



Aufgabe 1. In einem Hochhaus mit zehn Stockwerken über dem Erdgeschoss ist ein Aufzug installiert. Angenommen, zwölf Personen betreten im Erdgeschoss den Aufzug und wählen unabhängig von einander eines der zehn Stockwerke unter Gleichverteilung aus. Bei wievielen Stockwerken muss der Aufzug im Mittel anhalten, um eine oder mehr Personen aussteigen zu lassen?

Aufgabe 2. Eine Schachtel enthält zehn Transistoren, von denen drei defekt sind. Ein Transistor wird zufällig aus der Schachtel genommen und geprüft. Ist er defekt, so wird er weggeworfen, und der nächste Transistor wird aus der Schachtel genommen und geprüft. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis ein Transistor gefunden ist, der in Ordnung ist. Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der Transistoren, die geprüft werden müssen, bis ein brauchbarer gefunden wird. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X .

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Die Zufallsvariable X nimmt jeden Wert aus der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ an. Berechnen Sie $\text{Exp}[X]$ und $\text{Var}[X]$.

Aufgabe 4. Theodor Nachtschwärmer kommt im Dunkeln nach Hause. Die Haustür ist abgeschlossen und er hat n Schlüssel in der Tasche, von denen nur einer passt. Er entnimmt seiner Tasche zufällig einen Schlüssel, probiert ihn, und falls er nicht passt, legt er ihn beiseite. Er probiert so lange, bis er den passenden Schlüssel gefunden hat. Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der zum Öffnen der Tür benötigten Versuche. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass es wahrscheinlicher ist, bei viermaligem Werfen eines Würfels mindestens eine 6 zu werfen als beim 24-maligen Werfen von zwei Würfeln mindestens einen 6er Pasch (Méré's Paradox).

Aufgabe 6. Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$\text{Exp}[(aX + b)^2] = a^2 \cdot \text{Exp}[X^2] + 2ab \cdot \text{Exp}[X] + b^2$$

Aufgabe 7. Aus einem Integer Array mit 100000 Elementen wird zufällig unter Gleichverteilung ein Element ausgewählt. Die Zufallsvariable X steht für den Wert des ausgewählten Elements. Es ist bekannt, dass $\text{Exp}[X] = 10$ und $\text{Exp}[X^2] = 101$. Berechnen Sie unter Einsatz der Ungleichung von Chebyshev eine obere Schranke für die Anzahl der Zahlen im Array, die größer-gleich 14 sind.

Aufgabe 8. Angenommen, das Durchschnittseinkommen einer Familie in Deutschland beträgt 40000 Euro pro Jahr.

- Berechnen Sie eine obere Schranke für den prozentualen Anteil der Familien mit einem Einkommen von mindestens 80000 Euro pro Jahr.
- Berechnen Sie eine bessere obere Schranke unter der Annahme, dass die Standardabweichung des Durchschnittseinkommens bei 25000 Euro liegt.