

Capítulo 10

Problema 01.

- (a) A opinião dos operários pode estar relacionada com seus horários de chegada.
- (b) Parece razoável, já que as alturas devem se distribuir homogeneamente segundo os horários de chegada.
- (c) Pode ser que municípios com investimentos menores não retornem os questionários, acarretando um viés na estimativa da porcentagem média da receita investida em lazer.
- (d) Não haveria problemas se os supermercados fossem homogêneos quanto à venda de sabão em pó. Porém, pode ser que as regiões tenham potenciais de venda diferentes, independentemente do brinde.

Problema 03.

- (a) Por exemplo: colocar em uma urna 100 fichas, sendo 10 com o número zero, 20 com número 1, 30 com o número 2, 25 com o número 3 e 15 com o número 4. Sortear uma ficha da urna.

(b)

x_2	x_1					$P(X_2 = x_2)$
	0	1	2	3	4	
0	0,010	0,020	0,030	0,025	0,015	0,10
1	0,020	0,040	0,060	0,050	0,030	0,20
2	0,030	0,060	0,090	0,075	0,045	0,30
3	0,025	0,050	0,075	0,063	0,038	0,25
4	0,015	0,030	0,045	0,038	0,023	0,15
$P(X_1 = x_1)$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,15	1

- (c) $P(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 3, X_4 = 1) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 3)P(X_3 = 3)P(X_4 = 1) = 0,00375$

Problema 04.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

x_1	x_2	$P(X_1=x_1, X_2=x_2)$	$\hat{\sigma}^2$	X_1	X_2	$P(X_1=x_1, X_2=x_2)$	$\hat{\sigma}^2$
1	1	1/25	0	5	1	2/25	4
1	3	1/25	1	5	3	2/25	1
1	5	2/25	4	5	5	4/25	0
1	7	1/25	9	5	7	2/25	1
3	1	1/25	1	7	1	1/25	9
3	3	1/25	0	7	3	1/25	4
3	5	2/25	1	7	5	2/25	1
3	7	1/25	4	7	7	1/25	0

Distribuição amostral de $\hat{\sigma}^2$

v	0	1	4	9
$P(\hat{\sigma}^2 = v)$	7/25	10/25	6/25	2/25

Problema 05.

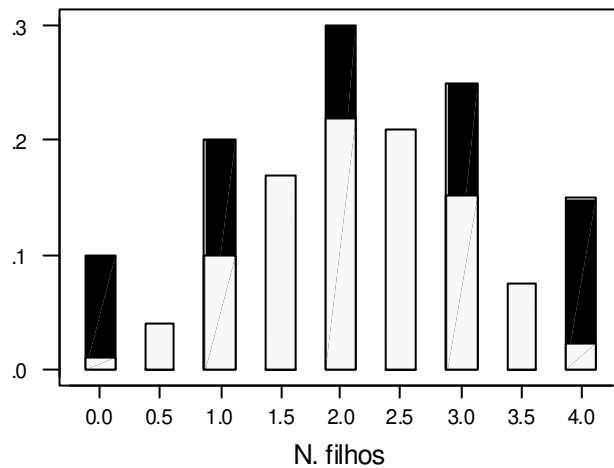
(a) $E(X) = 2,15$; $Var(X) = 1,428$.

(b) $E(X_i) = 2,15$, $i=1,2$; $Var(X_i) = 1,428$, $i=1,2$.

(c)

\bar{x}	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$P(\bar{X} = \bar{x})$	0,0100	0,0400	0,1000	0,1700	0,2200	0,2100	0,1525	0,0750	0,0225

(d) $E(\bar{X}) = 2,15$; $Var(\bar{X}) = 0,7138$.



(e)

(f)

s^2	0,0	0,5	2,0	4,5	8,0
$P(S^2 = s^2)$	0,225	0,385	0,250	0,110	0,030

v	0,00	0,25	1,00	2,25	4,00
$P(\hat{\sigma}^2 = v)$	0,225	0,385	0,250	0,110	0,030

(g) $E(S^2) = 1,428$; $Var(S^2) = 3,206$. $E(\hat{\sigma}^2) = 0,714$; $Var(\hat{\sigma}^2) = 0,802$.

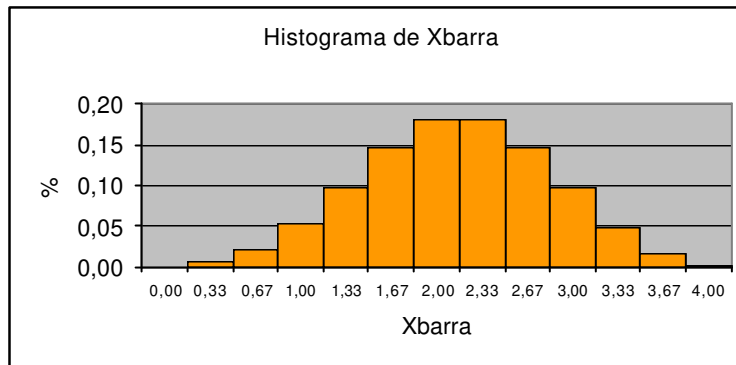
Se desejarmos um estimador não-viciado, devemos utilizar S^2 . Se desejarmos o estimador com a menor variância, devemos utilizar $\hat{\sigma}^2$.

(h) $P(|\bar{X} - \mu| > 1) = P(\bar{X} < 1,15) + P(\bar{X} > 3,15) = P(\bar{X} = 0 \text{ ou } 0,5 \text{ ou } 1) + P(\bar{X} = 3,5 \text{ ou } 4) = 0,01 + 0,04 + 0,1 + 0,075 + 0,0225 = 24,75\%$

Problema 06.

(a)

\bar{x}	0,00	0,33	0,67	1,00	1,33	1,67	2,00	2,33	2,67	3,00	3,33	3,67	4,00
$P(\bar{X} = \bar{x})$	0,001	0,006	0,021	0,052	0,098	0,147	0,181	0,182	0,149	0,097	0,048	0,017	0,003



(b) $E(\bar{X}) = 2,15$; $Var(\bar{X}) = 0,4758$.

$$P(|\bar{X} - \mu| > 1) = P(\bar{X} < 1,15) + P(\bar{X} > 3,15) =$$

(c) $= P(\bar{X} = 0,00 \text{ ou } 0,33 \text{ ou } 0,67 \text{ ou } 1,00) + P(\bar{X} = 3,33 \text{ ou } 3,67 \text{ ou } 4,00) =$
 $= 0,001 + 0,006 + 0,021 + 0,052 + 0,048 + 0,017 + 0,003 = 14,81\%$

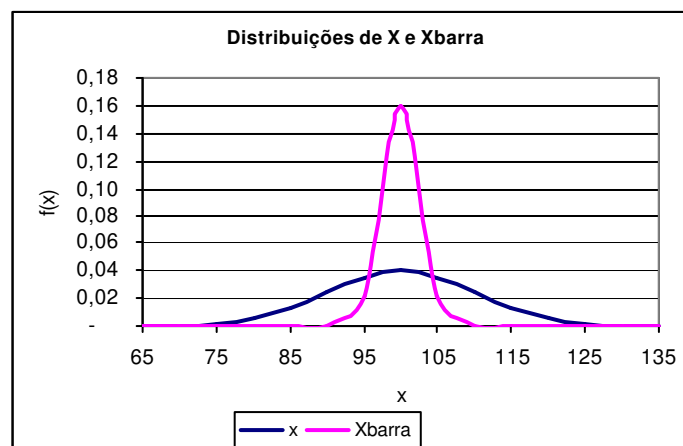
(d) Menor, pois a variância de \bar{X} seria menor, fazendo com que sua distribuição fosse mais concentrada em torno de μ .

Problema 07.

(a) $P(90 < X < 110) = 68,27\%$

(b) $\bar{X} \sim N\left(100; \frac{100}{16}\right) \Rightarrow P(90 < \bar{X} < 110) = 99,99\%$

(c)



$$(d) \quad P(90 < \bar{X} < 110) = 0,95 \Rightarrow P\left(\frac{(90-100)\sqrt{n}}{10} < Z < \frac{(110-100)\sqrt{n}}{10}\right) = 0,95 \Rightarrow$$

$$P(-\sqrt{n} < Z < \sqrt{n}) = 0,95 \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \Rightarrow n \cong 4$$

Problema 08.

$$(a) \quad P(X < 500) = 0,1 \Rightarrow P\left(Z < \frac{500 - \mu}{10}\right) = 0,1 \Rightarrow \frac{500 - \mu}{10} = 1,28 \Rightarrow \mu = 512,82.$$

$$\bar{X} \sim N\left(512,82; \frac{100}{4}\right); \quad P\left(\sum_{i=1}^4 X_i < 2000\right) = P(\bar{X} < 500) = 0,519\%.$$

Problema 09.

$$(a) \quad \text{Se a máquina estiver regulada: } \bar{X} \sim N\left(512,82; \frac{100}{4}\right)$$

$$P(\text{parada desnecessária}) = P(\bar{X} < 495 \text{ ou } \bar{X} > 520 \mid \text{máquina está regulada}) = 7,56\%$$

$$(b) \quad \text{Se o peso médio desregulou-se para 500g: } \bar{X} \sim N\left(500; \frac{100}{4}\right)$$

$$P(\text{continuar fora dos padrões}) = P(495 \leq \bar{X} \leq 520 \mid \text{máquina desregulou-se}) = 84,13\%$$

Problema 10.

$$(a) \quad \bar{X} \sim N\left(70; \frac{100}{7}\right); \quad P\left(\sum_{i=1}^7 X_i > 500\right) = P\left(\bar{X} > \frac{500}{7}\right) = 35,27\%.$$

$$(b) \quad \bar{X} \sim N\left(70; \frac{100}{6}\right); \quad P\left(\sum_{i=1}^6 X_i > 500\right) = P\left(\bar{X} > \frac{500}{6}\right) = 0,055\%.$$

Problema 11.

(a)

$k/8$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$P(\hat{p} = k/8)$	0,1678	0,3355	0,2936	0,1468	0,0459	0,0092	0,0011	0,0001	0,0000

(b)

$k/8$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$P(\hat{p} = k/8)$	0,1337	0,2993	0,3221	0,1666	0,0414	0,0049	0,0003	0,0000	0,0000
Obs.: $P(\hat{p} = k/8) = P(S = k) \cong P(k - 0,5 < X < k + 0,5)$, onde $S \sim \text{Binomial}(8;0,2)$ e									

$X \sim N(1,6;1,28)$.

(c) Razoável, pois n é pequeno,

(d) Para p tendendo a $1/2$.

Problema 12.

$S = 20 \times \hat{p}$: número de peças defeituosas na amostra

Probabilidade exata

Se a produção estiver sob controle: $S \sim \text{binomial}(20;0,1)$

$$P(\text{parada desnecessária}) = P(\hat{p} > 0,15 \mid \text{produção sob controle}) = \\ = P(S > 3 \mid \text{produção sob controle}) = 1 - \sum_{k=0}^3 \binom{20}{k} 0,1^k 0,9^{20-k} = 13,30\%$$

Aproximação pela distribuição normal

Se a produção estiver sob controle: $\hat{p} \sim N\left(0,1; \frac{0,1 \times 0,9}{20}\right)$, aproximadamente

$$P(\text{parada desnecessária}) = P(\hat{p} > 0,15 \mid \text{produção sob controle}) \cong 22,80\%$$

Problema 13.

$S = 100 \times \hat{p}$: número de peças defeituosas na amostra; $S \sim \text{binomial}(100;0,1)$

(a) *Probabilidade exata*

$$P(\hat{p} > 0,1) = P(S > 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{100}{k} 0,1^k 0,9^{100-k} = 41,7\%$$

Aproximação pela distribuição normal

$$\hat{p} \sim N\left(0,1; \frac{0,1 \times 0,9}{100}\right), \text{ aproximadamente; } P(\hat{p} > 0,1) \cong 50,0\%.$$

$$(b) \quad P(\hat{p} = 0) = P(S = 0) = \binom{100}{0} 0,1^0 0,9^{100-0} = 0,9^{100} = 0,0027\%$$

Problema 14.

(a)

v	0	1	4	9
$P(\hat{\sigma}^2 = v)$	7/25	2/5	6/25	2/25

$$E(\hat{\sigma}^2) = 2,08 \quad \text{Var}(\hat{\sigma}^2) = 6,39$$

$$E(S^2) = 4,16 \quad \text{Var}(S^2) = 25,57$$

$E(S^2) = \sigma^2 = 4,16$, ou seja, S^2 é um estimador não-viciado da variância populacional.

(b)

U	0,00	2,00	3,00	3,67	4,00	4,33	5,00	6,00
$P(U = u)$	11/125	6/125	6/25	6/125	24/125	12/125	18/125	18/125

Obs.: Assumindo que $U=0$ nos casos em que os 3 elementos da amostra forem iguais.

(c)

\bar{x}	1,0	1,7	2,3	3,0	3,7	4,3	5,0	5,7	6,3	7,0
$P(\bar{X} = \bar{x})$	1/125	3/125	9/125	16/125	24/125	27/125	23/125	3/25	6/125	1/125

$$E(\bar{X}) = 4,20; \quad \text{Var}(\bar{X}) = 1,39.$$

$$E(U) = 3,76; \quad \text{Var}(U) = 2,52.$$

U é viciado e tem variância maior que \bar{X} .

Problema 15.

(a) $E(X) = 12$; $\text{Var}(X) = 10,8$; $Md(X) = 12$.

(b)

\bar{x}	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	16,5	18,0
$P(\bar{X} = \bar{x})$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

md	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	16,5	18,0
$P(Md = md)$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

(c) $E(\bar{X}) = E(Md) = 12 = Md(X)$.

(d) Qualquer um, pois as duas distribuições amostrais são iguais.

(e)

Z	-2,58	-1,94	-1,29	-0,65	0,00	0,65	1,29	1,94	2,58
$P(Z = z)$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,26	0,2	0,12	0,04	0,01

(f) $E(Z) = 0$; $Var(Z) = 1$.

(g)

s^2	0,0	4,5	18,0	40,5	72,0
$P(S^2 = s^2)$	0,26	0,4	0,24	0,08	0,02

(h) $E(S^2) = 10,8$; $Var(S^2) = 204$

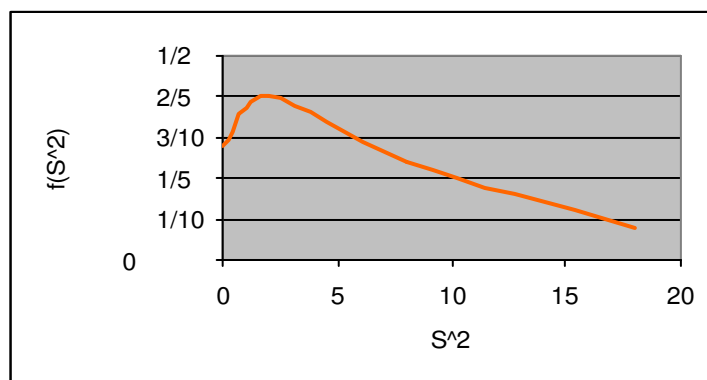
(i)

t_0	-3,0	-1,0	-0,3	0,0	0,3	1,0	3,0
$P(t = t_0)$	0,04	0,24	0,04	0,1	0,04	0,24	0,04

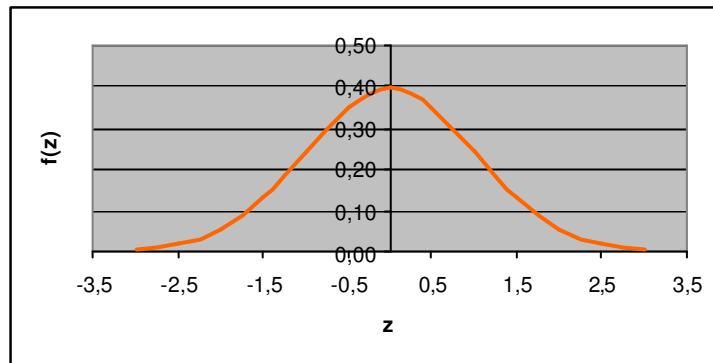
Problema: t não pode ser calculado quando $S=0$. Assim, $\sum_i p(t = t_{0i}) = 0,74$, e não 1.

(j) $E(t) = 0$; $Var(t) = 1,21$ (k) $P(|t| < 2) = 0,66$ $P(|t| < 4,30) = 0,74$ **Problema 16.**

(a)



(b)



- (c) Para amostras grandes, a distribuição de t aproxima-se da distribuição de Z , obtida em (b).

Problema 17.

$$n = \frac{z_{\gamma}^2}{4\varepsilon^2} = \frac{1,645^2}{4(0,02)^2} \cong 1691.$$

Problema 18.

A função $f(p) = p(1-p)$ é decrescente no intervalo $[0,5;1]$. Logo, para $p \geq 0,80$, $p(1-p) \leq 0,80 \times 0,20 = 0,16$. Assim,

$$n = \frac{z_{\gamma}^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} = \frac{1,645^2 \times 0,16}{(0,02)^2} \cong 1082.$$

Problema 19.

$$n = \frac{z_{\gamma}^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} \text{ e } n_0 = \frac{z_{\gamma}^2}{4\varepsilon^2} \Rightarrow n = 4n_0 p(1-p) = f(p).$$

$f(p)$ assume valor máximo quando $p = 1/2$. Logo: $n \leq f(1/2) = 4n_0 \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = n_0$.

Problema 20.

$$\text{Seja } n = \frac{z_{\gamma}^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} = f(p).$$

A função $f(p)$ é crescente para p no intervalo $[0;0,5]$ e decrescente para p no intervalo $[0,5;1]$. Logo,

$$p \leq p_0 < 0,5 \Rightarrow f(p) \leq f(p_0) < f(0,5) \Rightarrow n \leq n_1 < n_0.$$

$$p \geq p_0 > 0,5 \Rightarrow f(p) \leq f(p_0) < f(0,5) \Rightarrow n \leq n_1 < n_0.$$

Problema 21.

(a) $\bar{X}_{16} \sim N(10;1) \Rightarrow P(\text{ganhar o prêmio}) = P(\bar{X}_{16} > 12) = 2,275\%$

(b)

Tamanhos de amostra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prob. de ganhar o prêmio	30,9%	24,0%	19,3%	15,9%	13,2%	11,0%	9,3%	7,9%	6,7%	5,7%

(c) $n = 1$

Problema 22.

$$DP(\bar{X}_1) = \frac{\sigma}{6} \text{ e } DP(\bar{X}_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}; DP(\bar{X}_2) = \frac{2}{3} DP(\bar{X}_1) \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = \frac{2}{3} \times \frac{\sigma}{6} = \frac{\sigma}{9} \Rightarrow n_2 = 81$$

Problema 23.

(a) $E(e) = E(\bar{X}) - \mu = 0; \text{Var}(e) = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{400}{n}.$

(b) $e_{25} \sim N(0;16) \Rightarrow P(|e_{25}| > 2) = P(e_{25} < -2) + P(e_{25} > 2) = 61,71\%.$

(c) $e_{100} \sim N(0;4) \Rightarrow P(|e_{25}| > 2) = P(e_{25} < -2) + P(e_{25} > 2) = 31,73\%.$

(d) $d = 5,15.$

(e) $n = \frac{z_{\gamma}^2 \sigma^2}{\epsilon^2} = \frac{1,96^2 \times 400}{1^2} = 1537.$

Problema 24.

(a) $\bar{X}_{30} \sim N(2;0,01/30) \Rightarrow P(\text{não se ajustar}) = P(\bar{X}_{30} < 58/30) + P(\bar{X}_{30} > 61/30) = 3,41\%$

(b) $\bar{X}_{29} \sim N(2;0,01/29) \Rightarrow P(\text{não se ajustar}) = P(\bar{X}_{29} < 58/29) + P(\bar{X}_{29} > 61/29) = 50,00\%$

Problema 25.

$$(a) \quad \bar{X}_{1600} \sim N\left(5; \frac{0,2^2}{1600}\right) \Rightarrow P(\text{comprar + que 1 seção adicional}) = P\left(\bar{X}_{1600} < \frac{7995}{1600}\right) = 26,60\%$$

$$(b) \quad \bar{X}_{1599} \sim N\left(5; \frac{0,2^2}{1599}\right) \Rightarrow P\left(\frac{8000}{1599} < \bar{X}_{1599} < \frac{8005}{1599}\right) = 16,03\%$$

Problema 26.

S : nota do teste. Se o estudante estiver adivinhando as respostas: $S \sim \text{binomial}(20; 0,5)$.

$$P(S \geq 13 \mid \text{estudante está adivinhando}) = \sum_{k=13}^{20} \binom{20}{k} 0,5^k 0,5^{20-k} = 13,16\%$$

Problema 27.

S : quantidade de sementes que germinam em um pacote; $S \sim \text{binomial}(200; 0,95)$

Probabilidade exata

$$P(\hat{p} < 90\%) = P(S < 180) = 1 - \sum_{k=180}^{200} \binom{200}{k} 0,95^k 0,05^{200-k} = 0,116\%$$

Aproximação pela distribuição normal

$$\hat{p} \sim N(0,95; (0,95 \times 0,05) / 200), \text{ aproximadamente}$$

$$P(\hat{p} < 0,90) \cong 0,059\%$$

Problema 28.

$$(a) \quad \bar{X} \sim N(\mu; 6,25 / 4)$$

$$P(\bar{X} < 46,3 \text{ ou } \bar{X} > 53,7 \mid \mu = 50) = 0,308\%$$

$$P(46,3 \leq \bar{X} \leq 53,7 \mid \mu = 53,7) = 50\%$$

Problema 29.

Em elaboração

Problema 32.

- (a) Pelo Teorema do Limite Central, para n e m grandes: $\bar{X} \sim N(\mu_1; \frac{\sigma_1^2}{n})$ e

$\bar{Y} \sim N(\mu_2; \frac{\sigma_2^2}{m})$. Essas distribuições serão exatas se X e Y tiverem distribuição normal.

- (b) É a distribuição das diferenças entre as médias de todos os possíveis pares de amostras de X e Y com tamanhos n e m , respectivamente.
- (c) $E(D) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$; $Var(D) = Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$.
- (d) Normal, com média e variância dadas em (c), pois D é uma diferença entre variáveis com distribuição (aproximadamente) normal.

Problema 33.

- (a) $\bar{X} \sim N(5,4; 1,69/16)$; $\bar{Y} \sim N(5,4; 2,25/16)$; $D \sim N(0; 3,94/16)$
 $P(|D| > 0,5) = P(D < -0,5) + P(D > 0,5) = 31,37\%$
- (b) $P(|D| > d) = 0,05 \Rightarrow P(D < -d) = 0,025 \Rightarrow d = 0,973$
- (c) $P(|D| > 0,4) = 0,05 \Rightarrow P(-0,4 \leq D \leq 0,4) = 0,95 \Rightarrow \frac{0,4\sqrt{n}}{\sqrt{3,94}} = 1,96 \Rightarrow n = 95$

Problema 34.

$\bar{X} \sim N(70; 100/36)$; $\bar{Y} \sim N(65; 225/49)$; $D = \bar{X} - \bar{Y} \sim N(5; 100/36 + 225/49)$
 $P(D > 6) = 35,6\%$

Problema 35.

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1; \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right); \hat{p}_2 \sim N\left(p_2; \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right). \text{ Logo:}$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2; \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right).$$

Problema 36.

\bar{x}	2	3	4	5	6
$P(\bar{X} = \bar{x})$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

$$E(X) = \mu = 4,2; \text{Var}(X) = \sigma^2 = 4,16$$

$$E(\bar{X}) = 4,2 = \mu; \text{Var}(\bar{X}) = 1,56 = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1} = \frac{4,16}{2} \times \frac{5-2}{5-1}$$

Problema 39.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & x \in [0; \theta] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & x \in [0; \theta] \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

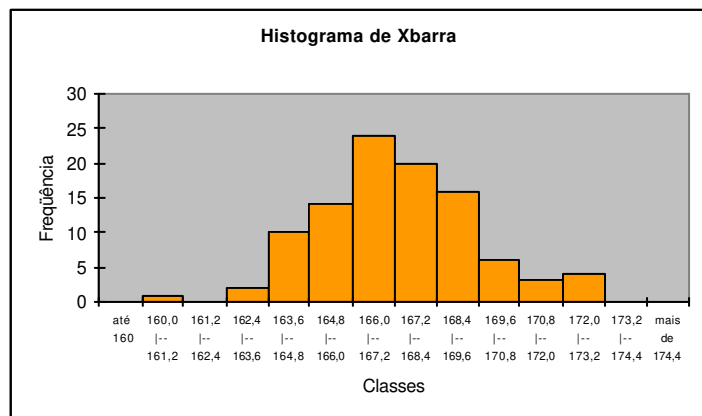
$$f_M(m) = n[F(m)]^{n-1} f(m) = n \left(\frac{m}{\theta} \right)^{n-1} \frac{1}{\theta} = \frac{nm^{n-1}}{\theta^n}, \quad m \in [0; \theta]$$

Problema 40.

Obs.: Os resultados abaixo referem-se a uma particular amostra obtida no Excel.

(a) Média

Classe	Frequência
até 160	0
160,0 -- 161,2	1
161,2 -- 162,4	0
162,4 -- 163,6	2
163,6 -- 164,8	10
164,8 -- 166,0	14
166,0 -- 167,2	24
167,2 -- 168,4	20
168,4 -- 169,6	16
169,6 -- 170,8	6
170,8 -- 172,0	3
172,0 -- 173,2	4
173,2 -- 174,4	0
mais de 174,4	0

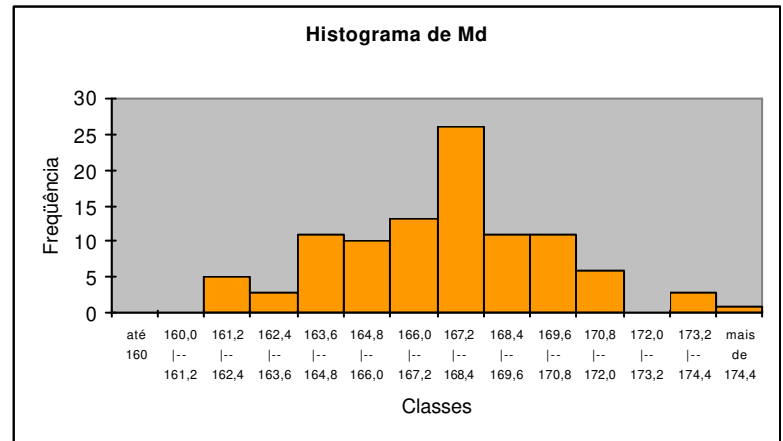


Medidas resumo

Mínimo	1o quartil	Mediana	3o quartil	Máximo	Média	Variância
161,0	165,7	167,0	168,5	173,1	167,2	5,3

(b) Mediana

Classe	Frequência
até 160	0
160,0 -- 161,2	0
161,2 -- 162,4	5
162,4 -- 163,6	3
163,6 -- 164,8	11
164,8 -- 166,0	10
166,0 -- 167,2	13
167,2 -- 168,4	26
168,4 -- 169,6	11
169,6 -- 170,8	11
170,8 -- 172,0	6
172,0 -- 173,2	0
173,2 -- 174,4	3
mais de 174,4	1

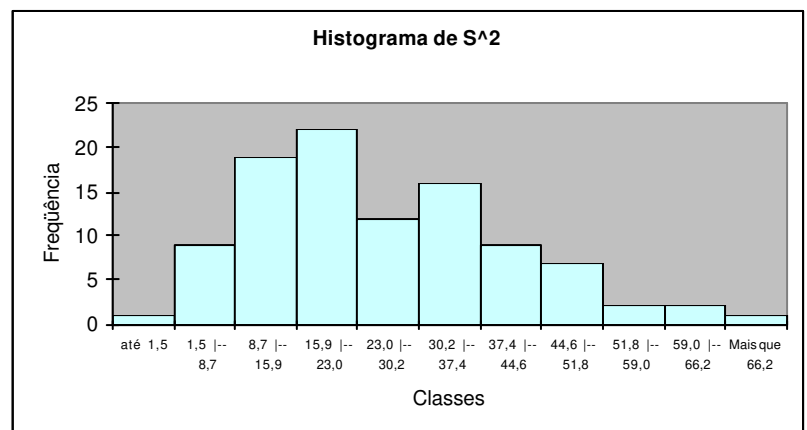
*Medidas resumo*

Mínimo	1º quartil	Mediana	3o quartil	Máximo	Média	Variância
161,5	165,8	167,5	169,4	174,8	167,5	7,8

(c) A distribuição amostral da mediana apresenta uma variabilidade maior em torno da média (igual à mediana) populacional.

(d) Variância, com $n-1$ no denominador.

Classe	Frequência
até 1,5	1
1,5 -- 8,7	9
8,7 -- 15,9	19
15,9 -- 23,0	22
23,0 -- 30,2	12
30,2 -- 37,4	16



37,4 -- 44,6	9
44,6 -- 51,8	7
51,8 -- 59,0	2
59,0 -- 66,2	2
Mais que 66,2	1

Medidas resumo

Mínimo	1o quartil	Mediana	3o quartil	Máximo	Média	Variância
1,48	12,86	21,92	34,57	73,38	25,65	226,60

Problema 41.

j	x_j	\bar{X}_j	S_j^2
1	3	3,00	0,00
2	5	4,00	2,00
3	2	3,33	2,33
4	6	4,00	3,33
5	4	4,00	2,50

Problema 42.

$$E(\hat{T}) = NE(\bar{X}) = N\mu = N \frac{T}{N} = T ; \text{Var}(\hat{T}) = N^2 \text{Var}(\bar{X}) = N^2 \frac{\sigma^2}{n}.$$

Problema 43.

Idêntico, substituindo-se S^2 no passo [3] por $S^2 = \bar{x}_n(1 - \bar{x}_n)$.