Capítulo 6

Problema 01.

$$n(\Omega)=\binom{8}{3}=\frac{8!}{5!3!}=56 \text{ combinações possíveis}$$

$$X=0\Rightarrow\binom{5}{0}\times\binom{3}{3}=1$$

$$X=1\Rightarrow\binom{5}{1}\times\binom{3}{2}=15$$

$$X=2\Rightarrow\binom{5}{2}\times\binom{3}{1}=30$$

$$X=3\Rightarrow\binom{5}{3}\times\binom{3}{0}=10$$

Então a distribuição de X é dada por:

X	0	1	2	3
P(X=x)	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

Problema 02.

$$n(\Omega)=8^3=512 \text{ combinações possíveis}$$

$$X=0\Rightarrow 5^0\times 3^3=27$$

$$X=1\Rightarrow\binom{3}{1}\times 5^1\times 3^2=135$$

$$X=2\Rightarrow\binom{3}{2}\times 5^2\times 3^1=225$$

$$X=3\Rightarrow\binom{3}{3}\times 5^3\times 3^0=125$$

X	0	1	2	3
P(X=x)	$27/512$	$135/512$	$225/512$	$125/512$

Problema 03.

$$X=1\Rightarrow C\Rightarrow\frac{1}{2}$$

$$X=2\Rightarrow RC\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$X=3\Rightarrow RRC\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

X	1	2	3	4	.....
P(X=x)	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	.....

De modo geral,

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}, \text{ x=1,2,3....}$$

Problema 04.

Seguindo o mesmo raciocínio idêntico ao Problema 02, tem-se:

X	0	1	2	3	4
P(X=x)	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

Problema 05.

No contexto apresentado, a distribuição do número de caras é dada por:

$$P(Y = y) = \binom{4}{y} \times p^{y} \times (1-p)^{4-y}, \text{ y} = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Problema 06.

Por similaridade, tem-se:

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} \times p^{y} \times (1-p)^{n-y}, \text{ y} = 0, 1, 2, 3, ..., \text{n}.$$

Problema 07.

Para o Problema 01, tem-se:

$$\text{E(X)} = \frac{15}{56} + \frac{60}{56} + \frac{30}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875$$

$$\text{E(X}^2\text{)} = \frac{15}{56} + \frac{120}{56} + \frac{90}{56} = \frac{225}{56} = 4{,}018$$

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2\text{)} - [\text{E(X)}]^2 = 4{,}018 - [1{,}875]^2 = 0{,}502$$

Para o Problema 02, tem-se:

$$\text{E(X)} = \frac{135}{512} + \frac{450}{512} + \frac{375}{512} = \frac{960}{512} = 1{,}875$$

$$\text{E(X}^2\text{)} = \frac{135}{512} + \frac{900}{512} + \frac{1175}{512} = \frac{2160}{512} = 4{,}219$$

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2\text{)} - [\text{E(X)}]^2 = 4{,}219 - [1{,}875]^2 = 0{,}703$$

Problema 08.

$$\text{E(Y)} = \frac{4}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = 2{,}0$$

$$\text{E(Y}^2\text{)} = \frac{4}{16} + \frac{24}{16} + \frac{36}{16} + \frac{16}{16} = 5{,}0$$

$$\text{Var(X)} = \text{E(X}^2\text{)} - [\text{E(X)}]^2 = 5{,}0 - [2{,}0]^2 = 1{,}0$$

Problema 09.

Y=3X	0	3	6	9
P(Y=y)	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

$Z=X^2$	0	1	4	9
$P(Z=z)$	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

Problema 10.

Ω	RRR	RRC	RCR	CRR	RCC	CRC	CCR	CCC
X	0	1	1	1	2	2	2	3
Y	1	2	3	2	2	3	2	1
p	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$

Do quadro acima obtém-se:

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$$E(X) = 0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=1,5$$

$$Var(X) = (-1,5)^2\times\frac{1}{8}+(-0,5)^2\times\frac{3}{8}+(0,5)^2\times\frac{3}{8}+(1,5)^2\times\frac{1}{8}=0,75$$

Y	1	2	3
$P(Y=y)$	$2/8$	$4/8$	$2/8$

$$E(X) = 1\times\frac{2}{8}+2\times\frac{4}{8}+3\times\frac{2}{8}=2$$

$$Var(X) = (-1)^2\times\frac{2}{8}+(0)^2\times\frac{4}{8}+(1)^2\times\frac{2}{8}=0,50$$

Problema 11.

$$E(V) = 0\times q+1\times(1-q)=(1-q)$$

$$Var(V) = (q-1)^2\times q+q^2\times(1-q)=q\times(1-q)$$

Problema 12.

$$E(X) = 0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

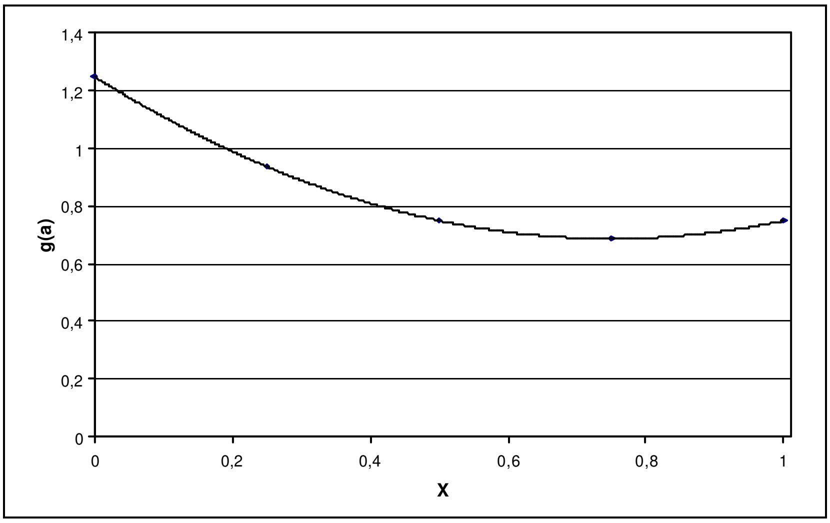
$$E(X^2) = 0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$E\left[(X-a)^2\right]=E(X^2)-2\times a\times E(X)+a^2=\frac{5}{4}-\frac{6a}{4}+a^2=a^2-\frac{3a}{2}+\frac{5}{4}$$

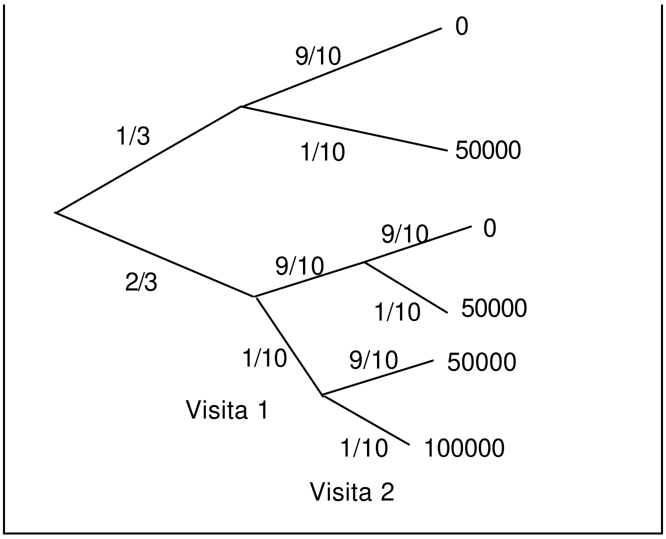
Portanto,

a	0	0,25	0,50	0,75	1
$E\left[(X-a)^2\right]$	1,2500	0,9375	0,7500	0,6875	0,7500

Os resultados encontram-se representados no gráfico a seguir, em que se percebe que g(a) é mínimo para $a \approx 0,75$



Problema 13.



Da árvore acima obtém-se:

$$P(Y=0)=\frac{1}{3}\times\frac{9}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{252}{300}=\frac{126}{150}$$

$$P(Y=50000)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{46}{300}=\frac{23}{150}$$

$$P(Y=100000)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{300}=\frac{1}{150}$$

Y	0	50000	100000
P(Y=y)	$126/150$	$23/150$	$1/150$

$$E(Y)=0\times\frac{126}{150}+50000\times\frac{23}{150}+100000\times\frac{1}{150}=\frac{1250000}{150}=8333,33$$

Problema 14.

$$E(Y^2) = 0 \times \frac{126}{150} + (50000)^2 \times \frac{23}{150} + (100000)^2 \times \frac{1}{150} = 450000000$$

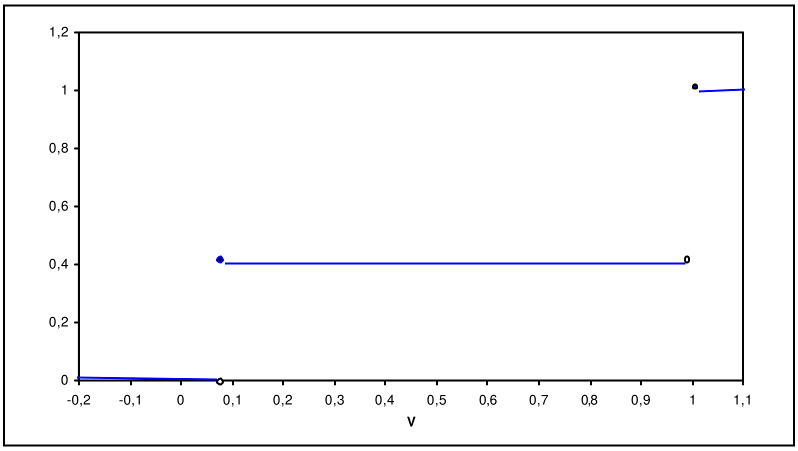
$$Var(X) = 450000000 - (8333{,}33)^2 = 380555611$$

Problema 15.

A partir do Problema 11, tem-se:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ q, & 0 \le v < 1 \\ 1, & v \ge 1 \end{cases}$$

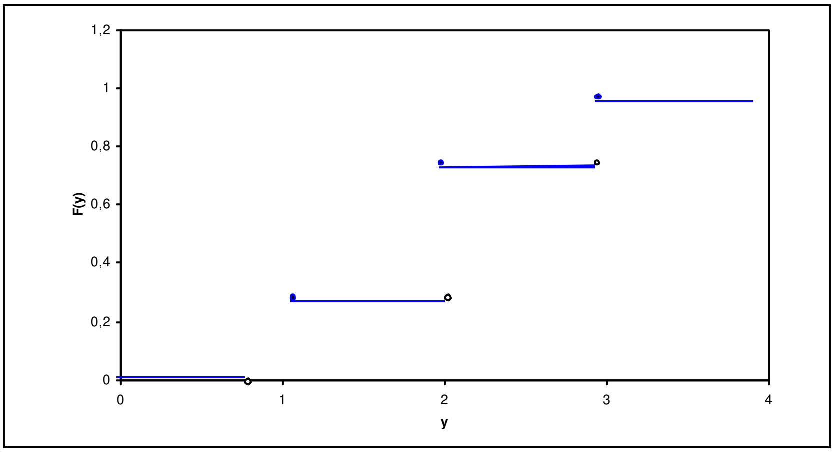
Gráfico para q=0,4:



Problema 16.

A partir do Problema 10, tem-se:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 2/8, & 1 \le y < 2 \\ 6/8, & 2 \le y < 3 \\ 1, & y \ge 3 \end{cases}$$



Problema 17.

$E(T) = 2\times 0{,}1 + 3\times 0{,}1 + 4\times 0{,}3 + 5\times 0{,}2 + 6\times 0{,}2 + 7\times 0{,}1 = 4{,}6$

G	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
P(G=g)	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

$E(G) = 2\times 0{,}3 + 2{,}5\times 0{,}2 + 3\times 0{,}3 + 3{,}5\times 0{,}1 + 4\times 0{,}1 = 2{,}75$

$E(G^2) = 4\times 0{,}3 + 6{,}25\times 0{,}2 + 9\times 0{,}3 + 12{,}25\times 0{,}1 + 16\times 0{,}1 = 7{,}975$

$Var(G) = E(G^2) - [E(G)]^2 = 7{,}975 - 7{,}5625 = 0{,}4125$

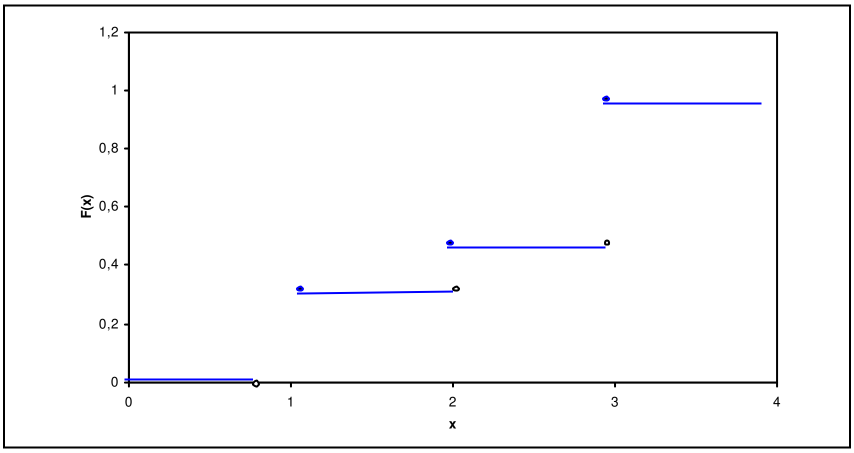
Problema 18.

A distribuição de X é dada por:

X	1	2	3
P(X=x)	1/3	1/6	1/2

Desse modo, a f.d.a de X é:

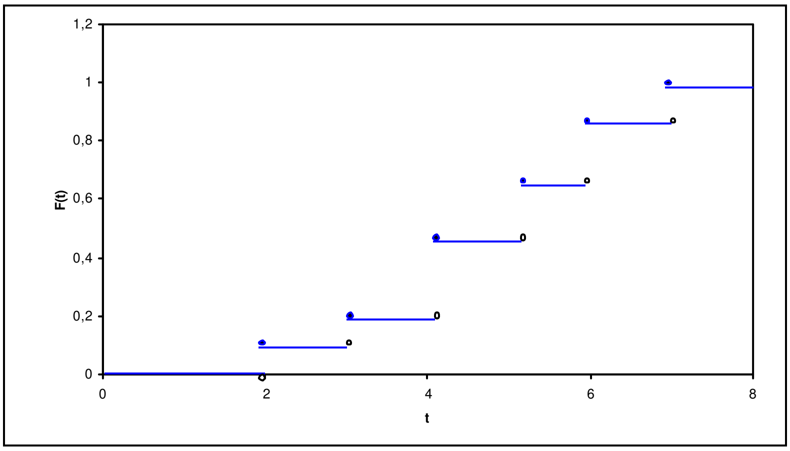
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3, & 1 \le x < 2 \\ 1/2, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$



Problema 19.

A f.d.a da variável T é dada por:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 0{,}1\ , & 2 \le t < 3 \\ 0{,}2\ , & 3 \le t < 4 \\ 0{,}5\ , & 4 \le t < 5 \\ 0{,}7\ , & 5 \le t < 6 \\ 0{,}9\ , & 6 \le t < 7 \\ 1{,}0\ , & t \ge 7 \end{cases}$$



Problema 20.

(a) X ~ Binomial(5, 1/3)

$$P(X=x)=\binom{5}{x}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x};\ x=0,1,2...,5.$$

(b) A variável X não tem distribuição binomial, pois as extrações são feitas sem reposição, ou seja, a probabilidade de sucesso não é a mesma em todos as extrações.

(c) A variável X terá distribuição binomial apenas se a proporção de bolas brancas for a mesma em todas as urnas.

(d) Novamente, a variável em estudos terá distribuição binomial apenas se a proporção de pessoas com opinião contrária ao projeto for a mesma nas 10 cidades pesquisadas.

(e) Neste caso, as máquinas têm que funcionar independente e apresentar uniformidade quanto à produção de peças defeituosas, ou seja, a probabilidadede se obter uma peça com defeito tem de ser a mesma em todas as máquinas.

Problema 21.

Das propriedades da binomial tem-se:

$E(X)=np=12; Var(X)=np(1-p)=3$

(a) $n=16$

(b) $p=0{,}75$

(c) $$P(X<12)=\sum_{k=1}^{11}\binom{16}{k}\times(0{,}75)^{k}\times(0{,}25)^{16-k}=0{,}3698$$

(d) $$P(X\geq 14)=\sum_{k=14}^{16}\binom{16}{k}\times(0{,}75)^{k}\times(0{,}25)^{16-k}=0{,}1971$$

(e) $$E(Z)=E\left(\frac{X-12}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left[E(X)-12\right]=0$$

(f) $P(Y\geq 14/16)=P(X\geq 14)=0{,}1971$

(g) $P(Y \geq 12/16) = 1 - P(X < 12) = 1 - 0{,}3698 = 0{,}6302$

Problema 22.

Seja X o número de chamadas recebidas nessa central em um minuto, e usando a tabela II tem-se:

(a) $P(X \geq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-8} \times 8^k}{k!} = 1 - 0{,}7166 = 0{,}2834$

(b) $P(X < 9) = \sum_{k=0}^{8} \frac{e^{-8} \times 8^k}{k!} = 0{,}5925$

(c) $P(7 \leq X < 9) = P(X = 7) + P(X = 8) = 0{,}1396 + 0{,}1396 = 0{,}2792$

Problema 23.

Seja X o número de cortes por 2000 pés de fita magnética. Pode-se dizer que X segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 1$ (Tabela II ou pacotes computacionais)

(a) $P(X = 0) = \frac{e^{-1} \times 1^0}{0!} = 0{,}3679$

(b) $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-1} \times 1^k}{k!} = 0{,}9197$

(c) $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-1} \times 1^k}{k!} = 0{,}9197$

(d) $P(X \geq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{e^{-1} \times 1^k}{k!} = 1 - (0{,}3679 + 0{,}3679) = 0{,}2642$

Problema 24.

- Considerando a distribuição de binomial:

  Se X é o número de itens defeituosos encontrados na amostra de 10 produzidos, X ~ b(10;0,2) e

  $P(X \leq 1) = \binom{10}{0} \times (0{,}2)^0 \times (0{,}8)^{10} + \binom{10}{1} \times (0{,}2)^1 \times (0{,}8)^9 = 0{,}1074 + 0{,}2684 = 0{,}3758$

- Considerando a distribuição de Poisson

  Nas condições do enunciado, pode-se dizer que o número de itens defeituosos a cada dez produzidos tem distribuição de Poisson de parâmetro 2 (10×2). Assim:

  $P(X \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{e^{-2} \times 2^k}{k!} = 1 - (0{,}1353 + 0{,}2707) = 0{,}4060$

  Os resultados obtidos, apesar de diferentes, são razoavelmente próximos.

Problema 25.

(a) Calculando o número médio de machos por ninhada:

$\overline{x} = 0 \times 20 + 1 \times 360 + \ldots + 5 \times 40 = 2{,}4$

mas $\bar{x} = 5 \times p \Rightarrow p = 0{,}48$

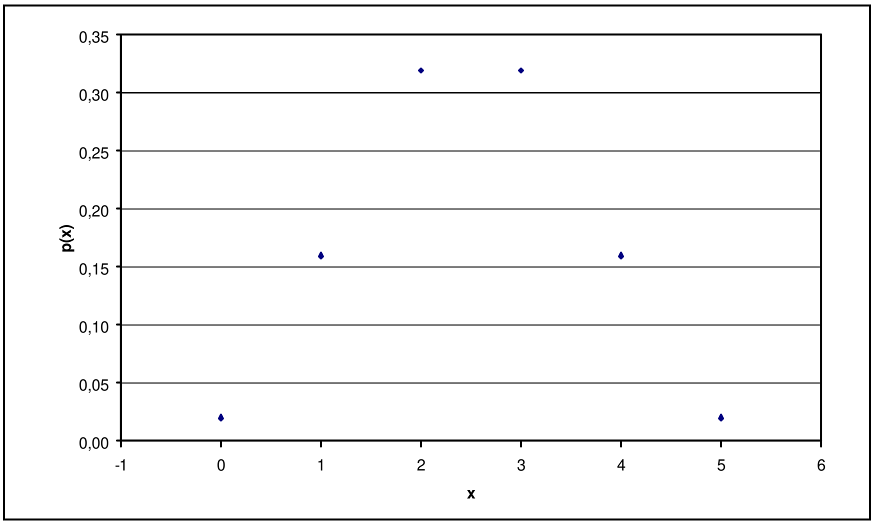
(b) A tabela a seguir traz o número esperado de ninhadas para cada valor de X, de acordo com o modelo binomial b~(5;0,48) (os números estão arredondados). Neste caso, o número esperado de ninhadas com x machos é 2000×P(X=x).

X=Número de machos	P(X=x)*	Número esperado de ninhadas
0	0,0380	76
1	0,1755	351
2	0,3240	648
3	0,2990	598
4	0,1380	276
5	0,0255	51

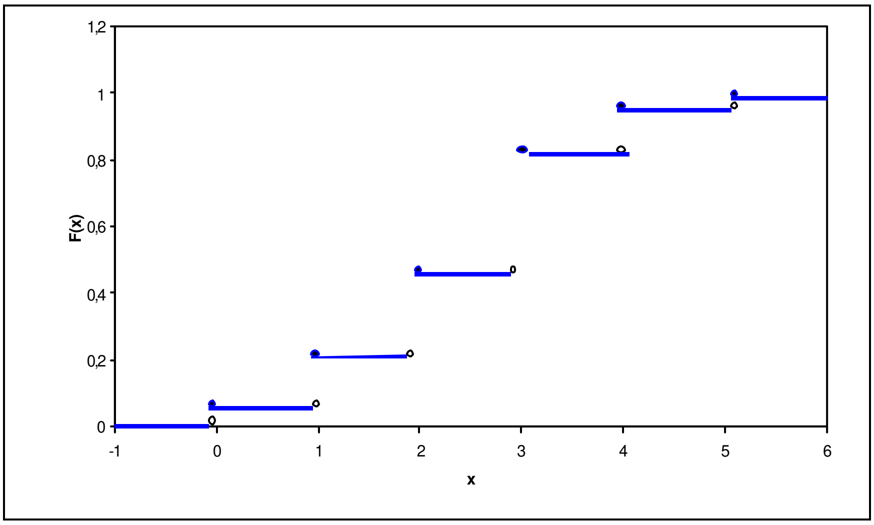
*Valores calculados com base na função distrbinom do EXCEL.

Problema 26.

O gráfico da distribuição de X, p(x) é:

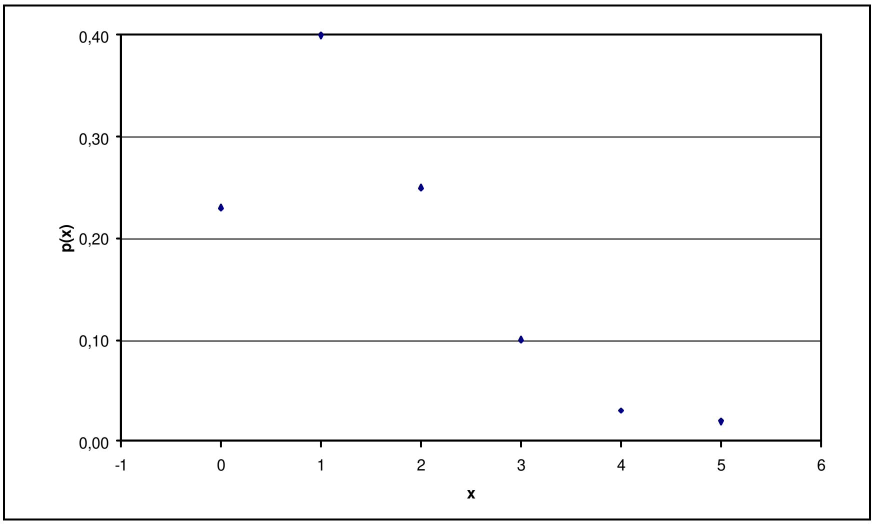


O gráfico da f.d.a de X, F(x) é:

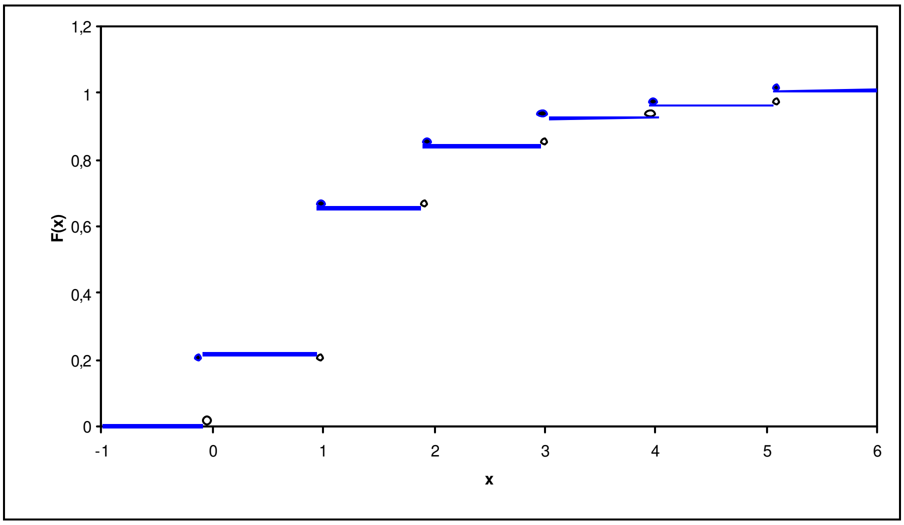


Problema 27.

O gráfico da distribuição de X, p(x) é:



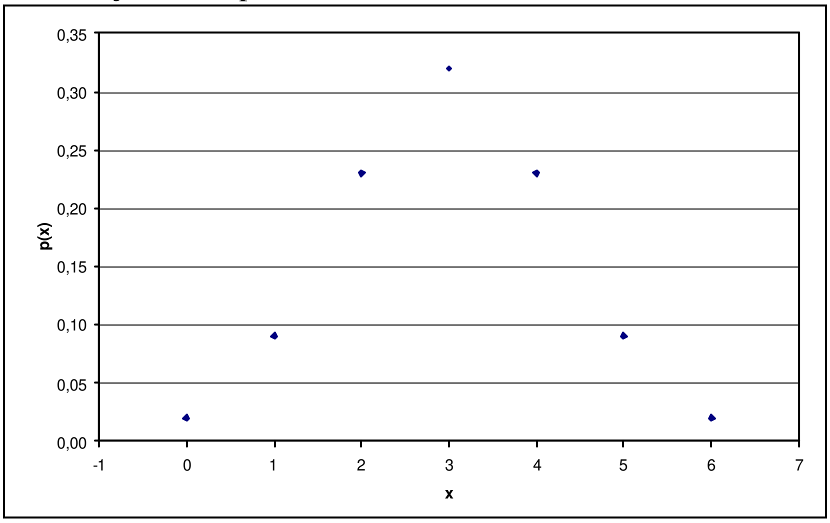
O gráfico da f.d.a de X, F(x), é:



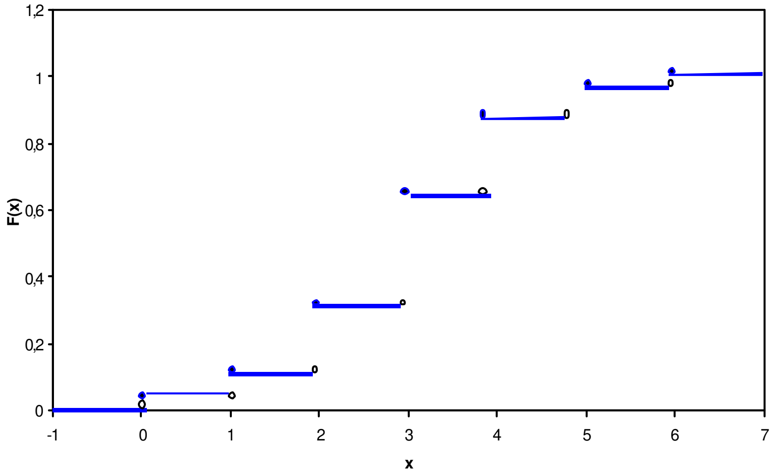
Percebe-se que o gráfico desta distribuição de X é assimétrico, fato que não aconteceu no exercício anterior. Isto se deve ao valor de p, que no caso de distribuição simétrica é igual a 0,5 e agora 0,25.

Problema 28.

O gráfico da distribuição de X, p(x) é:



O gráfico da f.d.a de X, F(X), é:



Problema 29.

O florista pode ter em seu estoque 1, 2 ou 3 flores. Seja L o lucro obtido. Para cada hipótese da quantidade de flores no estoque, tem-se:

- Uma flor:

L	-0,50	1,00
P(L= ℓ)	0,1	0,9

$E(L) = (-0{,}50) \times (0{,}1) + (1{,}00) \times (0{,}9) = 0{,}85$

- Duas flores:

L	-1,00	0,50	2,00
p(L= ℓ)	0,1	0,4	0,5

$E(L) = (-1{,}00) \times (0{,}1) + (0{,}50) \times (0{,}4) + (2{,}00) \times (0{,}5) = 1{,}10$

- Três flores:

L	-1,50	0,00	1,50	3,00
p(L=ℓ)	0,1	0,4	0,3	0,2

$E(L) = (-1{,}50) \times (0{,}1) + (0{,}00) \times (0{,}4) + (1{,}50) \times (0{,}3) + (3{,}00) \times (0{,}2) = 0{,}90$

Portanto, o estoque que maximiza o lucro médio é de 2 flores.

Problema 30.

Sejam X: número de tentativas até a obtenção do primeiro sucesso e C: custo da operação. A distribuição de X, semelhante a estudada no Problema 3 é:

$P(X = x) = p \times (1 - p)^{x-1} = (0{,}9) \times (0{,}1)^{x-1}$, logo

$$E(C) = 10 \times \sum_{k=1}^{5} P(X = k) + 5 \times \sum_{k=6}^{\infty} P(X = k) =$$

$$= 10 \times \sum_{k=1}^{5} (0{,}9) \times (0{,}1)^{k-1} + 5 \times \sum_{k=6}^{\infty} (0{,}9) \times (0{,}1)^{k-1} \approx 9{,}99$$

Problema 31.

Seja X o número de artigos defeituosos numa amostra aleatória de tamanho 4. Tem-se que X ~ b(4; 0,10). Usando a Tabela I ou pacotescomputacionais, vem:

(a) $P(X=0)=\binom{4}{0}\times(0{,}10)^0\times(0{,}90)^4=0{,}6561$

(b) $P(X=1)=\binom{4}{1}\times(0{,}10)^1\times(0{,}90)^3=0{,}2916$

(c) $P(X=2)=\binom{4}{2}\times(0{,}10)^2\times(0{,}90)^2=0{,}0486$

(d) $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}9963$

Problema 32.
Seja X o número de peças defeituosas na caixa. Tem-se que X ~ b(18; 0,05). Para satisfazer à garantia, as caixas têm de apresentar $X\le 2$.
$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}3972+0{,}3763+0{,}1683=0{,}9418$

Problema 33.
Seja X o número de funcionários que aumentam sua produtividade com o curso de treinamento. Tem-se que X ~ b(10; 0,80)

(a) $P(X=7)=\binom{10}{7}\times(0{,}80)^7\times(0{,}20)^3=0{,}2013$

(b) $P(X\le 8)=\sum_{k=0}^{8}P(X=k)=0{,}6242$

(c) $P(X\le 7)=\sum_{k=0}^{7}P(X=k)=P(X\le 8)-P(X=8)=0{,}6242-0{,}3020=0{,}3222$

Problema 34.
Seja X o número de petroleiros que chegam à refinaria em um dia. Do enunciado, X ~ Poisson(2).

(a) $P(X>3)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=1-(0{,}6767)=0{,}3233$

(b) Deseja-se saber o valor x_0 tal que $P(X>x_0)\le 0{,}95$. Tem –se que P(X > 4) = =0,947 e P(X > 5) = 0,983. Desse modo, as instalações devem suportar 5 navios por dia.

(c) Numa distribuição de Poisson, a média é dada pelo parâmetro $\lambda=2$.

Problema 35.
De acordo com o modelo proposto, o número esperado de famílias com x filhos, dentre as 10690, é dado por 10690 x P (X = x). A tabela a seguir fornece os resultados obtidos. Foi feito um arredondamento para que se obtivessem números inteiros.

X	P(X = x)*	Nº esperado de famílias	|observado-esperado|
0	0,00024	3	3
1	0,00293	31	2
2	0,01611	172	12
3	0,05371	574	53
4	0,12085	1292	94
5	0,19336	2067	146
6	0,22559	2412	52
7	0,19336	2067	34
8	0,12085	1292	106
9	0,05371	574	225
10	0,01611	172	126
11	0,00293	31	29
12	0,00024	3	4

- Calculado com a planilha do EXCEL (do Capítulo 4)

Se for analisada a medida $\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 251{,}37$, haverá indicação de que o modelo binomial não é adequado para explicar o fenômeno.

Problema 36.
Sendo X o número de acidentes,

(a) $\bar{x} = 0 \times 200/480 + ... + 8 \times 4/480 = 1{,}18$

(b) A tabela a seguir traz o número esperado de horas com 0, 1, 2, ... acidentes, obtido sob o modelo de Poisson, calculados por 480 x P(X = x) e $P(X = x) = \frac{e^{-1{,}18} \times 1{,}18^x}{x!}$

X	P(X = x)	Número esperado	|observado– esperado|
0	0,30728	147,49	53
1	0,36259	174,04	22
2	0,21393	102,69	43
3	0,08414	40,39	10
4	0,02482	11,91	1
5	0,00586	2,81	6
6	0,00115	0,55	6
7	0,00019	0,09	5
8	0,00003	0,01	4

(c) Se for analisada a medida $\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 70{,}02$, haverá indicação de que a distribuição não se aproxima de uma Poisson.

Problema 37.
É preciso saber qual o preço médio pago pela caixa de acordo com a proposta feita pelo comprador. Se X for o número de parafusos defeituosos numa amostra de 20 parafusos, tem-se que X~b (20; 0,10). Assim,

$$P(X=0)=\binom{20}{0}\times(0,10)^0\times(0,90)^{20}=0,1216$$

$$P(X=1)=\binom{20}{1}\times(0,10)^1\times(0,90)^{19}=0,2702$$

$$P(X=2)=\binom{20}{2}\times(0,10)^2\times(0,90)^{18}=0,2852$$

$$P(X\geq 3)=\sum_{k=3}^{20}\binom{20}{k}\times(0,10)^k\times(0,90)^{20-k}=0,3230$$

A distribuição de C: preço da proposta é:

C	20,00	10,00	8,00
P(C=c)	0,1216	0,5554	0,3230

$$\overline{C}=20,00\times(0,1216)+10,00\times(0,5554)+8,00\times(0,3230)=R\$10,57$$

Como se vê, de acordo com a proposta feita, o preço médio pago por uma caixa é R$ 10,57. Desse modo, mais vantajoso para o fabricante é vender suas caixas por R$13,50.

Problema 38.

Supondo que X ~ Poisson (2,2),tem-se:

(a) $P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0,64$

(b) Seguindo raciocínio feito nos exercícios anteriores, obtêm-se as seguintes freqüências esperadas:

X	Freqüência esperada
0	12
1	26
2	29

(c) A observação dos resultados anteriores, indica que as plantas não se distribuem de acordo com a distribuição de Poisson com parâmetro 2,2.

(d) Dependência , pois a reprodução na vizinhança é mais provável do que longe.

Problema 39.

Sejam X o preço de venda da caixa de válvulas e Y o número de válvulas defeituosas em cada caixa. Tem-se que Y ~ b(10; 0,20).

$$P(Y=0)=\binom{10}{0}\times(0,20)^0\times(0,80)^{10}=0,1074$$

$$P(Y=1)=\binom{10}{1}\times(0,20)^1\times(0,80)^{9}=0,2684$$

$$P(Y=2)=\binom{10}{2}\times(0,20)^2\times(0,80)^{8}=0,3020$$

$$P(Y=3)=\binom{10}{3}\times(0,20)^3\times(0,80)^{7}=0,2013$$

$$P(Y > 3) = \sum_{k=4}^{10} \binom{10}{k} \times (0{,}20)^k \times (0{,}80)^{10-k} = 0{,}1209$$

$$E(X) = 10{,}00 \times (0{,}1074) + 8{,}00 \times (0{,}2684) + 6{,}00 \times (0{,}5033) + 2{,}00 \times (0{,}1209) = R\$6{,}48$$

Problema 40.

Seja X_i o número de peças defeituosas na amostra colhida pelo comprador i, i = A, B.

- Comprador A: A probabilidade de se classificar uma partida como da categoria II é :

  $$P(X_A \geq 1) = 1 - P(X_A = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times (0{,}20)^0 \times (0{,}80)^5 = 0{,}6723$$

  Desse modo, o lucro médio oferecido pelo comprador A é:

  $1{,}20 \times (0{,}3277) + 0{,}80 \times (0{,}6723) = R\$0{,}93$

- Comprador B: A probabilidade de se classificar uma partida como da categoria II é :

  $$P(X_B \geq 2) = 1 - P(X_B = 0) - P(X_B = 1) - P(X_B = 2) = 1 - 0{,}1074 - 0{,}2684 - 0{,}3020 = 0{,}3222$$

  Desse modo, o lucro médio oferecido pelo comprador B é:

  $1{,}20 \times (0{,}6778) + 0{,}80 \times (0{,}3222) = R\$1{,}07$

  Logo, o comprador B oferece maior lucro.

Problema 41.

- n=1

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = \binom{1}{1} \times p \times (1-p)^0 = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

- n=2

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) = \binom{2}{1} \times p \times (1-p) + \binom{2}{2} \times p^2 \times (1-p)^0$$

$$= 2p(1-p) + 2p^2 = 2p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2p^2 + 2p - 4p^2 = 2p(1-p)$$

A prova agora será por indução:

Suponha válido para n-1, isto é:

$$E(X \mid n-1) = \sum_{x=1}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x-1} = (n-1)p$$

e vamos provar que $E(X \mid n) = np$.

Mas pelo fato de que $p + q = 1$, obtém-se que:

$$(p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x-1} = 1$$

Multiplicando a primeira expressão por $p + q$, a segunda por p, e somando-se os resultados obtém-se:

$$np = E(X \mid n-1) + p = (p+q) \times E(X \mid n-1) + (p+q)^{n-1} \times p$$

Basta provar que o último termo é $E(X \mid n)$:

$$q \times E(X \mid n-1) = \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x}$$

$$p \times E(X \mid n-1) = \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1}$$

$$p \times (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1}$$

Portanto,

$$p \times E(X \mid n-1) + p \times (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1} [x+1]$$

Então:

$$q \times E(X \mid n-1) + p \times E(X \mid n+1) + p \times (p+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x} +$$

$$+ \sum_{x=0}^{n-1} (x+1) \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1} = A$$

Separando o primeiro termo da primeira somatória e o último do segundo, tem-se:

$$A = 0 \times q^n + \sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n-2} (x+1) \binom{n-1}{x} p^{x+1} q^{n-x-1} + n \times p^n$$

O coeficiente de $p^k q^{n-k}$, para k=1, 2, ..., n-1, será a soma do coeficiente da primeira somatória quando x=k e o da segunda somatória quando x+1=k, ou seja, x=k-1, logo é igual a:

$$k \times \binom{n-1}{k} + k \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] = k \times \left[\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \right] =$$

$$= k \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} [n-k+k] = k \times \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \times \binom{n}{k}$$

Substituindo em A, vem:

$$A = 0 \times q^n + \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + n \times p^n = \sum_{k=0}^{n} k p^k q^{n-k} = E(X \mid n)$$

Como queríamos provar.

Problema 42.

(a) $P(X \le 2) = (0{,}135) + (0{,}285) + (0{,}285) = 0{,}705$

(b) $P(X \le 2) = (0{,}014) + (0{,}068) + (0{,}154) = 0{,}236$

(c) $P(X \le 2) = (0{,}377) + (0{,}377) + (0{,}179) = 0{,}933$

Problema 43.

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\times\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\times\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\times n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)\times\left(\frac{1}{n}\right)^k\times\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\times\left[1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\times\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\times\lim_{n\to\infty}\left[1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Como $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\to 1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\to 1$ e $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\to e^{-\lambda}$

Então:

$$\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}\to\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^k}{k!} \text{ quando } n\to\infty$$

Problema 44.

Usando a propriedade da soma de infinitos termos de uma P.G. de razão menor que 1.

(a) $P(X\ par) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$

(b) $P(X<3) = \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2^k} = \frac{7}{8}$

(c) $P(X>10) = \sum_{k=11}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1/2^{11}}{1-1/2} = \frac{1}{2^{10}}$

Problema 45.

$$E(aX+b) = \sum(aX+b)\,p(x) = \sum axp(x) + \sum bp(x) = a\sum xp(x) + b\sum p(x) = aE(X)+b$$

$$Var(aX+b) = E\left[(aX+b)^2\right] - E[(aX+b)]^2 = a^2\left(E(X^2)-[E(X)]^2\right)+(b^2-b^2)+$$
$$+2bE(X)-2bE(X) = a^2Var(X)$$

$$Var(X) = E\left[X^2\right]-E[X]^2 = \sum x^2p(x)-\sum xp(x)\sum xp(x) = \sum x^2p(x)-\left[\sum xp(x)\right]^2$$

Problema 46.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}=(j=k-1)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{j+1}}{j!}=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}j\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}+\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}=\lambda^2+\lambda$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

Problema 47.

Para justificar a expressão, considere-se que a probabilidade de se extrair uma amostra com k elementos marcados é dada pelo quociente entre o número de amostras em que existem k elementos marcados e o número total de amostras de tamanho n, obtidas, sem reposição, de uma população de tamanho N.

O número total de amostras de tamanho n, obtidas, sem reposição, de uma população de tamanho N é dado por $\binom{N}{n}$.

Para o numerador da expressão a ser provada, deve-se raciocinar da seguinte maneira: é necessário obter k elementos dentre os r que possuem o tributo e n-k dentre os N-r elementos restantes. Portanto, justifica-se o valor $\binom{r}{k}$x$\binom{N-r}{n-k}$e a probabilidade em questão é dada por:

$$p_k=\frac{\binom{r}{k}\times\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Problema 48.

Cada resposta é um ensaio de Bernoulli com probabilidade de sucesso 0,50. Desse modo, o número de respostas corretas, X, tem distribuição binomial com n=50 e p=0,50. Acertar 80% das questões significa X = 40. Portanto:

$$P(X=40)=\binom{50}{40}\times(0{,}50)^{40}\times(0{,}50)^{10}=9\times10^{-6}$$

Problema 49.

No caso de alternativas por questão, a variável aleatória X segue distribuição binomial com n=50 e p = 0,20. Desse modo,

$$P(X=40)=\binom{50}{40}\times(0{,}20)^{40}\times(0{,}80)^{10}=1{,}21\times10^{-19}$$

Problema 50.

$$P(X=2)=12\times P(X=3)\Rightarrow\binom{3}{2}p^2(1-p)=12\times\binom{3}{3}p^3\Rightarrow 3p^2(1-p)=12p^3\Rightarrow p=0{,}20$$ **Proble**

ma 51.

Seja X o número de componentes que funcionam.Tem-se que X ~b (10; p).

(a) $P(funcionar) = P(X = 10) = p^{10}$

(b) $P(não\ funcionar) = P(X < 10) = 1 - p^{10}$

(c) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times p^2 \times (1-p)^8 = 45 \times p^2 \times (1-p)^8$

(d) $P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \times p^k \times (1-p)^{10-k}$

Problema 52.

$$b(k+1; n, p) = \binom{n}{k+1} \times p^{k+1} \times (1-p)^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \times p^{k+1} \times (1-p)^{n-k-1}$$

$$= \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!k!} \times p^k \times \frac{p}{1-p} \times (1-p)^{n-k} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} b(k; n, p)$$

Problema 53.

Para a variável Z, a mediana é qualquer valor pertencente a (1, 2), de acordo com a definição. Nestes casos costuma-se indicar o ponto médio da classe que é 1,5.

Problema 54.

$q(0{,}25) =$ qualquer valor entre (0, 1)

$q(0{,}60) = 2$,porque $P(X \leq q(0{,}60)) = P(X \leq 2) = 0{,}75 \geq 0{,}60$ e $P(X \geq 2) = 0{,}50 \geq 0{,}40$

$q(0{,}80) = 3$, pois $P(X \leq 3) = 1{,}00 > 0{,}80$ e $P(X \geq 3) = 0{,}25 > 0{,}20$

Problema 55.

(e) $p \times \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1$

(f) $E(X) = p \times \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1} = p \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^j$, onde 1- p =q.

Mas, $\frac{d}{dq} \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{d}{dq} \frac{q}{1-q}$, pois a série $\sum_{j=1}^{\infty} q^j$ é convergente

Logo,

$E(X) = p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$

Mesmo raciocínio para a Var(X).

(g) $P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{\sum_{j=s+t+1}^{\infty} (1-p)^j \times p}{\sum_{j=s+1}^{\infty} (1-p)^j \times p} = \frac{(1-p)^{s+t+1}}{(1-p)^{s+1}} = (1-p)^t = P(X \geq t)$

Problema 56.
Considere:
C: custo do exp.
X: nº de provas para sucesso.
$C = 1000X + 300(X-1)$
Portanto,.
$$E(C) = 1300E(X) - 300 = 1300 \times \frac{1}{0,2} - 300 = 6200$$

Problema 57.
$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P\{X=k, Y=n-k\}$, pois o evento $\{X+Y=n\}$ pode ser escrito como a união de eventos disjuntos $\{X=k, Y=n-k\}$, n=0,.....
$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P\{X=k, Y=n-k\} = \sum_{k=0}^{n} P\{X=k\} \times P\{Y=n-k\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \times \binom{m}{n-k} \times p^{n-k} \times (1-p)^{m-n+k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{m}{n-k} \times p^n \times (1-p)^m = \binom{m+n}{m} \times p^n \times (1-p)^m \text{, pois } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{m}{n-k} = \binom{m+n}{m}$$