

**Klausur zur Vorlesung  
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik  
Sommersemester 2017**

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

Unterschrift: \_\_\_\_\_

Klausurergebnis			
Aufgabe 1 (10 Punkte)		Aufgabe 2 (15 Punkte)	
Aufgabe 3 (10 Punkte)		Aufgabe 4 (25 Punkte)	
Aufgabe 5 (25 Punkte)		Aufgabe 6 (15 Punkte)	
<b>Gesamt</b> (100 Punkte)		<b>Note</b>	

**Bearbeitungshinweise:**

- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Überprüfen Sie bitte sofort nach Erhalt die Vollständigkeit der Unterlagen (20 Seiten).
- Bitte lassen Sie die Klausur zusammengeheftet.
- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Falls notwendig, dann benutzen Sie die Rückseite des jeweiligen Aufgabenblatts für Notizen und Entwürfe.
- Geben Sie bei Ihren Berechnungen Zwischenschritte und die Namen der eingesetzten Formeln an.
- Geben Sie alle Ergebnisse auf 6 Stellen hinter dem Komma gerundet an.

**Viel Erfolg!**

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 1.** (10 Punkte)

Ein fairer Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Es werden folgende Ereignisse untersucht:

- $A$ : „Die Augensumme der ersten beiden Würfe ist ungerade.“
- $B$ : „Die Augensumme der drei Würfe ist gerade.“

a) Stellen Sie die Ergebnisse durch geeignete Mengen dar.



b) Berechnen Sie  $Pr[A]$ .



Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

c) Berechnen Sie  $Pr[B]$ .

d) Berechnen Sie  $Pr[A \cap B]$ .

e) Sind die Ereignisse  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 2.** (15 Punkte)

Das Ergebnis einer Wahl in einem nicht weiter spezifizierten Land ist wie folgt:

<i>Partei</i>	<i>Stimmen [%]</i>
$P_1$	45
$P_2$	30
$P_3$	14
$P_4$	11

3% der Wähler der Partei  $P_1$  waren Erstwähler. Bei Partei  $P_2$  waren 4% ihrer Wähler Erstwähler. Die Wähler von Partei  $P_3$  waren zu 30% Erstwähler. Bei den Wählern der Partei  $P_4$  war der Anteil der Erstwähler 17%.

- a) Beschreiben Sie den Ausgang der Wahl mit geeigneten Ereignissen und geben Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

b) Wie viel Prozent der Wähler waren Erstwähler?

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

c) Wie viel Prozent der Erstwähler haben die Partei  $P_1$  gewählt?

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 3.** (10 Punkte)

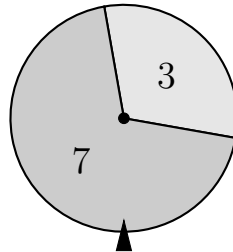
Gegeben ist die normalverteilte Zufallsvariable  $X$  mit dem Erwartungswert  $\mu = 12$  und der Varianz  $\sigma^2 = 16$ . Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$Pr[9 \leq X \leq 12].$$

Nutzen Sie zur Berechnung die Wertetabelle der Standardnormalverteilung.

**Aufgabe 4.** (25 Punkte)

Anlässlich seines zehnjährigen Bestehens veranstaltet der Delicious Things Supermarket für seine Kunden eine Rabattaktion. Jeder Kunde darf zweimal das folgende mit den Zahlen 3 und 7 beschriftete Glücksrad drehen:



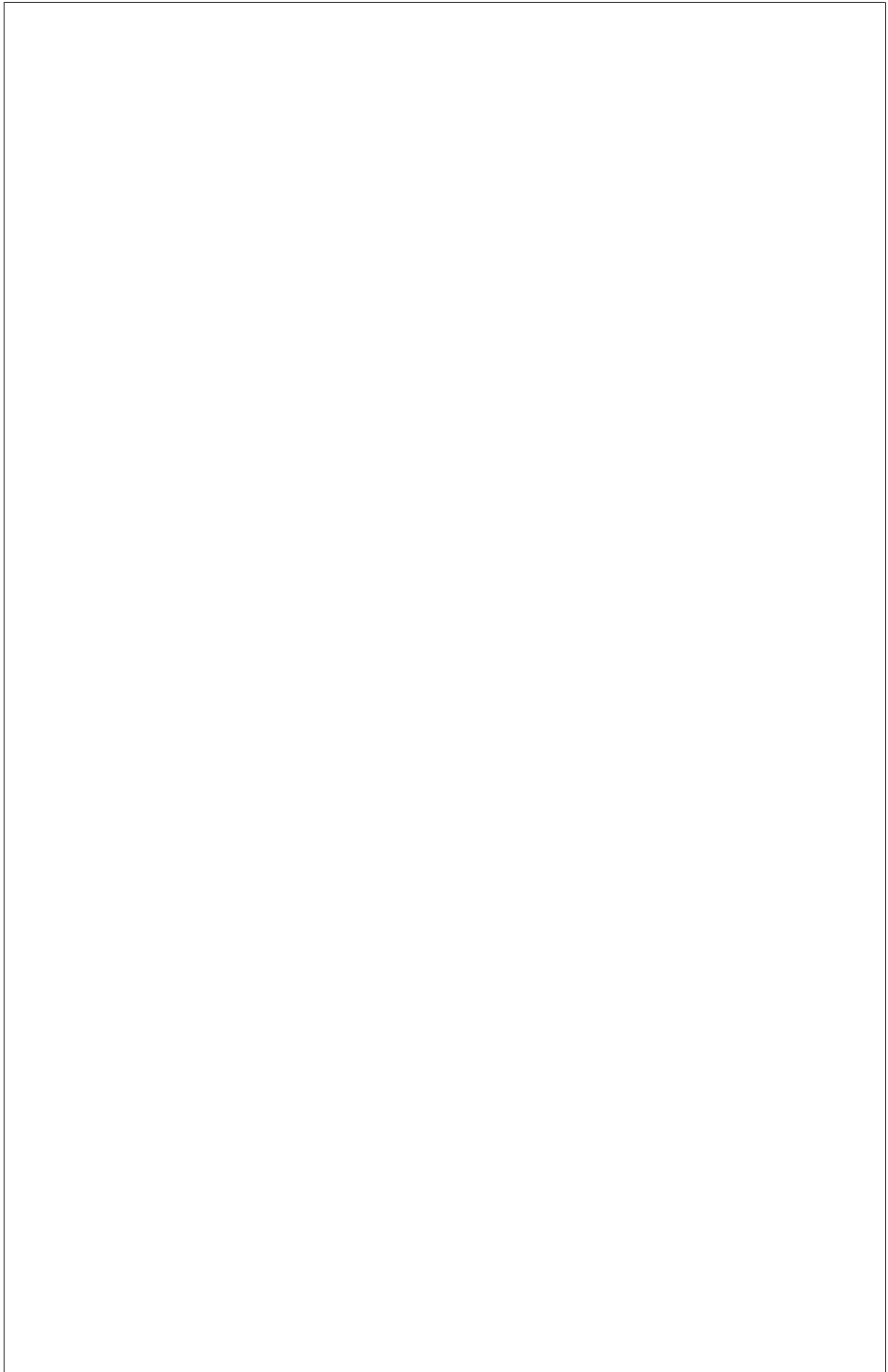
Die beiden Drehungen sind unabhängig von einander. Bei jeder Drehung des Glücksrads wird mit der Wahrscheinlichkeit  $p$ ,  $0 < p < 1$ , die Zahl 7 gezogen. Andernfalls ist das Ergebnis die Zahl 3.

- a) Modellieren Sie das Zufallsexperiment unter Einsatz eines Entscheidungsbaums als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Gegeben Sie alle Elementarereignisse mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.



Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_



Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

- b) Nachdem der Kunde das Glücksrad zweimal gedreht hat, erhält er auf seinen Einkauf einen prozentualen Rabatt, welcher der Summe der gezogenen Zahlen entspricht. Die Zufallsvariable  $X$  steht für den Rabatt (in Prozent), den der Kunde erhält. Geben Sie den Wertebereich und die Verteilung der Zufallsvariable  $X$  an.

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ .

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

- d) Wie muss der Parameter  $p$  gewählt werden, dass im Mittel ein Rabatt von 11% gewährt wird.

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

- e) Angenommen, die Wahrscheinlichkeit, den kleinsten Rabatt von 6% zu ziehen, ist gleich  $\frac{9}{25}$ . Wie viele Kunden müssen mindestens an der Rabattaktion teilnehmen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens ein Kunde den kleinsten Rabatt erhält? Es wird angenommen, dass jeder Kunde genau einmal an der Rabattaktion teilnehmen darf und die Drehungen der Kunden unabhängig von einander sind.

**Aufgabe 5.** (25 Punkte)

Bei einer Online-Lotterie werden Geldbeträge von 10, 5, 2 und 0 Euro ausgezahlt. Die Zufallsvariable  $X$  steht für den Gewinn beim Kauf eines Loses. Die Verteilung von  $X$  ist wie folgt:

$x$	$Pr[X = x]$
10	0.1
5	0.2
2	0.3
0	0.4

Die Zufallsvariable  $M^{(n)}$  steht für den durchschnittlichen Gewinn beim Kauf von  $n$  Losen. Dabei wird angenommen, dass der Kauf eines Loses unabhängig vom Kauf der anderen Lose ist. Formal ist  $M^{(n)}$  definiert als:

$$M^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

wobei die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  dieselbe Verteilung wie die Zufallsvariable  $X$  haben.

- a) Berechnen sie den Erwartungswert von  $X$ .

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

b) Berechnen Sie die Varianz von  $X$ .

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von  $M^{(n)}$ .

d) Berechnen Sie die Varianz von  $M^{(n)}$ .



Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

- e) Wie viele Lose muss man mindestens kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable  $M^{(n)}$  um mehr als 10% von ihrem Erwartungswert abweicht, höchstens bei 5% liegt.

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 6.** (15 Punkte)

Für ein beliebig wählbares  $c \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $f_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  definiert als

$$f_c(x) = \begin{cases} cx^2 - cx + 4c, & x \in [2; 6], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Wie muss der Parameter  $c \in \mathbb{R}$  gewählt werden, dass  $f_c$  die Dichte einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung ist?

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

- b) Geben Sie unter Verwendung des in Teilaufgabe a) ermittelten Werts des Parameters  $c$  die von  $f_c$  erzeugte Verteilungsfunktion an.

Name: \_\_\_\_\_

Matr. Nr.: \_\_\_\_\_

- c) Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit der in Teilaufgabe b berechneten Verteilung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $Pr[X \leq 5]$ .