Prof. Dr. Christoph Karg
Hochschule Aalen

31.1.2018

Klausur zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Name: ________________________________

Matr. Nr.: ________________________________

Unterschrift: ________________________________

Klausurergebnis			
Aufgabe 1 (10 Punkte)		Aufgabe 2 (15 Punkte)	
Aufgabe 3 (10 Punkte)		Aufgabe 4 (15 Punkte)	
Aufgabe 5 (10 Punkte)		Aufgabe 6 (10 Punkte)	
Aufgabe 7 (10 Punkte)		Aufgabe 8 (20 Punkte)	
Gesamt (100 Punkte)		**Note**	

Bearbeitungshinweise:

- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Überprüfen Sie bitte sofort nach Erhalt die Vollständigkeit der Unterlagen (16 Seiten).
- Bitte lassen Sie die Klausur zusammengeheftet.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Falls notwendig, dann benutzen Sie die Rückseite des jeweiligen Aufgabenblatts für Notizen und Entwürfe.
- Geben Sie bei Ihren Berechnungen Zwischenschritte und die Namen der verwendeten Formeln an.
- Geben Sie alle Wahrscheinlichkeitswerte auf 6 Stellen hinter dem Komma gerundet an.

Viel Erfolg!

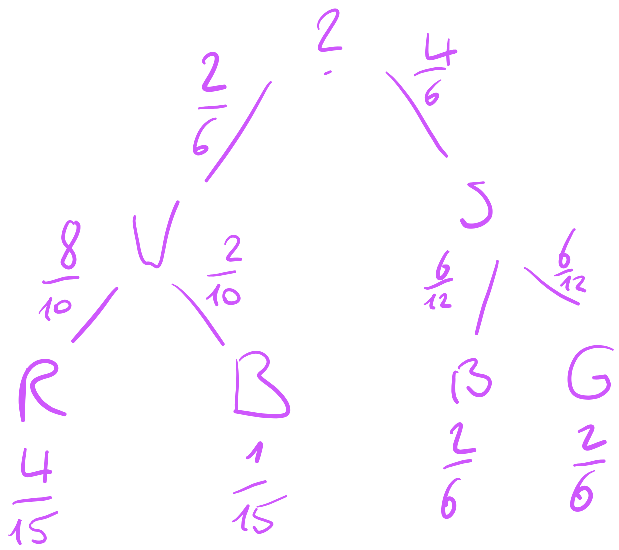
Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Für ein Zufallsexperiment werden in einer weißen Kiste acht rote und zwei blaue Kugeln platziert und in einer schwarzen Kiste sechs blaue und sechs gelbe Kugeln. Das Zufallsexperiment besteht aus zwei Phasen. Zuerst wird ein fairer Würfel geworfen. Bei der Zahl 2 oder 5 wird die weiße Kiste ausgewählt. Ansonsten wird die schwarze Kiste ausgewählt. Anschließend wird aus der gewählten Kiste eine Kugel gezogen.

a) Modellieren Sie das Zufallsexperiment unter Einsatz eines Entscheidungsbaums als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

Hinweis: Nutzen Sie (falls nötig) auch die nächste Seite für die Lösung.



Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine blaue Kugel gezogen?

$$Pr[B] = Pr[\{SB, WB\}]$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{1}{15} = \underline{\frac{3}{5}}$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine rote Kugel gezogen unter der Annahme, dass die schwarze Kiste ausgewählt wurde?

$$P[R \mid S] = 0$$

in der Schwarzen Kiste liegen keine Roten Kugeln

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Das Wettervorhersage für Aalen wird seit vielen Jahren von der Firma Wetterfrosch erstellt. Aus den Berichten der Vergangenheit weiß man, dass die Vorhersage für den nächsten Tag mit 65% „Schön" und mit 35% „Schlecht" lautet. Die Trefferquote (d.h., die Korrektheit) des Wetterberichts liegt bei der Vorhersage „Schön" bei 79% und bei der Vorhersage „Schlecht" bei 92%.

a) Legen Sie für die in obigem Text getroffenen Aussagen Ereignisse fest und geben Sie die entsprechenden (eventuell bedingten) Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse an.

W = „Wetter ist schön"

V = „Vorhersage, wetter schön"

$Pr[V] = 0{,}65$

$Pr[\overline{V}] = 0{,}35$

$Pr[W | V] = 0{,}79$

$Pr[W | \overline{V}] = 0{,}08$

$Pr[\overline{W} | V] = 0{,}21$

$Pr[\overline{W} | \overline{V}] = 0{,}92$

b) Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Tage, an denen das Wetter schön ist.

$$Pr[V] = Pr[V|V] \cdot Pr[V] + Pr[V|\bar{V}] \cdot Pr[\bar{V}]$$

$$= 0{,}79 \cdot 0{,}65 + 0{,}08 \cdot 0{,}35$$

$$= 0{,}541500$$

c) Martina wollte sich mit ihrer Freundin Sabine im Aalener Freibad zu einem gemütlichen Nachmittag mit ausgiebigem Sonnenbaden treffen. Sabine ist trotz des schönen Wetters nicht erschienen. Sie erklärt ihr Fehlen damit, dass der Wetterbericht am Vortrag schlechtes Wetter vorhergesagt hat. Martina kennt den gestrigen Wetterbericht nicht, vermutet aber, dass es sich bei Sabines Aussage um eine Ausrede handelt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Martina mit ihrer Vermutung richtig liegt?

$$Pr[\bar{V}|V] = \frac{Pr[V|\bar{V}] \cdot Pr[\bar{V}]}{Pr[V]}$$

$$= \frac{0{,}08 \cdot 0{,}35}{0{,}051708}$$

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Gegeben ist die normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert $\mu = 5$ und der Varianz $\sigma^2 = 36$. Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$Pr\,[\,4 \leq X \leq 7\,]\,.$$

Nutzen Sie zur Berechnung die Wertetabelle der Standardnormalverteilung.

$Pr[X \leq 4]$

$z = \frac{4-5}{6}$

$= -\frac{1}{6}$

$\Phi(-\frac{1}{6})$

$= 1 - \Phi(\frac{1}{6})$

$= 1 - 0{,}567495$

$= 0{,}432505$

$Pr[X \leq 7]$

$z = \frac{7-5}{6}$

$= \frac{2}{6}$

$\Phi(\frac{2}{6})$

$= 0{,}629300$

$0{,}629300 - 0{,}432505$

$= 0{,}196795$

Name: ______________________ Matr. Nr.: ______________________

Aufgabe 4. (15 Punkte)

Die diskrete Zufallsvariable X wird durch folgende Wertetabelle definiert:

k	$Pr[X = k]$
-4	$^3/_{42}$
-3	$^8/_{42}$
2	$^6/_{42}$
5	$^{12}/_{42}$
7	$^8/_{42}$
8	$^5/_{42}$

a) Berechnen Sie $\mathrm{Exp}[X]$.

$$\mathrm{Exp}[X] = -4 \cdot \frac{3}{42} + -3 \cdot \frac{8}{42} + 2 \cdot \frac{6}{42} + 5 \cdot \frac{12}{42} + 7 \cdot \frac{8}{42} + 8 \cdot \frac{5}{42}$$

$$= \frac{22}{7}$$

Name: ____________________ Matr. Nr.: ____________________

b) Berechnen Sie $\mathrm{Exp}[X^2]$.

$$= \frac{578}{21}$$

c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X]$.

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Exp}[X^2] - \mathrm{Exp}[X]^2$$

$$= \frac{578}{21} - \left(\frac{22}{7}\right)^2$$

$$\approx 17{,}646259$$

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Gegeben ist die stetige gleichverteilte Zufallsvariable X mit $\mathrm{Exp}[X] = 5$ und $\mathrm{Var}[X] = 4/3$. Berechnen Sie die Grenzen des Intervalls $[a; b]$, über dem X definiert ist.

$\mathrm{Exp}[X] = \frac{a+b}{2} = 5$ $a+b=10$

$\mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3}$ $(b-a)^2 = \frac{48}{3} = 16$

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Professor Quarx überlegt zur Verbesserung der Erfolgschancen der Studierenden, im Fach Wahrscheinlichkeitstheorie die Klausur durch eine Online-Lotterie zu ersetzen. Ein Los ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% ein „Bestanden“. Jeder Student darf solange ein Los kaufen, bis er die Prüfungsleistung bestanden hat.

a) Modellieren Sie die Online-Lotterie mit einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

b) Wie viele Lose muss ein Student im Mittel kaufen, um die Prüfungsleistung zu bestehen?

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student mindestens drei Lose kaufen muss, um die Prüfungsleistung zu bestehen?

Name: ______________________________ Matr. Nr.: ________________________

Aufgabe 7. (10 Punkte)

Der über die Stadtgrenzen Aalens hinaus bekannte Pizza Express Avantissimo wirbt mit seiner schnellen Lieferzeit. Auf der Webseite des Lieferdienstes findet man in den Lieferbedingungen, dass im Aalener Stadtgebiet die Lieferzeit (in Minuten) normalverteilt mit den Parametern $\mu = 25$ und $\sigma^2 = 36$. Schätzen Sie auf Basis dieser Daten die Wahrscheinlichkeit noch oben ab, dass ein Kunde mindestens 45 Minuten auf seine Bestellung warten muss.

$\mu = 25 \quad \sigma = 6$

Chebyshev: $\Pr[X \geq 45] = \Pr[|X-\mu| \geq k\sigma]$

$= \Pr[|X-25| \geq 20]$

$= \frac{36}{20^2}$

$= 0{,}09$

$\sigma^2 = 36$. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit nach oben ab, dass ein Kunde mehr als 45 Minuten auf seine Bestellung warten muss.

Name: ______________________________ Matr. Nr.: ________________________

Aufgabe 8. (20 Punkte)
Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

- $A \rightsquigarrow$ Es erscheint höchstens einmal Zahl.
- $B \rightsquigarrow$ Es erscheint mindestens einmal Zahl und mindestens einmal Kopf.

a) Beweisen Sie, dass A und B unabhängige Ereignisse sind.

$A = \{KKK, KZK, ZKK, KKZ\}$

$B = \{ZKZ, KZK, ZKK, KKZ, KZZ, ZZK\}$

$A \cap B = \{KZK, ZKK, KKZ\}$

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$$

$$\frac{3}{8} = \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{8}$$

$$= \frac{24}{64}$$

$$= \frac{3}{8}$$

b) Angenommen, die Münze wird n-mal geworfen, wobei $n > 3$. Sind A und B dann noch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.