Capítulo 9

Problema 01

$18 \text{ mod } 5 = 3$, porque $18 = 3 \times 5 + 3$

$360 \text{ mod } 100 = 60$, porque $360 = 3 \times 100 + 60$

Problema 03

$a = 5, \ m = 100$

$$n_0 = 13 \longrightarrow u_0 = \frac{n_0}{m} = \frac{13}{100} = 0{,}13$$

$$n_1 = (5 \times 13) \text{ mod } 100 = 65 \text{ mod } 100 = 65 \longrightarrow u_1 = \frac{65}{100} = 0{,}65$$

$$n_2 = (5 \times 65) \text{ mod } 100 = 325 \text{ mod } 100 = 25 \longrightarrow u_2 = 0{,}25$$

$$n_3 = (5 \times 25) \text{ mod } 100 = 125 \text{ mod} 100 = 25 \longrightarrow u_3 = 0{,}25$$

i	0	1	2	3	...	9
u_i	0,13	0,65	0,25	0,25	...	0,25

Portanto, o período nesse caso é $h = 3$.

Problema 04

$a = 13, \ m = 100$

$$n_0 = 19 \longrightarrow u_0 = \frac{n_0}{m} = \frac{19}{100} = 0{,}19$$

$$n_1 = (13 \times 19) \text{ mod } 100 = 247 \text{ mod } 100 = 47 \longrightarrow u_1 = \frac{47}{100} = 0{,}47$$

$$n_2 = (13 \times 47) \text{ mod } 100 = 611 \text{ mod } 100 = 11 \longrightarrow u_2 = 0{,}11$$

$$n_3 = (13 \times 11) \text{ mod } 100 = 143 \text{ mod} 100 = 43 \longrightarrow u_3 = 0{,}43$$

$$n_4 = (13 \times 43) \text{ mod } 100 = 559 \text{ mod} 100 = 59 \longrightarrow u_4 = 0{,}59$$

$$n_5 = (13 \times 59) \text{ mod } 100 = 767 \text{ mod} 100 = 67 \longrightarrow u_5 = 0{,}67$$

$$n_6 = (13 \times 67) \text{ mod } 100 = 871 \text{ mod} 100 = 71 \longrightarrow u_6 = 0{,}71$$

$$n_7 = (13 \times 71) \text{ mod } 100 = 923 \text{ mod} 100 = 23 \longrightarrow u_7 = 0{,}23$$

$$n_8 = (13 \times 23) \text{ mod } 100 = 299 \text{ mod} 100 = 99 \longrightarrow u_8 = 0{,}99$$

$$n_9 = (13 \times 99) \text{ mod } 100 = 1287 \text{ mod} 100 = 87 \longrightarrow u_9 = 0{,}87$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_i	0,19	0,47	0,11	0,43	0,59	0,67	0,71	0,23	0,99	0,87

Portanto, o período nesse caso é $h = 20$.

Problema 06

Da 6ª coluna da tabela VII obtem-se:

u_i : 0,11; 0,82 ; 0,43 ; 0,56 ; 0,60.

Da distribuição da variável X, vem:

$$p_1 = 0{,}1$$
$$p_1 + p_2 = 0{,}3$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}7$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}9$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1{,}0$$

Então:

$$u_1 = 0{,}11 \rightarrow \mathrm{p}_1 \leq 0{,}11 \leq \mathrm{p}_1 + p_2 \longrightarrow \mathrm{x}_1 = 1$$

$$u_2 = 0{,}82 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \leq 0{,}82 \leq \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 + p_4 \longrightarrow \mathrm{x}_2 = 3$$

$$u_3 = 0{,}43 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \leq 0{,}43 \leq \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_3 = 2$$

$$u_4 = 0{,}56 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \leq 0{,}56 \leq \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_4 = 2$$

$$u_5 = 0{,}60 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \leq 0{,}60 \leq \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_5 = 2$$

Assim, os números gerados são: $(1, 3, 2, 2, 2)$.

Problema 07

Vejamos a distribuição da variável aleatória T:

t	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Da 11ª coluna da tabela VII, obtem-se:
u_i : 0,57; 0,19; 0,38; 0,33; 0,31;0,54;0,38;0,79;0,54;0,55.
Então:

$$u_1 = 0{,}57 \longrightarrow \mathrm{x}_1 = 5$$

$$u_2 = 0{,}19 \longrightarrow \mathrm{x}_2 = 3$$

$$u_3 = 0{,}38 \longrightarrow \mathrm{x}_3 = 4$$

$$u_4 = 0{,}33 \longrightarrow \mathrm{x}_4 = 4$$

$$u_5 = 0{,}31 \longrightarrow \mathrm{x}_5 = 4$$

$u_6 = 0{,}54 \longrightarrow x_6 = 5$

$u_7 = 0{,}38 \longrightarrow x_7 = 4$

$u_8 = 0{,}79 \longrightarrow x_8 = 6$

$u_9 = 0{,}54 \longrightarrow x_9 = 5$

$u_{10} = 0{,}55 \longrightarrow x_{10} = 5$

Assim, os números gerados são: $(5, 3, 4, 4, 4, 5, 4, 6, 5, 5)$.

Problema 08

Vamos obter a função de distribuição acumulada da v.a. X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq -1 \\ \int_{-1}^{x} 3t^2 dt = x^3 + 1, \ -1 \leq x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$$

$F(x) = u \longrightarrow x^3 + 1 = u$

Geramos $u \sim U(0,1)$ e $x = \sqrt[3]{u-1}$, note que $x \in (-1,0)$.

Se $u = 0{,}5 \longrightarrow x = \sqrt[3]{0{,}5 - 1} = \sqrt[3]{-0{,}5} = (-0{,}5)^{1/3} = (-0{,}5)^{0{,}333} = -0{,}793$

Problema 09

$X \sim Bernoulli(0{,}35)$

$p = 0{,}35 = P(X = 1)$; $P(X = 0) = 0{,}65$

$$u \sim U(0{,}1); \quad X = \begin{cases} 0, \text{ se } u < 0{,}65 \\ 1, \text{ se } u \geq 0{,}65 \end{cases}$$

Se u_i :0,419;0,28 5;0,111;0, 330;0,036; 0,415;0,18 8;0,061;0, 127;0,791.

Então os valores gerados são: 0,1,0,0,0,0,0,0,0,1.

Problema 10

$Y \sim b(10;0{,}2)$

Considerando 10 experimentos de Bernolli; em cada $X \sim Bernoulli(0{,}2)$

$p = 0{,}20 = P(X = 1)$; $P(X = 0) = 0{,}80$

$$u \sim U(0{,}1); \quad X = \begin{cases} 0, \text{ se } u < 0{,}80 \\ 1, \text{ se } u \geq 0{,}80 \end{cases}$$

E_1:

$u_i \longrightarrow 0{,}11; 0{,}82; 0{,}00; 0{,}43; 0{,}56; 0{,}60; 0{,}72; 0{,}42; 0{,}08; 0{,}53.$

$X_i \longrightarrow 0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 .$

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i = 1$$

E_2: seguir a mesma idéia apenas gerando outros u_i´s.

Problema 11

$t = -\beta \log(u)$; $\beta = 1/2$

Então, para gerar um valor da distribuição exponencial com $\beta = 1/2$,basta adotar:

$$t = -\frac{1}{2}\log(u_i)$$

Considerando os valores de u_i encontrados no Problema 9, tem-se:

$t_i \longrightarrow 0{,}435; 0{,}06\ 1; 1{,}099; 0{,}\ 554; 1{,}662;\ 0{,}440; 0{,}83\ 6; 1{,}398; 1{,}\ 032; 0{,}117.$

Problema 12

(a) $u = F(x) \longrightarrow x = F^{-1}(u)$.

$F(x) = x^2, 0 \le x < 1 \longrightarrow u = x^2 \ \therefore x = \sqrt{u}$

Considerando os valores de u_i do Problema 10, tem-se:

$x_1 = \sqrt{0{,}11} = 0{,}332$; $x_2 = 0{,}906$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0{,}656$; $x_5 = 0{,}748$

$x_6 = 0{,}775$; $x_7 = 0{,}849$; $x_8 = 0{,}648$; $x_9 = 0{,}283$; $x_{10} = 0{,}728$.

(b) $X \sim N(10;4)$

$\Phi(z) = u \longrightarrow z \longrightarrow x = 10 + 2 \times z$

Supondo u_i : 0,94 ; 0,31 ; 0,97 ; 0,30 ; 0,38 ; 0,44 ; 0,10 ; 0,47 ; 0,73 ; 0,23.

Então:

$u_1 = 0{,}94 \longrightarrow z_1 = 1{,}56 \longrightarrow x_1 = 13{,}12$

$u_2 = 0{,}31 \longrightarrow z_2 = -0{,}50 \longrightarrow x_2 = 9{,}00$

$u_3 = 0{,}97 \longrightarrow z_3 = 1{,}89 \longrightarrow x_3 = 13{,}78$

$u_4 = 0{,}30 \longrightarrow z_4 = -0{,}52 \longrightarrow x_4 = 8{,}96$

$u_5 = 0{,}38 \longrightarrow z_5 = -0{,}31 \longrightarrow x_5 = 9{,}38$

$u_6 = 0{,}44 \longrightarrow z_6 = -0{,}15 \longrightarrow x_6 = 9{,}70$

$u_7 = 0{,}10 \longrightarrow z_7 = -1{,}28 \longrightarrow x_7 = 7{,}44$

$u_8 = 0{,}47 \longrightarrow z_8 = -0{,}08 \longrightarrow x_8 = 9{,}84$

$u_9 = 0{,}73 \longrightarrow z_9 = 0{,}61 \longrightarrow x_9 = 11{,}22$

$u_{10} = 0{,}73 \longrightarrow z_{10} = -0{,}74 \longrightarrow x_{10} = 8{,}52$

(c) $X \sim t(24)$

$\Phi(t) = u$

Considerando os valores de u_i do item b, tem-se:

$u_1 = 0{,}94 \longrightarrow t_1 = 1{,}711$

$u_2 = 0{,}31 \longrightarrow t_2 = 0{,}531$

e assim por diante.

Problema 14

10 valores de $\chi^2(3) = W$

$W = \chi^2(3) = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$ com $Z_i \sim N(0;1)$

Usando u_i e z_i do Problema 12 item b, tem-se:

$W_1 = (1{,}56)^2 + (-0{,}50)^2 + (1{,}89)^2 = 6{,}256$

$W_2 = (1{,}56)^2 + (-0{,}52)^2 + (-0{,}31)^2 = 2{,}780$

$W_3 = (1{,}56)^2 + (-0{,}15)^2 + (-1{,}28)^2 = 4{,}095$

$W_4 = (1{,}56)^2 + (-0{,}08)^2 + (0{,}61)^2 = 2{,}812$

$W_5 = (-0{,}50)^2 + (-0{,}52)^2 + (-0{,}31)^2 = 0{,}617$

$W_6 = (-0{,}50)^2 + (-0{,}15)^2 + (-1{,}28)^2 = 1{,}911$

$W_7 = (-0{,}50)^2 + (-0{,}08)^2 + (0{,}61)^2 = 0{,}629$

$W_8 = (1{,}89)^2 + (-0{,}52)^2 + (0{,}31)^2 = 3{,}939$

$W_9 = (1{,}89)^2 + (-0{,}15)^2 + (-1{,}28)^2 = 5{,}233$

$W_{10} = (1{,}89)^2 + (-0{,}08)^2 + (-0{,}74)^2 = 4{,}126$

Problema 17

Método de Box-Müller:

$$X = \sqrt{-2\log U_1} \times \cos(2\pi U_2)$$

$$Y = \sqrt{-2\log U_1} \times \text{sen}(2\pi U_2)$$

Supondo $u_1 = 0{,}6$ e $u_2 = 0{,}09$, tem-se:

$$u_1 = 0{,}6 \longrightarrow -2\log(0{,}6) = 0{,}4437 \ , \ \sqrt{-2\log(0{,}6)} = 0{,}666$$

$$u_2 = 0{,}09 \longrightarrow \cos(2\pi\,(0{,}09)) = \cos(0{,}5655) = 0{,}844, \quad \text{sen}(0{,}5655) = 0{,}536$$

Então:

$$z_1 = 0{,}666 \times 0{,}844 = 0{,}562$$

$$z_2 = 0{,}666 \times 0{,}536 = 0{,}357$$

Basta repetir os mesmos passos para gerar os outros valores.

Problema 18

Considerando $m = 3$:

$$n_0 = 123 \longrightarrow n_0^{\ 2} = 1\underbrace{512}9 \longrightarrow u_0 = \frac{512}{1000} = 0{,}512$$

$$n_1 = 512 \longrightarrow n_1^{\ 2} = 02\underbrace{621}44 \longrightarrow u_1 = \frac{621}{1000} = 0{,}621$$

$$n_2 = 621 \longrightarrow n_2^{\ 2} = 03\underbrace{856}41 \longrightarrow u_2 = \frac{856}{1000} = 0{,}856$$

e assim por diante.

Problema 19

$X \sim b(5;0{,}3)$

Algoritmo:

1) Suponha $u_1 = 0{,}6$

2) $r = \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{0{,}3}{0{,}7} = 0{,}43$, $j = 0$, $pr = (0{,}7)^5 = 0{,}17$, $F = 0{,}17$

3) $u_1 = 0{,}6 > F$

4) $pr = \dfrac{(0{,}43) \times 5}{1} \times 0{,}17 = 0{,}37$, $F = 0{,}17 + 0{,}37 = 0{,}54$, $j = 1$

5) $u_1 = 0{,}6 < 0{,}54 \longrightarrow X_1 = 1 \qquad \therefore 1^o$ valor gerado é $X_1 = 1$

Repita o algoritmo para u_2, u_3, u_4, u_5.

Problema 21

$X \sim P(\lambda),\ \lambda = 2$

Algoritmo:

1) Suponha $u_1 = 0{,}09$

2) $\text{j} = 0,\ \text{p} = e^{-\lambda} = e^{-2} = 0{,}135 \ \text{ e } \ \text{F} = 0{,}135$

3) $u_1 = 0{,}09 < 0{,}135$, então $\text{X}_1 = 0$

4)Caso $u_1 > F$ então: $\text{p} = \dfrac{\lambda}{\text{j}+1}p,\ F = F + p \quad e \ j = j+1$

5) *Volte* a 3)

Problema 26

$X \sim Gama\left(3; \dfrac{1}{2}\right)$, isto é, $r = 3$ e $\beta = \dfrac{1}{2}$.

Considere os três primeiros valores gerados de $Exp\left(\dfrac{1}{2}\right)$ do Problema 11:

$t_1 = 0{,}435,\ t_2 = 0{,}061,\ t_3 = 1{,}099$

Então, o 1º valor gerado de X é : $x_1 = 0{,}435 + 0{,}061 + 1{,}099 = 1{,}595$

Gere mais 3 valores de uma $Exp\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e encontre mais um valor.

Proceda da mesma maneira para gerar os próximos valores.

Problema 29

(a) X : resultado de uma partida

Então $X = \begin{cases} 0, \text{se o time não venceu.} \\ 1, \text{se o time venceu.} \end{cases}$

com $\text{P}(\text{X} = 1) = 0{,}60$ e $\text{P}(\text{X} = 0) = 0{,}40$

Logo, $X \sim Bernoulli(0{,}60)$

$u \sim U(0{,}1);\quad \text{X} = \begin{cases} 0, \text{ se u} < 0{,}40 \\ 1, \text{ se u} \geq 0{,}40 \end{cases}$

Considerando os $u_{i's}$ do Problema 10:

$\text{u}_\text{i} \longrightarrow 0{,}11; 0{,}82; 0{,}00; 0{,}43; 0{,}56; 0{,}60; 0{,}72; 0{,}42; 0{,}08; 0{,}53.$

$X_\text{i} \longrightarrow 0\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 1\ .$

Então em 10 partidas tem-se: 7 vitórias e 3 outros resultados (empate ou derrota).

(b) Considerando:

$$X = \begin{cases} 0, \text{ se o time perdeu.} \\ 1, \text{ se o time empatou.} \\ 2, \text{ se o time ganhou.} \end{cases}$$

com $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=0{,}20$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=0{,}30$ e $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=0{,}50$

Da distribuição da variável X, vem:

$$p_1 = 0{,}2$$
$$p_1 + p_2 = 0{,}5$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 1{,}0$$

Considerando os $u_{i's}$ gerados no Problema 10,vem:

$$u_1 = 0{,}11 \rightarrow 0 \le 0{,}11 \le \mathrm{p}_1 \longrightarrow \mathrm{x}_1 = 0$$

$$u_2 = 0{,}82 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}82 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_2 = 2$$

$$u_3 = 0{,}00 \rightarrow 0 \le 0{,}00 \le \mathrm{p}_1 \longrightarrow \mathrm{x}_3 = 0$$

$$u_4 = 0{,}43 \rightarrow \mathrm{p}_1 \le 0{,}43 \le \mathrm{p}_1 + p_2 \longrightarrow \mathrm{x}_4 = 1$$

$$u_5 = 0{,}56 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}56 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_5 = 2$$

$$u_6 = 0{,}60 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}60 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_6 = 2$$

$$u_7 = 0{,}72 \rightarrow \mathrm{p}_1 + p_2 \le 0{,}72 \le \mathrm{p}_1 + p_2 + p_3 \longrightarrow \mathrm{x}_7 = 2$$

$$u_8 = 0{,}42 \rightarrow \mathrm{p}_1 \le 0{,}42 \le \mathrm{p}_1 + p_2 \longrightarrow \mathrm{x}_8 = 1$$

$$u_9 = 0{,}08 \rightarrow 0 \le 0{,}08 \le \mathrm{p}_1 \longrightarrow \mathrm{x}_9 = 0$$

$$u_{10} = 0{,}53 \rightarrow \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 \le 0{,}53 \le \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3 \longrightarrow \mathrm{x}_{10} = 2$$

Então em 10 partidas o time terá 5 vitórias, 2 empates e 3 derrotas.

(c) Repetir a mesma idéia do item anterior 12 vezes, gerando outros $u_{i's}$ e calcular o número de pontos obtidos.

(d) Pode-se estudar o número de pontos perdidos, número de vitórias, etc. Para simular basta seguir a mesma idéia dos itens anteriores.

Problema 34

(a) Considerando $\mu = 1{,}70$ e $\sigma = 0{,}10$ tem-se:

Valores gerados
1,67
1,57
1,72
1,83
1,82
1,87
1,48
1,68
1,81
1,59

Calculando a média e desvio padrão encontram-se os seguinte valores: 1,70 e 0,13, respectivamente.

(b) Considerando os mesmos parâmetros do item anterior:

Valores gerados
1,76
1,55
1,78
1,78
1,81
1,88
1,59
1,73
1,77
1,69

Calculando a média e desvio padrão encontram-se, respectivamente, os seguinte valores: 1,73 e 0,10.Olhando as amostras elas não parecem estar vindo de populações diferentes, pois os valores simulados são bem próximos (visto que estão sendo gerado de um mesmo valor de μ e σ).

(c) Considerando $\mu = 1{,}55$ e $\sigma = 0{,}10$ tem-se:

Valores gerados
1,62
1,48
1,53
1,48
1,66
1,55
1,76
1,51
1,41
1,40

Comparando estes valores com os obtidos no item a nos mostra evidências de que as duas amostras vêm de populações distintas. Visto que os valores obtidos para a população feminina é menor quando comparados para os obtidos para a população masculina.

(d) Se as médias das duas populações forem bem diferentes e estas não apresentarem desvio – padrão alto, poderá se diferenciar bem as amostras geradas.