Хроматические числа

Гольцова Надежда

10 июля 2013 г.

Глава 1

Обзор результатов

Задача о нахождении хроматического числа плоскости была поставлена Э. Нелсоном в 1950 г. и остается не решенной до сих пор. Её формулировка: какое наименьшее число цветов необходимо для такой раскраски плоскости, при которой любые две точки на расстоянии 1 друг от друга покрашены в разные цвета? Будем рассматривать этот вопрос не только для плоскости, но и для пространства с евклидовой метрикой. Введем необходимые определения:

Определение 1 *Правильной раскраской пространства* $\mathbb{R}^n$ *в* m *цветов называется такое отображение* $F_m \colon \mathbb{R}^n \to \{1, 2, \ldots, m\}$, *что:*

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \colon F_m(X) = F_m(Y) \Rightarrow |XY| \neq 1 \tag{1.1}$$

Определение 2 *Хроматическим чилом пространства* $\mathbb{R}^n$ *называется такое наименьшее натуральное число* n, *что существует правильная раскраска* $\mathbb{R}^n$ *в* m *цветов:*

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \exists F_m\} \tag{1.2}$$

Определение 3 *Дистанционным графом* $G(V, E)$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *называется граф с множеством вершин* $V \in \mathbb{R}^n$ *и множеством рёбер:*

$$E = \{(x, y) \in V \times V \mid |x - y| = 1\} \tag{1.3}$$

Известны асимптотические оценки для хроматического числа $\mathbb{R}^n$:

$$(1,239 + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n \tag{1.4}$$

В данной работе нас будет интересовать оценки для хроматического числа пространств небольших размерностей, а также конкретные констркуции, с помощью которых эти оценки достигаются.

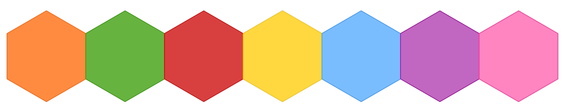
Утверждение 4 *Для* $n = 1$ *имеем* $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$

Доказательство. *Одного цвета для раскраски прямой, очевидно, не хватит. Для двух цветов существует правильная раскраска:*

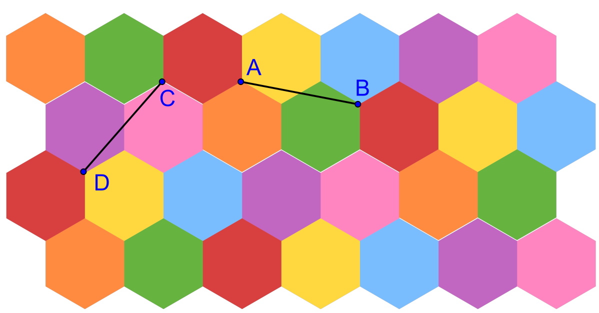
Целые числа разбивают прямую на отрезки длины 1. Будем красить полуинтервалы по правилу: $[2k-1; 2k)$ *– в красный цвет, а* $[2k; 2k+1)$ *– в синий. Тогда одноцветных точек на единичном расстоянии не найдется.* ■

Утверждение 5 *Для* $n = 2$ *выполнено* $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$

Доказательство. *Рассмотрим разбиение плоскости на шестиугольники с диагональю, немного меньшей 1. Покрасим семь шестиугольников подряд в 7 цветов:*



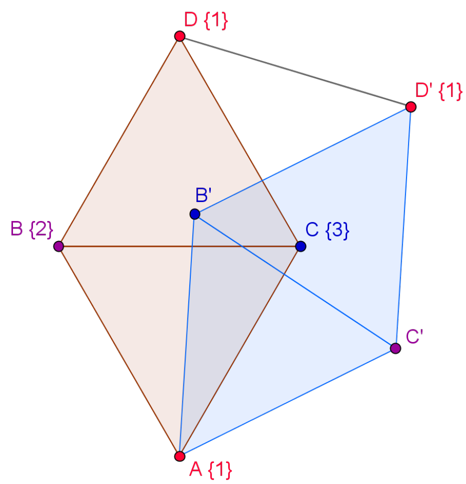
Диаметр каждого шестиугольника меньше 1, поэтому противоречий не возникло. Распространим раскраску на остальные шестиугольники:



Нетрудно проверить, что расстояние между одноцветными точками разных многоугольников больше единицы. ■

Утверждение 6 *Для* $n = 2$ *выполнено* $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$

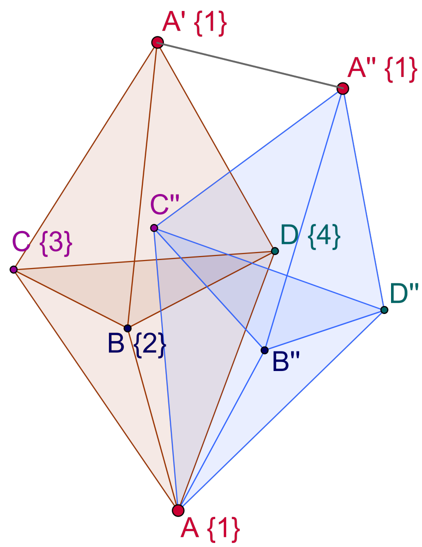
Доказательство. *Приведем дистанционный граф на плоскости, так называемое «Мозеровское веретено», для раскраски которого трех цветов не* *достаточно:*



Рассмотрим два треугольника ABC и DBC со стороной 1, «склеенные» по ребру. Повернем конструкцию вокруг точки A таким образом, чтобы точка D и ее образ находились на расстоянии 1 друг от друга. Если точка A покрашена в цвет 1, то точки B и C – в цвета 2 и 3. Значит, точка D – первого цвета. Если провести те же рассуждения в отношении точек A, B', C', D', получим что и точка D' первого цвета. Значит, раскраска не правильная, т.к. $|DD'| = 1$ ■

Утверждение 7 *(Д.Е. Райский, 1970 г). Имеет место неравенство: $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 5$*

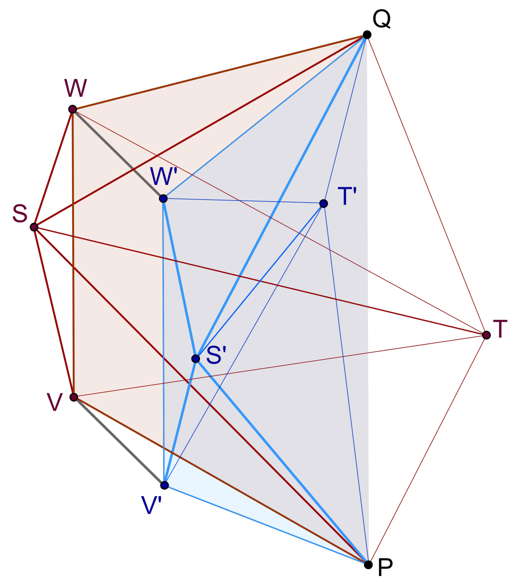
Доказательство. *Построим дистанционный граф, который будет являться трехмерным обобщением «мозеровского веретена». Рассмотрим два правильных тетраэдра $ABCD$ и $A'BCD$, «склеенные» по грани. Пусть каждое ребро этих тетраэдров имеет длину 1. Повернем конструкцию вокруг точки A' так, чтобы точки A и ее образ A'' находились на расстоянии 1 друг от друга (образы точек при повороте обозначены двумя штрихами). Предположим, что существует правильная раскраска полученного дистанционного графа в 4 цвета. Так как вершины B, C, D общей грани тетраэдров покрашены в 3 разных цвета, а всего цветов – 4, то точка A будет покрашена в тот же цвет, что и точка A' (цвет 1). В тетраэдре $A'B''C''D''$ цвета точек B'', C'', D'' отличны от цвета точки A', значит, их цвета – 2, 3 и 4 (не обязательно соответственно). Следовательно, точка A'' покрашена в цвет 1, т.к. она удалена от B'', C'', D'' на запрещенное для одноцветных точек расстояние.*



Но данная раскраска не является правильной, т.к. можно указать две точки A и A'' на единичном расстоянии, покрашенные в один и тот же цвет. ■

Теорема 8 *(О. Нечуштан, 2002 г, [4]) Имеет место неравенство:* $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 6$

Доказательство. *Предположим, что существует правильная раскраска F пространства в 5 цветов. Рассмотрим пару точек S и T на единичном расстоянии друг от друга. Обозначим через Ω множество точек, находящихся на расстоянии 1 от S и от T. Ясно, что Ω – это окружность радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$, и на ней можно выбрать последовательность точек P, V, W, Q так, чтобы $|PV| = |VW| = |WQ| = 1$. Несложно вычислить, что $|PQ| = \frac{5}{3}$ и $|PW| = |QV| = \sqrt{\frac{8}{3}}$.*



Повернем пространство вокруг прямой PQ так, чтобы точки V и ее образ V' находились на расстоянии 1 друг от друга. Если образы точек при повороте обозначить штрихами, то получим дистанционный граф $G = \{P, V, V', W, W', Q, S, S', T, T'\}$. Будем называть отрезок AB одноцветным, если его вершины покрашены в один цвет, т.е. $F(A) = F(B)$, в противном случае – разноцветным. ■

Лемма 9 *Для любой правильной раскраски F в 5 цветов выполнено:*

1. *Если отрезок PQ одноцветный, то отрезки PW, QV, PW', QV' разноцветные.*

2. *Среди отрезков PQ, PW, QV ровно один одноцветный, как и среди отрезков PQ, PW', QV'.*

Доказательство. *Первый пункт следует из того, что отрезки PV, VW, WQ длины 1, и раскраска правильная. Точки S и T разного цвета, значит, для раскраски Ω запрещены 2 цвета. Следовательно, в раскраске точек P, Q, V, W используется не больше трех цветов. Значит, найдется одноцветный отрезок с вершинами в этих точках. Это может быть только PQ, PW или QV. Следовательно, среди PQ, PW, QV (и, аналогично, среди PQ, PW', QV') есть хотя бы один одноцветный. Если одноцветный отрезок – это PQ, то по первому пункту леммы получаем, что он ровно один. Если PQ – разноцветный, а PW и QV – одноцветны, то отрезки PW', QV' (и еще PQ) – разноцветны. Но выше показано, что хотя бы один одноцветный среди них есть. Получаем утверждение второго пункта леммы.* ■

Обозначим через Ψ множество точек, удаленных от V и V' на расстояние 1. Будем вращать окружность Ψ вокруг прямой PQ, и полученное тело обозначим через $\tau(\Psi)$.

Лемма 10 *Если F – правильная раскраска $\mathbb{R}^3$ в 5 цветов, и $F(P) \neq F(Q)$, то в раскраске $\tau(\Psi)$ не используется цвет точки Q.*

Доказательство. *Из леммы 1 следует, что один из отрезков QV и QV' будет одноцветным (иначе точки P, W, W' покрашены в один и тот же цвет). Так как на окружности Ψ нет цветов точек V и V', то на Ψ нет цвета точки Q. Эти же рассуждения можно применить и для образа окружности Ψ при повороте. Получим, что в раскраске $\tau(\Psi)$ не задействован цвет точки Q.* ■

Доказательство. Рассмотрим в пространстве две точки Q и R на расстоянии $\frac{5}{3}$ друг от друга. Обозначим через C следующую окружность: $C = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid |QX| = \frac{5}{3}, |RX| = 1\}$. Сначала рассмотрим случай, когда в раскраске окружности C не используется цвет точки Q. Для любой точки P на окружности C можно построить свое множество $\tau(\Psi_P)$. Применив лемму 2, получим, что в раскраске $\tau(\Psi_P)$ не используется цвет точки Q. Объединяя множества $\tau(\Psi_P)$ для каждой точки P, лежащей на окружности C, получим некоторое множество $T(\Psi)$:

$$T(\Psi) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists P \in C \colon X \in \tau(\Psi_P)\}. \tag{1.5}$$

В раскраске $T(\Psi)$ не используется цвет точки Q. Можно показать, что множество $T(\Psi)$ таково, что в него можно поместить граф Райского – граф с хроматическим числом, равным 5. Это значит, что на покраску множества $T(\Psi)$ вместе с точкой Q потребуется как минимум 6 цветов. Если же на окружности C была точка R', покрашенная в тот же цвет, что и точка Q, то ее и возьмем в качестве точки R (точки окружности C были удалены от Q на то же расстояние, что и точка R). Тогда новая окружность C' (построенная по R') не будет содержать точек, одноцветных с Q, и задача сводится к предыдущему случаю. ■

Лучшая из известных верхних оценок для $\chi(\mathbb{R}^3)$ отличается от нижней более чем вдвое:

Теорема 11 *(Д. Кулсон, 2000 г). Выполнено соотношение $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$*

Дальше речь пойдет об оценках хроматического числа в больших размерностях, и нам понадобится понятие пестроты множества.

Определение 12 *Зафиксируем некоторое множество $U \subset \mathbb{R}^n$. Пусть для правильной раскраски F число $\pi'_F(U)$ – это наибольшее такое k, что найдется движение O пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что число цветов, затраченное на покраску множества $O(U)$ в раскраске F, равно k. Тогда пестротой множества U относительно пространства $\mathbb{R}^n$ называют минимум* *чисел* $\pi'_F(U)$ *по всем правильным раскраскам пространства* $\mathbb{R}^n$.

$$\pi^n(U) = \pi(U \mid \mathbb{R}^n) = \min_F \max_O \chi'(O(U)), \tag{1.6}$$

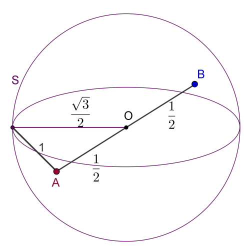
где $\chi'(O(U))$ *– количество цветов, используемых в раскраске* F *при покраске множества* $O(U)$.

Теорема 13 *Имеет место неравенство:* $\chi(\mathbb{R}^4) \geq 7$
Покажем, как можно доказать эту теорему, если известна оценка на пестроту сферы.

Лемма 14 *(А.Б. Купавский, [2]) При* $n \geq 4$ *и* $r > \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{3}-1}}, r \neq \sqrt{\frac{3}{8}}$ *, верна оценка*

$$\pi^n(S_r^2) \geq 5. \tag{1.7}$$

Доказательство. *Из леммы 3 следует, что при любой правильной раскраске* $\mathbb{R}^4$ *найдется двумерная сфера* S^2 *радиуса* $\frac{\sqrt{3}}{2}$, *при раскраске которой используется 5 цветов. Через центр этой сферы можно провести прямую, ортогональную трехмерной гиперплоскости, содержащей сферу. На этой прямой можно отметить две точки* A *и* B *на расстоянии* $\frac{1}{2}$ *от центра сферы, а, значит, на единичном расстоянии друг от друга:*



При заданном радиусе точки сферы S^2 *будут находиться на расстоянии 1 от точек* A *и* B. *Значит, необходимо как минимум 7 различных цветов* $\chi(S^2) geq 5$ *и ещё 2 цвета – для покраски точек* A, B). ■

Теперь покажем, как можно получить оценки на пестроту самих сфер (в зависимости от радиуса и размерности пространства, в которое сфера вложена). Не будем приводить вычислений для допустимого радиуса r сферы, отметим лишь, что радиус r и размерность пространства подобраны таким образом, чтобы описанные ниже конструкции было возможно реализовать. Будем ссылаться на следующую лемму:

Лемма 15 *(А.Б. Купаский, [2]) Пусть* Sp_x^n *– правильный* n*-мерный симплекс со стороной* x, *а радиус описанной вокруг него сферы равен* a. *Тогда для любого* $a > \frac{n}{2n+2}$

$$\pi^{2n}(Sp_x^n) = n + 1 \tag{1.8}$$

Теорема 16 *(А.Б. Купавский [2]) При $n > 7$ и $r \in \left(\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\right)^2}{n^2+6n+4+\sqrt{8n(n+1)}} + \frac{n}{2n+2}}, \sqrt{\frac{(\sqrt{n+2}+\sqrt{2})^2+n^3}{(2n+2)n^2}}\right)$ выполнено:*

$$\pi^{2n+2}(S_r^n) \geq 2n+2 \tag{1.9}$$

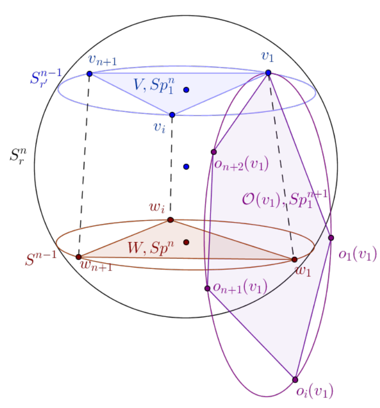
Доказательство. *Зафиксируем правильную раскраску $\mathbb{R}^{2n+2}$, радиус r из теоремы и будем искать сферу S_r^n, покрашенную в $2n+2$ цвета. Из леммы 4 следует, что при некоторых условиях на радиус a описанной сферы найдется n-мерный симплекс Sp^n (далее обозначен как W), покрашенный в $n+1$ цвет. Описанную вокруг этого симплекса сферу обозначим S^{n-1}. Сфера S^{n-1} содержится в некоторой сфере S_r^n. При фиксированном радиусе r можно подобрать радиус a сферы S^{n-1} таким образом, чтобы в S_r^n содержалось множество V из $n+1$ точки со свойствами:*

1. *Точки множества V удалены друг от друга на расстояние 1, то есть, образуют единичный симплекс Sp_1^n.*

2. *Каждая точка множества V удалена от n вершин симплекса W на расстояние 1, то есть, удалена на расстояние, отличное от единицы, только от одной вершины симплекса W.*

Итак, множество V – это симплекс Sp_1^n со стороной 1. Описанная вокруг него сфера $S_r'^{n-1}$ (вложенная в S_r^n) лежит в n-мерной плоскости, параллельной аналогичной плоскости для S^{n-1}.

Будем вращать симплекс V вокруг плоскости, содержащей S^{n-1}. Каждая вершина v симплекса V опишет $(n+1)$-мерную сферу, в которую можно вписать $(n+1)$-мерный симплекс Sp_1^{n+1} со стороной 1. Поэтому можно выбрать только те повороты o_1, o_2, …, o_{n+2} пространства, которые переводят вершину v в вершины симплекса Sp_1^{n+1}. Множество таких вращений обозначим O, а симплекс, полученный в результате применения вращений из O к вершине v, обозначим $O(v)$.



Для каждой вершины v_i симплекса V ($i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$) обозначим через w_i ту единственную вершину симплекса W, расстояние до которой *отлично от 1. Так как цвета точек $o_1(v_i)$, $o_2(v_i)$, $\ldots$, $o_{n+2}(v_i)$ различны, то среди этих точек можно выбрать как минимум $n+1$ точку, покрашенную не в цвет w_i. Получаем для каждой вершины v_i симплекса V $(n+1)$-элементное подмножество точек $(n+2)$-элементного множества $O(v_i)$. Симплекс V имеет $n+1$ вершину, значит, по принципу Дирихле, найдется поворот, например, o_1, при котором $o_1(v_i)$ и w_i покрашены в разные цвета для любого i. Симплексы $o_1(V)$ и W вложены в некоторую n-мерную сферу S_r^n, на покраску которой затрачено $2n+2$ цвета, т.к. любые две вершины симплексов $o_1(V)$ и W покрашены в разные цвета.* ∎

Покажем, что можно обобщить доказательство теоремы 4 на случай, когда семейство O вращений переводит вершину v в некоторый дистанционный граф $G(v)$ с хроматическим числом, не меньшим $n+2$. В частности, в качестве $G(v)$ можно рассмотреть единичный симплекс Sp_1^{n+1}, что и было сделано при доказательстве теоремы 4.

Утверждение 17 *Пусть симплексы W и V располагаются в пространстве так, как было описано в доказательстве теоремы 4. Рассмотрим семейство O вращений вокруг плоскости, содержащей симплекс W, таких, что образы каждой вершины v_i образуют дистанционный граф $G(v_i)$, причём $\chi(G(v_i)) \geq n+2$. Тогда существует такое вращение $o \in O$, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ цвет w_i не совпадает с цветом $o(v_i)$.*

Доказательство. *Сначала выберем из семейства O те и только те вращения, при которых образ вершины v_1 покрашен в цвет, отличный от цвета w_1. Полученное множество вращений обозначим O_1. Заметим, что для каждой вершины v_i симплекса V граф $O_1(v_i)$ имеет хроматическое число, равное, по крайней мере, $n+1$. Действительно, если это не так, и существует правильная раскраска $O_1(v_i)$ в n цветов, то раскрасим в новый $(n+1)$-й цвет (пусть – черный) образы вершины v_i при вращениях из множества O*

O_1. Полученная раскраска графа $G(v_i)$ в $n+1$ цвет будет правильной, т.к. любые две вершины черного цвета удалены друг от друга на незапрещенное расстояние. Это так, потому что при правильной раскраске графа $O(v_1)$ аналогичные им вершины (получающиеся при тех же вращениях пространства) были покрашены в один и тот же цвет. Итак, $\chi(O_1(v_i)) \geq n+1$.

Далее построим аналогично множество O_2 для вершины v_2: из множества O_1 выберем те и только те вращения, при которых цвет образа вершины v_2 отличен от цвета w_2. Можно провести аналогичные рассуждения и получить, что хроматическое число графа $O_2(v_i)$ не меньше n (для всех вершин v_i). Продолжим строить по аналогии множества O_3, O_4, $\ldots$, O_{n+1}. При переходе к каждому следующему множеству хроматическое число графа $O_{j+1}(v_i)$ будет не более чем на 1 меньше хроматического числа графа $O_j(v_i)$. Таким образом, $\chi(O_{n+1}(v_i)) \geq ((n+2)-(n+1)) = 1$. Это означает, что множество O_{n+1} не пусто, и существует поворот

$o \in O_{n+1} \subset \ldots \subset O_2 \subset O_1 \subset O$, при котором цвета $o(v_i)$ и w_i отличаются. ■

Глава 2

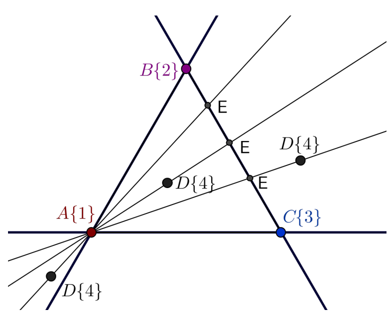
Новые результаты

Результаты данного раздела, возможно, являются фольклорными, однако автор не встречал их в литературе по данной тематике.

Утверждение 18 *При любой правильной раскраске плоскости найдется прямая l, в раскраске которой используется хотя бы 3 различных цвета:*

$$\pi^2(l) \geq 3 \tag{2.1}$$

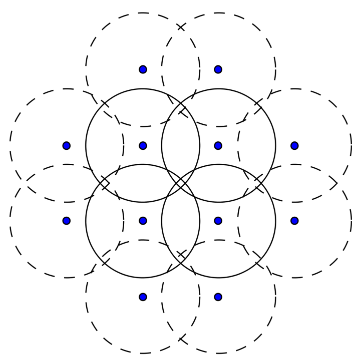
Доказательство. *Предположим, что существует правильная раскраска плоскости такая, что любая прямая раскрашена ровно в 2 цвета (прямая не может быть покрашена в один цвет, т.к. на ней есть точки на расстоянии 1). Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной длины 1. Прямые, содержащие его стороны, разбивают плоскость на 7 частей. Так как плоскость нельзя покрасить в число цветов, меньшее 4, то можно выбрать точку D, цвет которой будет отличаться от тех трех цветов, использующихся для раскраски ABC. Если точка D лежит на одной из проведенных прямых, то эта прямая и будет раскрашена как минимум в 3 цвета. Без ограничения общности, остается рассмотреть три случая расположения точки D (все три случая изображены на одном рисунке):*



Прямые AD и BC в таких случаях не будут параллельны. Пусть E – точка пересечения AD и BC. Тогда с одной стороны, точка E должна быть цвета точки A или точки D, а с другой – цвета B или C. Получаем противоречие. ■

Утверждение 19 *Пусть раскраска плоскости такова, что для любого $\epsilon > 0$ нельзя выбрать круг радиуса ϵ, покрашенный ровно в один цвет. Тогда при такой раскраске для любого $\delta > 0$ можно найти 3 точки разных цветов, попадающие в круг радиуса δ.*

Доказательство. *Зафиксируем $\delta > 0$. Предположим, что все круги радиуса δ покрашены ровно в 2 цвета (условие запрещает им быть покрашенными в один цвет). Замостим плоскость кругами радиуса δ (с пересечениями):*



Выберем некоторый круг, и пусть он раскрашен в красный и синий цвета. Тогда любой «соседний» с ним круг тоже раскрашен в красный и синий цвета, т.к. их пересечение содержит круг маленького радиуса, который по условию не может быть только одного цвета. Итак, цвета в раскраске «соседних» кругов те же, что и в раскраске выбранного круга. Таким образом можно «дойти» до каждой точки плоскости. Получаем, что плоскость раскрашена правильно всего в 2 цвета, чего быть не может. ■

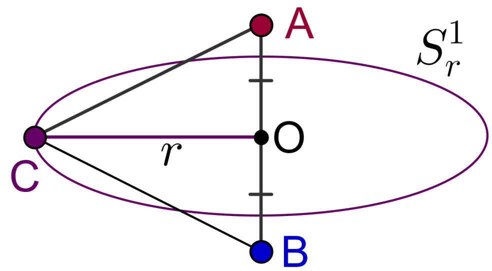
Замечание 20 *Существует число $\delta > 0$ и правильная раскраска плоскости, при которой нельзя указать 4 точки разных цветов, которые можно «накрыть» кругом радиуса δ.*

Доказательство. *Рассмотрим раскраску плоскости, которая использовалась для оценки $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Остается выбрать число δ достаточно маленьким.* ■

Утверждение 21 *Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ равнобедренный треугольник ABC с основанием AB длины 1. Пусть r – длина высоты, проведенной к основанию, и $r > \frac{1}{2}$. Множество, состоящее из вершин этого* *треугольника обозначим через Δ. Имеем*

$$\pi^3(\Delta) = 3 \tag{2.2}$$

Доказательство. *Зафиксируем r. Покажем сначала, что если в пространстве найдется окружность S_r^1 радиуса r, покрашенная хотя бы в 3 цвета, то утверждение будет доказано. Рассмотрим прямую, проходящую через центр O окружности S_r^1 перпендикулярно плоскости, ее содержащей. На этой прямой отметим точки A и B на расстоянии $\frac{1}{2}$ от точки O. Так как окружность S_r^1 покрашена хотя бы в 3 цвета, то найдется точка $C \in S_r^1$, цвет которой будет отличен от двух цветов A и B. Значит, удалось обнаружить трехцветное множество Δ.*



Остается случай, когда все окружности радиуса r покрашены в 2 цвета. Рассмотрим две точки D и E на расстоянии $2r$ друг от друга, покрашенные в разные цвета. Такие точки найдутся, потому что в любом равнобедренном треугольнике с длинами сторон $2r$, $2r$, 1 одна из боковых сторон будет покрашена в 2 разных цвета (используем, что $r > \frac{1}{2}$). Все окружности с диаметром DE двуцветны по предположению, а значит и сфера S_r^2, являющаяся объединением этих окружностей, также покрашена только в цвета точек D и E. Однако тот факт, что двумерная сфера покрашена в 2 цвета, противоречит теореме Л. Ловаса: ■

Теорема 22 *(Л.Ловас 1983 г). При $r > \frac{1}{2}$ имеет место $\chi(S_r^n) \geq n + 1$.*

Для $n = 2$ получаем $\chi(S_r^2) \geq 3$. Значит, сфера S_r^2 не может быть покрашена в 2 цвета, и получено противоречие.

Литература

[1] А.Б. Купавский: *«О поднятии оценки хроматического числа $\mathbb{R}^n$ в бо́льшую размер-ность»*, Доклады Российской Академии Наук, **429:3** (2009), 305 - 308.

[2] А.Б. Купавский: *«О раскрасках сфер, вложенных в $\mathbb{R}^n$»*, Матем. сборник, **202:6** (2011), 83–110.

[3] А.М Райгородский: *Хроматические числа*, МЦНМО, Москва, 2003.

[4] O. Nechushtan: *«On the space chromatic number»*, Discrete Math., **256** (2002), 499-507.