

Хроматические числа

Гольцова Надежда

14 июля 2013 г.

Обзор результатов

Задача о нахождении хроматического числа плоскости была поставлена Э. Нелсоном в 1950 г. и остается не решенной до сих пор. Её формулировка: какое наименьшее число цветов необходимо для такой раскраски плоскости, при которой любые две точки на расстоянии 1 друг от друга покрашены в разные цвета?

Будем рассматривать этот вопрос не только для плоскости, но и для пространства с евклидовой метрикой. Введем необходимые определения:

Определение 1 *Правильной раскраской пространства \mathbb{R}^n в m цветов называется такое отображение $F_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, что:*

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n: F_m(X) = F_m(Y) \Rightarrow |XY| \neq 1 \quad (1)$$

Определение 2 *Хроматическим числом пространства \mathbb{R}^n называется такое наименьшее натуральное число n , что существует правильная раскраска \mathbb{R}^n в n цветов:*

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \exists F_m\} \quad (2)$$

Определение 3 *Дистанционным графом $G(V, E)$ в пространстве \mathbb{R}^n называется граф с множеством вершин $V \in \mathbb{R}^n$ и множеством рёбер:*

$$E = \{(x, y) \in V \times V \mid |x - y| = 1\} \quad (3)$$

Известны асимптотические оценки для хроматического числа \mathbb{R}^n :

$$(1, 239 + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n \quad (4)$$

В данной работе нас будет интересовать оценки для хроматического числа пространств небольших размерностей, а также конкретные конструкции, с помощью которых эти оценки достигаются.

Утверждение 1 *Для $n = 1$ имеем $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$*

Доказательство. *Одного цвета для раскраски прямой, очевидно, не хватит. Для двух цветов существует правильная раскраска:*



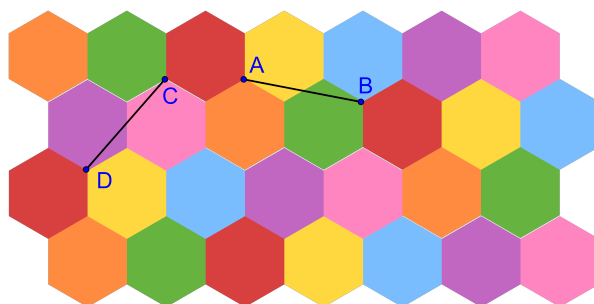
Целые числа разбивают прямую на отрезки длины 1. Будем красить полуинтервалы по правилу: $[2k-1; 2k)$ – в красный цвет, а $[2k; 2k+1)$ – в синий. Тогда одноцветных точек на единичном расстоянии не найдется. ■

Утверждение 2 Для $n = 2$ выполнено $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$

Доказательство. Рассмотрим разбиение плоскости на шестиугольники с диагональю, немного меньшей 1. Покрасим семь шестиугольников подряд в 7 цветов:



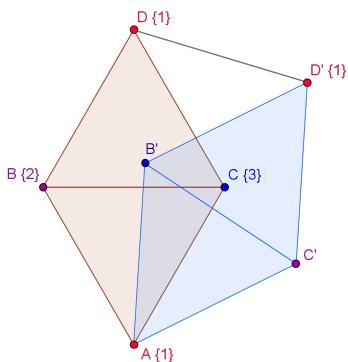
Диаметр каждого шестиугольника меньше 1, поэтому противоречий не возникло. Распространим раскраску на остальные шестиугольники:



Нетрудно проверить, что расстояние между одноцветными точками разных многоугольников больше единицы. ■

Утверждение 3 Для $n = 2$ выполнено $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$

Доказательство. Приведем дистанционный граф на плоскости, так называемое «Мозеровское веретено», для раскраски которого трех цветов не достаточно:



Рассмотрим два треугольника ABC и DBC со стороной 1, «склеенные» по ребру. Повернем конструкцию вокруг точки A таким образом, чтобы точка D и ее образ находились на расстоянии 1 друг от друга. Если точка A покрашена в цвет $\{1\}$, то точки B и C – в цвета $\{2\}$ и $\{3\}$. Значит, точка D – первого цвета. Если провести те же рассуждения в отношении точек A, B', C', D' , получим что и точка D' первого цвета. Значит, раскраска не правильная, т.к. $|DD'| = 1$ ■

Перейдем к оценкам для хроматического числа пространства \mathbb{R}^3 .

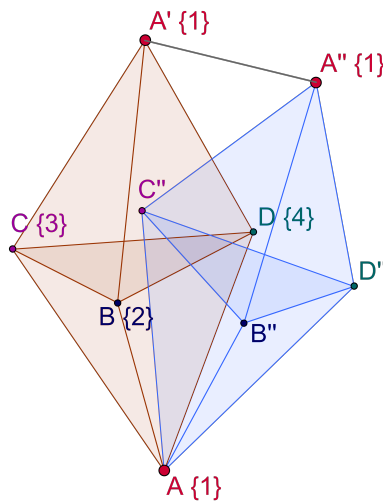
Утверждение 4 (Д.Е. Райский, 1970 г.)

Имеет место неравенство: $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 5$

Доказательство. Построим дистанционный граф, который будет являться трехмерным обобщением «мозеровского веретена». Рассмотрим два правильных тетраэдра $ABCD$ и $A'B'CD$, «склеенные» по грани. Пусть каждое ребро этих тетраэдров имеет длину 1. Повернем конструкцию вокруг точки A' так, чтобы точки A и ее образ A'' находились на расстоянии 1 друг от друга (образы точек при повороте обозначены двумя штрихами).

Предположим, что существует правильная раскраска полученного дистанционного графа в 4 цвета. Так как вершины B, C, D общей грани тетраэдров покрашены в 3 разных цвета, а всего цветов – 4, то точка A будет покрашена в тот же цвет, что и точка A' (цвет $\{1\}$).

В тетраэдре $A'B''C''D''$ цвета точек B'', C'', D'' отличны от цвета точки A' , значит, их цвета – $\{2\}$, $\{3\}$ и $\{4\}$ (не обязательно соответственно). Следовательно, точка A'' покрашена в цвет $\{1\}$, т.к. она удалена от B'', C'', D'' на запрещенное для одноцветных точек расстояние.

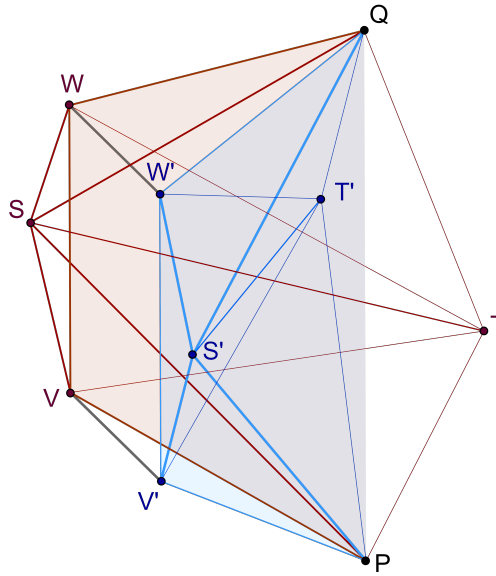


Но данная раскраска не является правильной, т.к. можно указать две точки A и A'' на единичном расстоянии, покрашенные в один и тот же цвет. ■

Теорема 1 (О. Нечуштан, 2002 г, [4])

Имеет место неравенство: $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 6$

Доказательство. Предположим, что существует правильная раскраска \mathcal{F} пространства в 5 цветов. Рассмотрим пару точек S и T на единичном расстоянии друг от друга. Обозначим через Ω множество точек, находящихся на расстоянии 1 от S и от T . Ясно, что Ω – это окружность радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$, и на ней можно выбрать последовательность точек P, V, W, Q так, чтобы $|PV| = |VW| = |WQ| = 1$. Несложно вычислить, что $|PQ| = \frac{5}{3}$ и $|PW| = |QV| = \sqrt{\frac{8}{3}}$.



Повернем пространство вокруг прямой PQ так, чтобы точки V и ее образ V' находились на расстоянии 1 друг от друга. Если образы точек при повороте обозначить штрихами, то получим дистанционный граф $G = \{P, V, V', W, W', Q, S, S', T, T'\}$.

Будем называть отрезок AB одноцветным, если его вершины покрашены в один цвет, т.е. $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$, в противном случае – разноцветным.

■

Лемма 1 Для любой правильной раскраски \mathcal{F} в 5 цветов выполнено:

1. Если отрезок PQ одноцветный, то отрезки PW, QV, PW', QV' разноцветные.
2. Среди отрезков PQ, PW, QV ровно один одноцветный, как и среди отрезков PQ, PW', QV' .

Доказательство. Первый пункт следует из того, что отрезки PV, VW, WQ длины 1, и раскраска правильная. Точки S и T разного цвета, значит, для раскраски Ω запрещены 2 цвета. Следовательно, в раскраске точек P, Q, V, W используется не больше трех цветов. Значит, найдется одноцветный отрезок с вершинами в этих точках. Это может быть только PQ, PW или QV . Следовательно, среди PQ, PW, QV (и, аналогично, среди PQ, PW', QV') есть хотя бы один одноцветный.

Если одноцветный отрезок – это PQ , то по первому пункту леммы получаем, что он ровно один. Если PQ – разноцветный, а PW и QV – одноцветны, то отрезки PW', QV' (и еще PQ) – разноцветны. Но выше показано, что хотя бы один одноцветный среди них есть. Получаем утверждение второго пункта леммы. ■

Обозначим через Ψ множество точек, удаленных от V и V' на расстояние 1. Будем вращать окружность Ψ вокруг прямой PQ , и полученное тело обозначим через $\tau(\Psi)$.

Лемма 2 Если \mathcal{F} – правильная раскраска \mathbb{R}^3 в 5 цветов, и $\mathcal{F}(P) \neq \mathcal{F}(Q)$, то в раскраске $\tau(\Psi)$ не используется цвет точки Q .

Доказательство. Из леммы 1 следует, что один из отрезков QV и QV' будет одноцветным (иначе точки P, W, W' покрашены в один и тот же цвет). Так как на окружности Ψ нет цветов точек V и V' , то на Ψ нет цвета точки Q . Эти же рассуждения можно применить и для образа окружности Ψ при повороте. Получим, что в раскраске $\tau(\Psi)$ не задействован цвет точки Q . ■

Доказательство. Рассмотрим в пространстве две точки Q и R на расстоянии $\frac{5}{3}$ друг от друга. Обозначим через C следующую окружность: $C = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid |QX| = \frac{5}{3}, |RX| = 1\}$. Сначала рассмотрим случай, когда в раскраске окружности C не используется цвет точки Q .

Для любой точки P на окружности C можно построить свое множество $\tau(\Psi_P)$. Применив лемму 2, получим, что в раскраске $\tau(\Psi_P)$ не используется цвет точки Q . Объединяя множества $\tau(\Psi_P)$ для каждой точки P , лежащей на окружности C , получим некоторое множество $T(\Psi)$:

$$T(\Psi) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists P \in C: X \in \tau(\Psi_P)\}. \quad (5)$$

В раскраске $T(\Psi)$ не используется цвет точки Q . Можно показать, что множество $T(\Psi)$ таково, что в него можно поместить граф Райского – граф с хроматическим числом, равным 5. Это значит, что на покраску множества $T(\Psi)$ вместе с точкой Q потребуется как минимум 6 цветов.

Если же на окружности C была точка R' , покрашенная в тот же цвет, что и точка Q , то ее и возьмем в качестве точки R (точки окружности C были удалены от Q на то же расстояние, что и точка R). Тогда новая окружность C' (построенная по R') не будет содержать точек, одноцветных с Q , и задача сводится к предыдущему случаю. ■

Лучшая из известных верхних оценок для $\chi(\mathbb{R}^3)$ отличается от нижней более чем вдвое:

Теорема 2 (Д. Кулсон, 2000 г.) *Выполнено соотношение $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$*

Дальше речь пойдет об оценках хроматического числа в больших размерностях, и нам понадобится понятие пестроты множества.

Определение 4 *Зафиксируем некоторое множество $U \subset \mathbb{R}^n$. Пусть для правильной раскраски \mathcal{F} число $\pi'_{\mathcal{F}}(U)$ – это наибольшее такое k , что найдется движение \mathcal{O} пространства \mathbb{R}^n такое, что число цветов, затраченное на покраску множества $\mathcal{O}(U)$ в раскраске \mathcal{F} , равно k . Тогда пестротой множества U относительно пространства \mathbb{R}^n называют минимум чисел $\pi'_{\mathcal{F}}(U)$ по всем правильным раскраскам пространства \mathbb{R}^n .*

$$\pi^n(U) = \pi(U \mid \mathbb{R}^n) = \min_{\mathcal{F}} \max_{\mathcal{O}} \chi'(\mathcal{O}(U)), \quad (6)$$

где $\chi'(\mathcal{O}(U))$ – количество цветов, используемых в раскраске \mathcal{F} при покраске множества $\mathcal{O}(U)$.

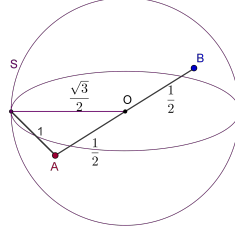
Теорема 3 *Имеет место неравенство: $\chi(\mathbb{R}^4) \geq 7$*

Покажем, как можно доказать эту теорему, если известна оценка на пестроту сферы.

Лемма 3 (А.Б. Купавский, [2]) *При $n \geq 4$ и $r > \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{3}-1}}$, $r \neq \sqrt{\frac{3}{8}}$, верна оценка*

$$\pi^n(S_r^2) \geq 5. \quad (7)$$

Доказательство. Из леммы 3 следует, что при любой правильной раскраске \mathbb{R}^4 найдется двумерная сфера S^2 радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$, при раскраске которой используется 5 цветов. Через центр этой сферы можно провести прямую, ортогональную трехмерной гиперплоскости, содержащей сферу. На этой прямой можно отметить две точки A и B на расстоянии $\frac{1}{2}$ от центра сферы, а, значит, на единичном расстоянии друг от друга:



При заданном радиусе точки сферы S^2 будут находиться на расстоянии 1 от точек A и B . Значит, необходимо как минимум 7 различных цветов ($\chi(S^2) \geq 5$ и ещё 2 цвета – для покраски точек A, B). ■

Теперь покажем, как можно получить оценки на пестроту самих сфер (в зависимости от радиуса и размерности пространства, в которое сфера вложена). Не будем приводить вычислений для допустимого радиуса r сферы, отметим лишь, что радиус r и размерность пространства подобраны таким образом, чтобы описанные ниже конструкции было возможно реализовать. Будем ссылаться на следующую лемму:

Лемма 4 (А.Б. Купаский, [2]) Пусть Sr_x^n – правильный n -мерный симплекс со стороной x , а радиус описанной вокруг него сферы равен α . Тогда для любого $\alpha > \frac{n}{2n+2}$

$$\pi^{2n}(Sr_x^n) = n + 1 \quad (8)$$

Теорема 4 (А.Б. Купавский [2])

При $n > 7$ и $r \in \left(\sqrt{\frac{(1 + \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}})^2}{n^2 + 6n + 4 + \sqrt{8n(n+1)}} + \frac{n}{2n+2}}, \sqrt{\frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{2})^2 + n^3}{(2n+2)n^2}} \right)$ выполнено:

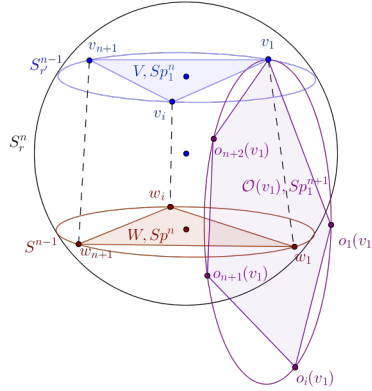
$$\pi^{2n+2}(S_r^n) \geq 2n + 2 \quad (9)$$

Доказательство. Зафиксируем правильную раскраску \mathbb{R}^{2n+2} , радиус r из теоремы и будем искать сферу S_r^n , покрашенную в $2n + 2$ цвета. Из леммы 4 следует, что при некоторых условиях на радиус α описанной сферы найдется n -мерный симплекс Sr^n (далее обозначен как W), покрашенный в $n + 1$ цвет. Описанную вокруг этого симплекса сферу обозначим S^{n-1} . Сфера S^{n-1} содержится в некоторой сфере S_r^n . При фиксированном радиусе r можно подобрать радиус α сферы S^{n-1} таким образом, чтобы в S_r^n содержалось множество V из $n + 1$ точки со свойствами:

1. Точки множества V удалены друг от друга на расстояние 1, то есть, образуют единичный симплекс Sr_1^n .
2. Каждая точка множества V удалена от n вершин симплекса W на расстояние 1, то есть, удалена на расстояние, отличное от единицы, только от одной вершины симплекса W .

Итак, множество V – это симплекс Sp_1^n со стороной 1. Описанная вокруг него сфера S_r^{n-1} (вложенная в S_r^n) лежит в n -мерной плоскости, параллельной аналогичной плоскости для S^{n-1} .

Будем вращать симплекс V вокруг плоскости, содержащей S^{n-1} . Каждая вершина v симплекса V опишет $(n+1)$ -мерную сферу, в которую можно вписать $(n+1)$ -мерный симплекс Sp_1^{n+1} со стороной 1. Поэтому можно выбрать только те повороты o_1, o_2, \dots, o_{n+2} пространства, которые переводят вершину v в вершины симплекса Sp_1^{n+1} . Множество таких вращений обозначим \mathcal{O} , а симплекс, полученный в результате применения вращений из \mathcal{O} к вершине v , обозначим $\mathcal{O}(v)$.



Для каждой вершины v_i симплекса V ($i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$) обозначим через w_i ту единственную вершину симплекса W , расстояние до которой отлочно от 1. Так как цвета точек $o_1(v_i), o_2(v_i), \dots, o_{n+2}(v_i)$ различны, то среди этих точек можно выбрать как минимум $n+1$ точку, покрашенную не в цвет w_i . Получаем для каждой вершины v_i симплекса V $(n+1)$ -элементное подмножество точек $(n+2)$ -элементного множества $\mathcal{O}(v_i)$. Симплекс V имеет $n+1$ вершину, значит, по принципу Дирихле, найдется поворот, например, o_1 , при котором $o_1(v_i)$ и w_i покрашены в разные цвета для любого i . Симплексы $o_1(V)$ и W вложены в некоторую n -мерную сферу S_r^n , на покраску которой затрачено $2n+2$ цвета, т.к. любые две вершины симплексов $o_1(V)$ и W покрашены в разные цвета. ■

Покажем, что можно обобщить доказательство теоремы 4 на случай, когда семейство \mathcal{O} вращений переводит вершину v в некоторый дистанционный граф $G(v)$ с хроматическим числом, не меньшим $n+2$. В частности, в качестве $G(v)$ можно рассмотреть единичный симплекс Sp_1^{n+1} , что и было сделано при доказательстве теоремы 4.

Утверждение 5 Пусть симплексы W и V располагаются в пространстве так, как было описано в доказательстве теоремы 4. Рассмотрим

семейство \mathcal{O} вращений вокруг плоскости, содержащей симплекс W , таких, что образы каждой вершины v_i образуют дистанционный граф $G(v_i)$, причём $\chi(G(v_i)) \geq n + 2$. Тогда существует такое вращение $o \in \mathcal{O}$, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ цвет w_i не совпадает с цветом $o(v_i)$.

Доказательство. Сначала выберем из семейства \mathcal{O} те и только те вращения, при которых образ вершины v_1 покрашен в цвет, отличный от цвета w_1 . Полученное множество вращений обозначим \mathcal{O}_1 . Заметим, что для каждой вершины v_i симплекса V граф $\mathcal{O}_1(v_i)$ имеет хроматическое число, равное, по крайней мере, $n + 1$. Действительно, если это не так, и существует правильная раскраска $\mathcal{O}_1(v_i)$ в n цветов, то раскрасим в новый $(n + 1)$ -й цвет (пусть – черный) образы вершины v_i при вращениях из множества $\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_1$. Полученная раскраска графа $G(v_i)$ в $n + 1$ цвет будет правильной, т.к. любые две вершины черного цвета удалены друг от друга на незапрещенное расстояние. Это так, потому что при правильной раскраске графа $\mathcal{O}(v_1)$ аналогичные им вершины (получающиеся при тех же вращениях пространства) были покрашены в один и тот же цвет. Итак, $\chi(\mathcal{O}_1(v_i)) \geq n + 1$.

Далее построим аналогично множество \mathcal{O}_2 для вершины v_2 : из множества \mathcal{O}_1 выберем те и только те вращения, при которых цвет образа вершины v_2 отличен от цвета w_2 . Можно провести аналогичные рассуждения и получить, что хроматическое число графа $\mathcal{O}_2(v_i)$ не меньше n (для всех вершин v_i). Продолжим строить по аналогии множества $\mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4, \dots, \mathcal{O}_{n+1}$. При переходе к каждому следующему множеству хроматическое число графа $\mathcal{O}_{j+1}(v_i)$ будет не более чем на 1 меньше хроматического числа графа $\mathcal{O}_j(v_i)$. Таким образом, $\chi(\mathcal{O}_{n+1}(v_i)) \geq ((n + 2) - (n + 1)) = 1$. Это означает, что множество \mathcal{O}_{n+1} не пусто, и существует поворот $o \in \mathcal{O}_{n+1} \subset \dots \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, при котором цвета $o(v_i)$ и w_i отличаются. ■

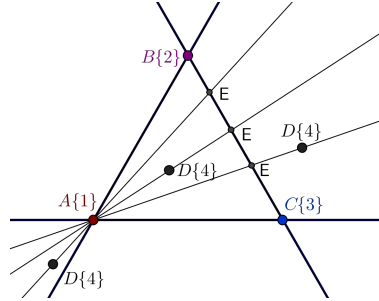
Новые результаты

Результаты данного раздела, возможно, являются фольклорными, однако автор не встречал их в литературе по данной тематике.

Утверждение 6 При любой правильной раскраске плоскости найдется прямая l , в раскраске которой используется хотя бы 3 различных цвета:

$$\pi^2(l) \geq 3 \quad (10)$$

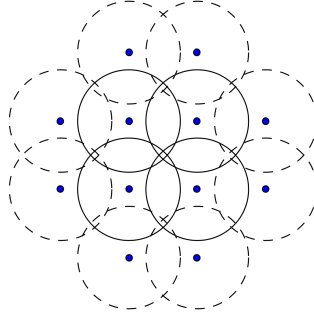
Доказательство. Предположим, что существует правильная раскраска плоскости такая, что любая прямая раскрашена ровно в 2 цвета (прямая не может быть покрашена в один цвет, т.к. на ней есть точки на расстоянии 1). Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной длины 1. Прямые, содержащие его стороны, разбивают плоскость на 7 частей. Так как плоскость нельзя покрасить в число цветов, меньшее 4, то можно выбрать точку D , цвет которой будет отличаться от тех трех цветов, использующихся для раскраски ABC . Если точка D лежит на одной из проведенных прямых, то эта прямая и будет раскрашена как минимум в 3 цвета. Без ограничения общности, остается рассмотреть три случая расположения точки D (все три случая изображены на одном рисунке):



Прямые AD и BC в таких случаях не будут параллельны. Пусть E – точка пересечения AD и BC . Тогда с одной стороны, точка E должна быть цвета точки A или точки D , а с другой – цвета B или C . Получаем противоречие. ■

Утверждение 7 Пусть раскраска плоскости такова, что для любого $\epsilon > 0$ нельзя выбрать круг радиуса ϵ , покрашенный ровно в один цвет. Тогда при такой раскраске для любого $\delta > 0$ можно найти 3 точки разных цветов, попадающие в круг радиуса δ .

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$. Предположим, что все круги радиуса δ покрашены ровно в 2 цвета (условие запрещает им быть покрашенными в один цвет). Замостим плоскость кругами радиуса δ (с пересечениями):



Выберем некоторый круг, и пусть он раскрашен в красный и синий цвета. Тогда любой «соседний» с ним круг тоже раскрашен в красный и синий цвета, т.к. их пересечение содержит круг маленького радиуса, который по условию не может быть только одного цвета. Итак, цвета в раскраске «соседних» кругов те же, что и в раскраске выбранного круга. Таким образом можно «дойти» до каждой точки плоскости. Получаем, что плоскость раскрашена правильно всего в 2 цвета, чего быть не может. ■

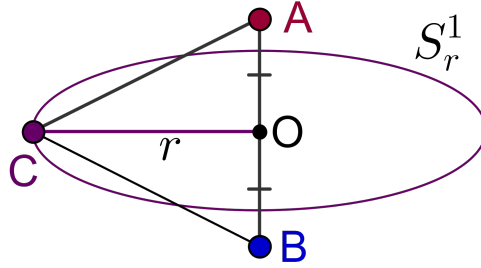
Замечание 1 Существует число $\delta > 0$ и правильная раскраска плоскости, при которой нельзя указать 4 точки разных цветов, которые можно «накрыть» кругом радиуса δ .

Доказательство. Рассмотрим раскраску плоскости, которая использовалась для оценки $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Остается выбрать число δ достаточно маленьким. ■

Утверждение 8 Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 равнобедренный треугольник ABC с основанием AB длины 1. Пусть r – длина высоты, проведенной к основанию, и $r > \frac{1}{2}$. Множество, состоящее из вершин этого треугольника обозначим через Δ . Имеем

$$\pi^3(\Delta) = 3 \quad (11)$$

Доказательство. Зафиксируем r . Покажем сначала, что если в пространстве найдется окружность S_r^1 радиуса r , покрашенная хотя бы в 3 цвета, то утверждение будет доказано. Рассмотрим прямую, проходящую через центр O окружности S_r^1 перпендикулярно плоскости, ее содержащей. На этой прямой отметим точки A и B на расстоянии $\frac{1}{2}$ от точки O . Так как окружность S_r^1 покрашена хотя бы в 3 цвета, то найдется точка $C \in S_r^1$, цвет которой будет отличен от двух цветов A и B . Значит, удалось обнаружить трехцветное множество Δ .



Остается случай, когда все окружности радиуса r покрашены в 2 цвета. Рассмотрим две точки D и E на расстоянии $2r$ друг от друга, покрашенные в разные цвета. Такие точки найдутся, потому что в любом равнобедренном треугольнике с длинами сторон $2r, 2r, 1$ одна из боковых сторон будет покрашена в 2 разных цвета (используем, что $r > \frac{1}{2}$). Все окружности с диаметром DE двуцветны по предположению, а значит и сфера S_r^2 , являющаяся объединением этих окружностей, также покрашена только в 2 цвета точек D и E . Однако тот факт, что двумерная сфера покрашена в 2 цвета, противоречит теореме Л. Ловаса:

Теорема 5 (Л.Ловас 1983 г.) При $r > \frac{1}{2}$ имеет место $\chi(S_r^n) \geq n + 1$.

Для $n = 2$ получаем $\chi(S_r^2) \geq 3$. Значит, сфера S_r^2 не может быть покрашена в 2 цвета, и получено противоречие. ■

Литература

- [1] А.Б. КУПАВСКИЙ: «О поднятии оценки хроматического числа \mathbb{R}^n в большую размерность», Доклады Российской Академии Наук, **429:3** (2009), 305 - 308.
- [2] А.Б. КУПАВСКИЙ: «О раскрасках сфер, вложенных в \mathbb{R}^n », Матем. сборник, **202:6** (2011), 83–110.
- [3] А.М РАЙГОРОДСКИЙ: *Хроматические числа*, МЦНМО, Москва, 2003.
- [4] О. NECHUSHTAN: «On the space chromatic number», Discrete Math., **256** (2002), 499-507.