Souhrn diskrétky

S Medvědem (Martin Mareš)

Programování I (NPRG030)

1. ročník Bc. studia MFF UK - Informatika

Autor: Milan Veselý

Obsah

Seznam přednášek

1. Přednáška (5.10.) – Úvod
2. Přednáška (12.10) – Relace
3. Přednáška (19.10) – Uspořádání
4. Přednáška (26.10) – Kombinatorika (tahák)
5. Přednáška (2.11) – PIE
6. Přednáška (9.11) – Grafy
7. Přednáška (16.11) – Grafy 2
8. Přednáška (23.11) – Eulerovský graf
9. Přednáška (30.11) – Stromy, Rovinné grafy
10. Přednáška (7.12) – Rovinné grafy 2
11. Přednáška (14.12) – Barvení grafů
12. Přednáška (21.12) – Pravděpodobnost
13. Přednáška (4.1.) – Pravděpodobnost 2

Užitečné odkazy

Stránka přednášky

Skripta (Kapitoly z diskrétky)

Ruční zápisky Fialy, Slámova stránka, Něčí vypracované otázky

Stránka cvika + moje hotové úkoly

Poznámky na úvod

$\coloneqq, \equiv$ používám, když něco definuji a $=, \Leftrightarrow$ jako rovnost už známých věcí

Zelenou kurzívou píšu své poznámky, které jsou pouze na zjednodušení, není tedy potřeba je číst

Černou kurzívou (velikosti 9) píšu nezbytné poznámky

1. Přednáška (5.10.) – Úvod

Úvod do diskrétky

Ukázkové úlohy: 6 lidí v autobuse, rozvadění sousedé a jak vyskákat schodiště

Základní znalosti[1]

Definice, tvrzení, důkaz, věta a axiom

Důkaz sporem a indukcí

Notace (dolní a horní celá část)

Množiny

Operace ($\in, \subseteq, \cup, \cap, \setminus, symetirck\acute{a}\ diference, \dots$), potenční množina

Suma a produkt

Věta o neexistenci množiny všech množin

Přes spor jestli je množina všech krotkých množin krotká

Pokud je krotká → obsahuje i sebe a takže je vlastně divoká ↯

Pokud je divoká a tedy obsahuje sama sebe, tak je problém, že má obsahovat jen krotké ↯

2. Přednáška (12.10) – Relace

Uspořádané dvojice, uspořádané k-tice, Kartézský součin …

Relace (binární)

Definice Relace mezi množinami X a Y je podmnožina Kartézského součinu $X \times Y$ (Relace na množině X je podmnožina X^2)

Pozn. Místo $(x, y) \in R$ se používá častěji xRy (např $x < y$)

Zápis Výčtem, tabulkou (resp. maticí sousednosti), orientovaným grafem

Příklady relací: $x \backslash y$ *(to znamená, že x je dělitelem y – také se používá svislá čára)*

$x + y \leq 5$

$\emptyset$ – prázdná relace

$X \times Y$ – univerzální relace

Operace: Inverze relace[2]

R je mezi X, Y potom R^{-1} je mezi Y, X a

$$R^{-1} \coloneqq \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Skládání relací (x je v relaci se z, pokud $\exists y \in Y: xRy\ \&\ yRz$)[3]

Diagonální relace: $\Delta_x \coloneqq \{(x, x) \mid x \in X\}$

---

[1] Fiala zmiňoval i potřebné středoškolské znalosti – číselné obory, operace a funkce, kvantifikátory a logika, …

[2] Převrácení tabulky podle diagonály

[3] x je v relaci se z pokud existuje y z Y takové, že x je v relaci s y a y je v relaci se z

Funkce (zobrazení)

Můžeme se na ně dívat jako na speciální případ relací s určitými podmínkami

Definice: Funkce z X do Y je relace A mezi X, Y taková, že $\forall x \in X\ \exists!\ y \in Y: xAy$[4]

Příklady: $sinus : \mathbb{R} \rightarrow [-1{,}1]$ *neboli přiřazuje reálným číslům čísla z intervalu – 1, 1*

Občas se také používá $x \mapsto \sin x$ *„x se přiřadí hodnota sin x“*

$sgn : \mathbb{R} \rightarrow \{-1{,}0{,}1\}$ znaménko čísla

$|A| : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ kardinalita (*mohutnost*) množiny

množině přiřadí celé číslo podle počtu jejích prvků

$f(x) = x$ identita

$f(a, b)$ funkce více proměnných, platí pro ni : $A \times B \rightarrow Y$

Skládání funkcí

Definice: pokud $f: X \rightarrow Y\ a\ g\ Y \rightarrow Z$ tak $f \circ g: X \rightarrow Z$

$h = f \circ g \iff g(f(x))$ *důležité si uvědomit, že se prvně provede f*

Druhy funkcí

Cizími slovy jsou tyto funkce injektivní, surjektivní a bijektivní (používá se ale především pojem bijekce)

Prostá[5] $\nexists\ x, y \in X: x \neq y\ \wedge f(x) = f(y)$

Na … $\forall y \in Y\ \exists x \in X: f(x) = y$

Vzájemně jednoznačná $\forall y \in Y\ !\exists x \in X: f(x) = y$

Pro bijekci platí, že i její inverze je funkce

Alternativně to lze popsat šipkami . V prosté funkci vchází do všech y z Y nejvýše jedna šipka, v funkci na Y vchází do každého prvku alespoň jedna šipka a v bijekci vchází do každého prvku z Y právě jedna šipka.

Druhy relací (R na množině X)

Reflexivní $\forall x \in X: xRx$ *každý prvek je v relaci sám se sebou*

Symetrická $\forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$ *když je x v relaci s y, tak musí být y s x*

Antisymetrická Slabě $\forall x, y \in X: xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

Silně $\forall x, y \in X: xRy \Rightarrow \neg(yRx)$

pouze stejné prvky jsou symetrické x symetrie prvku nenastane vůbec

Tranzitivní $\forall x, y, z \in X: xRy\ \wedge yRz \Rightarrow xRz$ *Pokud je xRy a yRz, tak musí i xRy*

Ekvivalence relace je ekvivalence $\equiv$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní

Příklady rovnost čísel, modulo rovnost, geometrická podobnost a shodnost, …

například rovnost čísel je reflexivní, protože každé číslo se rovná samo sobě (x=x), je tranzitivní, protože, když se x=y a y=z, tak se musí platit i x=z a je symetrická, protože, když $x = y$, tak $y = x$

---

[4] Pro každé x z X existuje právě jedno y z Y takové, že x je v relaci s Y

[5] Neexistují různé x, y takové, že $f(x) = f(y)$ neboli „na každý prvek z obrazu vede právě jeden prvek“ (Dál tohle už psát nebudu…)

Ekvivalenční třída (x) $R[x] = \{y \in X \mid xRy\}$ *neboli množina všech prvků, které jsou ekvivalentní s x*

Věty o ekvivalenčních třídách

1. $\forall x \in X: R[x] \neq \emptyset$ *ekvivalenční třída každého prvku je neprázdná*

Důkaz $xRx \Rightarrow x \in R[x]$ *z reflexivity je každý prvek v relaci sám se sebou a tedy je ve své třídě*

2. $\forall x, y \in X: (R[x] = R[y]) \vee (R[x] \cap R[y] = \emptyset)$ *ekvivalenční třídy jsou buď totožné a nebo disjunktní*

Důkaz dokážeme pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] = R[y]$

Pokud platí $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset\ tak\ \exists t \in R[x] \cap R[y]$

Rovnost dvou množin se dokazuje tak, že si jsou navzájem podmnožinami a tedy:

$R[x] \subseteq R[y]$ neboli $\forall a \in R[x]: a \in R[y]$

yRt a xRt aRx

Z tranzitivity $aRx, xRt \rightarrow aR, z$ reflexivity $yRt \rightarrow tRy$

Následně to dáme dohromady a víme, že aRy

To znamená, že ekvivalenční třída x je podmnožina ekvivalenční třídy y

$R[y] \subseteq R[x]$ neboli $\forall b \in R[y]: b \in R[x]$

Uděláme analogicky

A tedy pokud třídy nejsou disjunktní, tak jsou si rovny

3. $\{R[x] \mid x \in X\}$ určuje ekvivalenci jednoznačně *všechny ekvivalenční třídy v X jsou jednoznačné*

Zdůvodnění Z ekvivalenční třídy umím rekonstruovat s čím jsou prvky v relaci

Rozklad množiny

Množinový systém[6] $S \subseteq 2^X$ je rozklad množiny X pokud platí následující (≡)

1. $\forall A \in S: A \neq \emptyset$
2. $\forall A, B \in S: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
3. $\bigcup_{A \in S} A = X$

Platí, že xRy pokud $\exists A \in S: x \in A \wedge y \in A$ (x je v relaci s y, pokud jsou v jedné ekvivalenční třídě z rozkladu)

3. Přednáška (19.10) – Uspořádání

Uspořádání

Definice Relace je uspořádání pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní

Značení Místo xRy se obvykle píše $x \leq y$ nebo $x \preccurlyeq y$

Příklady $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), \Delta_X, (\mathbb{N}^+, \backslash)$[7], $(2^X, \subseteq)$ – *tzv. inkluze*, Lexikografické řazení

Porovnatelné prvky Dva prvky x, y jsou porovnatelné pokud xRy nebo yRx

Například pomocí větší nebo rovno můžeme porovnat dva prvky, zatímco pomocí dělitelnosti nemůžeme

[6] Množinový systém se nazývá množina množin

[7] Pozor, pokud by tam byly i záporná čísla, tak to kvůli symetrii není uspořádání 1 a –1 se dělí navzájem

Lineární uspořádání Je uspořádání bez neporovnatelných prvků

Částečná uspořádání Zdůrazňujeme, že může být i nelineární uspořádání *ale nemusí*

Ostré uspořádání Vyrobíme z uspořádání odebráním všech dvojic typu xRx

To už uspořádání ale není

Hasseův diagram Znázornění uspořádání

To co je nahoře je větší než to dole

Nekreslíme vztahy, které platí z tranzitivity

Bezprostřední předchůdce self-explanatory, formálně $x < y \wedge \nexists z: (x < z \wedge z < y)$

Nejmenší a největší prvek

$x \in X$ je **nejmenší** $\equiv \forall y \in X: x \leq y$ *Všechny ostatní jsou větší*

$x \in X$ je **minimální** $\equiv \nexists y \in X: y < x$ *Nic menšího neexistuje*

Obdobně pro největší a maximální

Nejmenší je určitě i minimální, obráceně to ale neplatí. Nemusí ale existovat ani jeden z nich.

Lemmátko Každá konečná neprázdná ČUM má minimální prvek

Důkazík můžeme buď najít menší nebo už je minimální (cyklus nemůže být kvůli tranzitivitě)

Řetězec a antiřetězec

Řetězec $A \subseteq X$ je řetězec $\equiv \forall a, b \in A: a, b\ jsou\ porovnatelné$

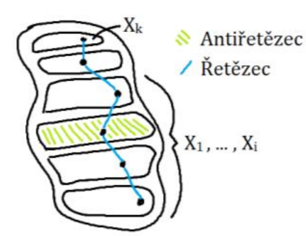
Antiřetězec (nezávislá množina) $\equiv \nexists a, b\ různé\ a\ neprovnatelné$

Velikost nejdelšího řetězce je výška (ω) a nejdelšího antiřetězce je šířka (α)

Věta (O Dlouhém a Širokém) *Šířka krát výška je větší nebo rovno velikosti x*

$\forall (X, \leq)\ konečná\ ČUM: \alpha(X, \leq) \cdot \omega(X, \leq) \geq |X|$ *a tedy alespoň jedno z toho je $\geq \sqrt{n}$*

Důkaz Sestrojíme $X_1 := \{x \in X \mid x\ je\ minimální\}$



Rozklad na několik X libovolné ČUM

Máme $X_1 \dots X_i$:

$Z_i := X \backslash (\bigcup_{j=1}^{i} x_j)$ pokud $Z_i = \emptyset \rightarrow hotovo$

Jinak $X_{i+1} := \{x \in Z_i \mid x\ je\ minimální\ v\ Z_i\}$

Máme $X_1, \dots, X_k$ a přitom:

$\forall i: X_i$ je antiřetězec a $|X_i| \leq \alpha$

$\exists r_1 \in X_1 \dots r_k \in X_k: \{r_1, \dots, r_k\}$ je řetězec a $k \leq \omega$

Vytvořím řetězec, který prochází přes všechny vrstvy

Důvod proč se nějaký prvek dostal až do poslední vrstvy je, že existuje nějaký menší prvek v nižší vrstvě

$\{X_1, \dots, X_k\}$ tvoří rozklad X $|X_1| + \cdots + |X_k| = |X|$

Když to všechno zkombinuje tak $\alpha \cdot \omega \geq |X|$

A tedy máme hotovo (takže Q.E.D. a nebo E.P.A. xd)

4. Přednáška (26.10) – Kombinatorika (tahák)

Kombinatorické počítání

Počet funkcí

Zajímá mě kolik existuje funkcí z množiny N do množiny M .

Věta $\#f: N \to M = m^n$ pro $|M| = m, |N| = n$ a $m, n > 0$ *"#" znamená počet*

Důkaz indukcí podle n *méně formálně to lze prostě zdůvodněním kam se co může zobrazit*

$n = 1, \#f = m = n^1$

$n \to n + 1$ *(n+1)-prvková N a m-prvková M*

f je jednoznačně určena $f(x)$ a $f': N \setminus \{x\} \to M$

A tedy $\#f = m \cdot m^n = m^{n+1}$

Počet podmnožin

Věta Pro n-prvkovou množinu N platí $|2^N| = 2^n$ *počet všech podmnožin je 2^n*

Důkaz Přes bijekci s charakteristickou funkci C_A

Tu definujeme jako $C_A: N \to \{0,1\}$ pro $A \subseteq N$

přičemž $C_A(x) = 0$ pro $x \notin A$, $C_A(x) = 1$ pro $x \in A$

Přes předchozí větu tedy $\#\, char. funkcí = 2^n$

Počet sudých a lichých podmnožin

Věta Nechť $X \neq \emptyset$ je konečná množina a

$\mathcal{S} \coloneqq \{S \subseteq X \mid |S|\ je\ sudá\}, \mathcal{L} \coloneqq \{L \subseteq X \mid |L|\ je\ lichá\}$ potom

$|\mathcal{L}| = |\mathcal{S}| = 2^{n-1}$

Důkaz *Stačí nám dokázat, že sudých a lichých je stejně a proto sestrojíme bijekci $f: \mathcal{S} \to \mathcal{L}$*

Zvolme si $a \in X$ a vytvoříme funkci $f \coloneqq S\Delta\{a\}$

symetrická diference – Pokud prvek a není v S přidám ho, jinak ($a \in S$) ho odeberu

$f(S) \in \mathcal{L}$ *Buď prvek přidám a nebo ho odeberu a tedy změní se sudost*

f má inverzi $(f^{-1} = f)$

Z toho plyne, že je daná operace bijekce a tedy musí být $|\mathcal{L}| = |\mathcal{S}|$

Počet prostých funkcí

Věta Pro n-prvkovou množinu N a m-prvkovou množinu M platí:

$\#f: N \to M$ prostých $= m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m - n + 1)$

To se také nazývá $m^{\underline{n}}$ neboli m na n klesající

Zároveň je zmíněno, že m-prvková množina od 1 (nebo od 0…) do m je [m]

Velice kompaktní zápis této věty by pak mohl být $\#f: [n] \to [m] = m^{\underline{n}}$

Důkaz Můžeme udělat stejně jako počet všech funkcí

Změní se akorát $f': N \setminus \{x\} \to M \setminus \{f(x)\}$ *bude to $m \cdot (m-1)^{\underline{n}} = m^{\underline{n+1}}$*

Tentokrát ale prostě úvaha stačí spíše

Kódování funkcemi

$X \to \{0,1\} \dots 2^X$ *popis všech podmnožin X (již zmíněná charakteristická funkce)*

$\{1,2\} \to X \dots (x, y) \in X^2$ *popis všech uspořádaných dvojic X*

Dá se rozšířit pro k-tice a prostými funkcemi i pro prvky bez opakování

$\mathbb{N} \to X$ jsou dokonce nekonečné posloupnosti prvků z X

permutace na X *(s n prvky)* *Jak prvky lineárně (do řady) uspořádat*

bijekce $f: x \to x$

bijekce $f: \{1, \dots, n\} \to X$

#permutace na X = prostých funkcí z $[n] \to [n]$ a to je $n^{\underline{n}}$ neboli $n!$

Počet neuspořádaných k-tic

Víme, že to jsou to nějaké k-prvkové podmnožiny

Umíme # uspořádaných k-tic – to je n^k a počet uspořádaných k-tic bez opakování – to je $n^{\underline{k}}$

Stačí vzít $n^{\underline{k}}$ a vydělit to #způsobů, kterými můžeme uspořádat jednu k-tici a to je k!

Z toho už je zřejmé, že počet neuspořádaných k-tic je $\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

Kombinační číslo

V souvislosti s počtem neuspořádaných k-tic definujeme pojem kombinační číslo "n nad k" neboli $\binom{n}{k}$

Definice $\binom{n}{k} := \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \cdots = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Charakteristické funkce k-prvkových podmnožin vede k

Definice $\binom{X}{k} := \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$ pro množinu X a $k \geq 0$

Neboli množina všech podmnožin s k prvky

Věta $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$ *Počet k-prvkových podmnožin se rovná kombinačnímu číslu*

Vlastnosti

$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n-1} = n, \dots,$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

k-prvkové podmnožiny můžeme totiž vyjádřit i tím, jaké prvky tam nejsou

Pascalův trojúhelník

Řádky zleva odpovídají $n = 0, 1, 2, \dots$ a diagonály zprava odpovídají $k = 0, 1, \dots$

Můžeme si všimnout, že číslo se rovná součtu dvou nad ním – součtové pravidlo

Zároveň lze vidět i, že je trojúhelník symetrický podle svislé osy

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Součtové pravidlo

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ *dk. by se dal vypočítat, my to provedeme kombinatorickou úvahou*

Můžeme si všimnout, že když se pokusíme $\binom{X}{k}$ rozdělit na dvě části, podle toho jestli k-tice obsahuje prvek a a nebo ho neobsahuje, tak těch s a bude $\binom{X\setminus\{a\}}{k-1}$ a těch bez a bude $\binom{X\setminus\{a\}}{k}$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ *Řádek Pascalova trojúhelníku, jsou to totiž všechny n-prvkové podmnožiny*

Binomická věta

Využití kombinačních čísel pro mocnění dvojčlenů

$(x+y)^n = x^n + x^{n-1}y^1 \dots$ *$x^{n-1}y^1$ mám tolikrát, kolik je způsobů jak vybrat jedno y a (n-1) x…*

Věta $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}y^i$ pro $n \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Důkaz se provádí úvahou, která je napsaná již před větou

Aplikace $x = y = 1$ tak $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ *Řádek Pascalova Δ*

$x = 1, y = -1$ a $n \geq 1$ $0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \rightarrow |\mathcal{L}| = |\mathcal{S}|$

5. Přednáška (2.11) – PIE

Princip inkluze a exkluze

Příklad na úvod Sportovní spolky v městečku

V městečku jsou sportovní spolky s určitými počty členů a nás zajímá kolik celkem lidí sportuje

Abychom to zjistil museli jsme odečíst průniky a potom opět přičíst průniky, které jsem odečtli vícekrát

Věta pro konečné množiny $A_1, \dots, A_n$ *musíme je očíslovat (jinak by se to při opakování množin rozbilo)*

$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1-n\}}{k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$

Alternativně: $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \in \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$

Např. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Nejdříve sečtu průniky jednoprvkových systémů množin, potom odečtu průniky dvouprvkových, přičtu…

První důkaz (počítací)

Pro každý prvek $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ spočítáme příspěvky k levé a pravé straně

Nechť x patří do j množin z $A_1, \dots, A_i$ potom

Průniky k-tic:

a) $k > j$ … přispěje nulou *V průniku určitě být nemůže*

b) $k \leq j$ … přispěje $\binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \dots + \dots + (-1)^{j+1}\binom{j}{j}$

To už skoro známe z aplikace binomické věty…

$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} \dots = \binom{j}{0} - p = 1 - p = 0$ a tedy p = 1

Druhý důkaz (algebraický) *Je podstatně složitější, takže: video z přednášky čas(25:40)*

Polynom o n proměnných $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = \sum_{I \in \{1,\dots,n\}} \prod_{i \in I} x_i$

K čemu nám to ale je? – Využijeme charakteristické funkce množin

Platí $c_{x \cap y} = c_x \cdot c_y$ a $c_{\overline{x}} = 1 - c_x$ *Charakteristická funkce průniku a doplněk*

To se dá zkombinovat podle $\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$ na $1 - c_{x \cup y} = (1-c_x)(1-c_y)$

Také platí, že $\sum_{a \in A} c_X(a) = |X|$ *Velikost podmnožiny je počet 1 v charakteristické funkci*

$x_i := -c_{A_i}$ $\prod_{i=1}^{n}(1 - c_{A_i}) = \sum_{\emptyset \neq I \in \{1,\dots,n\}} \prod_{i \in I} -c_{A_i} + 1$ *přičítáme 1 kvůli $I \neq \emptyset$*

$c_{\bigcup_i Ai} = \sum_{\emptyset \neq I \in \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \cdot c_{\bigcap_{i \in I} A_i} \rightarrow \sum_a c_{\bigcup_i Ai}(a) = \sum_I (-1)^{|I|+1} \cdot \sum_a c_{\bigcap_{i \in I} A_i}(a) \dots$

Úloha o šatnářce

Pravděpodobnost, že někdo nedostal svůj klobouk, když je šatnářka vracela náhodně

$S_n \coloneqq \{\pi \mid \pi\ permutace\ na\ \{1, \dots, n\}\}$ *S_n se velmi často značí množina permutací*

i dostal svůj klobouk $\Leftrightarrow \pi(i) = i$ *i je takzvaně pevný bod*

$\check{S}_n = |\{\pi \in S_n \mid \nexists i: \pi(i) = i\}|$ *Počet permutací v S_n bez pevného bodu*

Zadaná pravděpodobnost se tedy rovná $\frac{\check{S}_n}{n!}$

Je ale praktičtější počítat její doplněk, její množina je $A \coloneqq \{\pi \in S_n |\ \pi\ má\ pevný\ bod\}$

$A_i \coloneqq \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$ *…abychom mohli využít PIaE. (Množina A_i má pevný bod na i)*

Všimněme si, že sjednocení A_i nám určitě dává celé A

$$|A_i| = (n-1)!\,, \left|A_i \cap A_j\right| = (n-2)!\,, \dots$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1,\dots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} Ai\right|$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)$$

$$\check{S}_n = n! - |A| = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Pravděpodobnost je tedy $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ *a to konverguje k* $\frac{1}{e}$

Odhady funkcí

Odhad faktoriálu

Hloupý odhad by byl $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$

Pro lepší odhad se nejdříve podíváme na $(n!)^2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot n$ neboli $1n \cdot 2(n-1) \cdot \dots \cdot n1$

$n! = \sqrt{1n} \cdot \sqrt{2(n-1)} \cdot \dots \cdot \sqrt{n \cdot 1}$, *v tom* dostáváme součin sqrt tvarů $i \cdot (n - i + 1)$ a to je $\geq n$

Proč je to větší? – pro $i = 1$ a $i = n$ to je n, jinak $min \geq 2$, $max \geq \frac{n}{2}$ *a to je* $\geq n$

A tedy dolní odhad pro $n!$ je $\left(\sqrt{n}\right)^n = n^{\frac{n}{2}}$

Následně horní odhad udělám přes AG nerovnost a tedy $\sqrt{i \cdot (n - i + 1)} \leq \frac{i+n-i+1}{2}$

AG nerovnost se dokazuje z $0 \leq (a-b)^2$ a říká, že pro $x, y > 0$ platí $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$

Z toho už dostávám dobrý odhad tedy je $n^{\frac{n}{2}} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ *Jsou ale lepší odhady*

Odhad kombinačních čísel

$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$ $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}$

Horní odhad jde celkem snadno vidět (ignoruji to co odečítám a jmenovatel)

Spodní odhad se dělá roztrháním na $\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \dots$ a každý z toho je alespoň $\frac{n}{k}$

Odhad prostředního čísla v Pascalově trojúhelníku

$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$ *využívám toho, že se řádek sečte na 4^n a max je větší než průměr*

6. Přednáška (9.11) – Grafy

Teorie grafů

Definice Graf je uspořádaná dvojice (V, E), kde

V je konečná neprázdná množina vrcholů

$E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran *dvojic vrcholů*

Rozšíření Orientované grafy, grafy se smyčkami, multigrafy, nekonečné grafy

Příklady grafů

Úplný graf $V(K_n) = \{1, \dots, n\},\ E(K_n) \coloneqq \binom{V(K_n)}{2}$ *Graf, který obsahuje všechny hrany*

Prázdný graf $V(E_n) = \{1, \dots, n\},\ E(E_n) \coloneqq \emptyset$ *Graf bez hran*

Cesta $V(P_n) = \{1, \dots, n\},\ E(P_n) \coloneqq \left\{\{i, i+1\} \middle| 0 \le i < n\right\}$

Kružnice $V(P_n) = \{0, \dots, n-1\},\ E(P_n) \coloneqq \left\{\{i, (i+1)\ mod\ n\} \middle| 0 \le i < n\right\}$

Bipartitnost grafu

Definice *lze rozdělit na dvě partity tak, že žádné dva vrcholy ze stejné partity nejsou spojeny hranou*

Graf G je bipartitní $\equiv$

$\exists\ rozklad\ množiny\ V(G)\ na\ X, Y$ t. ž. $E(G) \subseteq \left\{\{x, y\} | x \in X, y \in Y\right\}$

Nebo také $\forall e \in E(G): |e \cap X| = 1$ *Právě jeden vrchol ze všech hran je v X*

$\wedge\ |e \cap Y| = 1$ *je zbytečné, protože kde jinde by ten druhý byl*

Příklady bipartitních grafů cesty, sudé kružnice, prázdné grafy, $K_1, K_2, \dots$

Úplný bipartitní graf

$V(K_{m,n}) = \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}\ \ E(K_{m,n}) \coloneqq \left\{\{a_i, b_j\} \middle| 1 \le i < m, 1 \le j < n\right\}$

Mezi oběma jeho partitami jsou všechny možné hrany

Isomorfismus *Grafy se liší pouze ve jménech prvků (Dají se předefinovat tak, že se zachovají vlastnosti)*

Definice Grafy G a H jsou isomorfní *(značíme $G \cong H$)* $\equiv$

$\exists f: V(G) \to V(H)\ bijekce$ t. ž.

$\forall u, v \in V(G): \left(\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)\right)$

Jsou isomorfní tehdy, když existuje bijekce mezi vrcholy, která zachová hrany

Tato definice všechny vlastnosti (až na názvy) opravdu zachová (např. bipartitnost, …)

Pozorování Na libovolné množině grafů je být isomorfismus ($\cong$) ekvivalence

Stupeň a skóre *Kolik hran vede z vrcholu*

Stupeň $\deg_G(v) = |\{u \in V(G)\} \mid \{u, v\} \in E(G)\}|$ *velikost množiny spojených vrcholů*

Skóre Je posloupnost stupňů všech vrcholů *obvykle se píše vzestupně*

Regularita *k-regulární znamená, že mají všechny vrcholy stupeň k*

Definice Graf G je k-regulární (pro $k \in N$) $\equiv \forall u \in V(G): \deg_G(u) = k$

Princip sudosti

Větička Pro každý graf (V,E) platí $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot E$

Důsledky Součet stupňů je sudé číslo a počet vrcholů lichého stupně je sudý

Právě důsledkům se říká princip sudosti *Nefunguje to v nekonečných grafech*

Věta o skóre

Seřazená posloupnost $D = d_1 \leq \cdots \leq d_n$ pro $n \geq 2$ je skóre grafu $\Leftrightarrow$

$D = d'_1 \leq \cdots \leq d'_{n-1}$ je skóre grafu *musí platit i* $0 \leq d_n \leq n-1$

S tím, že: $d'_i = d_i$ *pokud* $i < n - d_n$ *nebo* $d'_i = d_i - 1$ *pokud* $i \geq n - d_n$

To znamená, že posloupnost je skóre grafu, pokud je posloupnost i to, když odstraním poslední prvek posloupnosti a následně snížím n posledních čísel v posloupnosti o jedna (n je hodnota toho odstraněného)

Důkaz implikace „$\Leftarrow$“ : nechť G' je graf se skóre D' a vrcholy $v_1, \dots, v_{n+1}$ *t. ž. stupně* d'_i *…*

Potom graf G doplněním v_n a hran $\{v_i, v_n\}$ pro $i \in \{n - d_n, \dots, n-1\}$

implikace „$\Rightarrow$“ : Dokážu přes pomocné lemma

Lemma: Nechť $\mathcal{G}$ je množina všech grafů* na vrcholech $\{v_1, \dots, v_n\}$ se skóre D, $\mathcal{G} \neq \emptyset$

** nemůže být množina úplně všech grafů stejně jako nemůže být množinu všech množin*

Potom: $\exists G \in \mathcal{G}: \{v_n, v_i\} \in E(G)$ pro všechna $i \in \{n - d_n, n-1\}$

Předpokládáme, že existuje nějaká neprázdná množina grafů se skórem D a v ní existuje alespoň jeden graf, který vznikne odebráním posledního vrcholu v posloupnosti

Díky tomu budu moct odpojit v_n *a získám graf* G' *se skórem* D'

Důkaz: pro $G \in \mathcal{G}$ definujeme $j(G) := \max\{j \mid \{v_j, v_n\} \notin E(G)\}$

j(G) je tedy nejpravější vrchol (tedy s největším stupněm) G, který není spojený s d_n

kdyby platilo, že $\mathrm{j(G) = n - d_n - 1}$, tak máme splněno lemma

A zvlášť musím zmínit, že kdyby $d_n = n - 1$*, tak* $\forall G \in \mathcal{G}$ *splňuje lemma*

A proto najdeme $G \in \mathcal{G}$, s minimálním $j(G)$ a ukážu, že ten to splní

Dokážeme jeho existenci sporem: kdyby $j(G) > n - d_n - 1$

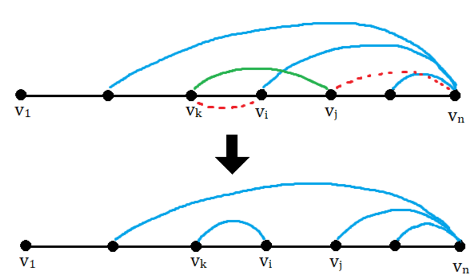
$pak\ \exists i < j\ a\ \exists k: \{v_j, v_k\} \in E(G) \wedge \{v_i, v_k\} \notin E(G)$

Existuje vrchol v_k *ke kterému hrana z* v_j *vede a z* v_i *ne (to protože* $d_j \geq d_i$ *…)*

A tedy můžeme přidat hrany $\{v_k, v_i\}$ a $\{v_j, v_n\}$

S tím, že odeberme $\{v_i, v_n\}$ a $\{v_j, v_k\}$ se skóre nezmění

To je ale sporu s minimalitou j, protože se v_j „posune“



Grafy mají stejné skóre, vzniká tedy spor z minimality j

7. Přednáška (16.11) – Grafy 2

Počet neisomorfních grafů (na $V \coloneqq \{1, \dots, n\}$)

Počet všech grafů je izi. Protože $E \subseteq \binom{V}{2}$, tak počet grafů (V, E) je $\left|2^{\binom{V}{2}}\right| = 2^{\binom{n}{2}}$

Je to počet způsobů jak můžeme vybrat hrany a tedy počet podmnožin množiny všech hran

Zajímavější je počet neisomorfních grafů *a tedy kolik je mezi všemi grafy tříd isomorfismu*

Můžeme si to vyzkoušet například na $n = 3$, na něm jsou 4 takové grafy

Na větších je to celkem složité a proto uděláme akorát dolní odhad

Víme, že 1 třída má maximálně $n!$ grafů

to proto, že isomorfismus je bijekce a maximální počet je tedy permutace na $\{1, \dots, n\}$

A tedy # tříd isomorfismu $\geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ *Případ, kde jsou všechny třídy maximální*

Podgraf Graf G' je podgrafem G (neboli $G' \subseteq G$) $\equiv V' \subseteq V \land E' \subseteq E$

Indukovaný podgraf Graf G' je indukovaným podgrafem $G \equiv V' \subseteq V \land E' = E \cap \binom{V'}{2}$

Musí obsahovat všechny hrany jako původní, proto udělám průnik původních hran s aktuálně možnými

Často se říká, že podgraf je indukovaný množinou $V' \subseteq V$ a značí se i jako $G[V']$

Cesta v grafu G $G' \subseteq G: G' \cong P_n$

Z číslování plyne co jsou to koncové vrcholy cesty

Alternativní zápis $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$, kde a v jsou různé a $\forall i\ e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

Rozšíření

Sled $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ a $\forall i\ e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ *cokoliv se může opakovat*

Tah navíc se v něm neopakují hrany

Cesta nemůžou se v ní opakovat ani vrcholy

Kružnice v grafu G $G' \subseteq G: G' \cong C_n$

Alternativní zápis $(v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_0)$ … a $\forall i\ e_i = \{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}$

Souvislost Graf G je souvislý právě tehdy když a $\forall u, v \in V(G)$: $\exists$ cesta z u do v

Komponenta souvislosti

Definujeme relaci dosažitelnosti v G: $u \sim v \equiv \exists$cesta v G s krajními vrcholy u, v

Lemma relace $\sim$ je ekvivalence

Důkaz Reflexivita – existuje triviální cesta

Symetrie – prohodím koncové vrcholy

Tranzitivita – dokáže se přes pomocné <u>lemmátko</u> na další straně

Potom budeme moct slepit cesty z u do v

Definice Komponenta souvislosti je podgraf indukovaný třídou ekvivalence $\sim$

Platí Komponenta souvislosti je *překvapivě kámo* souvislá

Graf je souvislý $\Leftrightarrow$ má 1 komponentu

Pom. lemmátko $\exists ceta\ mezi\ u, v \Leftrightarrow \exists\ sled\ mezi\ u, v$ *Existuje cesta právě když existuje sled*

Důkaz implikace „⇒“ triviálně a druhá implikace:

Když se ve sledu neopakují vrcholy, tak je to cesta

Jinak můžu vynechat část mezi opakujícími se vrcholy

To můžu konečně opakovat dokud nedostaneme cestu

Matice sousednosti

Definice Symetrická matice $A(G)$ je matice $n \times n$, kde $A_{ij} = \left[\{v_i, v_j\} \in E(G)\right]$

Hranatá závorka s logickým výrokem se používá, když je to buď 1 nebo 0 podle pravdivosti

Pozorování Součty řádků (nebo sloupců) jsou stupně vrcholů

Lemma o umocňování $(A^t)_{ij} = \#počet\ sledů\ délky\ t\ z\ v_i\ do\ v_j$

Důkaz Indukcí podle t

1. $t = 1$ platí triviálně
2. $t \to t + 1$

$(A^{t+1})_{ij} = (A^t A)_{ij} = \sum A_{ik}^t A_{kj}$ a to můžeme přepsat jako:

$$\sum_{k:\{v_k, v_j\} \in E} \#počet\ sledu\ délky\ t\ z\ v_i\ do\ v_j = \#počet\ sledu\ délky\ t+1$$

A_{kj} je totiž „indikátor“ jestli v_k a v_j mají hranu a tedy ho můžu takhle vytáhnout

Důsledek Můžeme snadno spočítat počet trojúhelníků

A to tak, že $\#\Delta = \frac{\sum_i A_{ii}^3}{6}$ *Počet sledů délky 3 prvků se sebou*

Pozn. měli jsme si promyslet počet 4-cyklů a tuším, že to uděláme obdobně, ale budeme dělit 8 a odečteme rank², protože ne každý sled délky 4 je 4-cyklus

Vzdálenost (grafová metrika) nejkratší cesta mezi u a v

Formálně $d_G: V^2 \to \mathbb{N}$ $d_G :=$ min. z délek (#hran) všech cest mezi u a v

Lemma (že se opravdu chová jako metrika) *Dá se na ni dívat jako na vzdálenost*

1. $d(u, v) \geq 0$
2. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u)$
4. $\Delta\ nerovnost: d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Operace na G(V,E)

Přidání a odebrání vrcholu/hrany $G + v, G + e, G - v, G - e$

$G - v = G[V(G) \backslash \{v\}]$ *musíme smazat hrany, které z v vedly – vyrobit indukovaný podgraf*

Dělení hrany $G\%e$ $V' = V \cup \{x\}$, $E' = E \backslash \{\{u, v\}\} \cup \{\{u, x\}, \{v, x\}\}$

Kontrakce $G.e$ $G - u - v + x + \forall(e \in E\ t.ž. |e \cap \{u, v\}| = 1): e \backslash \{u, v\} \cup \{x\}$

Odstraním dva vrcholy, přidám nějaký místo nich a potom k němu přidám všechny hrany z původního grafu k těm dvěma odstraněným vrcholům

Pozorování: libovolnou cestu můžeme vyrobit dělením P_1 a libovolnou kružnici dělením C_3 a naopak

8. Přednáška (23.11) – Eulerovský graf

Eulerovský tah takový tah, který obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu

Eulerovský graf graf, který obsahuje uzavřený eulerovský tah

⇔ souvislý graf, který má všechny stupně sudé *(G je souvislý $\wedge \forall v \in V(G)$: $deg_G\ v$ je sudý)*

Důkaz implikace „⇒“ v podstatě triviálně

Sudost z toho, jak tah vstupuje a vystupuje z vrcholu

Souvislost: $\forall u, v \in V(G): \exists\ tah\ mezi\ u, v \Leftrightarrow \exists\ ceta\ mezi\ u, v$

implikace „⇐“ uvážíme nejdelší možný tah T

1. T je uzavřený

   Pokud není uzavřený tak ho můžu protáhnout, protože krajní vrchol má sudý stupeň a lichý počet využitých hran → spor

2. T je eulerovský

   a. Pokud $\{u, v\} \in E(G)$, $u, v \in T$, pak $\{u, v\} \in T$

      Kdyby to pro nějaké u, v nebyla pravda, tak si zvolíme začátek v u a na konec $\{u, v\}$ přidáme → spor

   b. T obsahuje všechny vrcholy

      Kdyby $\exists u \in V(G) \wedge u \notin T$, zvolíme si libovolný vrchol a protože je graf souvislý, tak existuje cesta

      Zároveň platí, že je nějaký poslední vrchol r v cestě, který ještě leží na tahu a pak nějaký s, který už neleží

      V T následně tah rozpojíme a přidáme $\{r, s\}$ → spor

Máme tedy hotovo *Možná jsem asi mohl použít více formální značení, ale IDC*

Multigraf graf, který navíc obsahuje násobné hrany a smyčky

Naše předchozí věta stále platí, pouze musíme opravit smyčky *ty přispějí do deg 2x*

Tím se zároveň opraví princip sudosti

Další změny matice sousednosti může obsahovat i vyšší číslo než jedna

Orientované grafy $E \subseteq V^2 \backslash \{(x, x) | x \in V\}$ *Dvojice uspořádaných dvojic (bez smyček)*

Změny Sledy, tahy, cesty a kružnice jsou v ní orientované

Matice sousednosti už nemusí být symetrická

Nyní máme vstupní a výstupní stupeň (deg^{in} a deg^{out})

Slabá souvislost Jeho podkladový graf je souvislý *Drží pohromadě*

Podkladový graf $G^0 = (V, E^0), kde\ \{u, v\} \in E^0 \equiv (u, v) \in E \vee (v, u) \in E$

Prostě nahradíme orientované hrany neorientovanými

Silná souvislost $\forall u, v \in V: \exists\ orientovaná\ cesta\ z\ u\ do\ v$ *Dosažitelnost všude*

Vyvážený graf $\forall v \in V: \deg^{in} = \deg^{out}$

Eulerovské tahy

Následujíc vlastnosti jsou ekvivalentní**:**

1. G je vyvážený a slabě souvislý
2. G je eulerovský
3. G je vyvážený a silně souvislý

Důkaz

3 ⇒ 1: Triviálně

2 ⇒ 3: Vyvážený kvůli vstupování a vystupování hran a silná souvislost:

$$\forall u, v\ \exists\ orientovaný\ tah\ u \to v \Rightarrow \exists orient.cesta\ u \to v$$

1 ⇒ 2: Musíme zopakovat původní důkaz

Tah je uzavřený, protože kdyby nebyl, tak jde ještě nějaká hrana dovnitř

„Všechny hrany tam jsou" akorát jestli ji přidáme na konec nebo na začátek¨

„Obsahuje všechny vrcholy" opět pouze jestli jde hrana dovnitř nebo ven

Strom souvislý acyklický graf

Les acyklický graf

List vrchol stupně jedna

Lemma (o koncovém vrcholu) Každý strom s alespoň 2 vrcholy má alespoň 2 listy

Důkaz Koncové body nejdelší cesty ve stromu jsou listy

Kdyby totiž nebyly, tak buď máme cyklus nebo cestu můžeme prodloužit

Princip stromové indukce Nechť v je list v grafu G, pak G je strom ⇔ $G - v$ je strom

Důkaz implikace „⇒" G je souvislý: pokud $\exists cesta$ v G, tak bude i v $G - v$

G je acyklický: odebráním bodu nevznikne kružnice

Být podgrafem je tranzitivní a tedy $C \subseteq G - v \subseteq G$

Implikace „⇐" Souvislý: Všechny původní cesty stále jsou

A do v vede cesta z tranzitivity dosažitelnosti

Acyklický: Přidáním listu nevznikne kružnice

9. Přednáška (30.11) – Stromy, Rovinné grafy

Věta (o charakterizaci stromů) Pro graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. G je souvislý a acyklický *G je strom*
2. $\forall u, v \in E: \exists!\ cesta\ mezi\ u\ a\ v$ *jednoznačně souvislý* *právě jedna cesta mezi vrcholy*
3. G je souvislý a $\forall e \in E: G - e\ není\ souvislý$ *minimální souvislý*
4. G je acyklický a $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G): G + e\ obsahuje\ kužnici$ *maximální acyklický*
5. G je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$ *Eulerova formule pro stromy*

Důkazy Nechť graf $G = (V, E)$ a $n \coloneqq |V|$

Implikace z 1.

$1. \Rightarrow$ 2. G je strom $\Rightarrow G$ je jednoznačně souvislý

Stromovou indukcí podle n

Pro $n = 1$ triviálně

Takhle bych druhý indukční krok zapsal já: (nevím jestli můžu předpokládat, že G + l je strom)

Krok $n \to n + 1$: Přidáme list l (určitě má jediného souseda s)

Původní cesty G se nijak nezmění

$\forall x \in G$: cesta $x \sim l$ je ve tvaru $x \sim s \sim l$

Ta je z IP jednoznačná a rozšíříme ji opět jednoznačně

Takhle byl ale na přednášce:

Krok $n - 1 \to n$: buď graf G s n vrcholy a z 1. je G strom $\Rightarrow \exists l$ list v G

A list l má určitě právě jednoho souseda s

$G - l$ je také strom a má $n - 1$ vrcholů

Indukční předpoklad $G - l$ je jednoznačně souvislý

Jednoznačná souvislost G: nechť $u, v \in V$

$u, v \neq l$ a přidáním l nemohla vzniknout nová cesta

$u = v$ …triviálně

$u = l, v \neq l$ potom cesta z v do l jde přes s

Ale mezi v, s $\exists!$ $cesta$ *(z indukčního předpokladu)*

a tu lze rozšířit právě jedním způsobem

$1. \Rightarrow$ 3. G je strom $\Rightarrow G$ je minimální souvislý

Opět stromovou indukcí podle n

Přidáním listu jsme nemohli porušit souvislost

Pokud odstraním přidanou hranu, tak se rozpadne

A pokud odstraním hranu uvnitř, tak se taky rozpadne

Přidáním listu jsem to nemohl spojit

$1. \Rightarrow$ 4. G je strom $\Rightarrow G$ je maximální acyklický

Stromovou indukcí podle n

Přidáním listu jsme nemohli porušit acykličnost

Pokud přidáme hranu uvnitř, tak vytvoříme cyklus v podgrafu $G - l$

A pokud přidáme hranu uvnitř, tak vytvoříme cyklus ze souvislosti G

Od vrcholu, který spojíme s l, existuje nějaká cesta k vrcholu s

$1. \Rightarrow$ 5. G je strom $\Rightarrow$ Na G platí Eulerova formule pro stromy

Stromovou indukcí podle n

Pro $n = 1$: $|V| = 1, |E| = 0$ …

Pro $n - 1 \to n$: $G - l$ má $n - 1$ vrcholů a $n - 2$ hran

A tedy G má n vrcholů a $n - 1$ hran

Implikace do 1.

2. ⇒ 1. G je jednoznačně souvislý ⇒ G je strom (souvislý a acyklický)

Přes obměnu ¬ 1. ⇒ ¬ 2. *není souvislý nebo obsahuje cyklus* ⇒ $\forall u, v$: *počet cest mezi* $u, v \neq 1$

Když není souvislý, tak najdu vrcholy, které mezi sebou nemají cestu

Když je cyklický, tak najdu vrcholy, které mají více než jednu cestu

3. ⇒ 1. G je minimální souvislý ⇒ G je strom

Přes obměnu ¬ 1. ⇒ ¬ 3. *… ⇒ není souvislý nebo* $\exists e \in E: G - e$ *je souvislý*

Když není souvislý, tak není souvislý *xd*

Když je cyklický, tak odebráním jedné hrany se neporuší souvislost

4. ⇒ 1. G je maximální acyklický ⇒ G je strom

Přes obměnu ¬ 1. ⇒ ¬ 3. *… ⇒ není acyklický nebo* $\exists e \dots : G + e$ *je acyklický*

Když není souvislý, tak můžu přidat hranu na spojení komponent

Když je cyklický, tak není acyklický

5. ⇒ 1. Na G platí Eulerova formule pro stromy ⇒ G je strom

Stromovou indukcí

Kde vzít ale list? Vytvoříme si pomocné lemma: 5. $\wedge |V| \geq 2 \Rightarrow \exists l\ list$

To platí, protože $\sum_{v \in V} \deg(V) = 2|E| = 2n - 2$

A kdyby neexistoval list, tak $\deg(v) \geq 2$ a tedy $\sum \geq 2n$

Pro $|V| = 1$ to platí

Krok $n - 1 \Rightarrow n$: máme graf G na n vrcholech splňující 5. ⇒ $\exists l\ list$

Indukční předpoklad: $G - l$ má $n - 1$ vrcholů a splňuje 5.

$G - l$ je strom ⇒ G je strom

Kostra grafu $T \subseteq G$ je kostra ≡ T je strom, který obsahuje všechny vrcholy $V(T) = V(G)$

Existence kostry Graf má kostru ≡ je souvislý

Důkaz Implikace „⇒“ triviálně

Implikace „⇐“ přerušujeme cykly tak dlouho, dokud nemáme strom

Rovinné grafy

Definice

Oblouk prosté spojité zobrazení z $[0,1]$ do $\mathbb{R}^2$ a $f(0), f(1)$ jsou krajní body

Topologická kružnice spojité zobrazení z $[0,1]$ do $\mathbb{R}^2$, prosté vyjma $f(0) = f(1)$

Nakreslení grafu (G do roviny)

Vrcholům $v \in V$ přiřadíme různě body $b(v) \in \mathbb{R}^2$

Hranám $e \in E$ přiřadíme oblouky $o(e)$

Je-li $e = \{u, v\}$, pak $b(u), b(v)$ jsou krajními body $o(e)$

$\forall v \in V, \forall e \in E$: pokud $b(v) \in o(e)$, pak $v \in e$

$\forall e. f \in E$: pokud $o(e)$ a $o(f)$ mají společný bod, potom je to jejich krajní bod

Rovinný graf $\equiv$ má nějaké rovinné nakreslení

Pozorování nakreslení cesty je oblouk, nakreslení kružnice je topologická kružnice

Topologický graf Je graf + jeho nakreslení

Definice (oblouková souvislost)

$x \subseteq \mathbb{R}^2$ je obloukově souvislá $\equiv \forall x, y \in X\ \exists$oblouk $\subseteq X$ s krajními body x, y

Opět relace dosažitelnosti, která je ekvivalence

a opět ekvivalenční třídy a ty jsou komponenty souvislosti

Stěny grafu $\equiv$ komponenty obloukové souvislosti $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{e \in E} o(e)$

Komponenty souvislosti roviny po smazání celého nakreslení *Je to vlastnost nakreslení a ne grafu*

Rovinové multigrafy musíme si akorát dát pozor na nakreslení smyček

10. Přednáška (7.12) – Rovinné grafy 2

Jordanova věta

Je-li c topologická kružnice v $\mathbb{R}^2$, pak $\mathbb{R}^2 \setminus c$ má právě dvě komponenty souvislosti: omezenou a neomezenou a c je jejich společnou hranicí

Důsledky

K_5 není rovinný

Nakreslíme si K_4 a pak uděláme rozbor případů

$K_{3,3}$ není rovinný *Analogicky*

Věta (Hranice stěny)

Hranice každé stěny souvislého topologického grafu je nakreslení uzavřeného sledu.

Důkaz indukcí podle #hran

Minimální souvislý graf je strom a tedy $|E| = |V| - 1$ a to platí

Indukční krok: graf není strom a tedy nechť e je hrana na kružnici

e určitě odděluje 2 stěny a pro $G' = G - e$ věta platí a $S_1 \cup S_2$ je stěna

Je ohraničena uzavřeným sledem a ten rozdělíme na 2 části

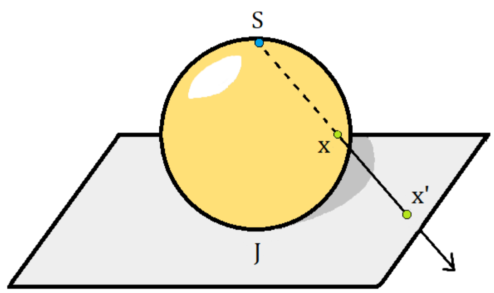
Kreslení na sféru

Věta Graf má nakreslení na sféru ⇔ Graf má nakreslení do roviny

Stereografická projekce

Spojitá bijekce mezi sférou bez S a $\mathbb{R}^2$

Obrazem nakreslení je opět nakreslení



Projekce bodu x

Důsledek projekce

Vnější stěnu si lze vybrat *(prostě kouli otočíme)*

Kreslení na válcovou plochu

Téměř totéž jako sféra

Můžeme ze středu válce promítnout na sféru …nebo ho někde rozstřihnout

Kreslení na torus

Dá se na něj nakreslit vše, co na rovinu

Opačně to neplatí, navíc se dá například nakreslit K_5

Jordanova věta na nerovinných tělesech

Na sféře a na válci Je prakticky stejná, akorát jsou obě komponenty omezené

Na toru Torus kružnicí nijak nerozdělíme

Na vysvětlení toho bychom potřebovali vybudovat topologii

Věta Dělení a kontrakce hran zachovává rovinnost *Umíme zdůvodnit jenom intuicí*

Navíc pokud má graf nerovinný podgraf, tak je nerovinný z toho máme část následující věty

Kuratowského věta Graf není rovinný ⇔ obsahuje podgraf isomorfní dělení K_5 nebo $K_{3,3}$

Opět neumíme dokázat, proč žádné jiné nerovinné grafy než tato dělení nejsou

Platí (opět bez důkazu)

G má rovinné nakreslení ⇔

má nakreslení lomenými čárami ⇔ má nakreslení úsečkami

Eulerova formule

Je-li G souvislý graf nakreslený do roviny, $v = |V(G)|, e = |E(G)|, f = \#$ stěn, potom:

$v + f = e + 2$

Důkaz: indukcí podle počtu hran (e)

1. G je strom a víme, že $v - 1 = e$ a $f = 1$ a tedy $e + 1 + 1 = e + 2$
2. Nechť e je hrana na kružnici a potom pro $G' = G - e$ platí:

   $v' = v$ $e' = e - 1$ $f' = f - 1$

   Následně : $v' + f' = e' + 2$ $v + f - 1 = e - 1 + 2$

Důsledek všechny rovinné nakreslení mají stejný počet stěn

Maximální rovinný graf G je rovinný a $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$: $G + e$ rovinný není

Věta V nakreslení maximálního rovinného grafu s min. 3 vrcholy jsou všechny stěny Δ

Taky se grafům se samými trojúhelníky říká rovinné triangulace

Důkaz (Úvahou) Nechť G je max. rovinný s rovinným nakreslením

Kdyby G nebyl souvislý, tak můžu přidat hranu mezi určitými komponenty

Kdyby $\exists$stěna ohraničená C_n pro $n > 3$: *ohraničená kružnicí*

Přidáme uvnitř hranu mezi vrcholy u, v $\{u, v\} \notin E(G)$

Dva nesousední by mohli být spojené venkem, ale potom tam jsou určitě další 2…

Jinak jsou jejich stěny ohraničené uzavřenými sledy (co nejsou kružnice)

Uvažme sled S s opakujícím vrcholem v, potom:

$S - v$ má více komponent a potom můžeme přidat hranu mezi nějakými vrcholy ze dvou komponent

Triangulace a Eulerova formule

$v + f = e + 2,$ $3f = 2e$ *Každé 3 hrany dělí rovinu na 2 stěny*

… $3v - 6 = e$

Věta Nechť G je rovinný graf a $v = |V(G)|, e = |E(G)|, v \geq 3$, potom:

$e \leq 3v - 6$

„**Důkaz**“ Buď je maximální rovinný a nebo ho na něj můžeme doplnit

Důsledek 1 $\boldsymbol{K_5}$ není rovinný z toho, že $\mathbf{10 > 3 \cdot 5 - 6}$

Důsledek 2 Průměrný stupeň vrcholu < 6 *Pro $v < 3$ triviálně a jinak*

$\sum_w \deg(w) = 2e \leq 6v - 12 < 6v$ a pro průměrný stupeň to vydělím v

Důsledek 3 V každém rovinném grafu $\exists$vrchol stupně max. 5

Rovinné grafy bez trojúhelníků

Maximální vypadá tak, že jsou stěny C_4, C_5 nebo to je hvězdička

Euler $4f \leq 2e$ a tedy $2v - 4 \geq e$

A z toho průměrný stupeň < 4, existuje vrchol stupně 3 a $K_{3,3}$ není rovinný

Duální graf (multigraf)

vrcholy jsou stěny původního grafu, a hrany jsou společné hraný původních stěn

11. Přednáška (14.12) – Barvení grafů

Barvení grafu Obarvení grafu G k barvami (k-obarvení) je $c: V(G) \to \{1, \dots, k\}$

t. ž. kdykoliv $\{x, y\} \in E(G)$, pak $c(x) \neq c(y)$

Barevnost grafu $\chi(G) \coloneqq \min k\,; \exists k$-obarvení grafu G *někdy také chromatické číslo*

Příklady

Prázdný graf $\chi(E_n) = 1$

Úplný graf $\chi(K_n) = n$

Cesty $\chi(P_n) = 2$ pro $n > 2$

Kružnice

Sudé $\chi(C_{2k}) = 2$

Liché $\chi(C_{2k+1}) = 3$

Stromy $\chi(Strom) = 2$

barvíme z libovolného kořene na přeskáčku… také by to šlo indukcí

Pozorování $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$

Klikovost $\kappa(G) \coloneqq max. k: \exists H \subseteq G$ $H \cong K_k$ *největší úplný graf v podgrafu*

Pozorování $\kappa(G) \leq \chi(G)$

Věta $\chi(G) \leq 2 \Leftrightarrow G$ neobsahuje lichou kružnici

Důkaz

Implikace „⇒“ lichá kružnice má χ=3 a tedy ji obsahovat nemůže

Implikace „⇐“ barvíme po komponentách a tedy BÚNO G souvislý

BÚNO znamená „bez újmy na obecnosti“

Nechť T je nějaká kostra grafu G a $\exists c: V(T) \to \{1,2\}$

Obarvení kostry je též hledané 2-obarvení celého G

Protože nechť $\{x, y\} \in E(G) \backslash E(T)$ a pokud $c(x) = c(y)$,
tak cesta v kostře má sudý počet hran

Přidáním vznikne lichá kružnice → $spor$

Shrnutí: Vytvoříme a obarvíme kostru grafu a to už je hledané obarvení, protože při zpětném přidávání hran do kostry se nám nemůže stát, že by vrcholy měly stejnou barvu (musela by mezi nimi být sudá cesta a tedy by vznikl lichý cyklus)

Barvení rovinného grafu rovinné grafy mají určitě $\chi \leq 6$

Z toho, že alespoň jeden $deg \leq 5$, tak ho můžu odtrhnout a obarvit

To zobecníme na degenerovaností grafu

Degenerovanost grafu Graf je k-degenerovaný ≡

$\exists$ *lin. uspořádání* $\preccurlyeq$ na $V(G)$ t. ž. $\forall v \in V(G)\ \left(\#u \in V(G) : u \prec v \wedge \{u, v\} \in E(G)\right) \le k$

Můžeme vrcholy seřadit do lineárního uspořádání tak, že z každého vrcholu vede nejvýš k hran doleva

Alternativně každý jeho podgraf obsahuje vrchol stupně nejvýše k

Příklady

Stromy 1-degenerované

Rovinné grafy 5-degenerované

Tvrzení graf je Δ-degenerovaný pro $\Delta \coloneqq \max \deg(v)$

Věta pokud graf je k-degenerovaný, pak $\chi(G) \le k + 1$

Důkaz barvíme v pořadí podle $\prec$

Věta (o 4 barvách) Pro každý rovinný graf G platí $\chi(G) \le 4$ *Dokázána počítačem*

Věta (o 5 barvách)

Důkaz 1 Indukce podle #vrcholů

a) Pokud $|V(G)| \le 5$ ✓

b) Indukční krok: zvolíme v: $\deg(v) \le 5$

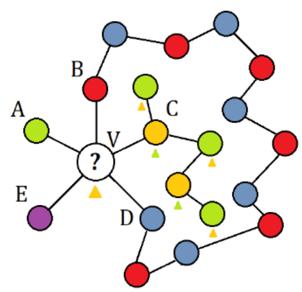
$G - v$ obarvíme indukcí → c'

Pokud c' má 4 barvy ✓

Jinak sestrojím podgraf A z vrcholů dosažitelných z a přes $c(a), c(c)$

Pokud $c \notin A$, tak v podgrafu A prohodíme barvy ✓

Jinak to samé udělám s b a d a to už se určitě podaří, kvůli rovinnosti



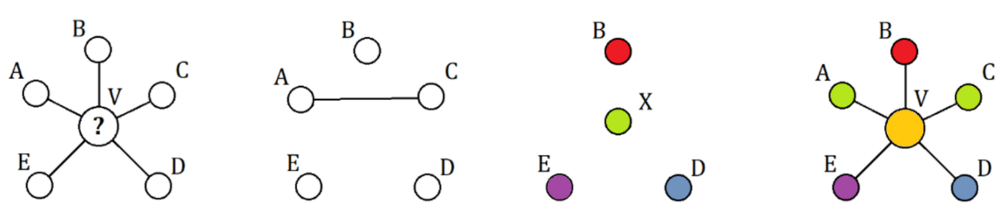
Důkaz 2

podobná indukce, akorát vyřešíme situaci s $\deg(v) = 5$

$\exists$ 2 sousedé x, y nespojení hranami (jinak je tam $K_{5,5}$)

$G' = G - v + \{x, y\}$ $G'' \coloneqq G'.\{x, y\}$

c'' z IP obarvení má → c' $\left(\text{a } c(x) = c(y)\right)$ → obarvení grafu G



Teorie pravděpodobnosti

Pravděpodobnostní prostor

$\Omega :=$ Množina elementárních jevů *např. pro 3 hody kostku* $\{111, 112, \dots, 666\}$

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ Množina jevů *např. padlo 3x sudé číslo* $\{222, 224, \dots, 666\}$

$\mathrm{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ *pravděpodobnost: přiřadíme jevu hodnotu*

Diskrétní pravděpodobnostní prostor

je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

kde Ω musí být konečná nebo spočetná množina

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$*, to znamená, že do množiny jevů patří opravdu všechny podmnožiny*

$P(J) = \sum_{W \in J} P(\{W\})$ *a tedy pravděpodobnosti jsou určeny pravděpodobnostmi elem. Jevů*

A zároveň $P(\Omega) = 1$ *když sečteme pravděpodobnosti všech el. jevů, dostaneme 1*

Konečný pravděpodobnostní prostor

Navíc Ω je konečná

Klasický pravděpodobnostní prostor

Navíc všechny el. jevy mají stejnou pravděpodobnost $\Rightarrow P(J) = \frac{|J|}{|\Omega|}$

12. Přednáška (21.12) – Pravděpodobnost

(Diskrétní) Pravděpodobnost

Bertrandův paradox

Mám 3 kartičky s různě obarvenými stranami: ČČ, MM, ČM

Víme, že horní strana náhodné kartičky je červená. Jaká je potom pravděpodobnost, že i dolní strana je také červená?

Jak vypadá Ω? $\{\underline{\text{Č}}\text{Č}, \text{Č}\underline{\text{Č}}, \underline{\text{Č}}\text{M}, \text{Č}\underline{\text{M}}, \underline{\text{M}}\text{M}, \text{M}\underline{\text{M}}\}$

Z toho už je zřejmé, že odpověď je $\frac{2}{3}$ *Protože nás zajímá jen* $\underline{\text{Č}}\text{Č}, \text{Č}\underline{\text{Č}}, \underline{\text{Č}}\text{M}$

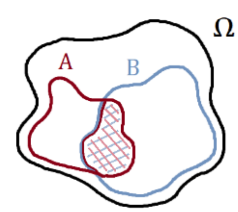
Paradox to actually není, jen je to neintuitivní

Podmíněná pravděpodobnost (pro jevy A.B)

Definice $P[A|B] := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *např. proto aby všechny podmíněné jevy B daly celkem 1*

Pozorování pokud $A \cap A' = \emptyset$ pak $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

Obecně $P(A \cup A') = P(A) + P(A') - P(A \cup A')$



Vizualizace podmíněné pravděpodobnosti

Věta (o úplné pravděpodobnosti)

Pro $A \subseteq \Omega, B_1, \dots, B_k$ je rozklad Ω t. ž. $\forall i$: $P(B_i) \neq \emptyset$ platí:

$P(A) = \sum_i P[A|B_i] \cdot P(B_i)$

Z podmíněných pravděpodobností všech částí rozkladu a A, můžeme zjistit P[A]

Bayseovská statistika

Známe parametry zdravotního testu: P[pozitivní | nemocný], P[pozitivní | zdravý]

Chceme znát: P[nemocný | pozitivní]

Z definice $P[A|B] \coloneqq \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ a $P[B|A] \coloneqq \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$: $\qquad P[B|A] \coloneqq \frac{P[A|B]\cdot P(B)}{P(A)}$

Tedy potřebujeme ještě P[pozitivní] a P[nemocný]

Konkrétní příklad

$P[T|N] \coloneqq P$[pozitivní | nemocný] $= 0.95$ *True positive*

$P[T|\overline{N}] \coloneqq P$[pozitivní | zdravý] $= 0.03$ *False positive*

$P[N] \coloneqq P$[nemocný] $= 0.06$ *Procentuální množství nemocných*

$P[T] \coloneqq P$[pozitivní] $= ?$ *Šance na pozitivní test*

$P[T] = P[T|N]\cdot P(N) + P[T|\overline{N}]\cdot P(\overline{N})$ $\qquad P[T] = 0.0852$

$P[N|T] \coloneqq P$[nemocný | pozitivní] $= ?$

$P[N|T] = \frac{P[T|N]\cdot P(N)}{P(T)}$ $\qquad \underline{P[N|T] \cong 0.67}$

Problém je ale v tom, že se to pro různé hodnoty chová velice neintuitivně

Například pokud změníme $P[N] = 0.001$ *(nakažená bude jenom jedna promile populace)*

Dostaneme hodnoty P[pozitivní] $= 0.039$ a P[nemocný | pozitivní] $= 0.0307$

Pozitivní test tedy znamená nemoc pouze ve 3%

Bayseova věta Pro $A \subseteq \Omega, B_1, \dots, B_k$ je rozklad Ω t. ž. $\forall i: P(B_i) \neq \emptyset$

$$P[B_i|A] \coloneqq \frac{P[A|B]\cdot P(B_i)}{\sum_j P[A|B_j]\cdot P(B_j)}$$

Ve jmenovateli je věta o úplné pravděpodobnosti

Nezávislost

Jevy A, B jsou **nezávislé** $\equiv P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Protože $P(A\cap B) = P[A|B]\cdot B$, dá se na nezávislost dívat po dosazení a vykrácení i takhle:

$P(A) = P[A|B] \Leftrightarrow A, B$ jsou nezávislé nebo $P(B) = 0$

Jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou

Po dvou nezávislé $\quad \forall i, j\ i \neq j$: A_i a A_j jsou nezávislé

Nezávislé $\quad \forall I \in \{1,..,n\}, I \neq \emptyset: P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$

Pravděpodobnost, že nastane libovolná podmnožina jevů je rovna jejich součinu

Příklad na $\boldsymbol{\Omega = \{0,1\}^4}$ *Prostor posloupností délky 4 z 0 a 1*

$A \coloneqq$ „První dva bity jsou 1“

$B \coloneqq$ „Poslední dva jsou 1“

$C \coloneqq$ „Sudý #1“

Potom jevy A, B, C jsou po dvou nezávislé, ale nejsou nezávislé

V přednášce byl ještě příklad zamíchání karet se závislými jevy stylu „co je na určitých kartách“

Součin pravděpodobnostních prostorů

$(\Omega, 2^{\Omega_1}, P_1) \times (\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2) = (\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1 \times \Omega_2}, P)$

kde pro $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$: $P(\omega_1, \omega_2) = P_1(\omega_1) \cdot P_2(\omega_2)$

Příklad

$\boldsymbol{\mathcal{H}}$: hody mincí $(\Omega = \{0,1\}, P(w) = 1/2)$

Potom $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ $\Omega = \{00, 01, 11, 11\}$

Můžeme si ověřit, že $\sum_{\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\Omega} P(\omega) = \sum_{\omega_1,\omega_2} P_1(\omega_1) \cdot P_2(\omega_2) = \cdots = 1$

Projekce Jevy „i-tá složka je X“ *a ty jsou nezávislé*

Náhodná veličina je funkce: $\Omega \to \mathbb{R}$

Příklady: kostka – hodnota hodu, $\{0,1\}^n$ – # 1, permutace – # pevných bodů

To vede k tomu, že je-li X náhodná veličina pak např. $X > 5$ je jev $\{\omega \in \Omega | X(\omega) > 5\}$

$\to P[x > 5]$ *Můžeme se ptát na jeho pravděpodobnost*

Střední hodnota

$\mathbb{E}[X] \coloneqq \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) \cdot X(\omega)$ *V podstatě je to vážený průměr např. na kostce je $\mathbb{E} = 3.5$*

Při nekonvergující nekonečné $\sum$ nemusí $\mathbb{E}$ existovat

Linearita střední hodnoty

$\forall x, y$ náhodné veličiny, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$\mathbb{E}[x + y] = \mathbb{E}[x] + \mathbb{E}[y]$

$\mathbb{E}[\alpha \cdot x] = \alpha \cdot \mathbb{E}[x]$

Důkaz rozepsáním z definice a vytáhnutím ze sumy

13. Přednáška (4.1.) – Pravděpodobnost 2

1. Příklad pro $\Omega = \{0,1\}^n$ a $X \coloneqq \#1$ v posloupnosti

$X_i \coloneqq 1$ *nebo* 0 pokud na i-té pozici je 1 $X = \sum_i x_i$

$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}$ $\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = n \cdot \frac{1}{2}$

Obecně náhodné jevy $J_1, \dots, J_n$

$X \coloneqq \#$jevů, které nastaly

$X_i \coloneqq$ indikátor jevu J_i a je buď 1 nebo 0 podle toho, jestli nastal

$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i]$

$\mathbb{E}[J_i] = 0 \cdot P(\overline{J_i}) + 1 \cdot P(J_i) = P(J_i)$

Nemusíme se vůbec starat o nezávislost jevů

2. Příklad řezy v grafu $G = (V, E)$

$L \cup P = V, L \cap P = \emptyset$ $X \coloneqq \# e \in E: |e \cap L| = 1 \wedge |e \cap P| = 1$ *# hran zleva doprava*

Pokud zvolíme všechny hrany náhodně se ptám na $\mathbb{E}$

$X_e = 0\ nebo\ 1$ pokud e vede zleva doprava pro $e \in E$

$\mathbb{E}[X_e] = P[e \text{ vede napříč}] = \frac{1}{2}$ TODO: rozepsat se proč

$\mathbb{E}[X] \coloneqq \sum_e \mathbb{E}[X_e] = \frac{|E|}{2}$ *v grafu je tedy v průměrném řezu ½ hran zleva doprava*

Důsledek $\exists$ rozdělení $na\ L, P$ t. ž. napříč vede alespoň polovina hran

To znamená, že v grafu existuje bipartitní podgraf s aspoň polovinou všech hran

3. Příklad Různě vysocí lidé, kteří se dívají doleva #lidí, kteří vidí dopředu?

Permutace π na $\{1, \dots, n\}$ i vidí $\equiv \forall j < i: \pi(j) < \pi(i)$ *(levá maxima)*

$X \coloneqq \#levých\ maxim$ $\mathbb{E}[x]$ přes náhodnou volby π

$X_i = 0\ nebo\ 1$ i je levé maximum

Pro $\mathbb{E}[X_i]$ hledáme pravděpodobnost $P(X_i = 1)$

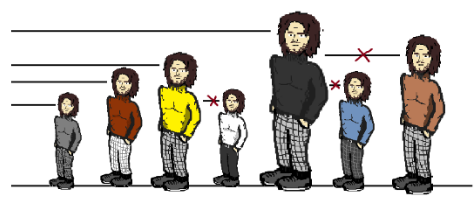
To najdeme to šikovným popisem π:

Vybereme nějakou konkrétní pozici i

určíme podmnožinu, která bude nalevo

permutace napravo a permutace nalevo

Pokud tyto kroky uděláme rovnoměrně náhodně, tak dostaneme stejně rovnoměrnou permutaci



Různě vysoké osoby v řadě xd

Pravděpodobnost, že na i-té pozici je ten největší z prvků nalevo je tedy $\frac{1}{i}$

Tím pádem i $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{i}$

A $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ *A to je n-té harmonické číslo a platí $\ln n \le \frac{1}{i} \le \ln n + 1$*

Rozdělení náhodné veličiny

Funkce $Q: \mathbb{R} \to [0,1]$

$Q(a) \coloneqq P[X = a] = \sum_{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a} P(\omega)$ *Pro spojité prostory to nefunguje a proto:*

Distribuční funkce

$D(a) \coloneqq P[X \le a]$

Pozorování $\mathbb{E}[X] = \sum_\omega X(\omega) \cdot P(\omega) = \sum_{a \in \mathbb{R}} \sum_{\omega \mid X(\omega) = a} a \cdot P(\omega) = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot P[X = a]$

Mimochodem střední hodnota nám říká celkem málo o distribuci (kopeček x stožár)

Markovova nerovnost

Je-li X nezáporná náhodná veličina a $k > 0$

Pak $P\left[X \geq k \cdot \mathbb{E}[X]\right] \leq \frac{1}{k}$

Čím dál chceme být od střední hodnotu, tím je to nepravděpodobnější

Důkaz $\mathbb{E} = \sum_{a \in \mathbb{R}} a \cdot P[X = A]$

zvolme libovolné t a roztrhneme sumu na $a < t$ a $a \geq t$

Chceme to zdola odhadnout

Levou část můžu nahradit 0, protože to bude nezáporná

Mám tedy už pouze $\mathbb{E}[x] \geq \sum_{a \geq t} a \cdot P[X = a]$, a a zdola odhadnu t

Mám tedy $t \cdot \sum_{a \geq t} P[X = a]$ a dále $t \cdot P[X \geq t]$

Skoro finální tvar je $\frac{\mathbb{E}[X]}{t} \geq P[X \geq t\ ]$ a zvolím $t \coloneqq k \cdot \mathbb{E}[X]$ ✓

Zpět k příkladu s řezem grafu

Co když chceme velký řez najít?

Náhodně to přiřadíme, spočítáme hrany a pokud jich je málo, tak znovu

Budeme chtít řez například velikosti aspoň $\frac{49}{100} \cdot |E|$

$P\left[\#\text{hran napříč} < \frac{49}{50}|E|\right] = P\left[\#\text{ hran uvnitř L, P} \geq \frac{51}{100}|E|\right]$ a protože $\mathbb{E} = \frac{1}{2}|E|$

$P\left[X \geq \frac{51}{50}\mathbb{E}\right] \leq \frac{1}{\frac{51}{50}} = \frac{50}{51}$ a tedy $P[\text{uspějeme}] \geq 1 - \frac{50}{51} = \frac{1}{51}$

Zvládneme to tedy průměrně na 51 pokusů

Pár úloh závěrem semestru

Erdősovo-Szekeresovo lemma

V každé posloupnosti n^2+1 různých čísel existuje monotónní podposl. délky n+1

Důkaz

Definujeme $\preccurlyeq$ na $\{1,\dots,n^2+1\}$ t. ž. $i \preccurlyeq j \equiv i \le j \wedge x_i \le x_j$

Je to částečné uspořádání ve kterém řetězce ⇔ rostoucí podposl.

Antiřetězce ⇔ klesající podposloupnost

Dlouhý a široký: $\alpha \cdot \omega \ge n^2+1$ a buď α nebo ω $\ge n+1$

De Bruijnovy posloupnosti

Máme sejf, který se otevře, když posledních k stisků je dané heslo

Chceme najít nejkratší posloupnost stisků, která obsahuje všechny hesla

Tedy $x_1,\dots,x_n \in \{0,1\}$(cyklická) t. ž. $\forall y \in \{0,1\}^k$ se vyskytuje jako podřetězec

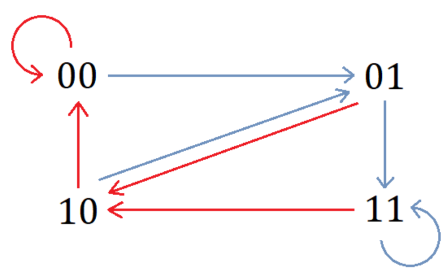
Zjevně $m \ge 2^k$ … a 2^k dokonce stačí

Např. pro $k = 2$: 0110

Odvodíme si to pomocí teorie grafů

$V \coloneqq \{0,1\}^{k-1}$

$E \coloneqq \left((y_1,\dots,y_{k-1}),(y_2,\dots,y_{k-1},0)\right)$ a $\left((y_1,\dots,y_{k-1}),(y_2,\dots,y_{k-1},1)\right)$



Příklad pro $k = 3$

Takový graf je ale Eulerovský

Výstupní vrchol každého vrchol je určitě dva *(přidáme buď 1 nebo 0)*

Vstupní vrchol je také dva *(smažeme buď 1 nebo 0)*

Souvislý je také, protože z každého vrcholu se lze dostat do jiného

Takže ho v klidu můžeme projít

Proč to funguje?

Předchozí hrany musí vypadat jako vrchol do kterého jsme přišli

A navíc každý vrchol se v té posloupnosti objeví dvakrát

Bonus: moje úlohy ze zkoušky

1. Definujte kombinační číslo, Pascalův trojúhelník a dokažte, že Pascalův trojúhelník v první polovině roste a v druhé klesá.

   Definice: Tady

   Důkaz: v první řadě je to symetrické a tedy ukázat pouze, že první polovina roste

   To ukážeme tak, že to rozepíšeme podle vzorečku. A protože $n!$ je celý řádek stejný, tak posloupnost s k-tým členem $k!\,(n-k)!$ musí být klesající.

   To není tak těžké ukázat, protože se následující člen posloupnosti vždy vynásobí k a vydělí $(n-k)$. Posloupnost tedy klesá do doby než $k > 1/2\,n$.

2. Napište 5 vět o charakterizaci stromu a dokažte jednu ekvivalenci

   Tady

3. Třikrát házíme mincí a definujeme si 3 jevy. Jev, že na 1. a 2. hod se rovnají, 2. a 3. a 1. a 3. Jsou tyto jevy nezávislé a pokud ne, jsou po dvou nezávislé?

   Už pouhou úvahou nejsou nezávislé, protože, když je 1. = 2. a 2. = 3. tak musí i 1. = 3. Takhle to nestačí a tedy ukážeme, že pravděpodobnost $P(A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}) \neq P(A_{12}) \cdot P(A_{23}) \cdot P(A_{13})$. Např. z výpisu Ω víme, že $1/4 \neq 1/8$.

   A je po dvou nezávislá rozepsáním všech dvojic $P(A_{12} \cap A_{23}) = P(A_{12}) \cdot P(A_{23})$ …

4. Dokažte, že pokud je graf G Eulerovský, tak i L(G) (jeho hranový graf) je Eulerovský.

   Hranový graf má vrcholy tam, kde ten původní hrany a platí, že $\{e_1 e_2\} \in E' \Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$,

   Dokáže se, že je souvislý (já to dělal úvahou, ale hádám, že je to možné třeba indukcí) a pak se ukáže, že má sudé vrcholy a to odvozením vzorce $\deg\{u, v\} = \deg u + \deg v - 2$

Často se v Marešově zkoušce objevuje i úloha o šatnářce, binomická věta, princip inkluze a exkluze.

Více ukázek jeho zkoušek je zde: http://forum.matfyz.info/viewforum.php?f=180