Wahrscheinlichkeitstheorie & Statistik — Übungsblatt 1

Thema: Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung I — Wintersemester 2024/2025
Prof. Dr. Christoph Karg — Hochschule Aalen

Aufgabe 1. Eine Lostrommel enthält jeweils fünf rote, blaue und gelbe Kugeln. Pro Farbe sind die Kugeln mit den Ziffern $1, 2, 3, 4$ und 5 beschriftet. Eine Glücksfee zieht aus der Lostrommel nacheinander zwei Kugeln. Eine bereits gezogene Kugel wird nicht in die Trommel zurück gelegt.

a) Modellieren Sie dieses Zufallsexperiment als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei rote Kugeln gezogen werden?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine blaue und eine gelbe Kugel gezogen?

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der gezogenen Kugeln mit der Ziffer 2 beschriftet ist?

e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kugeln mit der Ziffernsumme 4 gezogen werden?

Aufgabe 2. Max Zufallszahl muss auf seinem Weg vom Studentenwohnheim zur Hochschule Aalen drei Fußgängerampeln überqueren. Die erste Ampel ist mit Wahrscheinlichkeit 0.7 rot, die zweite mit Wahrscheinlichkeit 0.3 und die dritte mit Wahrscheinlichkeit 0.45.

a) Modellieren Sie den Sachverhalt als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max an genau zwei Ampeln warten muss?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss Max höchstens einmal an einer Ampel warten?

Aufgabe 3. Sechs Tassen und sechs Untertassen sollen paarweise kombiniert werden. Es gibt jeweils zwei rote, zwei blaue und zwei gelbe Tassen und Untertassen. Die Anordnung der Untertassen ist `BBRRGG`, wobei `B` für Blau, `R` für Rot und `G` für Gelb steht. Die Tassen werden zufällig auf die Untertassen platziert. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei keiner der Kombinationen die Farbe der Tasse mit der Farbe der Untertasse übereinstimmt? Modellieren Sie zur Beantwortung der Frage den Sachverhalt mit einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

Aufgabe 4. Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine Folge von unendlich vielen Ereignissen mit der Eigenschaft, dass $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$. Sei $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Dann ist $Pr\,[\,A\,] = \lim_{i\to\infty} Pr\,[\,A_i\,]$.

b) Sei $B_1, B_2, B_3, \ldots$ eine Folge von unendlich vielen Ereignissen mit der Eigenschaft, dass $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$. Sei $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$. Dann ist $Pr\,[\,B\,] = \lim_{i\to\infty} Pr\,[\,B_i\,]$.