Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studienbereich Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen 2

Vorlesung im Wintersemester 2024/2025
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

1. Übungsblatt (31. Oktober 2024)

Aufgabe 1: Multiplikationsmethode

Gegeben sei eine Streuwerttabelle der Größe $N = 2^{12}$. Für die Einschränkung des Wertebereichs der Streuwerte soll die Multiplikationsmethode mit $A = \frac{\pi - 2}{3}$ verwendet werden.

Berechnen Sie zu den Streuwerten 1000 und 2500 die zugehörigen Indizes sowohl mit Gleitkomma-Arithmetik als auch mit 16-Bit-Ganzzahlarithmetik!

✎
Berechnung mit Gleitkomma-Arithmetik:

- Für $h = 1000$ ergibt sich $u = h \cdot A = 380.53088$, $v = u \bmod 1 = 0.53088453$, $i = \lfloor v \cdot N \rfloor = 2174$.
- Für $h = 2500$ ergibt sich $u = h \cdot A = 951.32721$, $v = u \bmod 1 = 0.32721132$, $i = \lfloor v \cdot N \rfloor = 1340$.

Berechnung mit 16-Bit-Ganzzahlarithmetik und $A' = A \cdot 2^{16} = 24938$:

- Für $h = 1000$ ergibt sich:
  - $u' = h \cdot A' = 24\,938\,000 = 0000000101111100\ 1000011000010000_2$
  - $v' = u' \bmod 2^{16} = 34320 = 1000011000010000_2$
  - $i = \frac{v'}{2^{16-12}} = 2145 = 100001100001_2$
- Für $h = 2500$ ergibt sich:
  - $u' = h \cdot A' = 62\,345\,000 = 0000001110110111\ 0100111100101000_2$
  - $v' = u' \bmod 2^{16} = 20264 = 0100111100101000_2$
  - $i = \frac{v'}{2^{16-12}} = 1266 = 010011110010_2$

✐

Aufgabe 2: Verkettung und offene Adressierung

Gegeben sei jeweils eine Streuwerttabelle einer bestimmten Größe N.

Fügen Sie in diese Tabelle der Reihe nach Objekte mit den Schlüsselwerten 10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88 und 59 ein und zeichnen den Zustand der Tabelle nach jeder Operation!

Kollisionen sollen wie folgt behandelt werden:

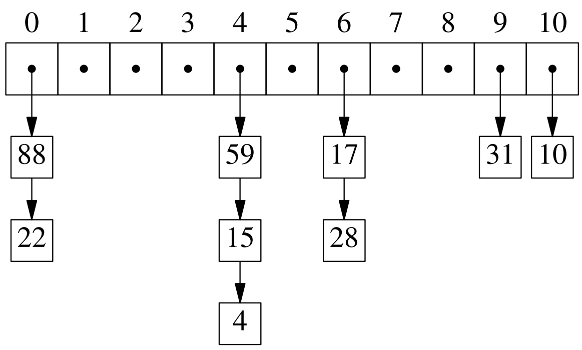
a) Verkettung mit $N = 11$ und $h(k) = k \bmod 11$

✎

Streuwerte:

k	$h(k)$
10	10
22	0
31	9
4	4
15	4
28	6
17	6
88	0
59	4

Inhalt der Tabelle am Ende:



✐

b) Offene Adressierung mit linearer Sondierung, $N = 11$ und $s_j(k) = (k + j) \bmod 11$

✎

Sondierungssequenzen:

k	$s(k) = \big(s_0(k), \ldots, s_{10}(k)\big)$										
10	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
31	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3
15	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3
28	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5
17	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5
88	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
59	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3

Inhalt der Tabelle am Ende:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22	88			4	15	28	17	59	31	10

✐

c) Offene Adressierung mit quadratischer Sondierung, $N = 16$ und $s_j(k) = \left(k + \frac{j + j^2}{2}\right) \bmod 16$

✎

Sondierungssequenzen:

k	$s(k) = \left(s_0(k), \ldots, s_{15}(k)\right)$															
10	10	11	13	0	4	9	15	6	14	7	1	12	8	5	3	2
22	6	7	9	12	0	5	11	2	10	3	13	8	4	1	15	14
31	15	0	2	5	9	14	4	11	3	12	6	1	13	10	8	7
4	4	5	7	10	14	3	9	0	8	1	11	6	2	15	13	12
15	15	0	2	5	9	14	4	11	3	12	6	1	13	10	8	7
28	12	13	15	2	6	11	1	8	0	9	3	14	10	7	5	4
17	1	2	4	7	11	0	6	13	5	14	8	3	15	12	10	9
88	8	9	11	14	2	7	13	4	12	5	15	10	6	3	1	0
59	11	12	14	1	5	10	0	7	15	8	2	13	9	6	4	3

Inhalt der Tabelle am Ende:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	17			4		22		88		10	59	28			31

✐

d) Offene Adressierung mit doppelter Streuung, $N = 11$, $h_1(k) = k$, $h_2(k) = k \bmod 10 + 1$ und $s_j(k) = \left(h_1(k) + j\, h_2(k)\right) \bmod 11$

✎

Sondierungssequenzen:

k	$s(k) = \left(s_0(k), \ldots, s_{10}(k)\right)$										
10	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
31	9	0	2	4	6	8	10	1	3	5	7
4	4	9	3	8	2	7	1	6	0	5	10
15	4	10	5	0	6	1	7	2	8	3	9
28	6	4	2	0	9	7	5	3	1	10	8
17	6	3	0	8	5	2	10	7	4	1	9
88	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
59	4	3	2	1	0	10	9	8	7	6	5

Inhalt der Tabelle am Ende:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22		59	17	4	15	28	88		31	10

✐

Aufgabe 3: Abschätzung

Beweisen Sie für $0 \le i \le m < N$ die Ungleichung $\frac{m-i}{N-i} \le \frac{m}{N}$, die bei der Laufzeitanalyse der erfolglosen Suche bei offener Adressierung verwendet wird!

Hinweis: Betrachten Sie die Differenz $\frac{m}{N} - \frac{m-i}{N-i}$ und zeigen Sie, dass sie ≥ 0 ist!

✎

- Es gilt: $\frac{m}{N} - \frac{m-i}{N-i} = \frac{m\,(N-i)-(m-i)\,N}{N\,(N-i)} = \frac{m\,N - m\,i - m\,N + i\,N}{N\,(N-i)} = \frac{i\,(N-m)}{N\,(N-i)} \ge 0$,
  da $i \ge 0$, $N > m$, $N > 0$ und $N > i$.

- Daraus folgt die Behauptung.

✐

Aufgabe 4: Laufzeitanalyse

Gegeben sei eine Streuwerttabelle der Größe N mit Verkettung, die $m = 3$ Elemente enthält.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die drei Elemente auf die N Plätze zu verteilen?
✎
Es gibt insgesamt N^3 Möglichkeiten:
Für jedes Element gibt es — unabhängig von den anderen — N mögliche Plätze.
✐

b) Bei wievielen dieser Möglichkeiten befinden sich alle drei Elemente am gleichen Platz?
✎
Bei N Möglichkeiten:
Für das erste Element gibt es N mögliche Plätze, für das zweite und dritte dann jeweils nur noch diesen einen.
✐

c) Bei wievielen Möglichkeiten befinden sich die Elemente an drei unterschiedlichen Plätzen?
✎
Bei $N\,(N-1)\,(N-2)$ Möglichkeiten:
Für das erste Element gibt es N mögliche Plätze, für das zweite dann noch $N-1$ und für das dritte $N-2$.
✐

d) Bei wievielen Möglichkeiten befinden sich die Elemente an zwei verschiedenen Plätzen (d. h. ein Platz enthält ein Element und ein anderer zwei)?
✎
Bei

$$N^3 - N - N\,(N-1)\,(N-2) = N\left(N^2 - 1 - (N-1)\,(N-2)\right) = N\left(N^2 - 1 - N^2 + 2\,N + N - 2\right) =$$
$$N\,(3\,N-3) = 3\,N\,(N-1)$$

Möglichkeiten:
Von der Gesamtzahl N^3 aller Möglichkeiten werden die Zahlen N und $N\,(N-1)\,(N-2)$ der anderen Möglichkeiten subtrahiert.
✐

e) Ermitteln Sie für jede dieser prinzipiellen Verteilungsmöglichkeiten und für jedes der drei Objekte die Anzahl der Schlüsselvergleiche, die bei einer Suche nach diesem Objekt ausgeführt werden!
Ermitteln Sie daraus für jede Verteilungsmöglichkeit die durchschnittliche Anzahl der Schlüsselvergleiche bei der Suche nach irgendeinem der drei Objekte!
✎

- Verteilungsmöglichkeit 1 (alle drei Elemente am gleichen Platz):
  Bei der Suche nach dem ersten/zweiten/dritten Objekt der entsprechenden Liste werden 1/2/3 Schlüsselvergleiche ausgeführt, im Durchschnitt also 2.
- Verteilungsmöglichkeit 2 (drei verschiedene Plätze):
  Bei der Suche nach jedem der drei Objekte wird jeweils 1 Schlüsselvergleich ausgeführt, im Durchschnitt also 1.
- Verteilungsmöglichkeit 3 (zwei verschiedene Plätze):
  - Bei der Suche nach dem Objekt, das sich alleine an einem Platz befindet, wird 1 Schlüsselvergleich ausgeführt.
  - Bei der Suche nach dem ersten/zweiten Objekt der Liste am anderen Platz werden 1/2 Schlüsselvergleiche ausgeführt.
  - Im Durchschnitt also $\frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3}$.

✐

f) Ermitteln Sie die durchschnittliche Anzahl der Schlüsselvergleiche bei der Suche nach irgendeinem der drei Objekte bei irgendeiner Verteilung!
✎

- Verteilungsmöglichkeit 1 mit durchschnittlich 2 Schlüsselvergleichen kommt in N von N^3 Fällen vor.
- Verteilungsmöglichkeit 2 mit durchschnittlich 1 Schlüsselvergleich kommt in $N\,(N-1)\,(N-2)$ von N^3 Fällen vor.
- Verteilungsmöglichkeit 3 mit durchschnittlich $\frac{4}{3}$ Schlüsselvergleichen kommt in $3\,N\,(N-1)$ von N^3 Fällen vor.
- Somit ergibt sich als Gesamtdurchschnitt:
  $$\frac{1}{N^3}\left(N \cdot 2 + N\,(N-1)\,(N-2) \cdot 1 + 3\,N\,(N-1) \cdot \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{N^2}\,(2 + (N-1)\,(N-2) + 4\,(N-1)) =$$
  $$\frac{1}{N^2}\left(2 + N^2 - 2\,N - N + 2 + 4\,N - 4\right) = \frac{1}{N^2}\left(N^2 + N\right) = 1 + \frac{1}{N}$$

✐

g) Stimmt Ihr Ergebnis mit der in der Vorlesung ermittelten allgemeinen Formel $1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\,N}$ überein?
✎
Mit $\alpha = \frac{m}{N} = \frac{3}{N}$ ergibt sich aus der Formel: $1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\,N} = 1 + \frac{3}{2\,N} - \frac{1}{2\,N} = 1 + \frac{2}{2\,N} = 1 + \frac{1}{N}$
✐