



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НГТУ



НЭТИ

Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа № 1

по дисциплине «Численное моделирование динамических систем, описываемых
обыкновенными дифференциальными уравнениями»

ЯВНЫЕ МЕТОДЫ ЭЙЛЕРА



Группа

ПМ-91

Бригада

ЗАТОЛОЦКАЯ ЮЛИЯ

КОНСТАНТИНОВА АНАСТАСИЯ

Преподаватель

ВАГИН ДЕНИС ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата

15.09.2021

Новосибирск

1. Задание:

На трёх сетках $h = [0.1, 0.05, 0.025]$ решить задачу

$$y' = 4ty$$

$$t = [0, 1]$$

$$y(0) = 1$$

с помощью трёх явных схем Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))).$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_{n+1/2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right).$$

2. Результаты:

2.1 Первая схема

$$h = 0,1$$

tn	yn	y(tn)	ln-1= yn-y(tn)
0	1	1	0
0,1	1	1,0202	0,0202013
0,2	1,04	1,08329	0,0432872
0,3	1,1232	1,19722	0,0740174
0,4	1,25798	1,37713	0,1191440
0,5	1,45926	1,64872	0,1894600
0,6	1,75111	2,05443	0,3033200
0,7	2,17138	2,66446	0,4930750
0,8	2,77937	3,59664	0,8172730
0,9	3,66877	5,05309	1,38432494
1	4,98952	7,38906	2,39954000

$$h = 0,05$$

tn	yn	y(tn)	ln-1= yn-y(tn)
0	1	1	0
0,05	1	1,00501	0,00501251
0,10	1,01	1,02020	0,01020130
0,15	1,03020000	1,04603	0,01582790
0,20	1,06111000	1,08329	0,02218120
0,25	1,10355000	1,13315	0,02959820
0,30	1,15873000	1,19722	0,03848970
0,35	1,22825000	1,27762	0,04936990
0,40	1,31423000	1,37713	0,06289890
0,45	1,41937000	1,49930	0,07993530
0,50	1,54711000	1,64872	0,10161100
0,55	1,70182000	1,83125	0,12943100
0,60	1,88902000	2,05443	0,16541200
0,65	2,11570000	2,32798	0,21227400

0,70	2,39075000	2,66446	0,27371000
0,75	2,72545000	3,08022	0,35476700
0,80	3,13427000	3,59664	0,46237300
0,85	3,63575000	4,24185	0,60610200
0,90	4,25383000	5,05309	0,79926300
0,95	5,01952000	6,07997	1,06045000
1,00	5,97323000	7,38906	1,41583000

$h = 0,025$

tn	yn	y(tn)	ln-1= yn-y(tn)
0,000	1,00000000	1,00000000	0,00000000
0,025	1,00000000	1,00125000	0,00125074
0,050	1,00250000	1,00501000	0,00251245
0,075	1,00751000	1,01131000	0,00380099
0,100	1,01507000	1,02020000	0,00513244
0,125	1,02522000	1,03174000	0,00652385
0,150	1,03803000	1,04603000	0,00799310
0,175	1,05361000	1,06316000	0,00955939
0,200	91,07204000	1,08329000	0,01124370
0,225	1,09348000	1,10655000	0,01306890
0,250	1,11809000	1,13315000	0,01506080
0,275	1,14604000	1,16329000	0,01724760
0,300	1,17756000	1,19722000	0,01966140
0,325	1,21288000	1,23522000	0,02233850
0,350	1,25230000	1,27762000	0,02531990
0,375	1,29613000	1,32478000	0,02865290
0,400	1,34474000	1,37713000	0,03239100
0,425	1,39853000	1,43512000	0,03659590
0,450	1,45796000	1,49930000	0,04133880
0,475	1,52357000	1,57027000	0,04670170
0,500	1,59594000	1,64872000	0,05277940
0,525	1,67574000	1,73542000	0,05968230
0,550	1,76372000	1,83125000	0,06753710
0,575	1,86072000	1,93721000	0,07649290
0,600	1,96771000	2,05443000	0,08672250
0,625	2,08577000	2,18420000	0,09842730
0,650	2,21613000	2,32798000	0,11184400
0,675	2,36018000	2,48743000	0,12724700
0,700	2,51950000	2,66446000	0,14496100
0,725	2,69586000	2,86123000	0,16536600
0,750	2,89131000	3,08022000	0,18890700
0,775	3,10816000	3,32427000	0,21611200
0,800	3,34904000	3,59664000	0,24760000
0,825	3,61696000	3,90107000	0,28410300
0,850	3,91536000	4,24185000	0,32649000
0,875	4,24817000	4,62395000	0,37578500
0,900	4,61988000	5,05309000	0,43320800
0,925	5,03567000	5,53588000	0,50020500

0,950	5,50147000	6,07997000	0,57849900
0,975	6,02411000	6,69426000	0,67014600
1,000	6,61146000	7,38906000	0,77759300

h	ln-1 max	ln-1(h)/ln-1(h/2)
0,100	2,39954000	
0,05	1,41583000	1,694793866
0,025	0,77759300	1,820785424

Из последней таблицы видно, что при уменьшении шага погрешность уменьшается примерно в 2^1 раз, следовательно, первая схема имеет 1 порядок аппроксимации.

$$\max |\psi_n| \leq Ch^p, \quad p > 0, \quad k-1 \leq n < N.$$

$$I^* = I_{\frac{h}{2}} + \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m})$$

2.2 Вторая схема $h = 0,1$

tn	yn	y(tn)	ln-1= yn-y(tn)
0	1	1	0
0,1	1,02	1,020201	0,00020134
0,2	1,082832	1,083287	0,00045507
0,3	1,196313	1,197217	0,00090457
0,4	1,375281	1,377128	0,00184658
0,5	1,644836	1,648721	0,00388497
0,6	2,046176	2,054433	0,00825685
0,7	2,646934	2,664456	0,01752251
0,8	3,559596	3,59664	0,03704324
0,9	4,974892	5,05309	0,07819826
1	7,223543	7,389056	0,1655128

$h = 0,05$

tn	yn	y(tn)	ln-1= yn-y(tn)
0	1	1	0
0,05	1,005	1,0050125	1,25E-05
0,1	1,0201755	1,0202013	2,58E-05
0,15	1,0459859	1,0460279	4,19E-05
0,2	1,083223	1,0832871	6,40E-05
0,25	1,1330513	1,1331485	9,72E-05
0,3	1,1970687	1,1972174	0,00014867
0,35	1,277392	1,2776213	0,00022931
0,4	1,3767731	1,3771278	0,00035466
0,45	1,4987552	1,4993025	0,0005473

0,5	1,6478813	1,6487213	0,00083993
0,55	1,8299722	1,8312522	0,00127997
0,6	2,0524969	2,0544332	0,00193635
0,65	2,3250684	2,3279778	0,00290937
0,7	2,6601108	2,6644562	0,00434544
0,75	3,073758	3,0802168	0,00645882
0,8	3,5870756	3,5966397	0,0095641
0,85	4,2277273	4,2418521	0,01412481
0,9	5,0322638	5,0530903	0,02082648
0,95	6,0492844	6,0799714	0,03068708
1	7,3438312	7,3890561	0,04522488

$h = 0,025$

tn	yn	y(tn)	ln-1= yn-y(tn)
0	1	1	0
0,025	1,00125	1,00125078	7,82E-07
0,05	1,005011	1,00501252	1,58E-06
0,075	1,0113111	1,01131352	2,41E-06
0,1	1,020198	1,02020134	3,34E-06
0,125	1,031739	1,03174341	4,41E-06
0,15	1,0460221	1,04602786	5,73E-06
0,175	1,0631573	1,06316467	7,39E-06
0,2	1,0832775	1,08328707	9,54E-06
0,225	1,1065409	1,10655325	1,23E-05
0,25	1,1331325	1,13314845	1,60E-05
0,275	1,1632667	1,16328744	2,07E-05
0,3	1,1971905	1,19721736	2,69E-05
0,325	1,2351863	1,23522112	3,48E-05
0,35	1,2775764	1,27762131	4,49E-05
0,375	1,3247269	1,32478476	5,78E-05
0,4	1,3770536	1,37712776	7,41E-05
0,425	1,4350276	1,4351222	9,46E-05
0,45	1,4991823	1,4993025	0,0001202
0,475	1,5701217	1,5702738	0,00015207
0,5	1,6485297	1,64872127	0,00019159
0,525	1,7351805	1,73542094	0,00024041
0,55	1,8309516	1,83125221	0,00030056
0,575	1,9368379	1,93721234	0,00037447
0,6	2,0539681	2,05443321	0,00046507
0,625	2,1836249	2,18420081	0,00057594
0,65	2,3272665	2,32797781	0,00071137
0,675	2,4865533	2,48742988	0,00087659
0,7	2,6633783	2,66445624	0,00107793
0,725	2,8599023	2,86122542	0,00132308
0,75	3,0785955	3,08021685	0,00162135
0,775	3,3222856	3,32426966	0,00198409
0,8	3,5942147	3,59663973	0,00242508
0,825	3,8981055	3,90106659	0,00296109

0,85	4,2382396	4,24185214	0,00361258
0,875	4,6195487	4,62395315	0,00440448
0,9	5,0477231	5,05309032	0,00536722
0,925	5,529339	5,535877	0,00653803
0,95	6,072009	6,07997145	0,00796241
0,975	6,6845609	6,69425704	0,00969614
1	7,3772485	7,3890561	0,01180758

h	ln-1 max	ln-1(h)/ln-1(h/2)
0,100	0,1655128	
0,05	0,0452249	3,659773035
0,025	0,0118076	3,830157813

Из последней таблицы видно, что при уменьшении шага погрешность уменьшается примерно в 2^2 раз, следовательно, третья схема имеет 2 порядок аппроксимации.

2.3 Третья схема

$h = 0,1$

tn	yn	y(tn)	ln-1= yn-y(tn)
0	1	1	0
0,1	1,02	1,020201	0,00020134
0,2	1,082424	1,083287	0,000863068
0,3	1,194996	1,197217	0,002221267
0,4	1,372334	1,377128	0,004794248
0,5	1,639115	1,648721	0,009606118
0,6	2,035781	2,054433	0,018652192
0,7	2,6286	2,664456	0,03585579
0,8	3,527582	3,59664	0,069057919
0,9	4,91886	5,05309	0,134230246
1	7,124477	7,389056	0,264579172

$h = 0,05$

tn	yn	y(tn)	ln-1= yn-y(tn)
0	1	1	0
0,05	1,005	1,005013	1,25E-05
0,1	1,02015	1,020201	5,10E-05
0,15	1,045909	1,046028	0,000118688
0,2	1,083065	1,083287	0,000221972
0,25	1,132778	1,133148	0,00037067
0,3	1,196638	1,197217	0,000579232
0,35	1,276753	1,277621	0,00086826
0,4	1,375861	1,377128	0,001266755
0,45	1,497487	1,499303	0,001815377
0,5	1,64615	1,648721	0,002571114
0,55	1,827638	1,831252	0,003613997

0,6	2,049376	2,054433	0,005056793
0,65	2,320919	2,327978	0,007059022
0,7	2,654609	2,664456	0,00984735
0,75	3,066471	3,080217	0,013745387
0,8	3,577422	3,59664	0,019217457
0,85	4,214919	4,241852	0,026933225
0,9	5,015227	5,05309	0,03786367
0,95	6,026547	6,079971	0,053424348
1	7,313366	7,389056	0,075690529

$h = 0,025$

tn	yn	y(tn)	ln-1= yn-y(tn)
0	1	1	0,0000000000
0,025	1,00125	1,001251	0,0000007816
0,05	1,005009	1,005013	0,00000031400
0,075	1,011306	1,011314	0,00000071265
0,1	1,020189	1,020201	0,00000128328
0,125	1,031723	1,031743	0,00000203940
0,15	1,045998	1,046028	0,00000299913
0,175	1,063123	1,063165	0,00000418571
0,2	1,083231	1,083287	0,00000562813
0,225	1,10648	1,106553	0,00000736184
0,25	1,133054	1,133148	0,00000942973
0,275	1,163169	1,163287	0,00001188328
0,3	1,19707	1,197217	0,00001478397
0,325	1,235039	1,235221	0,00001820494
0,35	1,277399	1,277621	0,00002223304
0,375	1,324515	1,324785	0,00002697128
0,4	1,376802	1,377128	0,00003254175
0,425	1,434731	1,435122	0,00003908910
0,45	1,498835	1,499303	0,00004678480
0,475	1,569715	1,570274	0,00005583220
0,5	1,648057	1,648721	0,00006647254
0,525	1,734631	1,735421	0,00007899231
0,55	1,830315	1,831252	0,00009373201
0,575	1,936101	1,937212	0,00011109674
0,6	2,053118	2,054433	0,00013156894
0,625	2,182644	2,184201	0,00015572379
0,65	2,326135	2,327978	0,00018424787
0,675	2,48525	2,48743	0,00021796162
0,7	2,661878	2,664456	0,00025784671
0,725	2,858175	2,861225	0,00030507915
0,75	3,076606	3,080217	0,00036106952
0,775	3,319995	3,32427	0,00042751202
0,8	3,591575	3,59664	0,00050644408
0,825	3,895063	3,901067	0,00060031922
0,85	4,234731	4,241852	0,00071209602

0,875	4,6155	4,623953	0,0084534691
0,9	5,043046	5,05309	0,0100439161
0,925	5,523932	5,535877	0,0119446070
0,95	6,065752	6,079971	0,0142189672
0,975	6,677313	6,694257	0,0169440161
1	7,368843	7,389056	0,0202134163

h	ln-1 max	ln-1(h)/ln-1(h/2)
0,100	0,264579172	
0,05	0,075690529	3,495538678
0,025	0,0202134163	3,744568854

Из последней таблицы видно, что при уменьшении шага погрешность уменьшается примерно в 2^2 раз, следовательно, третья схема имеет 2 порядок аппроксимации.

3. Выводы

Первая схема имеет 1 порядок аппроксимации, вторая и третья схемы имеют второй порядок аппроксимации.