

**Klausur zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Sommersemester 2016**

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Unterschrift: _____

Klausurergebnis			
Aufgabe 1 (15 Punkte)		Aufgabe 2 (15 Punkte)	
Aufgabe 3 (10 Punkte)		Aufgabe 4 (15 Punkte)	
Aufgabe 5 (15 Punkte)		Aufgabe 6 (15 Punkte)	
Aufgabe 7 (15 Punkte)			
Gesamt (100 Punkte)		Note	

Bearbeitungshinweise:

- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Überprüfen Sie bitte sofort nach Erhalt die Vollständigkeit der Unterlagen (13 Seiten).
- Bitte lassen Sie die Klausur zusammengeheftet.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Falls notwendig, dann benutzen Sie die Rückseite des jeweiligen Aufgabenblatts für Notizen und Entwürfe.
- Geben Sie die Zwischenschritte Ihrer Berechnungen an.
- Gegeben Sie alle Ergebnisse auf 5 Stellen hinter dem Komma gerundet an.

Viel Erfolg!

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Gegeben sind die Ereignisse A , B und C sowie die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{array}{lll} Pr[A] = 0.35, & Pr[C|B] = 0.5, & Pr[A \cap B] = 0, \\ Pr[B] = 0.5, & Pr[C|\overline{B}] = 0.3, & Pr[A \cap C] = 0.15. \end{array}$$

Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $Pr[\overline{B}]$:

b) $Pr[B \cap C]$:

Name: _____

Matr. Nr.: _____

c) $Pr[C]$:

d) $Pr[A \cup B \cup C]$:

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Romeo Tollerhecht ist schwer verliebt. Sein Schatz heißt Julia Flottebiene und wohnt auf der anderen Seite des Flusses Kocher. Aus diesem Grund beschließt Romeo, Julia einen Liebesbrief per Flaschenpost zukommen zu lassen. Aus Erfahrung mit anderen Liebschaften weiß Romeo, dass eine Flasche mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% in den Fluten der Kocher versinkt und ihr Ziel nicht erreicht.

- a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Romeo genau drei Flaschen versenden muss, bis Julia zum ersten Mal seine Liebesbotschaft in Händen hält?

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen höchstens drei Flaschen versandt werden, bis eine Nachricht durch die stürmische Kocher gelangt?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

c) Wieviele Flaschen muss Romeo im Mittel senden, bis eine Flasche ihr Ziel erreicht?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Gegeben ist die normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert $\mu = 4$ und der Varianz $\sigma^2 = 2.25$. Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$Pr[-3 \leq X \leq 5].$$

Folgende Werte könnten sich als hilfreich erweisen:

$\Phi(0.66666)$	$=$	0.747505	$\Phi(2.33333)$	$=$	0.990185
$\Phi(1.33333)$	$=$	0.908788	$\Phi(4.66666)$	$=$	0.999998

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 4. (15 Punkte)

Ein digitales Kommunikationssystem besteht aus einem Sender S und einem Empfänger E . Während eines Intervalls sendet S ein Signal, das als Null interpretiert wird, oder ein Signal das als Eins interpretiert wird. Am Ende des Intervalls analysiert E die Übertragung und ermittelt unter Einsatz einer Fehlerkorrektur, ob eine Null oder Eins übertragen wurde. Betrachten Sie folgende Ereignisse:

$S_0 = S$ sendet eine Null, $E_0 = E$ interpretiert die empfangenen Daten als Null,
 $S_1 = S$ sendet eine Eins, $E_1 = E$ interpretiert die empfangenen Daten als Eins.

Angenommen, $Pr[E_0|S_0] = 0.99$, $Pr[E_1|S_1] = 0.98$ und $Pr[S_1] = 0.8$.

a) Berechnen Sie $Pr[E_1|S_0]$ und $Pr[E_0|S_1]$.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit einer fehlerhaften Übertragung unter der Annahme, dass E die empfangenen Daten als Eins interpretiert.

- c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Übertragungsfehler auftrat?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 5. (15 Punkte)

Gegeben sind drei Kisten, die mit weißen und schwarzen Kugeln gefüllt sind. Der Inhalt der Kisten ist wie folgt:

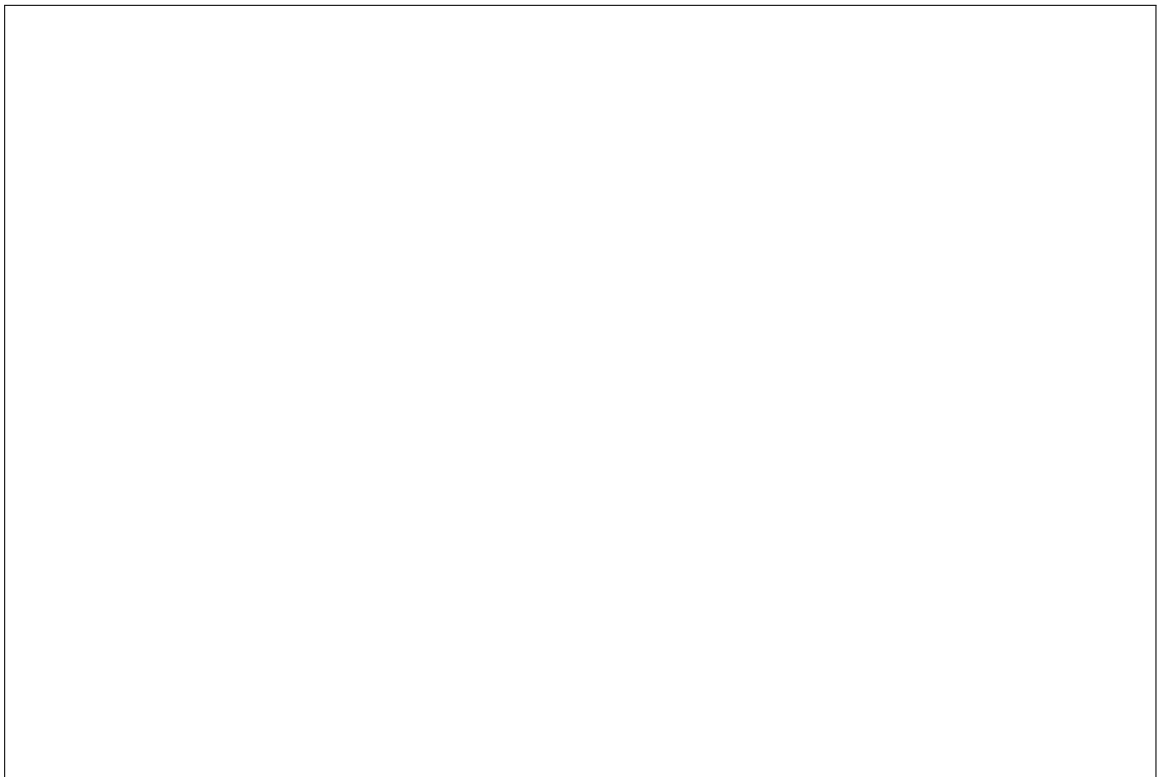
Kiste 1: 1 weiße Kugel, 1 schwarze Kugel

Kiste 2: 2 weiße Kugeln, 1 schwarze Kugel

Kiste 3: 3 weiße Kugeln, 1 schwarze Kugel

Es wird zuerst eine Kiste ausgewählt und dann aus der Kiste eine Kugel gezogen. Jede Auswahl erfolgt unter Gleichverteilung.

- a) Stellen Sie das Zufallsexperiment als Entscheidungsbaum dar.



- b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine weiße Kugel gezogen wird.



Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 6. (15 Punkte)

Die Würfelbude von Los Aalamos hat ein neues Glückspiel im Programm. Ein Würfel wird 10-mal geworfen. Erscheint jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 mindestens einmal, dann erhält der Spieler das Doppelte seines Einsatzes. Andernfalls geht er leer aus.

- a) A_i steht für das Ereignis, dass die Zahl $i \in \{1, \dots, 6\}$ nicht erscheint. Berechnen Sie $Pr[A_i]$.

- b) Gegeben ist eine beliebige Teilmenge $T \subsetneq \{1, \dots, 6\}$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine der Zahlen in T gewürfelt wird?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler das Glücksspiel gewinnt. Ist das Spiel fair?

Name: _____

Matr. Nr.: _____

Aufgabe 7. (15 Punkte)

In der Hochschule Aalen befindet sich ein leistungsfähiger Parallelrechner mit n Prozessoren und n Speicherzellen. Jeder Prozessor sendet gleichzeitig und unabhängig von den anderen Prozessoren eine Anfrage an eine Speicherzelle. Die Speicherzelle wird dabei von dem Prozessor zufällig unter Gleichverteilung ausgewählt. Jede Speicherzelle kann genau einen Prozessor bedienen. Erhält eine Speicherzelle mehr als eine Anfrage, dann ist sie blockiert und liefert keine Antwort zurück.

- a) Für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist die Zufallsvariable Z_i wie folgt definiert:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{Die Speicherzelle } i \text{ erhält genau eine Anfrage,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $Pr[Z_i = 1]$.

Name: _____

Matr. Nr.: _____

- b) Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der Prozessoren, die auf ihre Anfrage eine Antwort erhalten. Berechnen Sie den Erwartungswert von X in Abhängigkeit von n .