Name	Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Hochschule Aalen **Fakultät für Elektronik und Informatik**

Studiengänge: DS, IN-AI, IN-MI, IN-SE, IN-ITS

Vorlesung: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

Dr.-Ing. Miriam Hommel 05. Juli 2023

Prüfung Sommersemester 2023

Wichtige Hinweise:

- Bearbeitungszeit: **90 min**
- Erlaubte Hilfsmittel: **ein eigenhändig geschriebenes DIN-A4-Blatt** (2 Seiten)
- Tragen Sie oben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihren **Studiengang** ein.
- Schreiben Sie **nicht** in **roter Farbe** oder mit **Bleistift**.
- Bei Berechnungen muss der **Lösungsweg ausführlich und nachvollziehbar** dokumentiert sein. Die Angabe des Ergebnisses allein ist nicht ausreichend.
- **Vereinfachen** Sie alle Ergebnisse soweit wie möglich.
- Lassen Sie den **Prüfungsbogen** bitte unbedingt **zusammengeheftet**. Alle Aufgabenblätter sind am Ende abzugeben.
- **Schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter** (ggf. auch auf die Rückseite der entsprechenden Aufgabe). Sollte der vorgesehene Platz nicht reichen, können Sie zusätzliche Blätter abgeben. Schreiben Sie in diesem Fall **auf alle zusätzlichen Blätter** Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der zugehörigen Aufgabe**. **Vermerken** Sie außerdem **bei der Aufgabe**, dass ein Teil der Lösung auf einem extra Blatt steht.
- Die Klausur besteht aus insgesamt 13 Seiten mit 14 Aufgaben. **Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Blätter erhalten haben und ob diese gut lesbar sind.**
- Bei jedem Täuschungsversuch wird die Prüfungsleistung mit „nicht ausreichend“ (5,0) bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Summe
max.	4	3	3	5	8,5	4,5	8	8	6	6	7	10,5	8	8,5	90
Punkte															

Aufgabe 1 (1,5 + 1,5 + 1 = 4 Punkte):

Mit welchen mathematischen Symbolen werden die folgenden Mengen beschrieben?

Geben Sie außerdem die Elemente der Mengen in mathematischer Schreibweise an.

a) Menge der zu 9 teilerfremden Reste in $\mathbb{Z}_9$

b) Äquivalenzklasse von $5 \text{ modulo } 8$

c) Menge aller (positiven) Teiler von -10

a) $\mathbb{Z}_9^* = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$ 1.0
0.5

b) $[5]_{\equiv 8} = \{8 \cdot t + 5 \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 1.0
0.5

c) $T_{-10} = \{1; 2; 5; 10\}$ 0.5
0.5

Aufgabe 2 (0,5 + 1 + 1,5 = 3 Punkte):

Berechnen Sie (geben Sie mindestens einen Zwischenschritt an):

a) $9 \bmod 3$

b) $-15 \bmod 4$

c) $(25k + 23) \bmod (5k + 4)$ mit $k \in \mathbb{N}$

a) $9 \bmod 3 = 9 - \lfloor \frac{9}{3} \rfloor \cdot 3 = 9 - 3 \cdot 3 = 9 - 3 = \underline{\underline{3}}$ 0.5

b) $-15 \bmod 4 = -15 - \lfloor \frac{-15}{4} \rfloor \cdot 4 = -15 - (-4) \cdot 4 = -15 + 16 = \underline{\underline{1}}$ 0.5
0.5

c) $(25k + 23) \bmod (5k + 4) = 25k + 23 - \lfloor \frac{25k + 23}{5k + 4} \rfloor \cdot (5k + 4)$ 0.5

$= 25k + 23 - \lfloor \frac{25k + 20 + 3}{5k + 4} \rfloor \cdot (5k + 4)$

$= 25k + 23 - \lfloor \frac{5(5k + 4) + 3}{5k + 4} \rfloor \cdot (5k + 4)$

$= 25k + 23 - 5 \cdot (5k + 4) = 25k + 23 - 25k - 20$
0.5

$= \underline{\underline{3}}$ 0.5

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Geben Sie die Primfaktorzerlegung von $\binom{15}{8}$ an.

Hinweis: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\binom{15}{8} = \frac{15!}{8!\,(15-8)!} \quad 0.5 \quad = \frac{15!}{8!\;7!} = \frac{\cancel{8!} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{10}^{5} \cdot 11 \cdot \cancel{12}^{3} \cdot 13 \cdot \cancel{14}^{\cancel{2}} \cdot \cancel{15}^{\cancel{3}}}{\cancel{8!} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7}} \quad 1.0$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 13 = \underline{\underline{3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}} \quad 1.5$$

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Berechnen Sie die Prüfziffer p des folgenden EAN-Codes (Europäische Artikelnummer):

22 00209 47255 p

$$(1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 2 + 3\cdot 0 + 1\cdot 9 + 3\cdot 4 + 1\cdot 7 + 3\cdot 2 + 1\cdot 5 + 3\cdot 5 + p) \bmod 10 = 0 \quad 1.5$$

$$(2 + 6 + 2 + 9 + 12 + 7 + 6 + 5 + 15 + p) \bmod 10 = 0 \quad 1.0$$

$$(19 + 25 + 20 + p) \bmod 10 = 0$$

$$(64 + p) \bmod 10 = 0 \quad 1.5$$

$$\Rightarrow p = 6 \quad 1.0$$

Die Prüfziffer lautet: $\underline{\underline{6}}$

Aufgabe 5 (1 + 7,5 = 8,5 Punkte):

a) Wann besitzt die Gleichung $cx \equiv d \pmod{e}$ keine eindeutige Lösung x mit $x \in \mathbb{Z}_e$?

b) Berechnen Sie die Lösung der Kongruenz $50x + 7 \equiv 43x + 46 \pmod{26}$ in $\mathbb{Z}_{26}$.

Geben Sie außerdem die Menge aller Lösungen dieser Kongruenz in $\mathbb{Z}$ an.

a) Wenn $c \not\perp e$ und somit kein Inverses existiert. 1.0

b) $50x + 7 \equiv 43x + 46 \pmod{26}$

$7x \equiv \underset{1.0}{39} \equiv \underset{0.5}{13} \pmod{26}$

Berechnung des Inversen zu 7 modulo 26 (existiert, da $7 \perp 26$)

m	n	$\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$	x	y
7	26	3	$-2-9=-11$	3
5	7	1	$1-(-2)=3$	-2
2	5	2	-2	1
1	2	2	1	0
0	1		0	1

2.0

Probe: $-11 \cdot 7 + 3 \cdot 26 = -77 + 78 = 1$ ✓

Inverses zu 7 modulo 26: $-11 \bmod 26 = 15$ 0.5

Kongruenz mit Inversem bzw. -11 umformen:

$15 \cdot 7x \equiv 15 \cdot 13 \pmod{26}$ 0.5

$x \equiv \underset{1.0}{195} \equiv \underset{0.5}{13} \pmod{26}$

Lösung in $\mathbb{Z}_{26}$: $x = \underset{0.5}{13}$ bzw. $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}_{26}} = \{13\}$

alle Lösungen in $\mathbb{Z}$: $[13]_{\equiv 26} = \{13 + t \cdot 26 \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 1.0

Aufgabe 6 (0,5 + 4,0 = 4,5 Punkte):

a) Wie viele Elemente enthält $\mathbb{Z}_{350}$?

b) Wie viele natürliche Zahlen kleiner als 350 sind teilerfremd zu 350?

a) $|\mathbb{Z}_{350}| = 350$ 0.5

b) Anzahl der natürlichen Zahlen, ~~die~~ kleiner als 350, die teilerfremd zu 350 sind $= \varphi(350) = |\mathbb{Z}_{350}^*|$ 0.5

PFZ von 350 : $350 = 35 \cdot 10 = \cancel{\frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 5}} \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ 1.5

$\varphi(350) = 350 \cdot (1-\frac{1}{2}) \cdot (1-\frac{1}{5}) \cdot (1-\frac{1}{7}) = \cancel{2} \cdot 5^{\cancel{2}} \cdot \cancel{7} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{6}{\cancel{7}}$ 0.5 0.5

$= 5 \cdot 4 \cdot 6 = 20 \cdot 6 = 120$ 0.5

120 natürliche Zahlen kleiner als 350 sind teilerfremd zu 350. 0.5

Aufgabe 7 (8 Punkte):

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$6x + 5 \equiv 5x + 12 \quad (\mathrm{mod}\ 8)$$
$$2x - 4 \equiv x - 3 \quad (\mathrm{mod}\ 9)$$

Umformen der Kongruenzen

$x \equiv 7 \quad (\mathrm{mod}\ 8)$ 1.0

$x \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 9)$ 1.0

Chinesischer Restsatz:

- Prüfe Voraussetzung: $ggT(8;9) = 1$ bzw. $8 \perp 9$

  $\Rightarrow$ anwendbar 0.5

- $m = m_1 \cdot m_2 = 8 \cdot 9 = 72$ 1.0

  $k_1 = m_2 = 9$, $k_2 = m_1 = 8$

- Bestimmung der Inversen:

  $9x_1 \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 8) \Rightarrow x_1 = 1$ 1.0

  $8x_2 \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 9) \Rightarrow x_2 = -1 \equiv 8$ 1.0 $(\mathrm{mod}\ 9)$

  $1 \cdot 9 - 1 \cdot 8 = 1$ bzw. $8 \cdot 8 - 7 \cdot 9 = 1$

- Bestimmung einer Lösung:

  $x = a_1 m_2 x_1 + a_2 m_1 x_2 = 7 \cdot 9 \cdot 1 + 1 \cdot 8 \cdot (-1)$ 1.0

  $= 63 - 8 = 55$ 0.5

- Einfachste Lösung: $x \bmod m = 55 \bmod 72 = 55$

- alle Lösungen: $55 + t \cdot 72$ mit $t \in \mathbb{Z}$ bzw. $127 + k \cdot 72$ mit $k \in \mathbb{Z}$

  $\mathbb{L} = \{55 + t \cdot 72 \mid t \in \mathbb{Z}\} = [55]_{\equiv 72}$ 1.0

Aufgabe 8 (8 Punkte):

Der öffentliche RSA-Schlüssel von Alice lautet $(29; 65)$.

Bestimmen Sie zunächst den privaten Schlüssel und führen Sie damit anschließend die Entschlüsselung der Nachricht 3 durch.

öffentlicher Schlüssel : $(29; 65)$, d.h. $e = 29$, $N = 65 = 5 \cdot 13$ 0.5

$p = 5$, $q = 13$ 0.5 0.5

$\varphi(N) = \varphi(65) = (p-1)(q-1) = 4 \cdot 12 = 48$ 1.0

Gesucht: d für privaten Schlüssel mit

$e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$

$29\, d \equiv 1 \pmod{48}$ 0.5

Bestimmung des Inversen zu 29 modulo 48:

m	n	$\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$	x	y
29	48	1	$2-(-3)=5$	-3
19	29	1	$-1-2=-3$	2
10	19	1	$1-(-1)=2$	-1
9	10	1	-1	1
1	9	9	1	0
0	1		0	1

2.0

Probe: $5 \cdot 29 + (-3) \cdot 48$

$= 145 - 144$

$= 1$ ✓

$d = 5$

Privater Schlüssel : $(d; N) = (5; 65)$ 1.0

Entschlüsselung :

$T = G^d \bmod N = 3^5 \bmod 65 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \bmod 65$ 0.5

$= 81 \cdot 3 \bmod 65 = 16 \cdot 3 \bmod 65 = 48 \bmod 65 = \underline{\underline{48}}$ 1.5

Aufgabe 9 (1 + 1 + 4 = 6 Punkte):

$(\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine Abelsche Gruppe. Das bedeutet, es existiert ein neutrales Element und zu jedem Element der Menge $\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$ ein inverses Element.

a) Geben Sie die Elemente der Menge $\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$ in Mengenschreibweise an.

b) Bestimmen Sie das neutrale Element der Struktur.

c) Bestimmen Sie für jedes Element der Menge $\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$ das inverse Element.

Hinweis: Die Multiplikation ist dabei modular zu verstehen, d.h. $(a \cdot b) \bmod 5$

a) $\mathbb{Z}_5\backslash\{0\} = \{1; 2; 3; 4\}$ 1.0

b) Neutrales Element: $e = 1$ 1.0, da $a \cdot 1 \bmod 5 = 1 \cdot a \bmod 5$
$= a \bmod 5$

c) Inverses Element zu

- 1 : $a^{-1} = 1$ 1.0, da $1 \cdot 1 \bmod 5 = 1 = e$
- 2 : $a^{-1} = 3$ 1.0, da $2 \cdot 3 \bmod 5 = 6 \bmod 5 = 1 = e$
- 3 : $a^{-1} = 2$ 1.0, da $3 \cdot 2 \bmod 5 = 6 \bmod 5 = 1 = e$
- 4 : $a^{-1} = 4$ 1.0, da $4 \cdot 4 \bmod 5 = 16 \bmod 5 = 1 = e$

Aufgabe 10 (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 = 6 Punkte):

Sei A eine 3×5-Matrix und B eine 5×3-Matrix.

Welche der folgenden Ausdrücke sind definiert, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Geben Sie für die definierten Ausdrücke die Dimension der Ergebnismatrix an.

a) $A - B$

b) $A + B^T$

c) $B \cdot A$

d) $A^T \cdot B$

$A: 3 \times 5$, $B: 5 \times 3$

a) $A - B$: nicht definiert, da A und B unterschiedliche 0.5 Dimensionen haben 1.0

b) $A + B^T$: $3 \times 5 - 3 \times 5$: definiert, 0.5 da A und B^T die gleiche Dimension haben 0.5

Ergebnismatrix: 3×5 0.5

c) $B \cdot A$: $5 \times \underbrace{3 \cdot 3}_{L = J} \times 5$: definiert, 0.5 da Spaltenanzahl von B $(=3)$ $=$ Zeilenanzahl von A $(=3)$ 0.5

Ergebnismatrix: 5×5 0.5

d) $A^T \cdot B$: $5 \times \underbrace{3 \cdot 5}_{L \neq J} \times 3$: nicht definiert, 0.5 da Spaltenanzahl von A^T $(=3)$ (bzw. Zeilenanzahl von A) 0.5 $\neq$ Zeilenanzahl von B $(=5)$ 0.5

Aufgabe 11 (7 Punkte):

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die drei Vektoren linear abhängig sind, indem Sie rechnerisch eine nicht-triviale Linearkombination $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = o$ zur Darstellung des Nullvektors o bestimmen.

Sei $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 0.5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |2Z_2 + Z_1 \\ |2Z_3 - Z_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ 1.0 1.0

0.5

Z_3: λ_3 frei wählbar : $\lambda_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 1.0

Z_2: $4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 4\lambda_2 + 4\alpha = 0$

$\lambda_2 = -\alpha$ 1.0

Z_1: $2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 2\lambda_1 + 2\alpha + 2\alpha = 2\lambda_1 + 4\alpha = 0$

$\lambda_1 = -2\alpha$ 1.0

z.B. $\alpha = 1$: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$:

$-2v_1 - v_2 + v_3 = 0$ 1.0

$$-2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12 (10,5 Punkte):

Lösen Sie die Matrixgleichung $A \cdot B \cdot X + C = D$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

nach X auf und berechnen Sie X.

$$A \cdot B \cdot X + C = D$$
$$AB X = D - C \quad 1.0$$
$$B X = A^{-1}(D-C)$$
$$X = B^{-1}A^{-1}(D-C) \quad 2.0$$

Bestimmung von A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) |3z_2 - z_1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) |-2z_2 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) |:3$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad 2.0$$

Bestimmung von B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) |\cdot 3z_2 - z_1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) |-z_2 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:6 \\ |:3 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1 \end{array}\right) \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.0$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & -13/6 \\ -4/3 & 11/3 \end{pmatrix} \quad 2.0$$

$$D - C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.0$$

$$X = B^{-1}A^{-1}(D-C) = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/6 & -13/6 \\ -4/3 & 11/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -8 & 22 \end{pmatrix} \quad 0.5$$

Aufgabe 13 (1 + 1,5 + 2 + 3,5 = 8 Punkte):

a) Berechnen Sie das Standardskalarprodukt der beiden Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie die Länge des Vektors $u = \begin{pmatrix} 3a \\ -a \\ -5a \\ a \end{pmatrix}$.

c) Geben Sie den Einheitsvektor an, der dieselbe Richtung hat wie der Vektor $v = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

d) Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein?

Hinweis:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

a) $\langle a, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 3 + (-4) \cdot 1 = -3 - 6 - 4 = \underline{\underline{-13}}$ 0.5 0.5

b) $\|u\| = \left\| \begin{pmatrix} 3a \\ -a \\ -5a \\ a \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9a^2 + a^2 + 25a^2 + a^2}$ 0.5 $= \sqrt{36a^2}$ 0.5 $= \underline{\underline{6a}}$ 0.5

c) $v_0 = \frac{v}{\|v\|}$ 0.5 $= \frac{1}{\sqrt{64 + 1 + 16}} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{81}} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}}$ 1.5

d) $\cos \varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$ 0.5 $= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{4+0+4} \sqrt{1+1+0}} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}$ 0.5 0.5 0.5 $= \frac{2}{\sqrt{16}}$

$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 1.0

$\Rightarrow \varphi = \sphericalangle(a, b) = \underline{\underline{60°}}$ 0.5

Aufgabe 14 (8,5 Punkte):

Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie zum betragsmäßig <u>kleinsten</u> Eigenwert den Eigenvektor sowie den Eigenraum (<u>Hinweis:</u> nur zu diesem Eigenwert).

Eigenwerte erfüllen die Gleichung $\det(A - \lambda E_2) = 0$. 1.0

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}_{0.5} = (3-\lambda)(5-\lambda) - (-3)(-1) \underset{0.5}{=} 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 3$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 12_{0.5} \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1;2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm \overbrace{\sqrt{64 - 48}}^{(4)}}{2}$$

$$\lambda_1 = 6_{\,0.5}, \quad \lambda_2 = 2_{\,0.5}$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$:

$$(A - \lambda_2 E_2)x = 0 \quad : \quad (A - 2E_2)x = 0 \quad 0.5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{0.5}{I + 3Z_1} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{0.5}$$

Z_2: x_2 frei wählbar : $x_2 = \alpha_{\,0.5}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 0.5

Z_1: $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \alpha$ 0.5

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$:

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{0.5} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad 0.5$$

Eigenraum: $E_A(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ 1.0