Лабораторная работа №2
Затухающие колебания. Резонансы в RLC-контурах

Иван Протасов
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

2 сентября 2024 г.

1. Введение

1.1. Цель работы

В данной работе исследуется затухание колебаний в RLC-цепях. Было исследовано поведение цепочки в трёх режимах работы, соответствующие разным решениям дифференциального уравнения. Был также построен фазовая траектория колебаний, полученный результат сходится с теоретически предсказываемым. Отдельное внимание в работе уделяется исследованию резонансов в RLC-контурах. Были проверены полученные резонансным методом добротности с теоретически расчитанными значениями.

1.2. Оборудование

Осциллограф Keysight DSOX 1102G, два щупа осциллографа, переходник BNC-клеммы, контактная макетная плата, набор соединительных проводов, два резистора номиналами 100 Ом, потенциометр 4.5 кОм логарифмический, катушка индуктивности 1.5 мГн, конденсатор 8 нФ.

2. Ход работы

В начале работы измерилось сопротивление всех используемых элементов. Активное сопротивление катушки составило $r_L = 57.2$ Ом. Сопротивление потенциометра лежало в пределах от $\tilde{R}_{min} = 3$ Ом до $\tilde{R}_{max} = 4.2$ кОм. Также $L = 1.5$ мГн, $C = 8$ нФ, $r = 1$ Ом, $r_{gen} = 50$ Ом - внутреннее сопротивление генератора осциллографа. Посчитаем теоретические параметры цепи. Найдем частоту резонансного контура ω_0 по формуле:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 3.5 \cdot 10^6 \text{ рад/с}.$$

Далее рассчитаем коэффициент затухания γ, добротность Q и логарифмический декремент затухания δ для минимального $\tilde{R}_{min}$ и максимального $\tilde{R}_{max}$ значений сопротивления потенциометра. Определим добротность системы:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

$$\delta = \frac{2\pi\gamma}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q},$$

где

$$R = \tilde{R} + r + r_{gen} + r_L,$$

$$R = \tilde{R} + 1 + 50 + 255 = (\tilde{R} + 306)\,\text{Ом},$$

$$\tilde{R}_{min} = 309\,\text{Ом},\ \tilde{R}_{max} = 4.5\,\text{кОм}.$$

Тогда при $\tilde{R}_{max}$:

$$Q_{max} = 0.1,\ \delta_{max} = 32.7,\ \gamma_{max} = 1.5 \cdot 10^6.$$

И при $\tilde{R_{min}}$:

$$Q_{min} = 1.4,\ \delta_{min} = 2.24,\ \gamma_{min} = 1.03 \cdot 10^5.$$

Вычислим сопротивление, соответствующее критическому режиму работы цепи. Ему отвечает Q $= 1/2$:

$$\frac{1}{R_{crit} + r + r_{gen} + r_L}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2},$$

$$R_{crit} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - r - r_{gen} - r_L = 560\,\text{Ом}.$$

Уравнение затухающих колебаний

Рассмотрим контур без источника напряжения, в котором последовательно подключены конденсатор с ёмкостью C, катушка с индуктивностью L и резистор с сопротивлением r. Пусть в начальный момент времени сила тока в контуре была равна нулю, а заряд на левой обкладке конденсатора был равен q_0. Выберем в контуре направление обхода по часовой стрелке и будем считать силу тока положительной, если ток течёт также по часовой стрелке. Как следует из второго правила Кирхгофа, в любой момент времени сумма падений напряжения на всех элементах контура равна нулю, так как в контуре отсутствуют источники напряжения:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0.$$

Здесь q - заряд на левой обкладке конденсатора в момент времени t, $I = \frac{dq}{dt}$ - сила тока в контуре. Разделим обе части уравнения на L. Введём две величины с размерностью [рад/с]: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота и $\gamma = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания. С их помощью записать уравнение затухающих колебаний:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Напишем для него характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

В зависимости от значений коэффициентов γ и ω_0 уравнение имеет различные решения, соответствующие различным колебательным режимам. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Различные колебательные режимы

Случай $\gamma < \omega_0$ (режим слабого затухания). Характеристическое уравнение имеет два комплексных корня, которые являются комплексно-сопряжёнными друг к другу:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\Omega,$$

где $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Общее решение такого уравнения имеет вид:

$$q(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Подставляя начальные условия $q(0) = q_0$ и $\dot{q}(0) = 0$, находим константы и получаем:

$$q(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{2i\Omega}(-q_0\lambda_2 e^{i\Omega t} + q_0\lambda_1 e^{-i\Omega t}).$$

Подставляя значения $\lambda_{1,2}$, найденные из характеристического уравнения, получаем:

$$q(t) = \frac{\omega_0}{\Omega} q_0 e^{-\gamma t} cos\Omega t + \varphi_0,$$

где $\varphi_0 = \arctan\frac{\gamma}{\Omega}$ - начальная фаза колебаний. Продифференцировав и преобразовав, получаем выражние для силы тока в контуре:

$$I(t) = \frac{\omega_0^2}{\Omega} q_0 e^{-\gamma t} sin\Omega t = -I_0 \frac{\omega_0}{\Omega} q_0 e^{-\gamma t} sin\Omega t,$$

где $I_0 = \omega_0 q_0$ получено из начального условия $I(0) = 0$.

Случай $\gamma > \omega_0$ (апериодический режим). Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, которые оба отрицательны:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \kappa,$$

где $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Выражение для силы тока в контуре:

$$I(t) = -I_0 \frac{\omega_0}{\kappa} q_0 e^{-\gamma t} \sinh \kappa t.$$

Случай $\gamma = \omega_0$ (критический режим). Характеристическое уравнение имеет один двухкратно вырожденный корень $\lambda_{1,2} = -\gamma$. В таком случае общее решение уравнения имеет вид:

$$q(t) = (a_1 + a_2 t) e^{-\gamma t}.$$

Из начальных условий находим коэффициенты и получаем:

$$q(t) = q_0 (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}.$$

Добротность колебательного контура

Добротностью RLC-контура называется величина:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Как видно из определения, режиму затухающих колебаний соответствуют значения добротности Q $> 1/2$, апериодическому режиму соответствует Q $< 1/2$, а критическому режиму отвечает Q $= 1/2$. Как правило, о добротности контура говорят только в том случае, когда она сама существенно больше единицы, то есть в режиме затухающих колебаний и в пределе слабого затухания. Добротностью в энергетическом смысле Q_E будем называть отношение 2π к относительной убыли энергии за один период колебаний:

$$Q_E = 2\pi \Big/ \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)},$$

$$Q_E = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma T}}.$$

В пределе слабых затуханий ($\gamma \ll \omega_0$):

$$\frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma T}} \approx \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi \Omega}{2\gamma\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} = Q.$$

Логарифмическим декрементом затухания δ будем называть логарифм отношения значений заряда (или тока) в моменты времени t и $t + T$:

$$\delta = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)}.$$

Для затухающих колебаний

$$\delta = \ln e^{\gamma t} = \gamma T = 2\pi \frac{\gamma}{\Omega}.$$

За одно колебание величина огибающей $A(t)$ уменьшается в δ раз. Вычислим характерное число колебаний N_e, за которое огибающая заметно уменьшится:

$$\frac{A(t + N_e T)}{A(t)} = e^{-N_e \gamma T} = e^{-1}.$$

$$N_e \gamma T = 1 \Longrightarrow N_e = \frac{1}{\gamma T} = \frac{1}{\delta}.$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания численно равен обратной величине характерного числа колебаний, за которое огибающая заметно уменьшается. В пределе слабых затуханий ($\gamma \ll \omega_0$):

$$\delta \approx 2\pi \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q};\ N_e = \frac{1}{\delta} = \frac{Q}{\pi}.$$

Как следует из полученной формулы, добротность показывает, сколько колебаний успевает совершить система перед тем как величина огибающей существенно уменьшится.

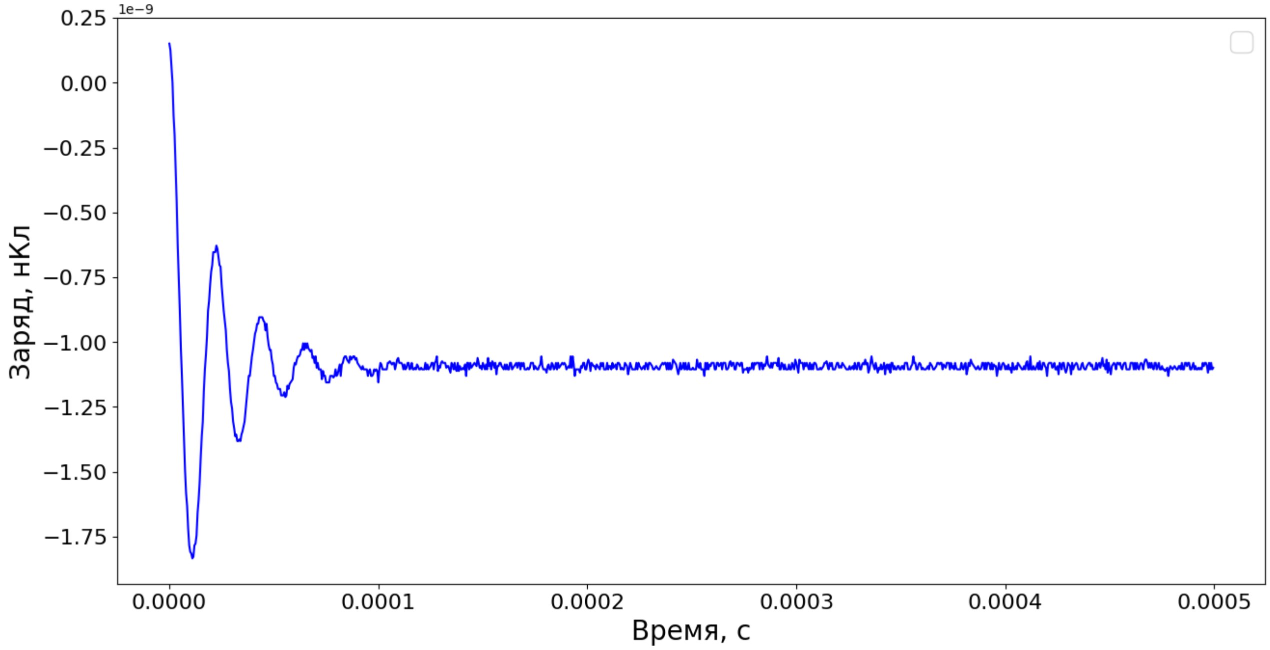

Рис. 1: Зависимость заряда на конденсаторе от времени

Частотные характеристики RLC-контуров

Последовательный RLC контур. Резонанс

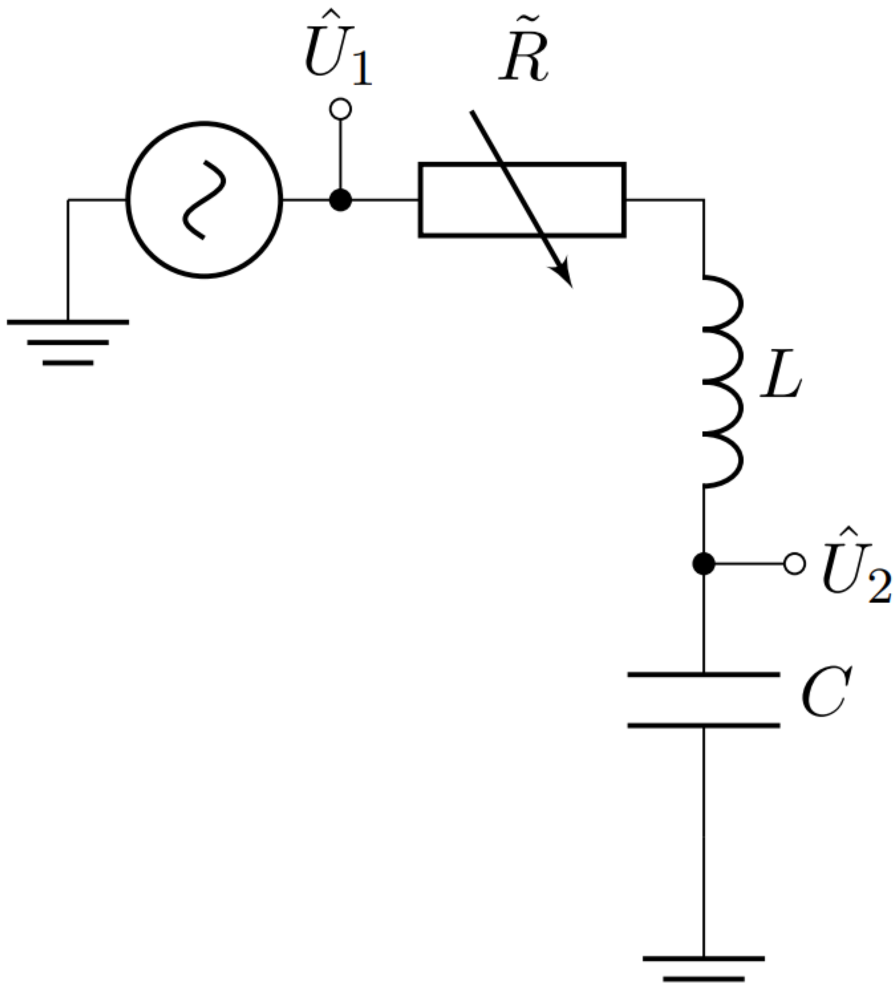

Рис. 2: Последовательный RLC-контур

Вычислим коэффициент передачи цепи, изображённой на рис. 1:

$$\hat{K}(\omega) = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + 2i\gamma\frac{\omega}{\omega_0^2}},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота, $\gamma = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания и $Q_0 = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ - добротность Тогда модуль коэффициента передачи:

$$\hat{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}.$$

Построим АЧХ цепи.

По графику определим коэффициент затухания как полуширину резонансной кривой на уровне $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а добротность - как отношение резонансной частоты к ширине резонансной кривой на уровне $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимума.
Имеем: $\omega_m = 2.82 \cdot 10^5$ рад/с, $\gamma = 76412$ рад/с, $Q = \frac{\omega_m}{2\gamma} \approx 1.9$, $\delta \approx 1.7$. Полученные экспериментальным путём значения близки к теоретическим выкладкам.

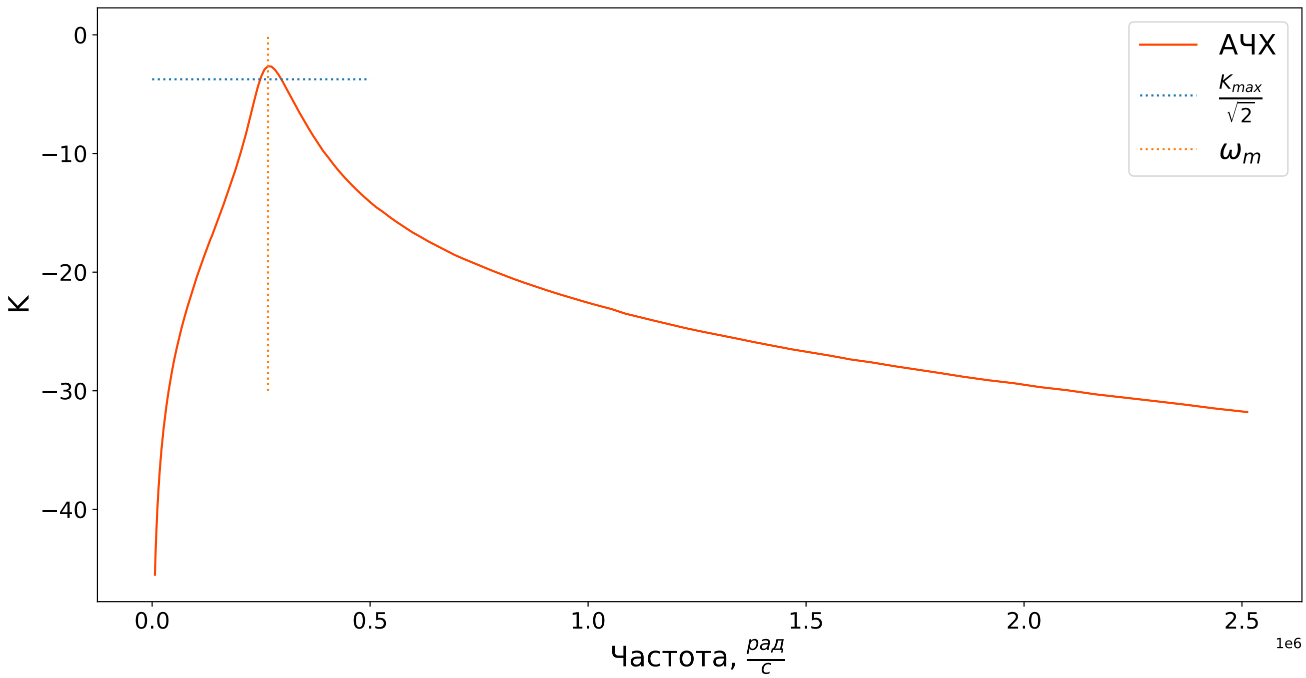

Рис. 3: АЧХ RLC-цепи для случая минимального сопротивления

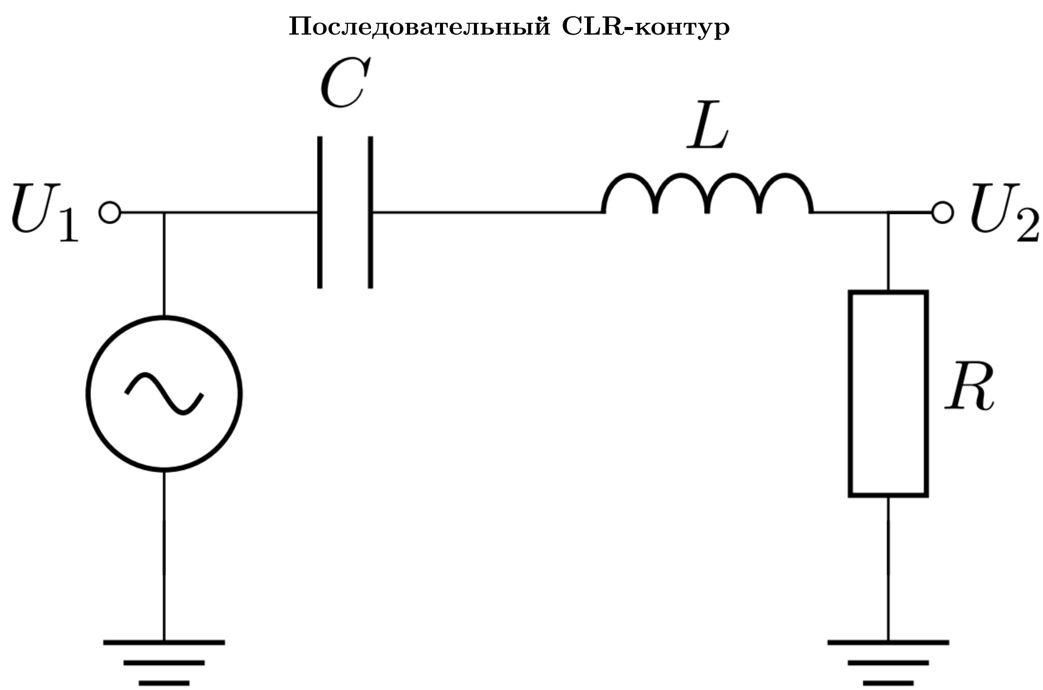

Рис. 4: Последовательный CLR-контур

Вычислим коэффициент передачи цепи, изображённой на рис. 2:

$$\hat{K}(\omega) = \frac{2i\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega},$$

Тогда модуль коэффициента передачи:

$$\hat{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 + Q^2(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})^2}}.$$

Построим АЧХ и ФЧХ цепи.

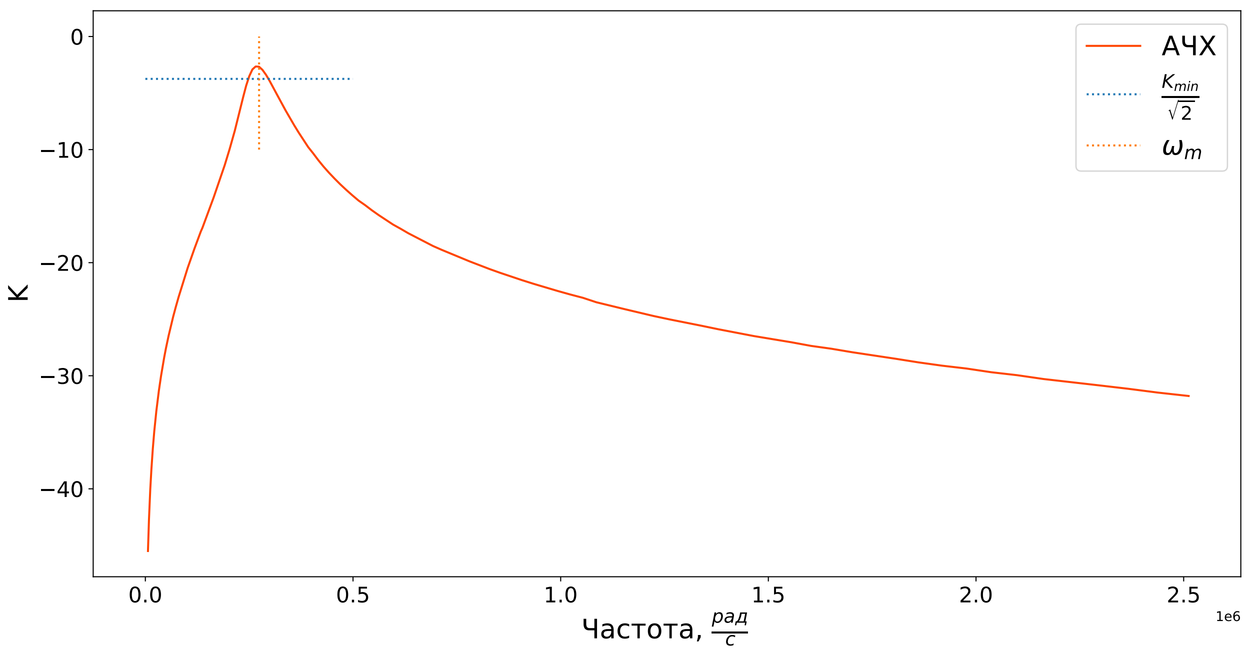

Рис. 5: АЧХ последовательного CLR-контура

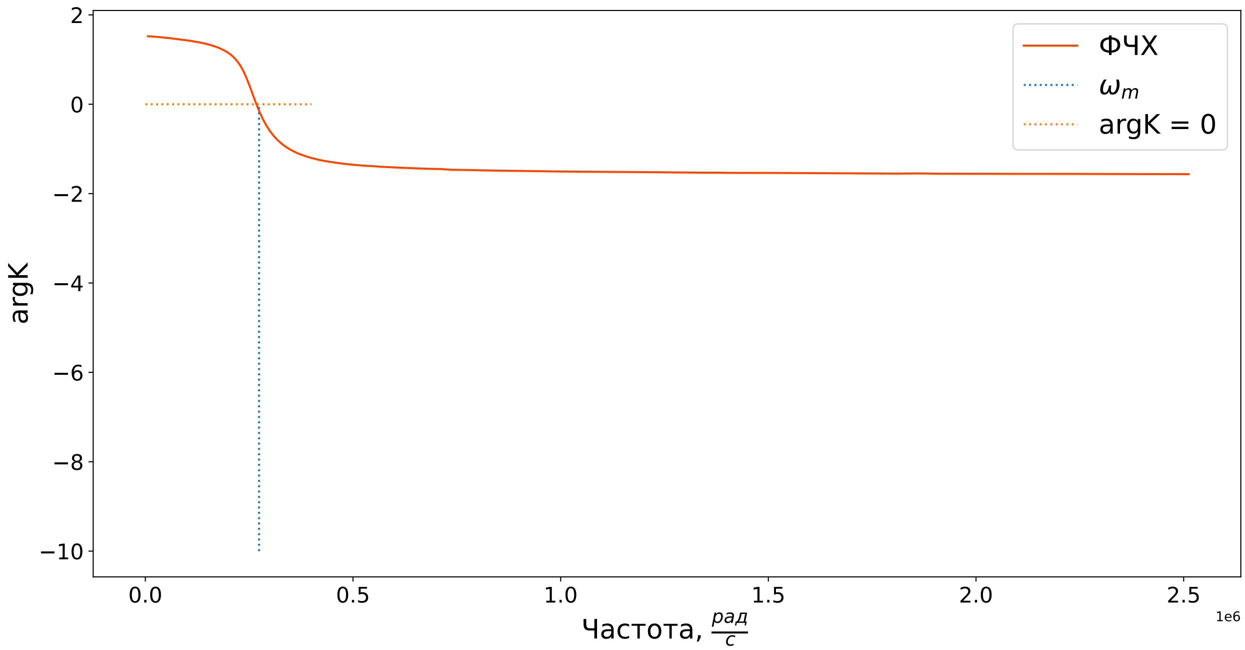

Рис. 6: ФЧХ последовательного CLR-контура

Параллельный RLC-контур. Антирезонанс

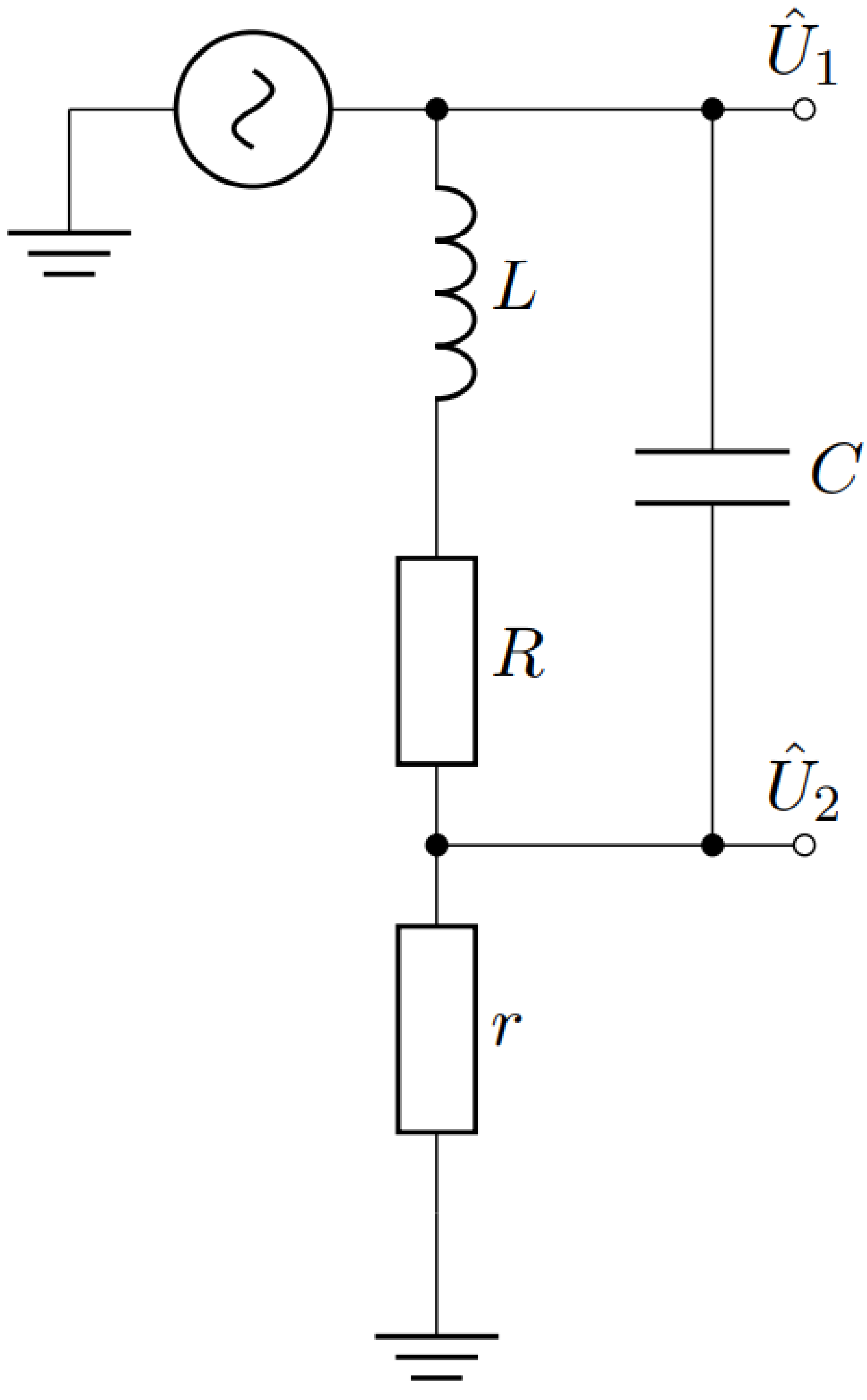

Рис. 7: Параллельный RLC-контур

Вычислим коэффициент передачи цепи, изображённой на рис. 3:

$$\hat{K}(\omega) = \frac{r}{r + Z_{||}},\ Z_{||} = \rho \frac{i\omega\omega_0 + 2\gamma\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega},$$

где $Z_{||}$ – импеданс цепи, а $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое сопротивление контура. Построим АЧХ цепи.

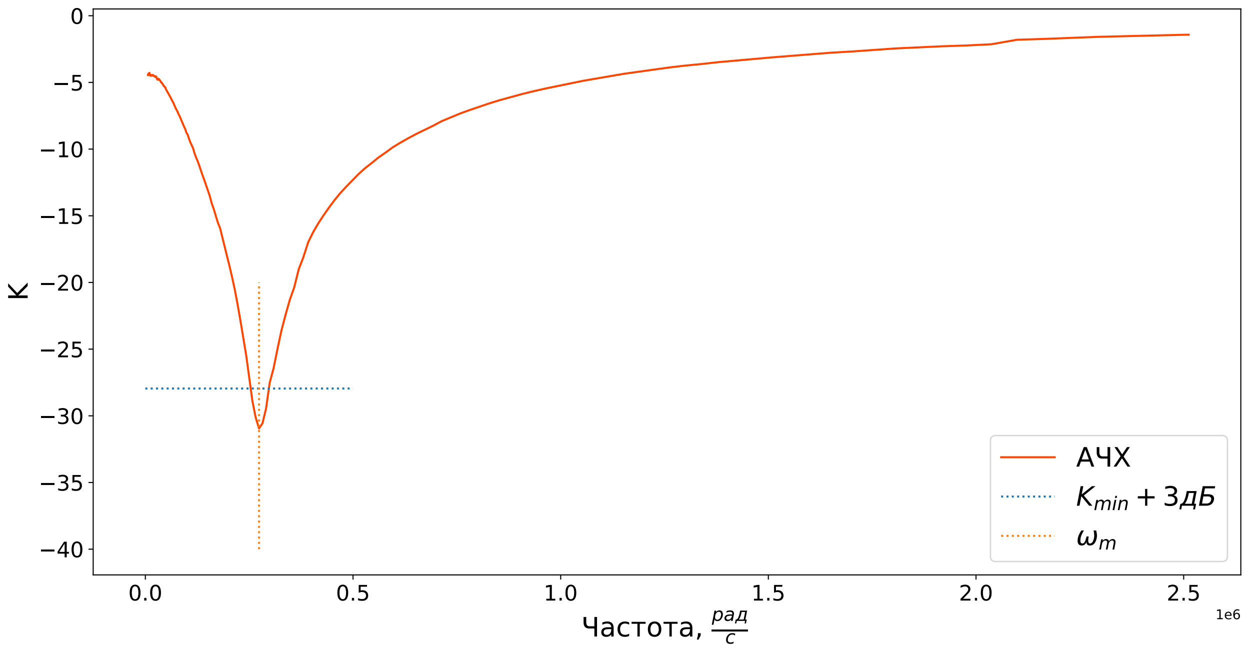

Рис. 8: АЧХ параллельного RLC-контура