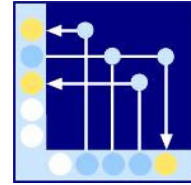




Hochschule Aalen

Fakultät Elektronik und Informatik
Studienbereich Informatik



Algorithmen und Datenstrukturen 2

Vorlesung im Wintersemester 2024/2025

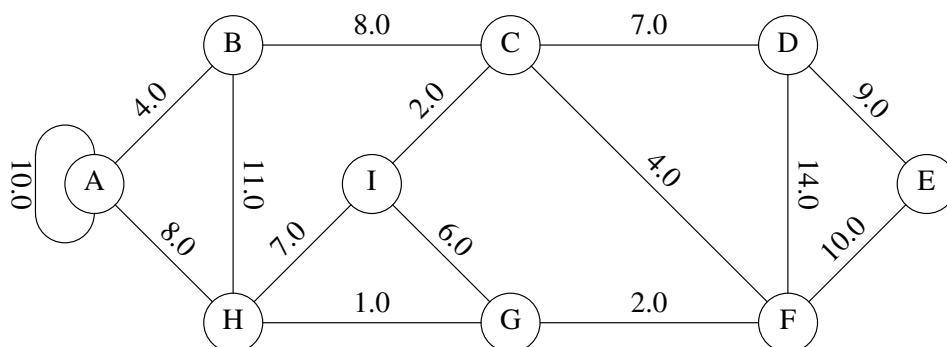
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

5. Übungsblatt (19. Dezember 2024)

Aufgabe 11: Minimale Spannbäume

Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal und mit dem modifizierten Algorithmus von Prim mit Startknoten E jeweils alle möglichen minimalen Spannbäume des folgenden Graphen!

„Alle möglichen“ bedeutet: Wenn es an einer Stelle des Algorithmus mehrere Möglichkeiten gibt, soll der Algorithmus je einmal für jede Möglichkeit ausgeführt werden.





	v	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Initialisierung	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞ \perp	∞ \perp	∞ \perp	∞ \perp	\perp	∞ \perp	∞ \perp	∞ \perp	∞ \perp
1. Durchlauf $u = E$	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞ \perp	∞ \perp	∞ \perp	9 E		10 E	∞ \perp	∞ \perp	∞ \perp
2. Durchlauf $u = D$	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞ \perp	∞ \perp	7 D			10 E	∞ \perp	∞ \perp	∞ \perp
3. Durchlauf $u = C$	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞ \perp	8 C				4 C	∞ \perp	∞ \perp	2 C
4. Durchlauf $u = I$	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞ \perp	8 C				4 C	6 I	7 I	
5. Durchlauf $u = F$	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞ \perp	8 C					2 F	7 I	
6. Durchlauf $u = G$	$\delta(v)$ $\pi(v)$	∞ \perp	8 C						1 G	
7. Durchlauf $u = H$	$\delta(v)$ $\pi(v)$	8 H	8 C							
8. Durchlauf (Variante 1) $u = A$	$\delta(v)$ $\pi(v)$		4 A							
9. Durchlauf (Variante 1) $u = B$	$\delta(v)$ $\pi(v)$									
8. Durchlauf (Variante 2) $u = B$	$\delta(v)$ $\pi(v)$	4 B								
9. Durchlauf (Variante 2) $u = A$	$\delta(v)$ $\pi(v)$									

Im 8. Durchlauf kann entweder A (Variante 1) oder B (Variante 2) aus der Vorrangwarteschlange entnommen werden.

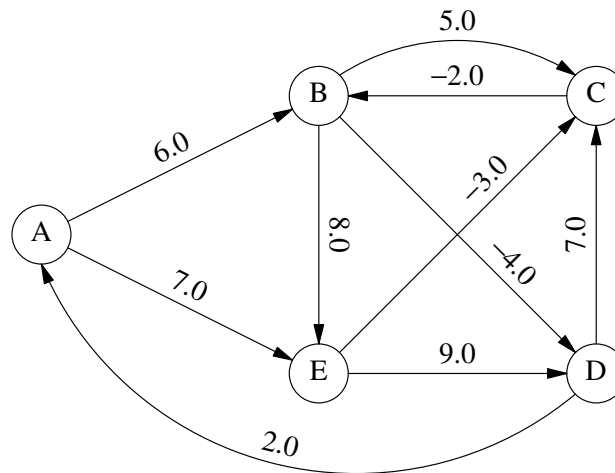
Der minimale Spannbaum besteht dann aus den Kanten

- { H, A }, { A, B }, { D, C }, { E, D }, { C, F }, { F, G }, { G, H }, { C, I } (Variante 1)
- { B, A }, { C, B }, { D, C }, { E, D }, { C, F }, { F, G }, { G, H }, { C, I } (Variante 2)



Aufgabe 12: Algorithmus von Bellman und Ford

Gegeben sei der folgende Graph:



Führen Sie auf diesem Graphen den Algorithmus von Bellman und Ford mit Startknoten A aus. Durchlaufen Sie die Kanten dabei jeweils in alphabetischer Reihenfolge: (A, B), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), ...

Ändern Sie das Gewicht der Kante (D, A) von 2 auf 1 und wiederholen Sie dann die Ausführung des Algorithmus!



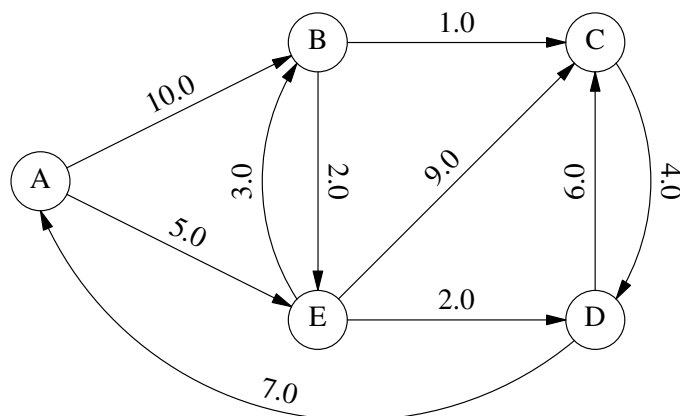
	v	A	B	C	D	E
Initialisierung	$\delta(v)$	0	∞	∞	∞	∞
	$\pi(v)$	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
1. Durchlauf	$\delta(v)$	0	6	4	2	7
	$\pi(v)$	\perp	A	E	B	A
2. Durchlauf	$\delta(v)$	0	2	4	2	7
	$\pi(v)$	\perp	C	E	B	A
3. Durchlauf (original)	$\delta(v)$	0	2	4	-2	7
	$\pi(v)$	\perp	C	E	B	A
4. Durchlauf (original)	$\delta(v)$	0	2	4	-2	7
	$\pi(v)$	\perp	C	E	B	A
3. Durchlauf (geändert)	$\delta(v)$	-1	2	4	-2	7
	$\pi(v)$	D	C	E	B	A
4. Durchlauf (geändert)	$\delta(v)$	-1	2	3	-2	6
	$\pi(v)$	D	C	E	B	A

Beim geänderten Graphen mit $\rho(D, A) = 1$ ist A, E, C, B, D, A ein negativer Zyklus mit Gesamtgewicht -1. In diesem Fall bricht der Algorithmus am Ende ab, weil für die Kante (C, B) gilt:
 $\delta(C) + \rho(C, B) = 3 + (-2) = 1 < 2 = \delta(B)$.



Aufgabe 13: Algorithmus von Dijkstra

Führen Sie auf dem folgenden Graphen den Algorithmus von Dijkstra mit Startknoten A aus:





	v	A	B	C	D	E
Initialisierung	$\delta(v)$	0	∞	∞	∞	∞
	$\pi(v)$	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
$u = A$	$\delta(v)$		10	∞	∞	5
	$\pi(v)$		A	\perp	\perp	A
$u = E$	$\delta(v)$		8	14	7	
	$\pi(v)$		E	E	E	
$u = D$	$\delta(v)$		8	13		
	$\pi(v)$		E	D		
$u = B$	$\delta(v)$			9		
	$\pi(v)$			B		
$u = C$	$\delta(v)$					
	$\pi(v)$					



Führen Sie den Algorithmus von Dijkstra auch – unzulässigerweise – auf dem Graphen aus Aufgabe 12 aus und vergleichen Sie die Ergebnisse!



	v	A	B	C	D	E
Initialisierung	$\delta(v)$	0	∞	∞	∞	∞
	$\pi(v)$	\perp	\perp	\perp	\perp	\perp
$u = A$	$\delta(v)$		6	∞	∞	7
	$\pi(v)$		A	\perp	\perp	A
$u = B$	$\delta(v)$			11	2	7
	$\pi(v)$			B	B	A
$u = D$	$\delta(v)$			9		7
	$\pi(v)$			D		A
$u = E$	$\delta(v)$			4		
	$\pi(v)$			E		
$u = C$	$\delta(v)$					
	$\pi(v)$					

Da der Graph aus Aufgabe 12 Kanten mit negativem Gewicht enthält, darf der Algorithmus von Dijkstra eigentlich nicht verwendet werden. Tatsächlich sind die von ihm berechneten Werte $\delta(B)$ und $\delta(E)$ falsch.



Aufgabe 14: Algorithmus von Floyd und Warshall

Führen Sie den Algorithmus von Floyd und Warshall auf dem Graphen von Aufgabe 12 aus!



Init.	A	B	C	D	E
A	0	6	∞	∞	7
B	∞	0	5	-4	8
C	∞	-2	0	∞	∞
D	2	∞	7	0	∞
E	∞	∞	-3	9	0

$k = 1$	A	B	C	D	E
A	0	6	∞	∞	7
B	∞	0	5	-4	8
C	∞	-2	0	∞	∞
D	2	8	7	0	9
E	∞	∞	-3	9	0

$k = 2$	A	B	C	D	E
A	0	6	11	2	7
B	∞	0	5	-4	8
C	∞	-2	0	-6	6
D	2	8	7	0	9
E	∞	∞	-3	9	0

$k = 3$	A	B	C	D	E
A	0	6	11	2	7
B	∞	0	5	-4	8
C	∞	-2	0	-6	6
D	2	5	7	0	9
E	∞	-5	-3	-9	0

$k = 4$	A	B	C	D	E
A	0	6	9	2	7
B	-2	0	3	-4	5
C	-4	-2	0	-6	3
D	2	5	7	0	9
E	-7	-5	-3	-9	0

$k = 5$	A	B	C	D	E
A	0	2	4	-2	7
B	-2	0	2	-4	5
C	-4	-2	0	-6	3
D	2	4	6	0	9
E	-7	-5	-3	-9	0

