Capítulo 8

Problema 01.

(a) Ω={C1, C2, C3, C4, C5, C6, R1, R2, R3, R4, R5, R6}
Onde: C=cara e R=coroa

(b)

	y						
x	1	2	3	4	5	6	P(X=x)
0	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,50
1	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,50
P(Y=y)	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	1,00

(c) Sim, pois $P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j), \forall i, j$

(d) 1) 0,5 2) 1,0 3) 0,5 4) 0 5) 2/3 6) 1/2

Problema 02.

(a)

x	1	2	3
P(x)	0,3	0,2	0,5

y	0	1	2
P(y)	0,30	0,50	0,20

(b)

E(X) = 2,2 E(Y) = 0,9

$E(X^2)$ =5,6 $E(Y^2)$ =1,3

Var(X) = 0,76 Var(Y) = 0,49

(c) Não, pois $P(X=1,Y=0)=0,1 \neq P(X=1)P(Y=0)=0,09$

(d) $P(X=1/Y=0)=\frac{1}{3}=0,33$ $P(Y=2/X=3)=\frac{1}{5}=0,2$

(e) $P(X \leq 2)=0,5$ $P(X=2,Y \leq 1)=\frac{1}{8}=0,125$

Problema 03.

(a) Preenchendo os brancos por incógnitas temos:

	x			
y	-1	0	1	P(Y=y)
-1	1/12	y	u	d
0	x	z	t	1/3
1	1/4	w	1/4	e
P(X=x)	a	b	c	1

Da coluna 1, vem $a=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+x=\frac{1}{3}+x$. Da independência entre X e Y temos que

$$a \cdot \frac{1}{3}=x \Rightarrow a=3x$$

substituindo na expressão acima vem $3x = \frac{1}{3} + x$ ou $x = \frac{1}{6}$ e $a = \frac{1}{2}$

Ainda da independência vem que $a \cdot d = \frac{1}{12}$ ou $d = \frac{1}{6}$

Por diferenças entre marginais e caselas, e da independência encontramos:

$$e = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$w = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$b \cdot e = w = 0 \cdot u \text{ e } b \cdot \frac{1}{2} = 0 \text{ , logo } b = 0$$

imediatamente $z = y = 0$

$$c = 1 - a - b = \frac{1}{2}$$

$$d = c \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Substituindo temos a resposta:

	x			
y	-1	0	1	P(Y=y)
-1	1/12	0	1/12	1/6
0	1/6	0	1/6	1/3
1	1/4	0	1/4	1/2
P(X=x)	1/2	0	1/2	1

(b) $E(X) = (-1)(1/2) + (0)(0) + (1)(1/2) = 0$

$E(Y) = (-1)(1/6) + (0)(1/3) + (1)(1/2) = 1/3$

$E(X^2) = (-1)^2(1/2) + (0)^2(0) + (1)^2(1/2) = 1$

$E(Y^2) = (-1)^2(1/6) + (0)^2(1/3) + (1)^2(1/2) = 2/3$

$Var(X) = E(X^2) - E(X) = 1 - 0 = 1$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

(c) Como $P(X = x / Y = 0) = \frac{P(X = x, Y = 0)}{P(Y = 0)}$ vem:

X	-1	0	1	Total
P(X=x/Y=0)	1/2	0	1/2	1

E semelhante:

x	-1	0	1	Total
P(Y=y/X=1)	1/6	1/3	1/2	1

Problema 04.

De $P(X + Y = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$ vem

x+y	1	2	3	4	5
p	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1

xy	0	1	2	3	4	6
p	0,3	0,2	0	0,3	0,1	0,1

$$E(X+Y) = (1)(0,1) + (2)(0,3) + \ldots + (5)(0,1) = 3,1$$

$$E[(X+Y)^2] = (1)^2(0,1) + (2)^2(0,3) + \ldots + (5)^2(0,1) = 0,1 + 1,2 + 0,9 + 6,4 + 2,5 = 11,1$$

Portanto: $Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y) = 11,1 - (3,1)^2 = 1,49$

De modo análogo:

$$E[(XY)^2] = (0)^2(0,3) + (1)^2(0,2) + \ldots + (6)^2(0,1) = 0 + 0,2 + 0+2,7+1,6+3,6=8,1$$

$$E(XY) = 0 + 0,2 = 0 + 0,9 + 0,4 + 0,6 = 2,1$$

$$Var(XY) = E[(XY)^2] - E^2(XY) = 8,1 - (2,1)^2 = 3,69$$

Problema 05.

(a) Do teorema 8.1 e 8.2 vem

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0 + 1/3 = 1/3$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 1 + 5/9 = 14/9$$

(b) Do teorema acima e propriedades da Esperança e Variância da pág. 208

$$E(Z) = E(aX + bY) = E(aX) + E(bY) = aE(X) + bE(Y) = a \cdot (0) + b \cdot 1/3 = 10 \Rightarrow b = 30$$

$$Var(Z) = Var(aX) + Var(bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) = a^2 \cdot (1) + b^2 \cdot (\frac{5}{9}) = 600$$

$$a^2 + (30)^2 + (\frac{5}{9}) = 600 \Rightarrow a^2 = 600 - 500 \therefore a = \pm 10$$

Problema 06.

Construindo o espaço amostral temos:

Ω={11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,42,43,44}

(a) Como cada resultado é equiprovável, obtém-se

	x				
y	1	2	3	4	P(Y=y)
1	1/16	1/8	1/8	1/8	7/16
2	0	1/16	1/8	1/8	5/16
3	0	0	1/16	1/8	3/16
4	0	0	0	1/16	1/16
P(X=x)	1/16	3/16	5/16	7/16	1

(b)

z	2	3	4	5	6	7	8	Total
p(z)	1/16	1/8	3/16	1/4	3/16	1/8	1/16	1

(c)

$$E(X) = \frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{15}{16} + \frac{28}{16} = \frac{50}{16} = 3,125$$

$$E(X^2) = \frac{1}{16} + \frac{12}{16} + \frac{45}{16} + \frac{112}{16} = \frac{170}{16} = 10,625$$

$$Var(X) = 10,625 - (2,125)^2 = 0,8594$$

$$E(Y)=\frac{7}{16}+\frac{10}{16}+\frac{9}{16}+\frac{4}{16}=\frac{30}{16}=1{,}875$$
$$E(Y^2)=\frac{7}{16}+\frac{20}{16}+\frac{27}{16}+\frac{16}{16}=\frac{70}{16}=4{,}375$$
$$Var(Y)=4{,}375-(1{,}875)^2=0{,}8594$$
$$E(Z)=\frac{25}{8}+\frac{15}{8}=5$$
$$E(Z^2)=\frac{4\cdot 1}{16}+\frac{9\cdot 2}{16}+\frac{16\cdot 3}{16}+\frac{25\cdot 4}{16}+\frac{36\cdot 3}{16}+\frac{49\cdot 2}{16}+\frac{64\cdot 1}{16}=\frac{440}{16}=\frac{55}{2}$$
$$Var(Z)=\frac{55}{2}+25=\frac{5}{2}=2{,}5$$

Problema 07.

(a)

	x_1				
x_2	1	3	5	7	
1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
	1/5	1/5	2/5	1/5	1

(b) Ver acima.São independentes, pois os produtos das marginais são iguais as caselas.

(c) $E(X_1)=E(X_2)=4{,}2$

$Var(X_1)+Var(X_2)=4{,}16$

$$E(\overline{X})=E(\frac{X_1}{2})+E(\frac{X_2}{2})=\frac{1}{2}[E(X_1)+E(X_2)]=4{,}2$$

Devido a independência $Var(\overline{X})=\frac{1}{4}[Var(X_1)+Var(X_2)]=\frac{4{,}16}{2}=2{,}08$

(d) (a') O novo espaço amostral seria:
Ω={13, 15, 1$\underline{5}$, 17, 31, 35, 3$\underline{5}$, 37, 51, 53, 5$\underline{5}$, 57, $\underline{5}$1, $\underline{5}$3, $\underline{5}$5, $\underline{5}$7, 71, 73, 75, 7$\underline{5}$}
Logo, é possível construir a tabela abaixo:

	x1				
x2	1	3	5	7	
1	0	1/20	1/10	1/20	1/5
3	1/20	0	1/10	1/20	1/5
5	1/10	1/10	1/10	1/10	2/5
7	1/20	1/20	1/10	0	1/5
	1/5	1/5	2/5	1/5	1

(b') Não seriam independentes.

(c') $E(X_1)=E(X_2)=(1)(1/5)+(3)(1/5)+(5)(2/50)+(7)(1/5)=4{,}2$

$$E(\overline{X})=E(\frac{X_1+X_2}{2})=\frac{1}{2}(2\cdot 4{,}2)=4{,}2$$

Exatamente o mesmo resultado obtido em (c). Como $X_1 e X_2$ não são independentes, da distribuição conjunta encontramos:

$\overline{x}$	2	3	4	5	6
P($\overline{x}$)	1/10	1/5	3/10	1/5	1/5

Daqui calculamos $E(\overline{X}^2) = 19{,}2 \Rightarrow Var(\overline{X}) = 19{,}2 - (4{,}2)^2 = 1{,}56$

Problema 08.

n (Ω)= $\dfrac{5!}{3!2!}$ =10

w	ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BDE	CDE
P	-1,0	-1,0	0,1	-1,0	0,1	0,1	0,0	1,1	1,1	1,1

(a)

	x			
y	-1	0	1	
0	0,3	0,1	0,0	0,4
1	0,0	0,3	0,3	0,6
	0,3	0,4	0,3	1,0

(b) $E(X) = 0{,}0$

$E(X^2) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6 \Rightarrow Var(X) = 0{,}6$

(c) X e Y não são independentes, logo:

x+y	-1	0	1	2	total
P	0,3	0,1	0,3	0,3	1

$E(X+Y) = -0{,}3 + 0{,}3 + 2 \cdot 03 = 0{,}6$

$E[(X+Y)^2] = 0{,}3 + 0{,}3 + 1 \cdot 2 = 1{,}8$

$Var(X+Y) = 1{,}8 + 0{,}36 = 1{,}44$

Problema 09.

(a)

x+y	2	3	4	5	6
p	5/27	5/27	8/27	7/27	2/27

$$E(X+Y) = \frac{1}{27}[10 + 15 + 32 + 35 + 12] = \frac{104}{27} = 3{,}85$$

$$E[(X+Y)^2] = \frac{1}{27}[20 + 45 + 128 + 175 + 72] = \frac{534}{27} = 19{,}78$$

$$Var(X+Y) = \frac{534}{27} + (\frac{104}{27})^2 = \frac{14418 - 10816}{729} = \frac{3602}{729} = 4{,}94$$

(b)

xy	1	2	3	4	6	9
p	5/27	5/27	5/27	1/9	2/27	2/27

$$E(XY) = \frac{1}{27}[5 + 10 + 15 + 12 + 42 + 18] = \frac{102}{27} = 3{,}78$$

$$E[(XY)^2] = \frac{1}{27}[5 + 20 + 45 + 48 + 252 + 162] = \frac{532}{27} = 19{,}7$$

$$Var(XY) = 19{,}7 - (3{,}78)^2 = 5{,}43$$

Problema 10.

(a)

x+y	2	3	4	5	6
p	0,1	0,2	0,3	0,4	0

$$E(X+Y) = 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}2 + 2{,}0 = 4{,}0$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(b)

xy	1	2	3	4	6	9
p	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	0

$$E(XY) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}8 + 2{,}4 = 4{,}0$$

(c) $E(XY) = 4 \qquad E(X) = 2 \qquad E(Y) = 2$

$$p(3{,}3) = 0{,}0 \neq 0{,}3 \cdot 0{,}2$$

Problema 11.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2{,}1 - (2{,}2)(0{,}9) = 0{,}12$$
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{DP(X)\cdot DP(Y)} \frac{0{,}12}{\sqrt{0{,}76 \cdot 0{,}49}} = 1{,}1967 \cong 0{,}20$$

Problema 12.

	x				
y	0	1	2	3	
1	1/8	0	0	1/8	1/4
2	0	1/4	1/4	0	1/2
3	0	1/8	1/8	0	1/4
	1/8	3/8	3/8	1/8	

$E(X) = 1{,}5 \qquad Var(X) = \frac{3}{4}$

$E(Y) = 2 \qquad Var(Y) = \frac{1}{2}$

(a) $P(X+Y=1) = P(X=0, Y=1) = \frac{1}{8}$

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2)P(X=1, Y=1) = 0 + 0 = 0$$
$$P(X+Y=3) = P(X=0, Y=3)P(X=1, Y=2)P(X=2, Y=1) = 0 + \frac{2}{8} + 0 = \frac{2}{8}$$

E assim por diante obtem-se:

x+y	1	3	4	5
p	1/8	1/4	1/2	1/8

|x-y|	0	1	2
p	2/8	1/2	2/8

(b)

xy	0	2	3	4	6
p	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

$$E(XY) = (0)(\frac{1}{8}) + (2)(\frac{2}{8}) + (3)(\frac{2}{8}) + (4)(\frac{2}{8}) + (6)(\frac{1}{8}) = 3$$

x/y	0	1/3	1/2	2/3	1	3
p	1/8	1/8	1/4	1/8	1/4	1/8

$$E(X/Y) = (0)(\frac{1}{8}) + (\frac{1}{3})(\frac{2}{8}) + (\frac{1}{2})(\frac{2}{8}) + (\frac{2}{3})(\frac{1}{8}) + (1)(\frac{2}{8}) + (3)(\frac{1}{8}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1{,}5 + 2{,}0 = 3{,}5$$

(c) Não são independentes, pois $P(X=0, Y=1) = \frac{1}{8} \neq P(X=0)P(Y=1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{32}$

(d) $E(XY) = 3$ é igual a $E(X)E(Y) = (1{,}5)(2) = 3$. Conclui-se que podem existir casos de variáveis não independentes onde a propriedade é válida.

(e) $E(X/Y) = 0{,}75$ que por meio acaso, é igual a $E(X)/E(Y) = {}^{1{,}5}\!/_{2} = 0{,}75$

(f) Da alternativa (a) temos:

$$E[(X+Y)^2] = (1)^2(\frac{1}{8}) + (3)^2(\frac{2}{8}) + (4)^2(\frac{4}{8}) + (5)^2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8} + \frac{18}{8} + \frac{64}{8} + \frac{25}{8} = \frac{108}{8} = 13{,}5$$

$Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y) = 13{,}5 - (3{,}5)^2 = 1{,}25$ que também, por meio acaso, vale $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Problema 13.

Primeiro X e Y, não são independentes pois

$$P(X=-1, Y=-1) = 0 \neq P(X=-1)P(Y=-1) = (0 + \frac{1}{4} + 0)(0 + \frac{1}{4} + 0) = \frac{1}{16}$$
$$E(X) = E(Y) = (-1)(0) + (0)(1) + (1)(0) = 0$$
$$Logo, Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$$

o que responde ao exercício. Variáveis com esta característica são ditas não correlacionadas.

Problema 14.

(a)

	x						
y	1	2	3	4	5	6	
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/36	1/18	0	0	0	0	1/12
3	1/36	1/36	1/12	0	0	0	5/36
4	1/36	1/36	1/36	1/9	0	0	7/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0	1/4
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6	11/36
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

(b) Não são, pois $P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)P(y=1)$

(c) $E(X)=\frac{7}{2}$ $E(X^2)=\frac{1}{6}[1+4+9+16+25+36]=\frac{1}{6}[91]=\frac{91}{6}$

$$Var(X)=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}=2{,}92$$

$$E(Y)=\frac{161}{36}=4{,}47$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{36}[1+12+45+112+225+396]=\frac{1}{36}[791]=\frac{791}{6}$$

$$Var(Y)=\frac{791}{36}-(\frac{161}{36})^2=\frac{28476-5921}{1296}=\frac{2555}{1296}=1{,}97$$

(d)

$$E(XY)=\frac{1}{36}[1+2+3+4+5+6+4+6+8+10+12+9+12+15+18+16+20+24+25+30+36]=$$

$$\frac{1}{36}[21+40+54+60+55+36]=\frac{616}{36}=\frac{154}{9}=17{,}11$$

$$Cov(X,Y)=\frac{616}{36}+\frac{7}{2}\cdot\frac{161}{36}=\frac{105}{72}=\frac{35}{24}=1{,}46$$

(e) $E(X+Y)=\frac{7}{2}+\frac{161}{36}=\frac{287}{36}=7{,}97$

(f)

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{35}{12}+\frac{2555}{1296}+2\frac{35}{24}=\frac{3780+2555+3780}{1296}$$

$$=\frac{10115}{1296}=7{,}80$$

Problema 15.

w:	kkk	kkc	kck	ckk	kcc	ckc	Cck	ccc
x:	2	2	1	1	1	1	0	0
y:	1	0	1	1	0	0	1	0
s:	3	2	2	2	1	1	1	0
p:	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

(a)

	y		
x	0	1	P(X=x)
0	1/8	1/8	1/4
1	1/4	1/4	1/2
2	1/8	1/8	1/4
P(Y=y)	1/2	1/2	1

Sim, são independentes, pois cada casela é igual ao produto das respectivas marginais. Da proposição 8.1 $Cov(X,Y)=0$. Verificando diretamente:

xy	0	1	2
p	5/8	1/4	1/8

$$E(XY) = (0)(\frac{5}{8}) + (1)(\frac{2}{8}) + (2)(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$E(X) = 1 \qquad E(Y) = 0,5$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,5 - (1)(0,5) = 0$$

(b) Já calculamos $E(X) = 1$ e $E(Y) = 0,5 - (1)(0,5) = 0$, acima .

$$E(X^2) = (0)^2(\frac{1}{4}) + (1)^2(\frac{1}{2}) + (2)^2(\frac{1}{4}) = 1,5 \Rightarrow Var(X) = 1,5 - (1)^2 = 0,5$$

$$E(Y^2) = (0)^2(\frac{1}{2}) + (1)^2(\frac{1}{2}) = 0,5 \Rightarrow Var(Y) = 0,5 - (0,5)^2 = 0,25$$

s	0	1	2	3
p	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(S) = \frac{1}{8}[0+3+6+3] = 1,5$$

$$E(S^2) = \frac{1}{8}[(0)^2 + (1)^2 3 + (2)^2 3 + (3)^2 1] = 3$$

$$Var(S) = 3 - (1,5)^2 = 0,75$$

(c) Sim. Como $S = X + Y$ e Y e X são independentes :
$0,75 = Var(S) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 0,5 + 0,25$

Problema 16.

Vamos substituir a cada operário a mesma probabilidade 1/6. Desse modo temos:

$$E(T) = \frac{1}{6}[9 + 17 + 19 + (2)(20) + 23] = 18$$

$$E(T^2) = \frac{1}{6}[9^2 + 17^2 + 19^2 + (2)(20)^2 + 23^2] = \frac{2060}{6} = 343,3$$

$$Var(T) = \frac{2060}{6} - 18^2 = \frac{116}{6} = 19,33$$

$$E(P) = \frac{1}{6}[22 + 29 + 32 + 33 + 34 + 42] = \frac{192}{6} = 32$$

$$E(P) = \frac{1}{6}[22^2 + 29^2 + 32^2 + 33^2 + 34^2 + 42^2] = \frac{6358}{6} = 1059,67$$

$$Var(P) = \frac{6358}{6} - 32^2 = \frac{214}{6} = 35,67$$

$$E(TP) = \frac{1}{6}[(9)(22) + (17)(34) + (20)(29) + (19)(33) + (20)(42) + (23)(32)] = \frac{3559}{6} = 593,17$$

$$Cov(T,P) = \frac{3559}{6} - (18)(32) = \frac{103}{6} = 17,17$$

$$\rho(T,P)=\frac{\frac{103}{6}}{\sqrt{\frac{116}{6}-\frac{214}{6}}}=\frac{103}{\sqrt{24824}}=0{,}65$$

Problema 17.

(a)

xy	-1	0	1
p	1/4	1/2	1/4

$$E(XY)=(-1)(\frac{2}{8})+(0)(\frac{4}{8})+(1)(\frac{2}{8})=0$$

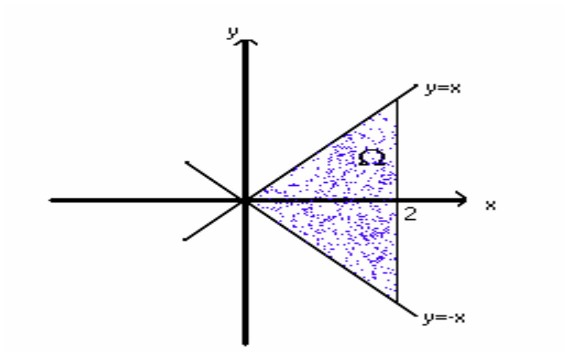
$$E(X)=E(Y)=0\Rightarrow\rho(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

(b) Por exemplo: $P(X=0,Y=0)=0$, que é diferente de

$$P(X=0)P(Y=0)=(\frac{1}{4})(\frac{1}{4})=\frac{1}{16}$$

Problema 18.

(a)



(b) $$\int_{\infty}^{-\infty}\int_{\infty}^{-\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{2}\int_{-x}^{x}\frac{1}{8}x(x-y)dydx=-\frac{1}{8}[\int_{0}^{2}(x^2-xy)dy]dx=$$

$$\frac{1}{8}\int_{0}^{2}[\int_{-x}^{x}x^2dy-\int_{-x}^{x}xydy]dx=\frac{1}{8}\int_{0}^{2}[x^2\int_{-x}^{x}dy-x\int_{-x}^{x}ydy]dx=\frac{1}{8}\int_{0}^{2}[x^2y\Big|_{-x}^{x}-0]dx=\frac{1}{8}\int_{0}^{2}2x^2dx=$$

$$\frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}=\frac{16}{16}=1$$

(c)

$$f_y(y)=\int_{\varpi_x} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^2 \frac{1}{8}x(x-y)dx(I), 0\le y\le 2\\ \int_{-y}^2 x(x-y)dx(II), -2\le y\le 0\\ 0, c.c.\end{cases}$$

$$(I)=\frac{1}{8}\int_y^2 (x^2-xy)dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_y^2-y\frac{x^2}{2}\Big|_y^2\right]=\frac{1}{8}\left[\frac{8-y^3}{3}-(2y-\frac{y^3}{2})\right]=$$

$$=\frac{1}{48}[16-2y^3-12y+3y^3]=\frac{1}{48}(y^3-12y+16)$$

$$(II)=\frac{1}{8}\int_{-y}^2 (x^2+xy)dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_{-y}^2-y\frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^2\right]=\frac{1}{8}\left[\frac{8+y^3}{3}-(2y-\frac{y^3}{2})\right]=$$

$$=\frac{1}{48}[16+2y^2-12y+3y^3]=\frac{1}{48}[5y^3-12y+16]$$

$$f_x(x)=\int_{\varpi_y} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^x \frac{1}{8}x(x-y)dy(III), 0\le x\le 2\\ 0, c.c.\end{cases}$$

$$(III)=\frac{1}{8}\int_{-x}^x (x^2-xy)dy=\frac{1}{8}\left[x^2\int_{-x}^x dy-x\int_{-x}^x ydy\right]=\frac{1}{8}\left[x^2y\Big|_{-x}^x-0\right]=\frac{x^3}{4}$$

$$f_x(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{4}, 0\le x\le 2\\ 0, c.c.\end{cases}$$

Problema 19.

(a) $$f_x(x)=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}[-e^{-y}]\Big|_0^\infty=e^{-x}$$

$$f_y(y)=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dx=e^{-y}$$

$$f_x(x)=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}[-e^{-y}]\Big|_0^\infty=e^{-x}$$

Distribuição exponencial com β=1.

(b)

$$P(0<X<1,1<Y<2)=\int_0^1\int_1^2 e^{-x(x+y)}dxdy=\int_0^1 e^{-x}dx\int_1^2 e^{-y}dy=(-e^{-x}\Big|_0^1)(-e^{-y}\Big|_1^2)=$$

$$=[-e^{-1}+e^{-0}][-e^{-2}+e^{-1}]=(1-\frac{1}{e})(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2})=(\frac{e-1}{e})(\frac{e-1}{e^2})=\frac{(e-1)^2}{e^3}$$

(c) Como os distribuições marginais de X e Y seguem o modelo exponencial com β=1 temos do exercício 7.14 os resultados $E(X)=E(Y)=1$ e $Var(X)=Var(Y)=1$

$$E(XY)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^\infty e^{-x}dx\int_0^\infty e^{-y}dy=(-e^{-x}\Big|_0^\infty)(-e^{-y}\Big|_0^\infty)=1\cdot 1=1$$

$$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

$$\therefore \rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{DP(X)DP(Y)}=\frac{0}{1}=0$$

Problema 20.

(i)

$$f_{x/y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{8}x(x-y)}{\frac{1}{48}(y^3-12y+16)},0\le y\le 2\\ \dfrac{\frac{1}{8}x(x-y)}{\frac{1}{48}(5y^3-12y+16)},-2\le y\le 0\\ 0,c.c.\end{cases}$$

(ii)

$$f_{y/x}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{8}x(x-y)}{\frac{x^3}{4}}=\frac{1}{2}\frac{(x-y)}{x^2},0\le y\le 2\\ 0,c.c.\end{cases}$$

Problema 21.

$$f_{x/y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}}=e^{-x}$$

$$f_{y/x}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}\frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}}=e^{-y}$$

As distribuições marginais seguem a distribuição exponencial com β=1. Como

$f(x,y) = f_y \cdot f_{x/y} = f_x \cdot f_{y/x}$. Concluímos que as variáveis são independentes.

Problema 22.

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^4 \frac{1}{64}(x+y)dy = [\frac{1}{64}(xy + \frac{y^2}{2}]\Big|_0^4 = \frac{1}{64}(4x+2)$$

$$f_{y/x} = (y/x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{\frac{1}{64}(x+y)}{\frac{1}{16}(x+2)} = \frac{x+y}{4(x+2)}$$

Devido a simetria da função *f(x,y)* temos:

$$f_y(y) = \frac{1}{16}(y+2)$$

$$f_{x/y} = (x/y) = \frac{x+y}{4(y+2)}$$

Problema 23.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} 3e^{-(x+3y)}dx = 3e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 3e^{-3y}(-e^{-x}\Big|_0^{\infty}) = 3e^{-y}$$ tem

distribuição exponencial com β=1/3.

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} 3e^{-(x+3y)}dy = 3e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-3y}dy = 3e^{-x}(-\frac{1}{3}e^{-3y}\Big|_0^{\infty}) = e^{-x}$$ tem distribuição

exponencial com β=1.

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{3e^{-(x+3y)}}{e^{-x}} = 3e^{-3y}$$

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{3e^{-(x+3y)}}{3e^{-3y}} = e^{-x}$$

Problema 24.

$E(Y/X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y/X}(y/x)dy = \int_0^{\infty} y \cdot e^{-y}dy = 1$. Conforme o exercício 7.41.

De modo análogo $E(X/Y) = 1$.

Problema 25.

$$E(X/Y) = \int_0^4 \frac{x(x+4)}{4(y+2)}dx = (\frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}y}{4(y+2)}\Big|_0^4) = \frac{\frac{64}{3} + 8y}{4(y+2)} = \frac{16+6y}{y+2} = \frac{6y+16}{y+2}$$

Devido a simetria: $E(Y/X) = \dfrac{6x+16}{x+2}$

Problema 26.

Supõe-se que existe a função conjunta *f(x,y)* e as respectivas marginais e condicionais. Assim, $E(X) = \int x \cdot f_X(x)dx$

$$E(X/Y) = \int x \cdot f(x/y)dx = g(y) \text{ é uma função de y.}$$

$$E[E(X/Y)] = E[g(y)] = \int g(y) \cdot f_Y(y)dy = \int (\int x \cdot f_{X/Y}(x/y)dx) f_Y(y)dy =$$

$$= \int x(\int f_Y(y) \cdot f_{X/Y}(x/y)dy)dx = \int x(\int f(x,y)dy)dx = \int x \cdot f_X(x)dx = E(X)$$

Problema 27.

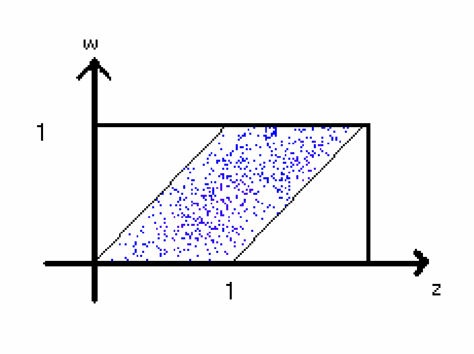
Inicialmente temos que $f(x,y) = (2x)(2y) = 4xy$ .Fazendo $Z=X+Y$ e $W=Z$, obtemos:

$X=W$ e $Y=Z-W$ e $|J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$,logo $g(z,w) = 4(z-w)(-1) = 4w^2 - 4wz.$

Estamos interessados na distribuição marginal de Z, ou seja, $g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z,w)dw.$

Porém,

$0 \leq z - w \leq 1$, ou seja,



$$g_Z(z) = \int_0^z (4w^2 - 4wz)dw + \int_z^1 (4w^2 - 4wz)dw = 4[\frac{w^3}{3} - \frac{w^2}{2}z]\Big|_0^z + 4[\frac{w^3}{3} - \frac{w^2}{2}z]\Big|_z^1 =$$

$$= 4[\frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2}] + 4[\frac{1}{3} - \frac{z}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^3}{2}] = \frac{4}{3} - 2z$$

Problema 28.

Inicialmente temos $f(x,y) = \frac{2}{9}x^2 y$

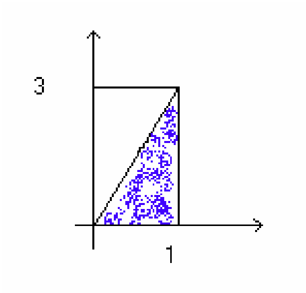
Repetindo o exemplo 8.27, temos $W=XY$ e $Z+X$:

X=Z e $Y = \frac{W}{Z}$

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{w}{z} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{z}$$

$$g(z,w) = \frac{2}{9}z^2 \cdot \frac{w}{z}\frac{1}{z} = \frac{2}{9}w$$

Encontramos agora os intervalos de integração: $0 \le z \le 1; 0 \le \frac{w}{z} \le 3 \Rightarrow 0 \le w \le 3z$, ou:



$$f_W(w) = \int_0^{3z} \frac{2}{9} w dz = \frac{2}{9} w(k) \Big|_0^{3z} = \frac{2}{9} w$$

Problema 29.

$$f(x,y) = 2e^{-(x+2y)}$$
$$Z = \frac{X}{Y}$$
$$X = ZW \qquad |J| = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w$$
$$Y = W \Rightarrow W = Y$$
$$g(z,w) = 2e^{-(zw+2w)} \cdot w = 2we^{-w(z+2)}$$

Façamos a integral indefinida: $g_Z(z) = 2\int we^{-w(z+2)} dw$

Integração por partes (ver Morettin, 1999):

$$u = w \Rightarrow du = 1$$
$$dv = e^{-w(z+2)} \Rightarrow v = \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)}$$

$$u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du = \frac{we^{-w(z+2)}}{-(z+2)} - \int \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)} dw = \frac{we^{-w(z+2)}}{-(z+2)} + \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)^2} = \frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)^2}(wz+2w+1)$$

$$w > 0$$
$$z > 0$$

$$g_Z(z) = 2\left[\frac{e^{-w(z+2)}}{-(z+2)^2}(wz+2w+1)\right]\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{(z+2)^2}$$

Problema 30.

	x			
y	-1	0	1	P(Y)
-2	1/18	1/18	1/18	1/6
0	2/9	2/9	2/9	2/3
2	1/18	1/18	1/18	1/6
P(X)	1/3	1/3	1/3	1

z	-3	-2	-1	0	1	2	3
P(z)	1/18	1/18	5/18	2/9	5/18	1/18	1/18

$$E(Z)=\frac{-3-2-5+0+5+2+3}{18}=0$$

$$Var(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)=E(Z^2)=\frac{9+4+5+0+5+4+9}{18}=2$$

Problema 31.

(a)

	x			
y	5	10	15	total
5	0,1	0,2	0,1	0,4
10	0,2	0,3	0,1	0,6
total	0,3	0,5	0,2	1

(b) Veja a tabela acima.

(c) Não, pois $P[X=5,Y=5]\neq P[X=5]\cdot P[Y=5]$

(d)

$$E(X)=1{,}5+5{,}0+3{,}0=9{,}5$$

$$E(X^2)=7{,}5+50+45=102{,}5$$

$$Var(X)=12{,}25$$

$$E(Y)=2{,}0+6{,}0=8{,}0$$

$$E(Y^2)=10{,}0+60{,}0=70{,}0$$

$$Var(X)=6{,}00$$

$$E(XY)=2{,}5+10{,}0+7{,}5+10{,}0+30{,}0+15{,}0=75$$

$$Cov(X,Y)=75{,}0+60{,}0=-1$$

(e) $Z+X+Y$

z	P[z]
10	0,1
15	0,4
20	0,4
25	0,1

$$E(Z)=1{,}0+6{,}0+8{,}0+2{,}5=17{,}5$$

$$E(Z^2)=10+90+160+62{,}5=322{,}5$$

$$Var(Z)=322{,}5-306{,}25=16{,}25$$

(f) 50% dos casais.

Problema 32.

x+y:	4	4	2	1	5
x-y:	2	0	2	1	1
x-y-1:	1	-1	1	0	0

x	1	2	3
p	0,2	0,4	0,2

y	0	1	2
p	0,4	0,2	0,4

x+y	1	2	4	5
p	0,2	0,4	0,4	0,2

x-y	0	1	2
p	0,2	0,4	0,4

x-y-1	-1	0	1
p	0,2	0,4	0,4

Problema 33.

Podem ser formadas 10 turmas distintas abaixo:

334 335 335 345 345 345 345 355 355 455

Supondo que sejam sorteados de uma vez, o espaço amostral:

(a)

	y		
x	4	5	Px
3	1/10	4/5	9/10
4	0	1/10	1/10
Py	1/10	9/10	1

(b)

$$E(X) = 3P(X+3) + 4P(X=4) = 3\cdot\frac{9}{10} + 4\cdot\frac{1}{10} = 3{,}1$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = 9\cdot\frac{9}{10} + 16\frac{1}{10} = 9{,}7$$

$$\therefore Var(X) = 9{,}7 + (3{,}1)^2$$

(c)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(Y) = 4\cdot\frac{1}{10} + 5\cdot\frac{9}{10} = 4{,}9$$

$$E(X) = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot 5\cdot\frac{8}{10} + 4\cdot 5\frac{1}{10} = 15{,}2$$

$$\therefore Cov(X,Y) = 15{,}2 + 3{,}1\cdot 4{,}9 = 0{,}01$$

(d)

$$Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y)$$

$$E^2(X) = [E(X) + E(Y)]^2 = (3{,}1+4{,}9)^2 = 64$$

$$E[(X+Y)^2] = E(X^2 + Y^2 + 2XY) = E(Y^2) + E(X^2) + 2E(XY)$$

$$E(Y^2) = 16\frac{1}{10} + 25\cdot\frac{9}{10} = 24{,}1$$

$$\therefore Var(X,Y) = 64{,}2 - 64 = 0{,}2$$

Problema 34.

Vamos determinar a probabilidade de Δ, o evento de uma pessoa sorteada obter nota maior que 80, e é Δ=*{X>80}*

Considere H e M os eventos: a pessoa é homem ou mulher, respectivamente. H e M formam uma partição do espaço todo. Desse modo: $A = (\Delta \cap H)(\Delta \cap M)$, portanto:

$$P(\Delta) = P((\Delta \cap H) \cup (\Delta \cap M)) = P(\Delta \cap H) + P(\Delta \cap M) = P(H) \cdot P(\Delta / H) + P(M) \cdot P(\Delta / M)$$

Dos dados obtemos:

$$P(H) = \frac{2}{3}$$

$$P(M) = \frac{1}{3}$$

$$P(\Delta / H) = P(X > 80 / X \sim N(70;10^2)) = P(Z > \frac{80-70}{10}) = P(Z >!) = 15{,}87\%$$

$$P(A / M) = (X > 80 / X \sim N(65;8^2)) = P(Z > \frac{80-65}{8}) = P(Z > 1{,}875) = 3{,}04\%$$

$$P(\Delta) = (\frac{2}{3} \cdot 15{,}87) + (\frac{1}{3} \cdot 3{,}04) = 11{,}59\%$$

Problema 35.

(a) $E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \sigma^2 + \mu^2$

(b) $E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E(X^2) - E(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu = \sigma^2 + \mu(\mu - 1)$

Problema 36.

(a)

$$P(X = 2) = 0{,}30$$

$$P(X = 2 / Y = 1200) = \frac{0{,}05}{0{,}30} = \frac{1}{6} = 0{,}17$$

(b)

$$E(XY) = 100\{2{,}4 \cdot 0{,}1 + 3{,}2 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}05 + 24 \cdot 0{,}05 + 36 \cdot 0{,}1 + 48 \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}05 +$$
$$40 \cdot 0{,}2 + 60 \cdot 0{,}05 + 50 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}05 + 150 \cdot 0{,}05\} = 4530$$

$$Cov(X,Y) = 4530 - 2120\,(2{,}5) = -770$$

$$\rho(X,Y) = \frac{-770}{(1)(1505{,}2)} = 0{,}512$$

Problema 37.

(i)

	x			
y	0	1	2	P(x)
0	1/9	1/9	1/9	1/3
1	1/9	1/9	1/9	1/3
2	1/9	1/9	1/9	1/3
P(y)	1/3	1/3	1/3	1

$$E(X)=E(Y)=1$$

$$E(X^2)=E(Y^2)=\frac{0}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$$

$$Var(X)=Var(Y)=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

$$(a)E(XY)=\frac{1}{9}\{0+0+0+0+1+2+0+2+4\}=1$$

$$(b)Cov(X,Y)=1-(1)(1)=0$$

$$(c)Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(XY)=\frac{4}{3}$$

(ii)

	x			
y	0	1	2	P(x)
0	0	1/6	1/6	1/3
1	1/6	0	1/6	1/3
2	1/6	1/6	0	1/3
P(y)	1/3	1/3	1/3	1

As marginais são as mesmas, assim:

$$E(X)=E(Y)=1$$

$$Var(X)=Var(Y)=\frac{2}{3}$$

$$(a)E(X,Y)=\frac{1}{6}\{0+0+0+0+2+0+2\}=\frac{2}{3}$$

$$(b)Cov(X,Y)=\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})=\frac{2}{9}$$

$$(c)Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=\frac{16}{9}$$

Problema 38.

Esta é uma situação particular do ex. 20, onde B=D=0. Assim A=a e C=b.

(*)vale $\forall A,B,C,D$

$\therefore$ *satisfazedo*:

$$\rho_{ZW}=\rho(aX,bY)=\frac{ab}{|ab|}=\rho_{XY}$$

Problema 39.

$$\rho_{ZW} = \frac{Cov(Z,W)}{\sqrt{Var(Z)Var(W)}}$$

$$Cov(Z,W) = E(ZW) - E(Z)E(W) = E[(AX+B)(Y+D)] - E(AX+B)E(Y+D) =$$

$$= E(ACXY + ADX + BCY + BC) - (AE(X)+B)(CE(Y)+0) + =$$

$$= ACE(XY) + ADE(X) + BCE(Y) + BD - ACE(X)E(Y) - ADE(X) - BCE(Y) - BD =$$

$$= AC[E(XY) - E(X)E(Y)] = ACCov(X,Y)$$

$$Var(Z) = Var(AX+B) = A^2 Var(X)$$

$$Var(W) = Var(CY+D) = C^2 Var(Y)$$

$$\therefore \rho_{ZW} = \frac{ACCov(X,Y)}{\sqrt{A^2C^2Var(X)Var(Y)}} = \frac{AC}{|AC|}\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{AC}{|AC|} = \rho_{XY}$$

$$A > 0, C > 0 \Rightarrow \frac{AC}{|AC|} = \frac{AC}{AC} = 1$$

$$\therefore \rho_{ZW} = \rho_{ZW}$$

Problema 40.

Considerando X e Y o número da 1ª e 2ª bola retirada, tem-se a distribuição conjunta da por:

$$P(X = i, Y = j) = \frac{1}{n^2}, \forall i, j$$

$$i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n$$

Logo $Z=|X-Y|$, poderá assumir os valores: 0,1,2,...,n-1Z+0, ocorrerá nas n caselas da diagonal principal , logo $P(Z=0) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

Z=1, ocorrerá nas duas diagonais imediatamente ao lado da principal, ou seja, em 2(n-1) caselas, logo $P(Z=1) = \frac{2(n-1)}{n^2}$.

Pelo raciocínio análogo, achamos: $P(Z=2) = \frac{2(n-2)}{n^2}$.Até: $P(Z=n-1) = 2$

Logo:

z	0	1	2	...	n-1	total
p( )	$\frac{n}{n^2}$	$\frac{2(n-1)}{n^2}$	$\frac{2(n-2)}{n^2}$		$\frac{2}{n^2}$	1

Problema 41.

$$Var(X-2Y) = Var(X) + Var(2Y) - 2Cov(X,2Y) = Var(X) + 4Var(Y) - 4Cov(X,Y) =$$

$$= Var(X) + 4Var(Y) - 4\rho(X,Y)\sqrt{Var(X)Var(Y)} = 1 + 4(2) - 4(\frac{1}{2})\sqrt{1 \cdot 2} = 9 - 2\sqrt{2} = 6{,}17$$

Problema 42.

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0 + 0 = 0$$

$$E(U) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0 - 0 = 0$$

$$Cov(Z,U) = E(ZU) - E(Z)E(U) = E(ZU) - 0 = E(ZU) = E[(X+Y)(X-Y)] =$$
$$= E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) = E(X^2) - 0 - E(Y^2) + 0 = [E(X^2) - E^2(X)] -$$
$$-[E(Y^2) - E^2(Y)] = Var(X) - Var(Y) = 1 - 1 = 0$$

Problema 43.

(a) Como X e Y são independentes tem-se: $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \iint xyf_X(x)f_y(y)dxdy = \int xf_X(x)dx \int yf_Y(y)dy = E(X)E(Y)$$

(b) Das propriedades do operador E, tem-se:

$Z = aX + bY, \log o \Rightarrow E(Z) = E(aX) + E(bY) = aE(X) + bE(Y) = a\mu_1 + b\mu_2$

$Var(aX+bY) = Var(aX) + Var(bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) = a^2\sigma_1^{\ 2} + b^2\sigma_2^{\ 2}$

(c) O resultado é a generalização do resultado, assim:

$E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = \sum \mu_i$

$Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i) = \sum \sigma^2{}_i$

Problema 44.

Não, pois o produto das marginais não reproduz a função conjunta.

Problema 45.

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x}e^{-y} = f_X(x)f_Y(Y)$$

Problema 46.

Já foi visto em 43(c) que:

$E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = \sum \mu_i$

$Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i) = \sum \sigma^2{}_i$

Logo $E(\overline{X}) = E(\sum \frac{X_i}{n}) = \frac{1}{n}E(\sum X_i) = \frac{\sum \mu_i}{n}$, ou seja, a média é a média dos parâmetros populacionais.

$Var(\overline{X}) = Var(\frac{\sum X_i}{n}) = \frac{1}{n^2}\sum \sigma_i^{\ 2}$

Problema 47.

Substituindo os valores nas fórmulas do exercício 8.46, tem-se:

$$E(\overline{X}) = \frac{\sum \mu_i}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sum \sigma_i^2}{n^2} = \frac{\sum \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2 n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$