Prof. Dr. Christoph Karg
Hochschule Aalen

9.7.2018

Klausur zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2018

Name: ______________________________

Matr. Nr.: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Klausurergebnis			
Aufgabe 1 (15 Punkte)		Aufgabe 2 (15 Punkte)	
Aufgabe 3 (10 Punkte)		Aufgabe 4 (15 Punkte)	
Aufgabe 5 (25 Punkte)		Aufgabe 6 (10 Punkte)	
Aufgabe 7 (10 Punkte)			
Gesamt (100 Punkte)		**Note**	

Bearbeitungshinweise:

- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Überprüfen Sie bitte sofort nach Erhalt die Vollständigkeit der Unterlagen (14 Seiten).
- Bitte lassen Sie die Klausur zusammengeheftet.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Falls notwendig, dann benutzen Sie die Rückseite des jeweiligen Aufgabenblatts für Notizen und Entwürfe.
- Geben Sie bei Ihren Berechnungen Zwischenschritte und die Namen der verwendeten Formeln an.
- Geben Sie alle Wahrscheinlichkeitswerte auf 6 Stellen hinter dem Komma gerundet an.

Viel Erfolg!

Name: Jonas Thiel Matr. Nr.: ____________

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Die diskrete Zufallsvariable X wird durch folgende Wertetabelle definiert:

k	$Pr\left[X=k\right]$
2	0.12
5	0.09
7	0.23
8	0.31
12	0.17
15	0.08

a) Berechnen Sie Exp$[X]$.

$$\mathrm{Exp}[X] = 2 \cdot 0{,}12 + 5 \cdot 0{,}09 + 7 \cdot 0{,}23 + 8 \cdot 0{,}31 + 12 \cdot 0{,}17 + 15 \cdot 0{,}08$$

$$= 0{,}24 + 0{,}45 + 1{,}61 + 2{,}48 + 2{,}04 + 1{,}20$$

$$= 8{,}02$$

b) Berechnen Sie $\mathrm{Exp}[X^2]$.

$\mathrm{Exp}[X^2] = 2^2 \cdot 0{,}12 + 5^2 \cdot 0{,}09 + \ldots$

$= 76{,}32$

c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X]$.

$\mathrm{Var}[X] = 76{,}32 - 8{,}02^2$

$= 76{,}32 - 64{,}3204$

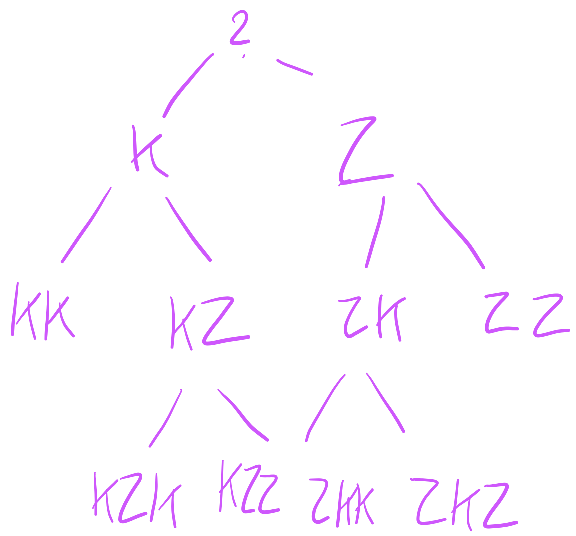
$= 11{,}9996$

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Eine faire Münze wird solange geworfen, bis zweimal Kopf (K) oder zweimal Zahl (Z) erscheint.

a) Modellieren Sie das Zufallsexperiment unter Verwendung eines Entscheidungsbaums.



b) Angenommen, der erste Münzwurf liefert Z. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, die Münze insgesamt dreimal geworfen werden muss?

Dreimaliger Münzwurf: $A = \{KZK, ZKZ, ZKK, KZZ\}$

Erster Wurf Z: $B = \{ZZ, ZKZ, ZKK\}$

$$P[A|Z] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

$$= \frac{\{ZKZ, ZKK\}}{\{ZZ, ZKZ, ZKK\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

c) Ist das Zufallsexperiment ein Laplace-Experiment? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nein

$$\left.\begin{array}{l} P[KZK] = \frac{1}{8} \\ P[ZZ] = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \lightning$$

Name: ______________________ Matr. Nr.: ______________________

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Die Zufallsvariable X wird durch das folgende C-Programm definiert:

```
int X(int w) {
  if (w % 2 == 0) {
    if (w % 5 == 0) {
      return 1;
    } else {
      return 3;
    }
  } else {
    switch (w) {
    case 7:
    case 33:
    case 81:
      return 20;
      break;
    case 5:
    case 20:
    case 25:
    case 75:
      return 4;
      break;
    default:
      return 7;
    }
  }
}
```

Die Eingaben w werden zufällig unter Gleichverteilung aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 100\}$ gezogen.

a) Erstellen Sie die Dichte und die Verteilung von X in tabellarischer Form:

x	$Pr[X = x]$	$Pr[X \leq x]$
1	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{100}$
3	$\frac{40}{100}$	$\frac{50}{100}$
4	$\frac{3}{100}$	$\frac{53}{100}$
7	$\frac{44}{100}$	$\frac{97}{100}$
20	$\frac{3}{100}$	$\frac{100}{100}$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

$$\mathrm{Exp}[X] = (1 \cdot 10 + 3 \cdot 40 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 44 + 20 \cdot 3) : 100$$

$$= 10 + 120 + 12 + (280 + 28) + 60) : 100$$

$$= 510 : 100$$

$$= 5{,}1$$

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 4. (15 Punkte)

Die Rot-Grün-Sehschwäche ist eine angeborene Farbfehlsichtigkeit, von der 0.8% der Mädchen und 9% der Jungen betroffen sind. Laut dem Statistischen Bundesamt ist ein neugeborenes Kind mit einer Wahrscheinlichkeit von 49% ein Mädchen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 51% ein Junge.

a) Geben Sie unter Verwendung der Ereignisse

- $M \rightsquigarrow$ Das Kind ist ein Mädchen
- $S \rightsquigarrow$ Das Kind leidet unter der Rot-Grün-Sehschwäche

die in obigem Text enthaltenen (eventuell bedingten) Wahrscheinlichkeiten an.

$P[M] = 0{,}49$

$P[\bar{M}] = 0{,}51$

$P[S|M] = 0{,}008$

$P[S|\bar{M}] = 0{,}09$

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein neugeborenes Kind unter der Rot-Grün-Sehschwäche leidet?

Hinweis: Der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit könnte hilfreich sein.

$P[S] = P[S|M] \cdot P[M] + P[S|\bar{M}] \cdot P[\bar{M}]$

$= 0{,}04982$

c) Eine Mutter meldet ihr Kind in einem Kindergarten an und erwähnt dabei, dass das Kind unter der Rot-Grün-Sehschwäche leidet. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind ein Mädchen ist?

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Bayes für diese Aufgabe.

$$P[M|S] = \frac{P[S|M] \cdot P[M]}{P[S]}$$

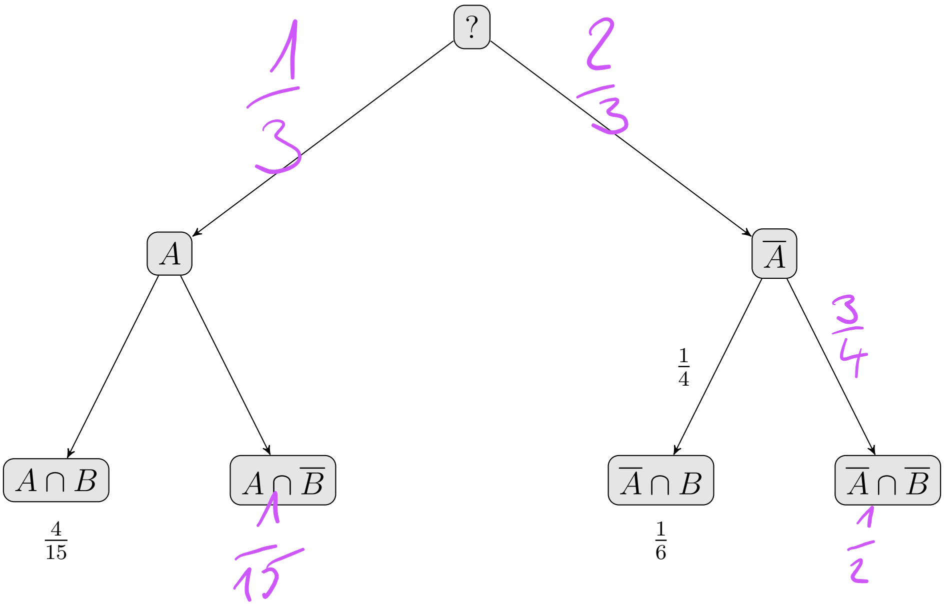
$$= \frac{0{,}008 \cdot 0{,}49}{0{,}04982}$$

$$= 0{,}078683$$

Name: ______________________________ Matr. Nr.: __________________________

Aufgabe 5. (25 Punkte)

Gegeben ist der folgende Entscheidungsbaum, der anhand der Ereignisse A und B erstellt wurde. Leider sind die Wahrscheinlichkeiten nicht komplett in den Baum eingetragen worden.



Das Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung der fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

Hinweis. Geben Sie bei jeder Teilaufgabe den Ansatz an, auf dem Ihre Berechnung basiert.

a) Berechnen Sie $Pr[B]$.

$$Pr[B] = Pr[A \cap B] + Pr[\overline{A} \cap B]$$
$$= \frac{4}{15} + \frac{1}{6}$$
$$= \frac{8}{30} + \frac{5}{30} = \frac{13}{30}$$

b) Berechnen Sie $Pr[\overline{B} \mid \overline{A}]$.

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

c) Berechnen Sie $Pr\left[\overline{A}\right]$.

$$x \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

d) Berechnen Sie $Pr\left[A \cap \overline{B}\right]$.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = Pr\left[\overline{A} \cap \overline{B}\right]$$

$$Pr\left[A \cap \overline{B}\right] = 1 - \frac{1}{2} - \frac{4}{15} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{15}$$

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

e) Sind die Ereignisse A und B unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{4}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{30}$

$\frac{4}{15} = \frac{13}{90}$ ↯ Nein

Name: Jonas Thiele Matr. Nr.: 88490

Aufgabe 6. (10 Punkte)

Die Zufallsvariable X misst die Antwortzeit einer SQL-Anfrage an einen Datenbankserver in Millisekunden. Statistische Analysen haben ergeben, dass die mittlere Antwortzeit bei 200 Millisekunden liegt.

a) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass die nächste SQL-Anfrage mindestens 400 Millisekunden dauert.

Ungleichung von Markov

$$Pr[X \geq 400] \leq \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

b) Angenommen, die Standardabweichung von X ist 50 Millisekunden. Lässt sich mit dieser Information die in Teilaufgabe a gesuchte Wahrscheinlichkeit besser abschätzen? Falls ja, wie?

Ungleichung von Chebyshev

$$Pr[|X-200| \geq 200] \leq \frac{50^2}{200^2} = \frac{2500}{40000} = 0{,}0\overline{625}$$

Name: ______________________________ Matr. Nr.: _________________________

Aufgabe 7. (10 Punkte)

Gegeben ist die normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert $\mu = -2$ und der Varianz $\sigma^2 = 49$. Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$Pr\,[\,-4 \le X \le -1\,]\,.$$

Nutzen Sie zur Berechnung die Wertetabelle der Standardnormalverteilung.

$\mu = -2 \quad \sigma = 7$

$Pr[X \le -4]$

$z = \frac{-4+2}{7}$

$z = \frac{-2}{7}$

$\Phi\left(\frac{-2}{7}\right)$

$= 1 - \Phi\left(\frac{2}{7}\right)$

$= 1 - 0{,}614092$

$= 0{,}385908$

$Pr[X \le -1]$

$z = \frac{-1+2}{7}$

$z = \frac{1}{7}$

$\Phi\left(\frac{1}{7}\right)$

$= 0{,}555670$

$0{,}555670 - 0{,}385908$

$= \underline{\underline{0{,}169762}}$