_3 frei wählbar : $x_3 = \alpha$ 0.5 mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 0.5

z_2: $2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow 2x_2 = -2x_3 = -2\alpha \Rightarrow x_2 = -\alpha$ 0.5

z_1: $3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow 3x_1 = -3x_2 + 3x_3 = +3\alpha + 3\alpha = 6\alpha$

$\Rightarrow x_1 = 2\alpha$ 0.5

Eigenvektoren zum Eigenwert -1:

$x = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 1.0

Eigenraum:

$E_A(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ 1.0