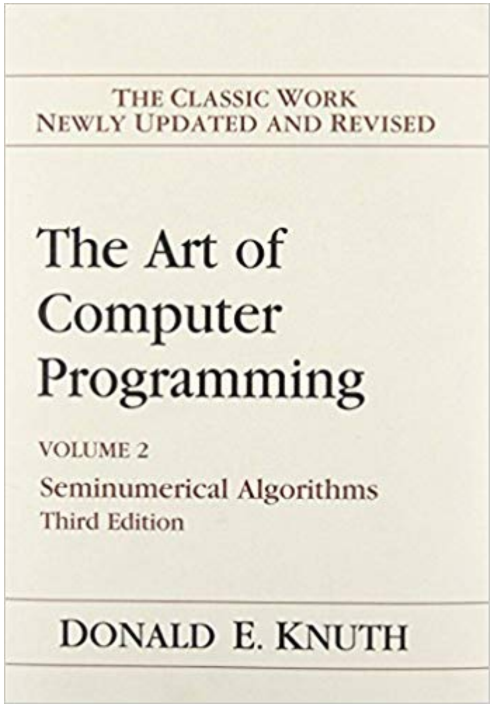
Algoritmizace

Algoritmy teorie čísel



Co bylo minule

- Co je to algoritmus?
- Jak budeme algoritmy popisovat?
- Jak budeme ověřovat jejich správnost?
- Jak změřit efektivitu algoritmu?

Co bylo minule

Jsou dány rovnoramenné váhy a n kuliček.
Navrhněte algoritmus, který najde

1. nejtěžší kuličku na co nejmenší počet vážení
2. nejtěžší i nejlehčí kuličku s použitím nejvýše $3\lfloor n/2 \rfloor$ vážení, přesněji
   - $3\lfloor n/2 \rfloor$ pro n liché
   - $3\lfloor n/2 \rfloor - 2$ pro n sudé

   $\} \lceil 3n/2 \rceil - 2$

   optimální !
3. druhou nejtěžší kuličku s použitím nejvýše $n - 2 + \lceil \log_2 n \rceil$ vážení.

optimální !

Co bylo minule

Navrhněte algoritmus, který setřídí n zadaných kuliček $a_1,\ldots,a_n$ od nejlehčí po nejtěžší.

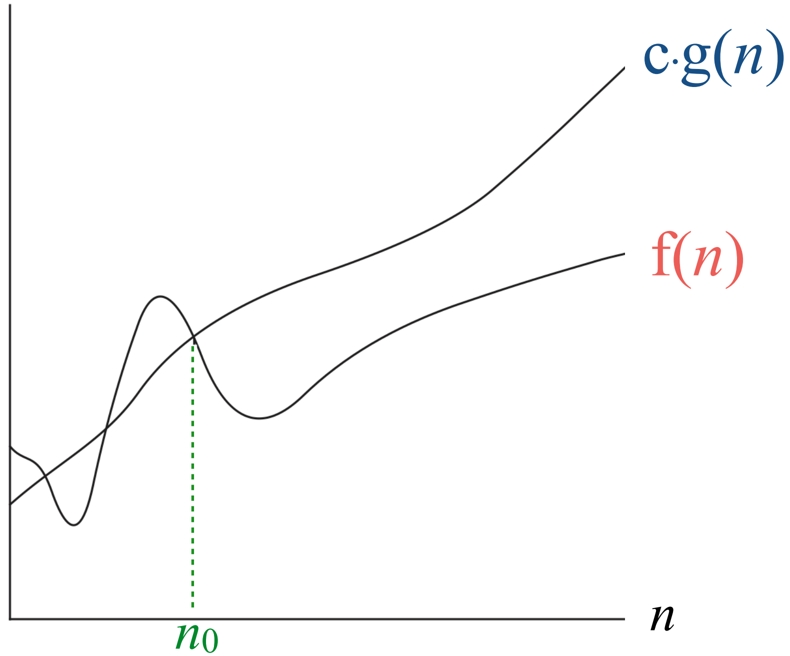
```
for j in range(1,n):
     for i in range(1,n-j+1):
          if a[i] těžší než a[i+1]:
               vyměň a[i] ↔ a[i+1]
     # j nejtěžších kuliček
     # je na svých místech
```

Asymptotická notace

Paul Bachmann (1894)
Edmund Landau (1909)

Funkce $f(n)$ je třídy $O(g(n))$,
pokud $\exists\ c > 0$ a $n_0 > 0$ tak,

že $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ pro každé $n \geq n_0$.



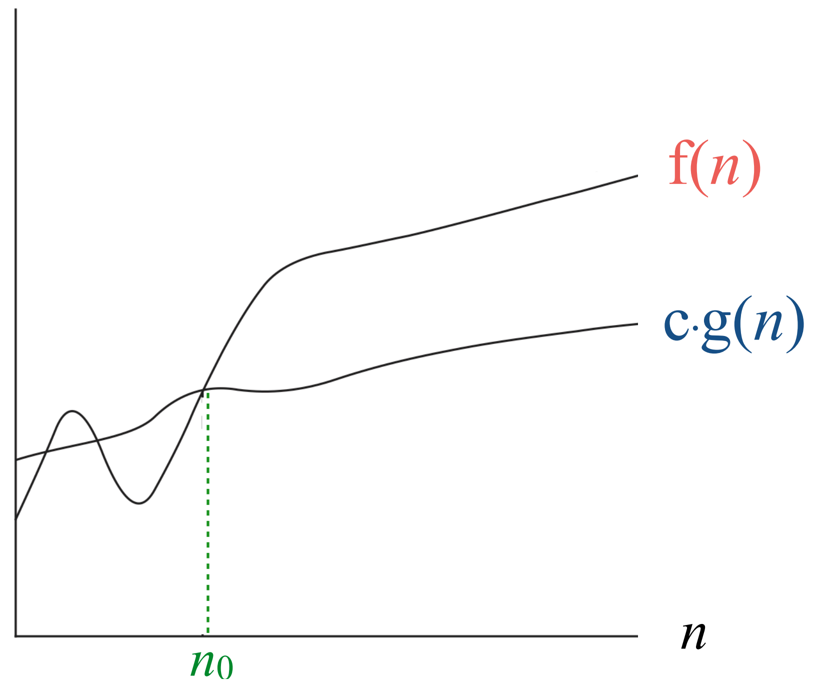
Asymptotická notace

Funkce f(n) je třídy Ω(g(n)),

Donald Knuth (1976)

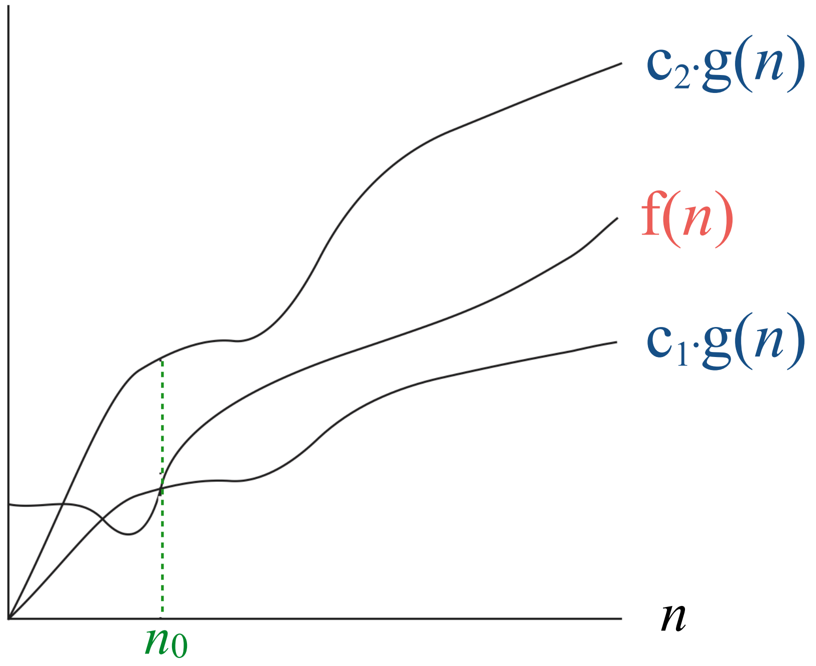
pokud $\exists$ $c > 0$ a $n_0 > 0$ tak,

že $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$ pro každé $n \geq n_0$.



Asymptotická notace

Funkce f(n) je třídy Θ(g(n)),
pokud f(n) je funkcí O(g(n))
a současně f(n) je funkcí Ω(g(n)).



Asymptotická notace – zápis

ⓐ formální $f(n) \in O(g(n))$

ⓑ praktický $f(n) = O(g(n))$

Co znamená $f(n) = f(n/2) + O(n)$?

Existuje $g(n) = O(n)$ taková, že

$$f(n) = f(n/2) + g(n)$$

Problém ✎

Dokažte nebo vyvraťte:

Pro každdou dvojici funkcí f,g: $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{R}^+$ platí

1. Pokud $f(n)=O(g(n))$, pak $g(n)=O(f(n))$
2. Pokud $f(n)=O(g(n))$, pak $2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$
3. Pokud $f(n)=O(g(n))$, pak $g(n)=\Omega(f(n))$
4. $f(n)=O(f(n)^2)$

Spektrum časové složitosti

$\Theta(1)$ (např. je číslo liché / sudé?)

$\Theta(\log n)$ (binární vyhledávání)

$\Theta(n)$ (nalezení minima / maxima)

$\Theta(n \log n)$ (HeapSort, MergeSort)

$\Theta(n^2)$ (BubbleSort, InsertSort)

$\Theta(n^3)$ (násobení matic dle definice)

...

pracují v polynomiálně omezeném čase

$\Theta(2^n)$

$\Theta(n!)$

...

pracují v exponenciálním čase

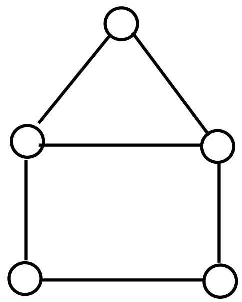
---

algoritmicky nerozhodnutelné

Jak měřit délku vstupu?

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ — n = počet prvků posloupnosti

graf — n = počet vrcholů, m = počet hran



matice — n = řád matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

přirozené číslo N — $n = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$

Co bude dnes

- Testování prvočíselnosti
- Určení největšího společného dělitele
- Výpočet hodnoty polynomu
- Převody mezi číselnými soustavami
- Rychlé umocňování

Test prvočíselnosti

Vstup: přirozené číslo $N > 1$

Výstup: True pokud N je prvočíslo

False je-li N číslo složené

```
def prvocislo(n):
    for d in range(2,n):
        if n % d == 0:
            return False
    return True
```

Test prvočíselnosti

- Protože délka vstupu $n = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$, algoritmus má ve skutečnosti

  exponenciální časovou složitost !
- **Diskuze:** zrychlení “hrubé síly”
  - stačí prověřit dělitele $\leq \sqrt{N}$
  - stačí se omezit na lichá čísla

Test prvočíselnosti – složitost

Složitost problému určení prvočíselnosti čísla N

☞ Agrawal, Kayal, Saxena (2002)

- $\tilde{O}(\log^{12} N)$

☞ Pomerance, Lenstra (2005)

- $\tilde{O}(\log^{6} N)$

Definice. Funkce f(n) je třídy $\tilde{O}(g(n))$, pokud $\exists\, k \in \mathbf{N}$ tak, že f(n) je třídy $O(g(n) \cdot \log^k g(n))$.

Generování prvočísel

Vstup: přirozené číslo $N > 1$

Výstup: všechna prvočísla z $\{2,3,\ldots,N\}$

Eratosthenovo síto

Eratosthenés z Kyrény

řecký matematik, astronom, geograf

276 – 195/194 př.n.l.

☀ **Idea.** Pro každé vygenerované prvočíslo lze vyloučit všechny jeho násobky $\leq N$.

Erastothenovo síto

```
def sito0(n):

    prvocisla = []
    je_prv = [False,False]+[True]*(n-1)

    for p in range(2,n+1):
        if je_prv[p]:
            prvocisla.append(p)
            for i in range(2*p,n+1,p):
                je_prv[i] = False

     return prvocisla
```

Erastothenovo síto – zrychlení

☀ Vylepšení

① Stačí "prosívat" od p^2 místo $2 \cdot p$

- násobky $k \cdot p$ pro $k < p$ již byly vyškrtnuty dříve

```
def sito(n):
    prvocisla = []
    je_prv = [False,False]+[True]*(n-1)
    for p in range(2,n+1):
        if je_prv[p]:
            prvocisla.append(p)
            for i in range(p**2,n+1,p):
                je_prv[i] = False
    return prvocisla
```

Erastothenovo síto – vylepšení

Vylepšení

② je_prv[] nemusí evidovat sudá čísla !

- úspora paměti i času

Generování prvočísel – složitost

☝ # prvočísel $\leq N \approx \dfrac{N}{\ln N}$

① Hrubá síla $O(N^{3/2})$

② Erastothenovo síto

- $O(N/2 + N/3 + N/5 + \ldots)$
- $= O(N \log \log N)$ (Franz Mertens, 1874)

Největší společný dělitel

✎ Problém

- jsou dána přirozená čísla x a y
- určete jejich největší společný dělitel NSD(x,y)

Algoritmy

① Hrubá síla

- $NSD(x, y) = \max\{d \in \{1, 2, \ldots, \min\{x, y\}\} \mid d \mid x \text{ a } d \mid y\}$
- postupně prověřit kandidáty od největšího

Největší společný dělitel

✎ Problém

- jsou dána přirozená čísla x a y
- určete jejich největší společný dělitel NSD(x,y)

Algoritmy

② Prvočíselný rozklad

Věta. Každé přirozené číslo >1 lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel.

Příklad: NSD(30, 24) = ?

- $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
- NSD(30, 24)$= 2 \cdot 3 = 6$

Největší společný dělitel

✎ Problém

- jsou dána (kladná) přirozená čísla x a y
- určete jejich největší společný dělitel NSD(x,y)

Algoritmy

③ Euklidův algoritmus

Eukleidés / Euklides / Euklid / Εὐκλείδης

- řecký matematik, 325 - 260 př. n. l
- Alexandria (Egypt)
- základy geometrie, teorie čísel
- Základy / Στοιχεῖα
  - » “nejúspěšnější matematické dílo”, 13 knih

Euklidův algoritmus

Pozorování. Pro přirozená čísla $x > y$ platí:

$$d \mid x \text{ a } d \mid y \iff d \mid x - y \text{ a } d \mid y$$

Proč?

Důsledek. $\mathrm{NSD}(x, y) = \mathrm{NSD}(x - y, y)$ pro $x > y$.

Příklad

$$\begin{aligned} \mathrm{NSD}(30,24) = ?\ & \\ &= \mathrm{NSD}(6,24) = \mathrm{NSD}(24,6) \\ &= \mathrm{NSD}(18,6) \\ &= \mathrm{NSD}(12,6) \\ &= \mathrm{NSD}(6,6) = 6 \end{aligned}$$

Euklidův algoritmus

```
def euklid0(x,y):
    while x != y:
        if x > y:
            x -= y
        else:
            y -= x
    return x
```

Správnost Euklidova algoritmu

- konečnost
  - » invariant cyklu: $x,y > 0$
  - » tedy i $x+y > 0$
  - » po provedení těla **while**-cyklu se $x+y$ sníží alespoň o 1
  - » po nejvýše $x+y$ iteracích **while**-cyklu výpočet skončí

Euklidův algoritmus

```
def euklid0(x,y):
    while x != y:
        if x > y:
            x -= y
        else:
            y -= x
    return x
```

Správnost Euklidova algoritmu

- částečná správnost
  - » invariant cyklu: viz **Důsledek**
  - » NSD(x,x)=x

Euklidův algoritmus – zrychlení

- **Příklad**

$$\begin{aligned}\mathrm{NSD}(27,21) &= \mathrm{NSD}(21,6)\\ &= \mathrm{NSD}(15,6)\\ &= \mathrm{NSD}(9,6)\\ &= \mathrm{NSD}(6,3)\\ &= \mathrm{NSD}(3,3) = 3\end{aligned}$$

$21 \bmod 6 = 3$

zbytek po celočíselném dělení

- **Idea.** Opakované odečítání lze nahradit zbytkem po celočísleném dělení!
- **Důsledek.** $\mathrm{NSD}(x,y) = \mathrm{NSD}(y, x \bmod y)$ pro (kladná) přirozená čísla x, y.
- **Pozorování.** $x \bmod y = 0 \Rightarrow y \mid x$ $\Rightarrow \mathrm{NSD}(x,y) = y$

Euklidův algoritmus - finální verze

```
def euklid(x,y):
    while y > 0:
        x,y = y,x % y
    return x
```

Příklad

$$\mathrm{NSD}(27,21) = \mathrm{NSD}(21,6) = \mathrm{NSD}(6,3) = \mathrm{NSD}(3,0) = 3$$

Euklidův algoritmus – složitost

```
def euklid(x,y):
    while y > 0:
        x,y = y,x % y
    return x
```

☝ Počet iterací těla **while**-cyklu je nejvýše

$$\log_2 x + \log_2 y + 1\,.$$

☞ **Důkaz**

- $x = y$: jen jedna iterace
- $x < y$: hodnoty se vymění
- $x > y$: $x \cdot y$ se zmenší alespoň o polovinu

Euklidův algoritmus – složitost

☞ **Důkaz**

Případ $x > y$ podrobněji:

- $x \bmod y \leq \min\{y-1, x-y\} < \frac{x}{2}$
- $y \cdot x \bmod y < \frac{x \cdot y}{2}$

Buďte $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ hodnoty proměnných x,y po provedení i-té iterace těla **while**-cyklu, pak

- $x^{(i)} \cdot y^{(i)} < \frac{x \cdot y}{2^i}$

Není-li i-tá iterace poslední, pak $x^{(i)} > y^{(i)} > 0$, čili

- $2 \leq x^{(i)} \cdot y^{(i)} < \frac{x \cdot y}{2^i}$
- $i + 1 < \log_2(x \cdot y) = \log_2 x + \log_2 y$

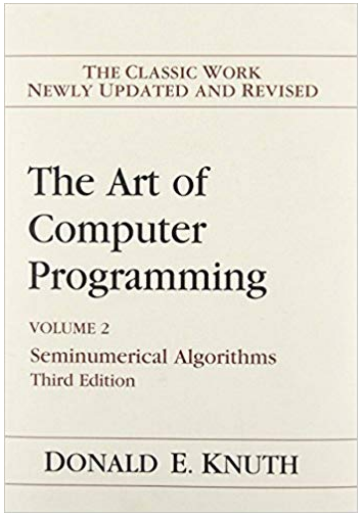
Euklidův algoritmus – složitost

```
def euklid(x,y):
    while y > 0:
        x,y = y,x % y
    return x
```

Euklidův algoritmus výpočtu NSD(x,y) přirozených čísel $x, y \in \{1, 2, \dots, n\}$ vykoná v průměrném případě nejvýše

$$\frac{12 \ln 2}{\pi^2} \ln n \approx 0.5842 \log_2 n$$

dělení.



Problémy ✎

① Srovnejte složitost Euklidova algoritmu se složitostí algoritmu výpočtu NSD pomocí rozkladu na prvočinitele.

② Navrhněte efektivní algoritmus výpočtu nejmenšího společného násobku dvou zadaných přirozených čísel.

Vyhodnocení polynomu

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- polynom stupně n
- s koeficienty a_n, $a_{n\text{-}1}$, … , a_1, a_0
- $p(x) = 5x^3 + 10x + 1$
- $p(2) = 61$

Přímý výpočet

- $\Theta(n^2)$ operací

Vyhodnocení polynomu

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- polynom stupně n
- s koeficienty a_n, $a_{n\text{-}1}$, … , a_1, a_0
- $p(x) = 5x^3 + 10x + 1$
- $p(2) = 61$

Hornerovo schéma

- William George Horner (1819)

$$p(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0$$

- $\Theta(n)$ operací

Hornerovo schéma

koeficienty polynomu
jako hodnota typu list

```
def horner(a,x):
    h = 0
    for i in range(len(a)):
        h = h*x + a[i]
    return h
```

Převody mezi číselnými soustavami

Desítková soustava

- $4321 = 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$

Číselná soustava o základu b

- řetězec $a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0$, kde $0 \le a_i < b$
- $a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0$

☀ **Příklad:** převod z binární soustavy

- použijeme Hornerovo schéma

$$10111_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$$

$$= (((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1$$

$$= 23$$

Převod z binární soustavy

číslo v binární soustavě
zadané jako hodnota typu `str`

```
cislice = '01'

def bin2int(bin):
    n = 0
    for i in range(len(bin)):
        n = n * 2 + cislice.index(bin[i])
    return n
```

Převod do binární soustavy

☀ **Příklad:** převod (dekadického) čísla 23 do binární soustavy

$$23 = (((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1$$
$$= 10111_2$$

Cifru nejnižšího řádu obdržíme jako zbytek po dělení 2

Převod do binární soustavy

- **Příklad:** převod (dekadického) čísla 23 do binární soustavy

$$23 = (((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1$$
$$= 10111_2$$

Celočíselně vydělíme 2

Převod do binární soustavy

- **Příklad:** převod (dekadického) čísla 23 do binární soustavy

$$23 = (((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1$$
$$= 10111_2$$

Další cifru obdržíme opět jako zbytek po dělení 2

Převod do binární soustavy

Příklad: převod (dekadického) čísla 23 do binární soustavy

$$23 = (((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1$$
$$= 10111_2$$

$23 \bmod 2 = 1$	$23 \operatorname{div} 2 = 11$
$11 \bmod 2 = 1$	$11 \operatorname{div} 2 = 5$
$5 \bmod 2 = 1$	$5 \operatorname{div} 2 = 2$
$2 \bmod 2 = 0$	$2 \operatorname{div} 2 = 1$
$1 \bmod 2 = 1$	$1 \operatorname{div} 2 = 0$

Převod z binární soustavy

přirozené číslo
hodnota typu int

```
def int2bin(n):
    bin = []
    while n > 0:
        bin.append(cislice[n%2])
        n //= 2
    return ''.join(reversed(bin))
```

Problémy ✎

③ Zobecněte funkce `bin2int` a `int2bin` tak, aby prováděly konverzi z / do libovolné číselné soustavy o základu b, $2 \leq b \leq 16$.

Je-li $b > 10$, chybějící cifry reprezentujte velkými písmeny ze začátku abecedy, tj.

`A, B, C, D, E, F.`

Rychlé umocňování

✎ Problém

- je dáno (velké) přirozené číslo N a hodnota X
- určete X^N

Přímočaře z definice

- $X^N = X \cdot X \cdot \ldots \cdot X$
- N - 1 násobení
- exponenciální čas !

Rychlé umocňování

✎ Problém

- je dáno (velké) přirozené číslo N a hodnota X
- určete X^N

Imitace převodu do binární soustavy

- $X^{16} = (((X^2)^2)^2)^2$
- jen 4 násobení namísto 15 !
- je-li N mocninou 2, lze použít opakované umocňování
- co když N není mocninou 2?

Rychlé umocňování

- Jak spočítat X^{13} ?
  - převod exponentu N do binární soustavy
  - $13_{10} = (1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
  - $= 2^3 + 2^2 + 2^0 = 8 + 4 + 1$
  - $X^{13} = X^8 \cdot X^4 \cdot X$

$$
\begin{array}{ll}
\text{mocnina} = 1 & X^{(1)} = X \\
\text{mocnina} = \text{mocnina} \cdot X^{(1)} & X^{(2)} = X^{(1)} \cdot X^{(1)} \ \# = X^2 \\
 & X^{(3)} = X^{(2)} \cdot X^{(2)} \ \# = X^4 \\
\text{mocnina} = \text{mocnina} \cdot X^{(3)} & X^{(4)} = X^{(3)} \cdot X^{(3)} \ \# = X^8 \\
\text{mocnina} = \text{mocnina} \cdot X^{(4)} & \# = X \cdot X^4 \cdot X^8
\end{array}
$$

Rychlé umocňování

```
def mocnina(x, n):
    mocnina = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            mocnina *= x
        x, n = x*x, n // 2
    return mocnina
```

☝ **Pozorování.** Algoritmus rychlého umocňování vypočte X^N pomocí nejvýše

$$2\lfloor \log_2 N \rfloor + 2 \text{ násobení.}$$