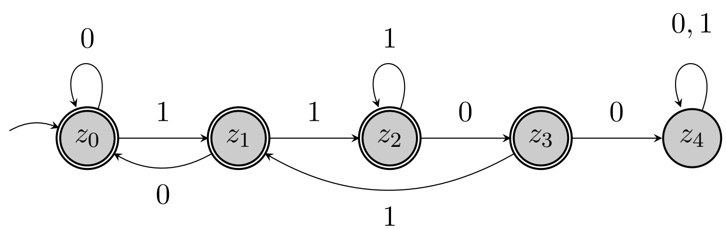
Theoretische Informatik I — Prof. Dr. Thomas Thierauf
Wintersemester 23/24 — Fak. Elektronik und Informatik

Lösungshinweise zur Klausur
vom 6. Februar 2024

1.

a)

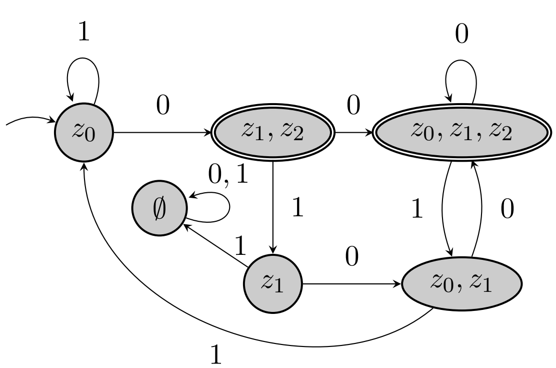


b) $\equiv_A$ hat genau 5 Äquivalenzklassen: Der DFA in Teil a) hat 5 Zustände. Damit hat $\equiv_A$ höchstens 5 Äquivalenzklassen.

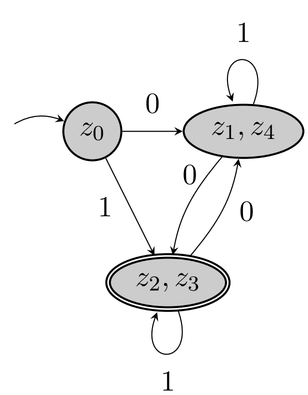
Anderseits hat $\equiv_A$ mindestens 5 Äquivalenzklassen, da die Wörter $\varepsilon, 1, 11, 110, 1100$ paarweise nicht äquivalent sind. Dazu geben wir für je 2 dieser Wörter x, y ein w an, so dass entweder $xw \in A$ oder $yw \in A$.

1	100			
11	00	00		
110	0	0	0	
1100	ε	ε	ε	ε
	ε	1	11	110

2.



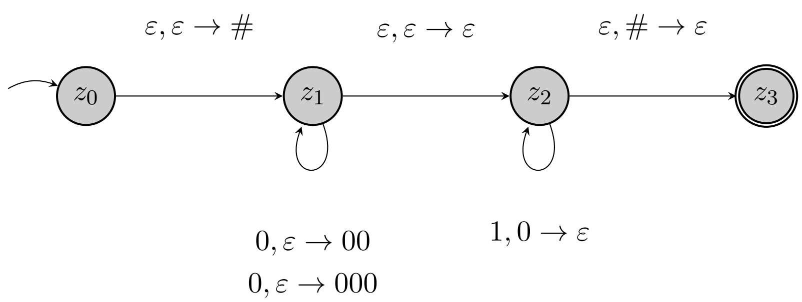
3. Der Markierungsalgorithmus liefert $z_1 \sim z_4$ und $z_2 \sim z_3$.



4. $R = m^* \, (\ell \, (m \cup \ell)^* \, s \; \cup \; s \, (m \cup s)^* \, \ell) \, (\ell \cup m \cup s)^*$

5.

a)



b) $S \to 0S11 \,|\, 0S111 \,|\, \varepsilon$

c) Sei $p > 0$ beliebig und $w = 0^p \, 1^{2p} \in B$. Sei $w = xyz$ eine Zerlegung mit $|xy| \leq p$. Dann ist $y = 0^\ell$, für ein $1 \leq \ell \leq p$. Dann ist $xy^2z = 0^{p+\ell} \, 1^{2p} \notin B$, da $2(p+\ell) > 2p$.

d) Sei $x_n = 0^n$, für $n = 1, 2, \ldots$. Sei $\ell > n$ und $w = 1^{2n}$. Dann gilt

- $x_n w = 0^n \, 1^{2n} \in B$
- $x_\ell w = 0^\ell \, 1^{2n} \notin B$, da $2\ell > 2n$.

6. Betrachte $w = a^p \, b^p \, c^{p^2} \in C$, für ein $p \geq 2$. Sei $w = uvxyz$ eine Zerlegung mit $|vxy| \leq p$ und $|vy| > 0$. Wir betrachten alle Möglichkeiten für die Zerlegung

(i) $vy = a^m$, für ein $1 \leq m \leq p$. Dann ist $uv^2xy^2z = a^{p+m} \, b^p \, c^{p^2} \notin C$, da $(p+m)p > p^2$.

(ii) $vy = b^m$, für ein $1 \leq m \leq p$. Analog zu Fall (i).

(iii) $v = a^m$, $y = b^\ell$, für $1 \leq m, \ell \leq p$. Analog zu Fall (i).

(iv) $vy = c^m$, für ein $1 \leq m \leq p$. Dann ist $uv^0xy^0z = a^p \, b^p \, c^{p^2-m} \notin C$, da $p^2 > p^2 - m$.

(v) $v = b^m$ und $y = c^\ell$ für $1 < \ell, m$ und $m + \ell \leq p$. Es gilt also insbesondere $\ell \leq p - 1$. Dann ist $uv^2xy^2z = a^p \, b^{p+m} \, c^{p^2+\ell} \notin C$, da

$$p(p+m) \;\geq\; p(p+1) \;=\; p^2 + p \;>\; p^2 + \ell.$$

(vi) v oder y enthalten verschiedene Zeichen: dann ist offensichtlich $uv^2xy^2z \notin C$.

7. Für $a \in \{0, 1\}$