Name	Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Hochschule Aalen **Fakultät für Elektronik und Informatik**

Studiengänge: DS, IN-AI, IN-MI, IN-SE, IN-ITS

Vorlesung: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

Dr.-Ing. Miriam Hommel 07. Februar 2023

Prüfung Wintersemester 2022/23

Wichtige Hinweise:

- Bearbeitungszeit: **90 min**
- Erlaubte Hilfsmittel: **ein eigenhändig geschriebenes DIN-A4-Blatt** (2 Seiten)
- Tragen Sie oben Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihren **Studiengang** ein.
- Schreiben Sie **nicht** in **roter Farbe** oder mit **Bleistift**.
- Bei Berechnungen muss der **Lösungsweg ausführlich und nachvollziehbar** dokumentiert sein. Die Angabe des Ergebnisses allein ist nicht ausreichend.
- **Vereinfachen** Sie alle Ergebnisse soweit wie möglich.
- Lassen Sie den **Prüfungsbogen** bitte unbedingt **zusammengeheftet**. Alle Aufgabenblätter sind am Ende abzugeben.
- **Schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter** (ggf. auch auf die Rückseite der entsprechenden Aufgabe). Sollte der vorgesehene Platz nicht reichen, können Sie zusätzliche Blätter abgeben. Schreiben Sie in diesem Fall **auf alle zusätzlichen Blätter** Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und die **Nummer der zugehörigen Aufgabe**. **Vermerken** Sie außerdem **bei der Aufgabe**, dass ein Teil der Lösung auf einem extra Blatt steht.
- Die Klausur besteht aus insgesamt 13 Seiten mit 14 Aufgaben. **Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Blätter erhalten haben und ob diese gut lesbar sind.**
- Bei jedem Täuschungsversuch wird die Prüfungsleistung mit „nicht ausreichend“ (5,0) bewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Summe
max.	4	2,5	5	5	6,5	12,5	5	4,5	9	8	4,5	6	11,5	6	90
Punkte															

Aufgabe 1 (1 + 1,5 + 1,5 = 4 Punkte):

Mit welchen mathematischen Symbolen werden die folgenden Mengen beschrieben?

Geben Sie außerdem die Elemente der Mengen in mathematischer Schreibweise an.

a) Menge der möglichen Reste, die sich bei ganzzahliger Division durch 4 ergeben

b) Menge der gemeinsamen Teiler von 9 und -15

c) Äquivalenzklasse von $2 \text{ modulo } 7$

Aufgabe 2 (1 + 1,5 = 2,5 Punkte):

Berechnen Sie (geben Sie mindestens einen Zwischenschritt an):

a) $-17 \bmod 7$

b) $(16n + 28) \bmod (4n + 6)$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Aufgabe 3 (2 + 3 = 5 Punkte):

Wenden Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus auf folgende Zahlenpaare an:

a) $(27, 243)$

b) $(4^m, 4^n)$ für $0 \leq m < n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 4 (5 Punkte): Prüfziffern

Überführen Sie die folgende ISBN-10 in die zum Buch gehörende neue ISBN-13 (13-stellige EAN (Europäische Artikelnummer)) durch Voranstellen der Ziffernfolge 978 und Neuberechnung der Prüfziffer:

$$3 - 540 - 24999 - 0$$

Aufgabe 5 (1 + 5,5 = 6,5 Punkte):

a) Wann besitzt die Gleichung $cx \equiv d \pmod{e}$ eine eindeutig Lösung x mit $x \in \mathbb{Z}_e$?

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $26x - 17 \equiv 8 \pmod{7}$ in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6 (3 + 9,5 = 12,5 Punkte):

Gegeben seien die beiden folgenden Gleichungssysteme:

1.)	$x \equiv 3 \pmod 6$	2.)	$x \equiv 8 \pmod{10}$
	$x \equiv 2 \pmod 3$		$x \equiv 2 \pmod 3$
	$x \equiv 5 \pmod 9$		$x \equiv 4 \pmod 7$

Welches davon ist mithilfe des Chinesischen Restsatzes lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Bestimmen Sie anschließend alle Lösungen dieses Gleichungssystems.

Aufgabe 7 (5 Punkte):

Berechnen Sie $15^{65} \bmod 13$.

Aufgabe 8 (4,5 Punkte):

Wie lautet der private Schlüssel beim RSA-Verfahren, wenn $p = 11$ und $q = 5$ als Primzahlen und $e = 23$ als öffentlicher Schlüssel gewählt werden?

Aufgabe 9 (5,5 + 3,5 = 9 Punkte):

a) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit es sich bei der algebraischen Struktur $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ um einen Körper handelt?

b) Begründen Sie, warum $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ kein Körper sein kann.

Addition und Multiplikation sind dabei immer modular zu verstehen, also z.B. $3 + 4 \equiv 1 \pmod 6$ und $3 \cdot 4 \equiv 2 \pmod 5$.

Aufgabe 10 (8 Punkte):

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ a & b & c \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 7 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ rechnersich so, dass B die inverse Matrix von A ist.

Aufgabe 11 (4,5 Punkte):

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2x & 1 & -x \\ -1 & x & x \end{pmatrix}$ den Rang 3 hat.

Aufgabe 12 (6 Punkte):

Bestimmen Sie für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Lösung X der Gleichung

$$A \cdot X + B \cdot X = 3C$$

Aufgabe 13 (1 + 2 + 3 + 2,5 + 3 = 11,5 Punkte):

a) Berechnen Sie die Länge des Vektors $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Geben Sie den Einheitsvektor an, der dieselbe Richtung hat wie der Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) Wie lautet der Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten $A = (4, -4, 1)$ und $B = (-2, -2, -2)$?

Welchen Abstand haben die beiden Punkte voneinander?

d) Prüfen Sie, ob die beiden Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen.

Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

e) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ stehen die beiden Vektoren $a = \begin{pmatrix} 4x \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9x \\ -6 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

Aufgabe 14 (6 Punkte):

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert -1.

Bestimmen Sie den Eigenvektor zu diesem Eigenwert.

Geben Sie außerdem den Eigenraum zum Eigenwert -1 an.

Hinweis: Die restlichen Eigenwerte der Matrix brauchen Sie nicht zu bestimmen.