

# Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

Dr.-Ing. Miriam Hommel

# Wiederholung – Woche 1



Quiz-Name:

DMLA\_SoSe24\_02\_Teilbarkeit1

[https://arsnova.click/quiz/dmla\\_sose24\\_02\\_teilbarkeit1](https://arsnova.click/quiz/dmla_sose24_02_teilbarkeit1)

# Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

## 1. Zahlentheorie

### 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen

Dr.-Ing. Miriam Hommel

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen

- Programmierung
- Zufallszahlengenerator
- Prüfziffern:
  - EAN (Europäische Artikelnummer / European Article Number)
  - ISBN (Internationale Standardbuchnummer / International Standard Book Number)
  - IBAN (International Bank Account Number)
- ...

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen

Programmierung:

- `mod` oder `%`
- Überprüfung, ob eine Zahl gerade ist oder nicht
- Bestimmter Programmcode soll nur bei jedem x-ten Durchlauf einer Schleife ausgeführt werden
- ...

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen

Zufallszahlengenerator (vgl. u.a. Steger, 2001):

- Lineare Kongruenzmethode
  - Startwert:  $x_0$
  - sukzessive Berechnung weiterer Werte:  $x_{n+1} = ax_n + c \bmod m$
  - Parameter  $a, c, m$  müssen bestimmte Bedingungen erfüllen, damit die  $x_n$  möglichst „zufällig“ verteilt sind
  - Beispiel: `nrnd48()` in C++

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen

Prüfziffern:

- Erkennung der häufigsten Fehler:
  - Eingabe einer falschen Ziffer („Einzelfehler“)
  - Vertauschung von zwei Ziffern („Vertauschungsfehler“)

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

- EAN (Europäische Artikelnummer/ European Article Number):

- Strichcode bzw. 13-stellige Ziffernfolge auf vielen Artikeln

- Erste beiden Ziffern:      Herkunftsland

- Folgende 5 Ziffern:      Hersteller

- Folgende 5 Ziffern:      Produkt

- Letzte Ziffer:      Prüfziffer

- Erlaubt Detektion von Einzelfehlern, aber nicht von allen Vertauschungsfehlern



Quelle:; Von VaGla - own work created in Inkscape based on the graphics by Grzexs, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1642759>



# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

- EAN (Europäische Artikelnummer/ European Article Number):
  - Berechnung der Prüfziffer
    - Berechne gewichtete Quersumme der ersten 12 Ziffern
    - Gewichte: abwechselnd 1 und 3 beginnend mit der 1
    - Prüfziffer = kleinste Zahl, die man zur Quersumme addieren muss, damit die Summe durch 10 teilbar ist
    - Hier:  $(1 \cdot 5 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + p) \bmod 10 = 0$

$$(83 + p) \bmod 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 7$$



Quelle:; Von VaGla - own work created in Inkscape based on the graphics by Grzeks, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1642759>

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

- EAN (Europäische Artikelnummer/ European Article Number):

- Berechnen Sie die Prüfziffer  $p$  des Buchs  
„Diskrete Strukturen 1“ von Angelika Steger:

EAN: 9 783540 46660 $p$

$$(1 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + p) \bmod 10 = 0$$

$$(9 + 21 + 8 + 9 + 5 + 12 + 0 + 12 + 6 + 18 + 6 + 0 + p) \bmod 10 = 0$$

$$(106 + p) \bmod 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 4$$



Quelle: M. Hommel

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfwziffern

- ISBN (Internationale Standardbuchnummer / International Standard Book Number):

10-stellige Nummer zur eindeutigen Identifizierung von Büchern

unterteilt in 4 mit Bindestrichen getrennte Segmente

- Erstes Segment: Herkunftsland
  - Zweites Segment: Verlag
  - Drittes Segment: Titel
  - Viertes Segment: Prüfwziffer
- Erlaubt Detektion von Einzel- und Vertauschungsfehlern

Beispiel:

„Diskrete Strukturen 1“

von Angelika Steger

3–540–46660–6

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

- ISBN (Internationale Standardbuchnummer / International Standard Book Number):

- Berechnung der Prüfziffer

- Berechne gewichtete Quersumme der ersten 9 Ziffern

- Gewichte: 1. Ziffer: 1; 2. Ziffer: 2; 3. Ziffer: 3; ...

- Prüfziffer = gewichtete Quersumme modulo 11

- Hier:  $p = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 0) \bmod 11$

$$= (3 + 10 + 12 + 0 + 20 + 36 + 42 + 48 + 0) \bmod 11$$

$$= 171 \bmod 11 = 6$$

- Wenn Prüfziffer gleich 10, notiere X.

Beispiel:

„Diskrete Strukturen 1“  
von Angelika Steger

3 – 540 – 46660 – 6

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

- ISBN (Internationale Standardbuchnummer / International Standard Book Number):

- „Diskrete Strukturen 1“ von Angelika Steger:      3 – 540 – 46660 – 6

- Einzelfehler:      3 – 540 – 4<sup>9</sup>660 – 6

$$\begin{aligned}
 p &= (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 0) \bmod 11 \\
 &= (3 + 10 + 12 + 0 + 20 + 54 + 42 + 48 + 0) \bmod 11 \\
 &= 189 \bmod 11 = 2 \neq 6 \quad \Rightarrow \text{Einzelfehler wird erkannt}
 \end{aligned}$$

- Vertauschungsfehler:      3 – 5<sup>0</sup>4 – 46660 – 6

$$\begin{aligned}
 p &= (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 0) \bmod 11 \\
 &= (3 + 10 + 0 + 16 + 20 + 36 + 42 + 48 + 0) \bmod 11 \\
 &= 175 \bmod 11 = 10 \neq 6 \quad \Rightarrow \text{Vertauschungsfehler wird erkannt}
 \end{aligned}$$

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfwziffern

- Neue ISBN-13 (seit 2007):
  - Überführung der ISBN-10 in die zum Buch gehörende 13-stellige EAN durch Voranstellen der Ziffernfolge 978 (bzw. 979) und Neuberechnung der Prüfwziffer
  - „Diskrete Strukturen 1“ von Angelika Steger:
    - ISBN-10: 3 – 540 – 46660 – 6
    - ISBN-13: 978 – 3 – 540 – 46660 – 4
    - EAN: 9 783540 466604 (vgl. Folie 8)



Quelle: M. Hommel

# 1. Zahlentheorie

## 1.1 Teilbarkeit – Anwendungen – Prüfziffern

- Neue ISBN-13 (seit 2007):

- „Diskrete Strukturen 1“ von Angelika Steger:  $978 - 3 - 540 - 46660 - 4$

- Problem: Vertauschungsfehler

- ISBN-13:  $97\textcolor{red}{3} - \textcolor{red}{8} - 540 - 46660 - 4$

- EAN:  $9\ 7\textcolor{red}{3}8540\ 466604$

$$(\textcolor{green}{1} \cdot 9 + \textcolor{green}{3} \cdot 7 + \textcolor{green}{1} \cdot \textcolor{red}{3} + \textcolor{green}{3} \cdot \textcolor{red}{8} + \textcolor{green}{1} \cdot 5 + \textcolor{green}{3} \cdot 4 + \textcolor{green}{1} \cdot 0 + \textcolor{green}{3} \cdot 4 + \textcolor{green}{1} \cdot 6 + \textcolor{green}{3} \cdot 6 + \textcolor{green}{1} \cdot 6 + \textcolor{green}{3} \cdot 0 + p) \bmod 10 = 0$$

$$(9 + 21 + \textcolor{red}{3} + \textcolor{red}{24} + 5 + 12 + 0 + 12 + 6 + 18 + 6 + 0 + p) \bmod 10 = 0$$

$$(116 + p) \bmod 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Vertauschungsfehler wird nicht erkannt}$$