Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Definitionen und Sätze

Prof. Dr. Christoph Karg

Studiengang Informatik
Hochschule Aalen

Sommersemester 2024

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Definition 1.1 Sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge. Sei $Pr : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(Ω, Pr) ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $\omega \in \Omega$ gilt: $0 \leq Pr\,[\omega] \leq 1$.
2. $\sum_{\omega \in \Omega} Pr\,[\omega] = 1$.

Ereignis

Definition 1.2. Sei (Ω, Pr) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Menge $A \subseteq \Omega$ heißt Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit $Pr[A]$ des Ereignisses A ist definiert als

$$Pr[A] = \sum_{\omega \in A} Pr[\omega].$$

Prinzip von Laplace

Prinzip von Laplace:

Wenn nichts dagegen spricht, kann man davon ausgehen, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind.

Formal: Für alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$Pr\,[\omega] = \frac{1}{\|\Omega\|}.$$

Voraussetzung: $\|\Omega\| < \infty$

Additionssatz

Satz 2.1 (Additionssatz) Für zwei disjunkte Ereignisse A und B gilt:

$$Pr\left[A \cup B\right] = Pr\left[A\right] + Pr\left[B\right].$$

Allgemein: Sind die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt, dann gilt:

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Pr\left[A_i\right].$$

Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ gilt:

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\left[A_i\right].$$

Elementare Rechenregeln

Satz 2.2 Für zwei beliebige Ereignisse A und B gilt:

1. $Pr[\emptyset] = 0$, $Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \leq Pr[A] \leq 1$.
3. $Pr\left[\overline{A}\right] = 1 - Pr[A]$.
4. Wenn $A \subseteq B$, dann $Pr[A] \leq Pr[B]$.

Siebformel

Satz 2.3 (Siebformel) Für zwei Ereignisse A und B gilt:

$$Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]\,.$$

Für drei Ereignisse A_1, A_2 und A_3 gilt:

$$\begin{aligned} & Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] \\ = \quad & Pr[A_1] + Pr[A_2] + Pr[A_3] \\ & - Pr[A_1 \cap A_2] - Pr[A_1 \cap A_3] \\ & - Pr[A_2 \cap A_3] + Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3] \end{aligned}$$

Allgemein: Für $n \geq 2$ Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$\begin{aligned} & Pr[A_1 \cup \ldots \cup A_n] \\ = \quad & \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{\|S\|+1} Pr\left[\bigcap_{i \in S} A_i\right] \end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 3.1 Gegeben sind die Ereignisse A und B, wobei $Pr[B] > 0$.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}.$$

Multiplikationssatz

Satz 3.5 (Multiplikationssatz) Gegeben sind die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$.

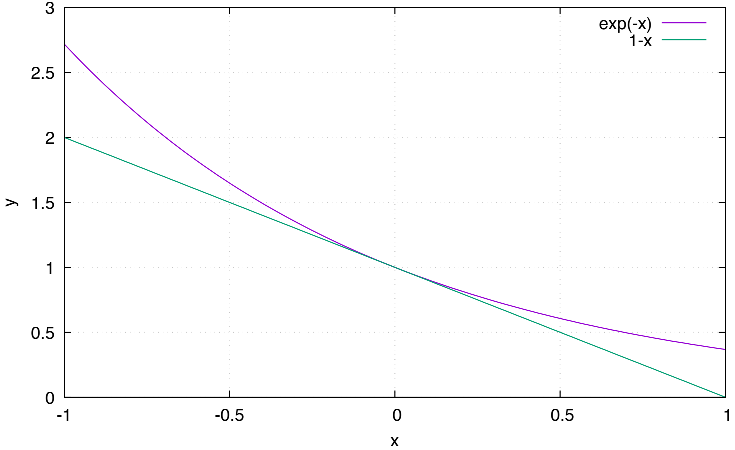
Angenommen,

$$Pr\left[A_1 \cap \ldots \cap A_n\right] > 0.$$

Dann gilt:

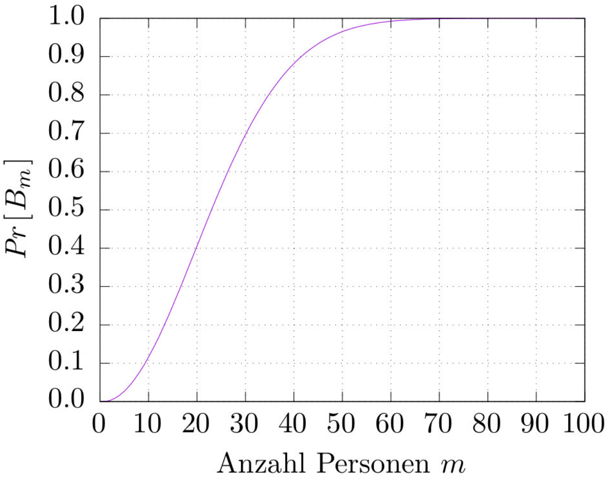
$$Pr\left[A_1 \cap \ldots \cap A_n\right] = Pr\left[A_1\right] \cdot Pr\left[A_2 | A_1\right] \cdot Pr\left[A_3 | A_1 \cap A_2\right] \cdot \ldots \cdot Pr\left[A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right].$$

Beispiel: Geburtstagsproblem



Approximation von $1 - x$ durch e^{-x}

Beispiel: Geburtstagsproblem (Forts.)



Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz 3.7 (Satz der totalen Wahrscheinlichkeit) Angenommen die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ bilden eine Partition von Ω, d.h. $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ und für alle $i \neq j$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Dann gilt für jedes Ereignis $B \subseteq \Omega$:

$$Pr\left[B\right] = \sum_{i=1}^{n} Pr\left[B|A_i\right] \cdot Pr\left[A_i\right].$$

Satz von Bayes

Satz 3.9 (Satz von Bayes) Gegeben sind die paarweise disjunkten Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$. Falls $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ mit $Pr[B] > 0$, dann ist für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} Pr[A_i|B] &= \frac{Pr[B|A_i]\, Pr[A_i]}{Pr[B]} \\ &= \frac{Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} Pr[B|A_j]\, Pr[A_j]}. \end{aligned}$$

Satz von Bayes (Forts.)

Satz 3.9 (Satz von Bayes) Für eine unendliche Folge von paarweise disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt analog, dass

$$\begin{aligned} Pr[A_i|B] &= \frac{Pr[B|A_i]\, Pr[A_i]}{Pr[B]} \\ &= \frac{Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} Pr[B|A_j]\, Pr[A_j]}. \end{aligned}$$

Unabhängige Ereignisse

Definition 4.1 (Unabhängigheit) Die Ereignisse A und B sind unabhängig, falls

$$Pr\left[A \cap B\right] = Pr\left[A\right] Pr\left[B\right]$$

gilt.

Konsequenz: Für zwei unabhängige Ereignisse A und B gilt:

$$Pr\left[A|B\right] = Pr\left[A\right].$$

Unabhängige Ereignisse (Forts.)

Definition 4.3 (Unabhängigkeit) Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind unabhängig, wenn für alle Teilmengen $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gilt, dass

$$Pr\left[\bigcap_{i \in S} A_i\right] = \prod_{i \in S} Pr\left[A_i\right].$$

Eine nützliche Eigenschaft

Notation: $A^0 = \overline{A}$ und $A^1 = A$.

Satz 4.4 Seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige Ereignisse. Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$ und sei $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ eine beliebige Auswahl von Indizes.

Angenommen, für alle $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt:

$$Pr\left[A_1^{b_1} \cap \ldots \cap A_n^{b_n}\right] = Pr\left[A_1^{b_1}\right] \cdot \ldots \cdot Pr\left[A_n^{b_n}\right].$$

Dann gilt für alle $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) \in \{0, 1\}^k$, dass

$$Pr\left[A_{i_1}^{b_{i_1}} \cap \ldots \cap A_{i_k}^{b_{i_k}}\right] = Pr\left[A_{i_1}^{b_{i_1}}\right] \cdot \ldots \cdot Pr\left[A_{i_k}^{b_{i_k}}\right].$$

Nachweis der Unabhängigkeit von Ereignissen

Satz 4.5 Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass

$$Pr\left[A_1^{b_1} \cap \ldots \cap A_n^{b_n}\right] = Pr\left[A_1^{b_1}\right] \cdot \ldots \cdot Pr\left[A_n^{b_n}\right],$$

wobei $A_i^0 = \overline{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Kombination von unabhängigen Ereignissen

Satz 4.6 Sind A, B und C unabhängige Ereignisse, dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängige Ereignisse.

Zufallsvariable

Definition 5.1 (Diskrete Zufallsvariable)
Gegeben ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Pr).

Eine Abbildung $X\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ heißt diskrete Zufallsvariable (über (Ω, Pr)).

Bedingte Zufallsvariable

Definition 5.2 (Bedingte Zufallsvariable) Sei X eine Zufallsvariable und A ein Ereignis mit $Pr\left[A\right] > 0$. Die bedingte Zufallsvariable $X|A$ besitzt die Dichte

$$f_{X|A}(x) = Pr\left[X = x|A\right] = \frac{Pr\left[X^{-1}(x) \cap A\right]}{Pr\left[A\right]}.$$

Dichte und Verteilung einer Zufallsvariablen

Definition 5.3 (Dichte und Verteilung) Sei X eine diskrete Zufallsvariable über dem Wahrscheinlichkeitsraum Ω.

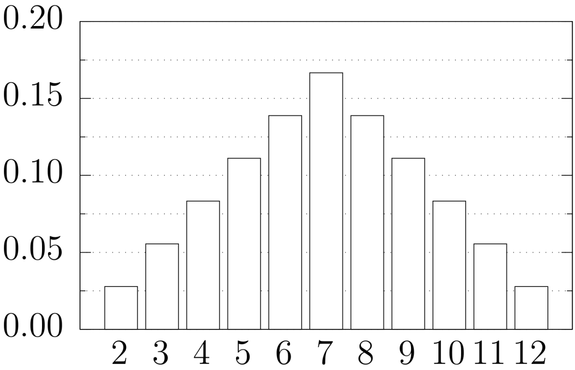
Die Dichtefunktion (kurz: Dichte) von X ist die Funktion $f_X : \mathbb{R} \mapsto [0;1]$ mit

$$f_X(x) = Pr[X = x] = \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} Pr[\omega] .$$

Die Verteilungsfunktion (kurz: Verteilung) von X ist die Funktion $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0;1]$ mit

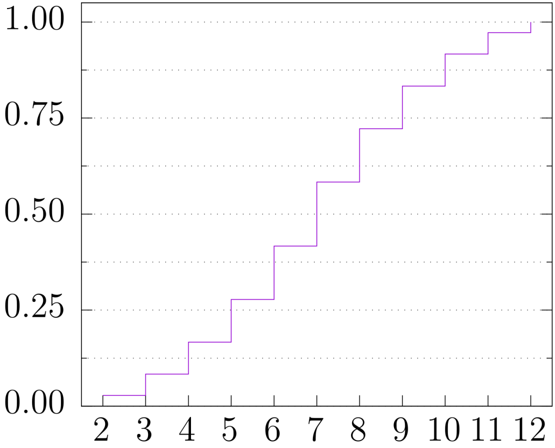
$$F_X(x) = Pr[X \leq x] = \sum_{x' \leq x} Pr[X = x'] .$$

Beispiel: Summe zweier Würfel



Dichte der Augensumme zweier Würfel

Beispiel: Summe zweier Würfel (Forts.)



Verteilung der Augensumme zweier Würfel

Kombination Zufallsvariable und Funktion

Satz 5.7 Sei X eine Zufallsvariable über dem Wahrscheinlichkeitsraum Ω und sei $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Dann ist $f(X)$ eine Zufallsvariable über Ω.

Erwartungswert

Definition 6.1 (Erwartungswert) Der Erwartungswert $Exp\left[X\right]$ einer diskreten Zufallsvariablen X ist definiert als

$$\begin{aligned} Exp\left[X\right] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot Pr\left[X = x\right] \\ &= \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) \end{aligned}$$

vorausgesetzt die obige Summe konvergiert absolut.

Berechnung von Erwartungswerten

Satz 6.4 Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Sei $A_1, \ldots, A_n$ eine Partition des Ereignisraums Ω.

Angenommen, es gilt $Pr[A_i] > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dann ist:

$$Exp[X] = \sum_{i=1}^{n} Exp[X|A_i] \cdot Pr[A_i] .$$

Berechnung von Erwartungswerten (Forts.)

Satz 6.4 (Variante 2) Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Sei $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine Partition des Ereignisraums Ω.

Angenommen, es gilt $Pr\left[A_i\right] > 0$ für alle $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, die Erwartungswerte $Exp\left[X|A_i\right]$ existieren und die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} Exp\left[X|A_i\right] \cdot Pr\left[A_i\right]$ konvergiert.

Dann ist:

$$Exp\left[X\right] = \sum_{i=1}^{\infty} Exp\left[X|A_i\right] \cdot Pr\left[A_i\right].$$

Berechnung von Erwartungswerten (Forts.)

Satz 6.6 Sei X eine Zufallsvariable, deren Erwartungswert existiert. Dann gilt:

$$Exp\,[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr\,[\omega]\,.$$

Monotonie des Erwartungswerts

Satz 6.7 (Monotonie des Erwartungswerts) Seien X und Y Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum Ω.

Falls für alle $\omega \in \Omega$ die Ungleichung $X(\omega) \leq Y(\omega)$ gilt, dann gilt $Exp\,[X] \leq Exp\,[Y]$.

Linearität des Erwartungswerts

Satz 6.8 (Linearität des Erwartungswerts) Sei X eine Zufallsvariable und seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen.

Dann gilt:

$$Exp\left[a \cdot X + b\right] = a \cdot Exp\left[X\right] + b.$$

Nochmals Berechnung von Erwartungswerten

Satz 6.9 Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$.

Dann gilt:

$$Exp[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i].$$

Linearität des Erwartungswerts

Satz 6.10 (Linearität des Erwartungswerts) Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen.

Für die Zufallsvariable $X = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$ gilt:

$$Exp\,[X] = a_1 \cdot Exp\,[X_1] + \ldots + a_n \cdot Exp\,[X_n]\,.$$

Multipikativität des Erwartungswerts

Satz 6.12 (Multiplikativität des Erwartungswerts) Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$Exp\left[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n\right] = Exp\left[X_1\right] \cdot \ldots \cdot Exp\left[X_n\right].$$

Varianz und Standardabweichung

Definition 7.2 (Varianz) Sei X eine Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mu = Exp[X]$.

Die Varianz $Var[X]$ von X ist definiert als

$$\begin{aligned} Var[X] &= Exp\left[(X-\mu)^2\right] \\ &= \sum_{x \in W_X} (x-\mu)^2 \cdot Pr[X = x]\,. \end{aligned}$$

Definition 7.3 (Standardabweichung) Die Standardabweichung (Streuung) von X ist definiert als

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}.$$

Berechnung der Varianz

Satz 7.6 Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$Var\left[X\right] = Exp\left[X^2\right] - Exp\left[X\right]^2 .$$

Varianz einer linearen Funktion

Satz 7.8 Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$Var[a \cdot X + b] = a^2 \cdot Var[X] .$$

Varianz unabhängiger Zufallsvariablen

Satz 7.10 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Sei

$$X = X_1 + \ldots + X_n.$$

Dann gilt:

$$Var[X] = Var[X_1] + \ldots + Var[X_n].$$

Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ist gleichverteilt, falls

$$f_X(k) = \frac{1}{n}$$

für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Es gilt:

- $Exp\,[X] = \frac{n+1}{2}$
- $Var\,[X] = \frac{n^2-1}{12}$

Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1\}$ ist Bernoulli-verteilt mit dem Parameter p, $0 \leq p \leq 1$, symbolisch $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, falls

$$f_X(x) = \begin{cases} p & x = 1, \\ 1 - p & x = 0. \end{cases}$$

Es gilt:

- $Exp\,[X] = p$
- $Var\,[X] = p - p^2$

Binomialverteilung

Eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ist binomialverteilt mit den Parametern n und p, symbolisch $X \sim \text{Bin}(n, p)$, falls

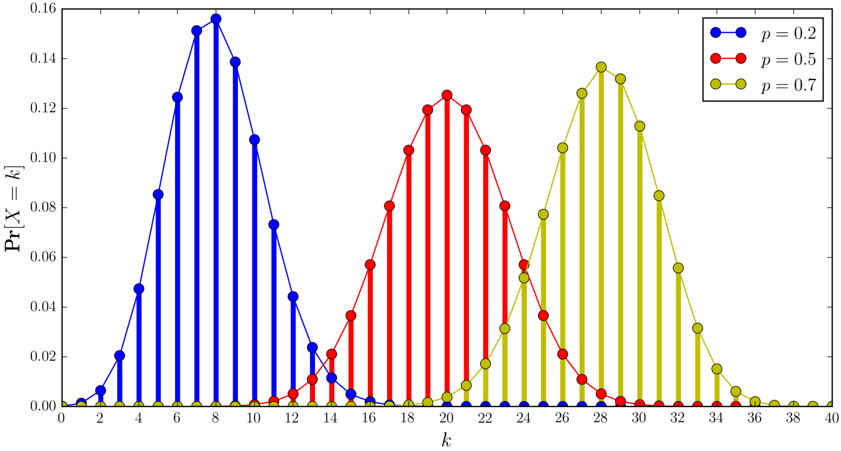
$$Pr\left[X = k\right] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

für alle $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Es gilt:

- $Exp\left[X\right] = n \cdot p$
- $Var\left[X\right] = n \cdot p \cdot (1-p)$

Binomialverteilung (Forts.)



$n = 40$

Binomialverteilung (Forts.)

Satz 9.1 Wenn $X \sim \text{Bin}(n_X, p)$ und $Y \sim \text{Bin}(n_Y, p)$, dann gilt für $Z = X + Y$, dass $Z \sim \text{Bin}(n_X + n_Y, p)$.

Geometrische Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $W_X = \mathbb{N}$ ist geometrisch verteilt mit dem Parameter p, symbolisch $X \sim \text{Geo}(p)$, falls

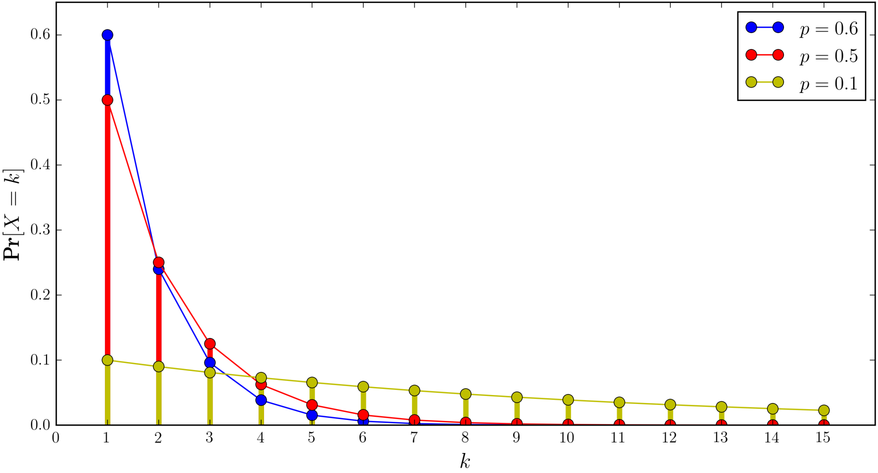
$$Pr\left[X = k\right] = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Es gilt:

- $Exp\left[X\right] = \frac{1}{p}$
- $Var\left[X\right] = \frac{1-p}{p^2}$

Geometrische Verteilung (Forts.)



Geometrische Verteilung (Forts.)

Satz 9.2 (Gedächtnislosigkeit) Falls $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, dann gilt

$$Pr\left[X > y + x \mid X > x\right] = Pr\left[X > y\right].$$

Poisson Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $W_X = \mathbb{N}_0$ ist Poisson verteilt mit dem Parameter λ, symbolisch $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, falls

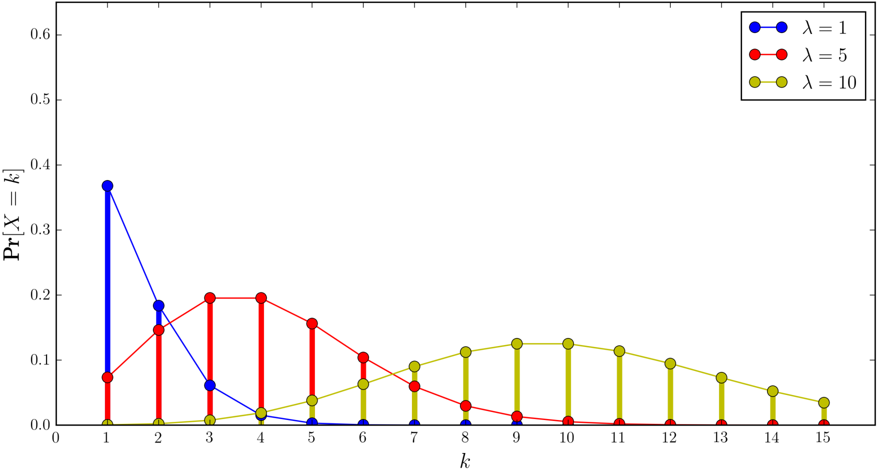
$$Pr\left[X = k\right] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Es gilt:

- $Exp\left[X\right] = \lambda$
- $Var\left[X\right] = \lambda$

Poisson Verteilung (Forts.)



Poisson Verteilung (Forts.)

Gesetz der seltenen Ereignisse: Für alle $\lambda \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Poisson Verteilung (Forts.)

Satz 9.5 (Summe von Poisson Verteilungen) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X_i \sim \text{Poi}(\lambda_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei $X = X_1 + \ldots + X_n$. Dann gilt: $X \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$.

Hypergeometrische Verteilung

Seien N, M, n näturliche Zahlen mit der Eigenschaft $M \leq N$ und $n \leq N$.

Die Zufallsvariable X ist hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M und n (symbolisch: $X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$), falls

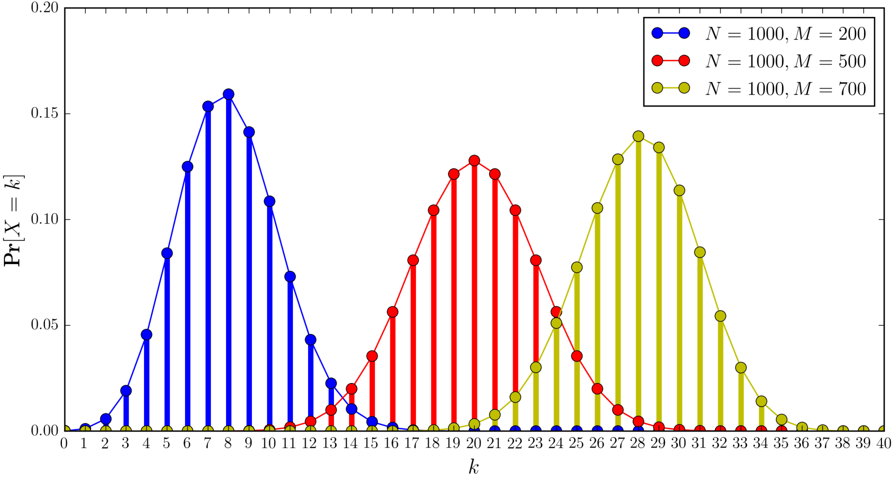
$$Pr\left[X = k\right] = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Es gilt:

- $Exp\left[X\right] = \frac{n \cdot M}{N}$
- $Var\left[X\right] = \frac{n \cdot M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

Hypergeometrische Verteilung (Forts.)



Markov Ungleichung

Satz 10.1 (Markov Ungleichung) Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt.

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$Pr[X \geq t] \leq \frac{Exp[X]}{t}.$$

Äquivalent:

$$Pr[X \geq t \cdot Exp[X]] \leq \frac{1}{t}.$$

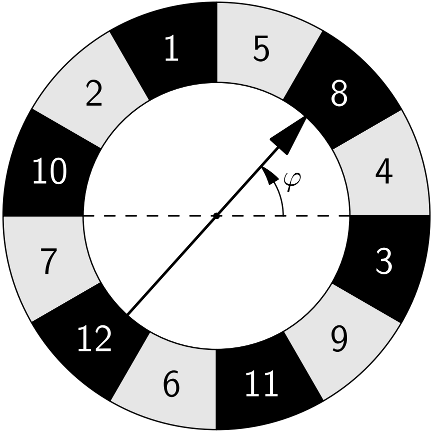
Ungleichung von Chebyshev

Satz 10.2 (Ungleichung von Chebyshev) Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$.

Dann gilt

$$Pr\left[|X - Exp[X]| \geq t\right] \leq \frac{Var[X]}{t^2}.$$

Beispiel Glücksrad



Stetige Zufallsvariable

Definition 11.2 (Stetige Zufallsvariable)
Eine stetige Zufallsvariable X ist definiert durch eine integrierbare Dichtefunktion $f_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1.$$

Die zu f_X gehörende Verteilungsfunktion F_X ist definiert als

$$F_X(x) = Pr\,[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Ereignis

Definition 11.3 (Ereignis)
Sei X eine stetige Zufallsvariable.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, die durch Vereinigung $A = \bigcup_k I_k$ abzählbar vieler paarweise disjunkter Intervalle beliebiger Art (offen, halboffen, geschlossen, einseitig unendlich) gebildet werden kann, heißt Ereignis.

Das Ereignis A tritt ein, wenn X einen Wert aus A annimmt. Die Wahrscheinlichkeit von A ist definiert als

$$Pr[A] = \int_A f_X(x)\, dx = \sum_k \int_{I_k} f_X(x)\, dx.$$

Erwartungswert und Varianz

Definition 11.7 (Erwartungswert und Varianz)
Sei X eine stetige Zufallsvariable. Der Erwartungswert von X ist

$$Exp[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\, dt,$$

falls das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f_X(t)\, dt$ endlich ist.

Die Varianz von X ist

$$\begin{aligned} Var[X] &= Exp\left[(X - Exp[X])^2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - Exp[X])^2 f_X(t)\, dt, \end{aligned}$$

wenn $Exp\left[(X - Exp[X])^2\right]$ existiert.

Formel zur Berechnung des Erwartungswerts

Satz 11.8 Sei X eine stetige Zufallsvariable und sei $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für die Zufallsvariable $Y = g(X)$ gilt:

$$Exp\,[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\, dt.$$

Gleichverteilung

Die stetige Zufallsvariable X ist gleichverteilt über dem Intervall $[a, b]$, wobei $a < b$, falls sie die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a; b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

besitzt. Die entsprechende Verteilung ist:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

Es gilt:

- $Exp\left[X\right] = \frac{a+b}{2}$
- $Var\left[X\right] = \frac{(a-b)^2}{12}$

Normalverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X ist normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}$, symbolisch $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, falls sie die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

besitzt. Hierbei ist $\exp(x) = e^x$. Anstatt $f_X(x)$ schreibt man auch $\varphi(x;\mu,\sigma)$.

$\mathcal{N}(0,1)$ nennt man die Standardnormalverteilung.

Normalverteilung (Forts.)

Die Verteilungsfunktion von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist

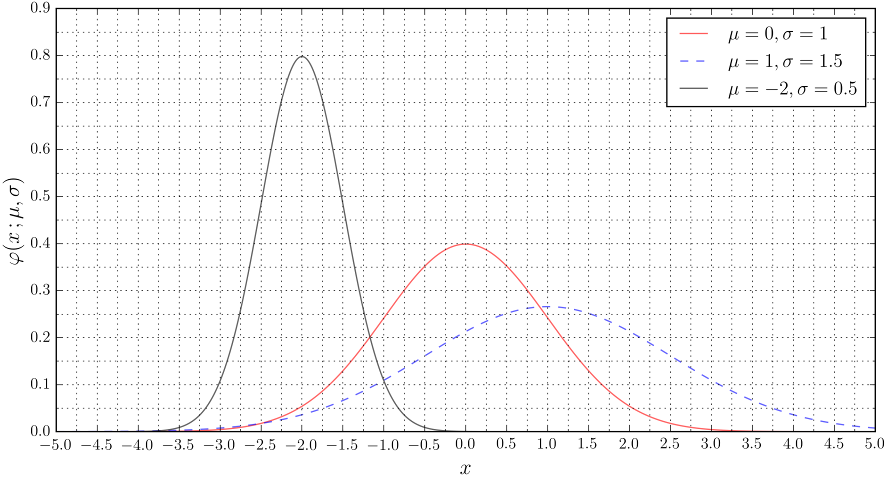
$$\Phi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Diese Funktion nennt man Gauß'sche Phi-Funktion. Falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, dann schreibt man kurz $\Phi(x)$.

Es gilt:

- $Exp[X] = \mu$
- $Var[X] = \sigma^2$

Normalverteilung (Forts.)



Transformation einer Normalverteilung

Satz 12.2 Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Dann gilt für beliebige $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Additivität der Normalverteilung

Satz 12.5 (Additivität der Normalverteilung) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und normalverteilt mit den Parametern μ_i und σ_i für $i = 1, \ldots, n$.

Dann ist die Zufallsvariable

$$Z = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$$

normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = a_1 \mu_1 + \ldots + a_n \mu_n$ und Varianz $\sigma^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + \ldots + a_n^2 \sigma_n^2$.

Exponentialverteilung

Eine Zufallsvariable X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, symbolisch $X \sim \mathcal{EXP}(\lambda)$, falls sie die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Die Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariable X ist für $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Für $x < 0$ ist $F_X(x) = 0$.

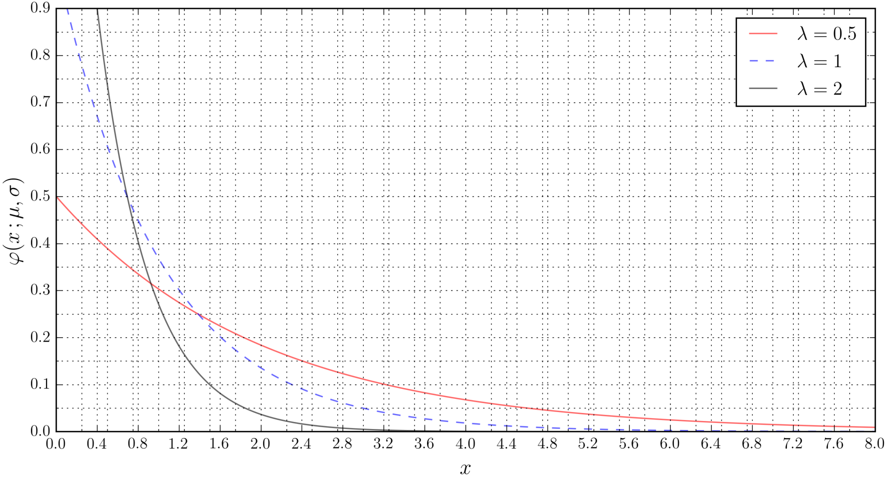
Exponentialverteilung (Forts.)

Angenommen, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Dann gilt:

- $Exp\,[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $Var\,[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Exponentialverteilung (Forts.)



Multiplikation mit einer Konstanten

Satz 12.7 Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ.

Für jedes $a > 0$ ist die Zufallsvariable $Y = aX$ exponentialverteilt mit Parameter $\frac{\lambda}{a}$.

Gedächtnislosigkeit

Satz 12.8 (Gedächtnislosigkeit) Eine stetige Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt:

$$Pr[X > x + y \mid X > y] = Pr[X > x]\,.$$

Minimum exponentialverteilter Zufallsvariablen

Satz 12.9 Gegeben sind die paarweise unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$.

Angenommen, X_i ist exponentialverteilt mit Parameter λ_i für $i = 1, \ldots, n$.

Dann ist die Zufallsvariable $X = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Der Zentrale Grenzwertsatz

Satz 13.1 (Zentraler Grenzwertsatz) Angenommen, die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von X_i existieren für $i = 1, \ldots, n$ und seien mit μ bzw. σ^2 bezeichnet, wobei $\sigma^2 > 0$ gelten soll.

Betrachte die Zufallsvariablen $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$ für $n \geq 1$.
Es gilt: Die Folge der Zufallsvariablen

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{\sigma^2 n}}$$

konvergiert gegen die Standardnormalverteilung. Formal: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} Pr[Z_n \leq x] = \Phi(x).$$

Grenzwertsatz von DeMoivre

Satz 13.3 (Grenzwertsatz von DeMoivre) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien Bernoulli-verteilt mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann gilt für die Zufallsvariable

$$H_n = X_1 + \ldots + X_n,$$

dass die Verteilung der Zufallsvariablen

$$Z_n = \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.