Capítulo 12

Problema 01

(a)

$$P(\text{Erro I}) = \text{P(dizer que são de B} \,|\, \text{na verdade são de A)} = P\left(\overline{X} > 176 \,|\, \overline{X} \sim N(175;1)\right) =$$
$$P\left(Z > \frac{176-175}{1}\right) = P(Z > 1) = 15{,}87\%$$

$$P(\text{Erro II}) = \text{P(dizer que são de A} \,|\, \text{na verdade são de B)} = P\left(\overline{X} \le 176 \,|\, \overline{X} \sim N(177;1)\right) =$$
$$P\left(Z \le \frac{176-177}{1}\right) = P(Z \le -1) = 15{,}87\%$$

(b)

$$P(\text{Erro I}) = 5\% \Leftrightarrow P\left(\overline{X} > \overline{X}_C | \overline{X} \sim N(175;1)\right) = 5\% \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 175}{1}\right) = 5\% \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 175}{1} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 176{,}645$$

Regra de decisão: Se $\overline{X} > 176{,}645$, dizer que habitantes da ilha são descendentes de B; caso contrário, dizer que são descendentes de A.

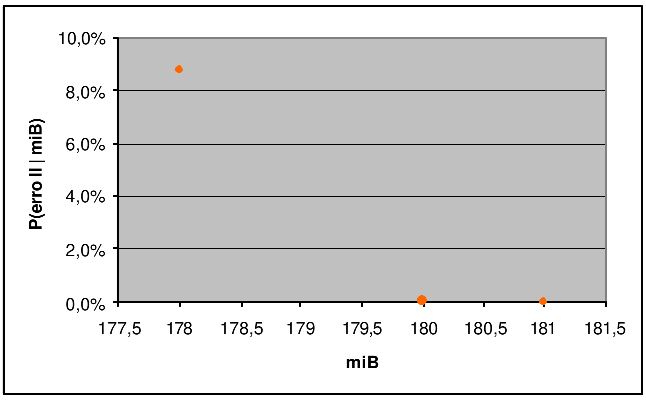
$$P(\text{Erro II}) = P\left(\overline{X} \le 176{,}645 | \overline{X} \sim N(177;1)\right) = P\left(Z \le \frac{176{,}645-177}{1}\right) =$$
$$= P(Z \le -0{,}355) = 36{,}13\%$$

(c)

$$P(\text{Erro I}) = 5\% \Leftrightarrow P\left(\overline{X} > \overline{X}_C | \overline{X} \sim N(175;0{,}5^2)\right) = 5\% \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 175}{0{,}5}\right) = 5\% \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 175}{0{,}5} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 175{,}823$$

$$P(\text{Erro II}) = P\left(\overline{X} \le 176{,}645 | \overline{X} \sim N(177;1)\right) = P\left(Z \le \frac{175{,}823-177}{1}\right) =$$
$$= P(Z \le -1{,}177) = 11{,}96\%$$

μ_B	$P(\text{Erro II} \mid \mu_B)$
178	8,771%
180	0,040%
181	0,001%



(d)

Problema 02

(a)

$$\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ verdadeira}) = P\left(\overline{X} > 1170 \mid \overline{X} \sim N(1150;15^2)\right) =$$
$$= P\left(Z > \frac{1170-1150}{15}\right) = P(Z > 1{,}333) = 9{,}12\%$$

(b)

$$\beta = P(\text{aceitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_1 \text{ é verdadeira}) = \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{X}} < 1170 \mid \overline{\mathrm{X}} \sim \mathrm{N}(1200;20^2)\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{1170-1200}{20}\right) = P(Z < -1{,}5) = 6{,}68\%$$

(c)

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow P\left(\overline{X} > \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(1150;15^2)\right) = P\left(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(1200;20^2)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 1150}{15}\right) = P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 1200}{20}\right) \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 1150}{15} = -\frac{\overline{X}_C - 1200}{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{X}_C = 1171{,}429$$

$$RC =]1171{,}429; +\infty[.$$

Problema 03

(a) H_0: Está começando um ataque.

H_1: Está acontecendo uma leve interferência.

Erro I: Dizer que está acontecendo uma leve interferência, quando na verdade está começando um ataque;

Erro II: Dizer que está começando um ataque, quando na verdade está acontecendo uma leve interferência.

(b) H_0: O acusado é inocente.

H_1: O acusado é culpado.

Erro I: Dizer que o acusado é culpado, quando na verdade é inocente.

Erro II: Dizer que o acusado é inocente, quando na verdade é culpado.

(c) H_0: A vacina não é eficaz.

H_1: A vacina é eficaz.

Erro I: Dizer que a vacina é eficaz, quando na verdade não é eficaz.

Erro II: Dizer que a vacina não é eficaz, quando na verdade é eficaz.

Problema 04

X: número de coroas em 3 lançamentos.

$X \sim$ Binomial(3;p).

$$H_0 : p = 0{,}5 \text{ versus } H_1 : p \neq 0{,}5 .$$

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar } \mathrm{H_0} \mid \mathrm{H_0} \text{ verdadeira}) = P(X = 3 | p = 0{,}5) = 12{,}50\% .$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } \mathrm{H_0} \mid \mathrm{H_0} \text{ falsa}) = P(X < 3 | p = 0{,}667) = 70{,}37\% .$$

Problema 05

(a) $H_0 : \mu = 200$ versus $H_1 : \mu = 210$.

(b) Por exemplo: Se $\overline{X} < 205$, dizer que $\mu = 200$. Caso contrário, dizer que $\mu = 210$.

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar } \mathrm{H_0} \mid \mathrm{H_0} \text{ verdadeira}) = P(\overline{X} > 205 \mid \overline{X} \sim N(200;4^2)) = $$
$$= P\left(Z > \frac{205-200}{4}\right) = P(Z > 1{,}25) = 10{,}56\% .$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } \mathrm{H_0} \mid \mathrm{H_0} \text{ falsa}) = P(\overline{X} < 205 | \overline{X} \sim N(210;4^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{205-210}{4}\right) = P(Z < -1{,}25) = 10{,}56\% .$$

Problema 06

(a)

Passo 1: $H_0: \mu \geq 8$ versus $H_1: \mu < 8$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 0{,}4^2)$.

Passo 3:

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(8; 0{,}4^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}4}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}4} = -1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 7{,}342$$

$RC =]-\infty; 7{,}342[$

Passo 4: $\overline{X} = 7{,}2$.

Passo 5: O valor observado pertence à RC. Logo, rejeita-se H_0, ou seja, com base na amostra colhida, a diretoria deve decidir por retirar o produto da linha de produção.

(b)

$$\beta = P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P(\overline{X} \geq 7{,}342 \mid \overline{X} \sim N(7{,}8; 0{,}4^2)) =$$
$$= P\left(Z \geq \frac{7{,}342 - 7{,}8}{0{,}4}\right) = P(Z > -1{,}145) = 87{,}4\%$$

(c)

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(8; 0{,}4^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}4}\right) = 1\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}4} = -2{,}326 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 7{,}07 \qquad RC =]-\infty; 7{,}07[\,.$$

O valor observado não pertenceria à RC. Logo, a decisão seria diferente, isto é, H_0 não seria rejeitada.

(d)

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(8; 0{,}8^2)) =$$
$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}8}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 8}{0{,}8} = -1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 6{,}684$$

$RC =]-\infty; 6{,}684[$.

Novamente, o valor observado não pertenceria à RC, e portanto, H_0 não seria rejeitada.

Problema 07

Passo 1: $H_0: \mu = 60$ versus $H_1: \mu < 60$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 6{,}667^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\qquad \dfrac{\overline{X}_C - 60}{6{,}667} = -1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 49{,}03$. $\quad RC =]-\infty; 49{,}03[$

Passo 4: $\overline{X} = 50$.

Passo 5: O valor observado não pertence à RC. Logo, não se rejeita H_0. Não há evidências de melhoria.

Problema 08

Passo 1: $H_0 : \mu = 2{,}5$ versus $H_1 : \mu < 2{,}5$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 0{,}0714^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\qquad \dfrac{\overline{X}_C - 2{,}5}{0{,}0714} = -1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 2{,}38$. $\quad RC =]-\infty; 2{,}38[$

Passo 4: $\overline{X} = 2{,}3$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que esta indústria paga salários inferiores, em média.

Problema 09

Passo 1: $H_0 : \mu \leq 23$ versus $H_1 : \mu > 23$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 0{,}9^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}10$ $\qquad \dfrac{\overline{X}_C - 23}{0{,}9} = 1{,}282 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 24{,}15$. $\quad RC =]24{,}15; +\infty[$

Passo 4: $\overline{X} = 24{,}17$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a informação do fabricante é falsa, ao nível significância de 10%.

Problema 10

Passo 1: $H_0 : p = 0{,}5$ versus $H_1 : p > 0{,}5$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{6}\right)$.

Passo 3:

$$\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H_0} \mid \mathrm{H_0} \text{ é verdadeira}) = P\left(\hat{p} > \hat{p}_C \mid \hat{p} \sim N(0{,}5; 0{,}25/6)\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{\hat{p}_C - 0{,}5}{\sqrt{0{,}25/6}}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\hat{p}_C - 0{,}5}{\sqrt{0{,}25/6}} = 1{,}645 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}836$$

$RC = \{p : p > 0{,}836\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}833$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, não se rejeita H_0, ou seja, não há evidências de que a pessoa acerta mais que metade das vezes.

Problema 11

Passo 1: $H_0 : p \leq 0{,}2$ versus $H_1 : p > 0{,}2$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{50}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}10$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0{,}2}{\sqrt{0{,}2 \times 0{,}8/50}} = 1{,}282 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}273$ $\quad RC = \{p : p > 0{,}273\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}270$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a proporção de peças defeituosas seja maior que 20%.

Problema 12

i. $\alpha = 0{,}05$

Passo 1: $H_0 : p = 0{,}90$ versus $H_1 : p < 0{,}90$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{200}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0{,}9}{\sqrt{0{,}9 \times 0{,}1/200}} = -1{,}645 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}865$. $\quad RC = \{p : p < 0{,}865\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}875$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a proporção de peças de acordo com as especificação seja menor que 90%.

ii. $\alpha = 0{,}01$

Passo 3: $\alpha = 0{,}01$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0{,}9}{\sqrt{0{,}9 \times 0{,}1/200}} = -2{,}326 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}851$. $\quad RC = \{p : p < 0{,}851\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}875$.

Passo 5: A conclusão é a mesma obtida com $\alpha = 0{,}05$.

Problema 13

Passo 1: $H_0 : p \geq 0{,}25$ versus $H_1 : p < 0{,}25$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \dfrac{p(1-p)}{400}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$. $\dfrac{\hat{p}_C - 0{,}25}{\sqrt{0{,}25 \times 0{,}75/400}} = -1{,}645 \Leftrightarrow \hat{p}_C = 0{,}214$. $RC = \{p : p < 0{,}214\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0{,}200$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a proporção de possuidores de TV que assistem ao programa é menor que 25%. Logo, a decisão dos produtores deve ser modificar o programa.

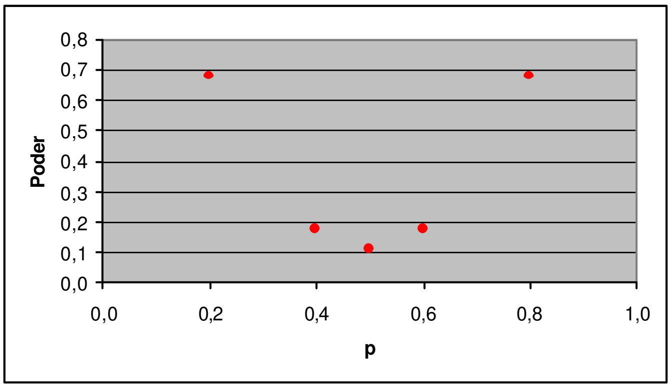
Problema 14

(a) X: número de sucessos em 10 tentativas.$\Rightarrow X$~Binomial(10;p)

$\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeir a}) = P\big(X \in RC \mid p = 0{,}5\big) = 0{,}109$.

(b) $\pi(p) = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid p) = P(X \in RC \mid p)$

p	$\pi(p)$
0,2	0,678
0,4	0,180
0,5	0,109
0,6	0,180
0,8	0,678



(c) $\pi(0{,}5) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid p = 0{,}5) = \alpha = 0{,}109$.

Problema 15

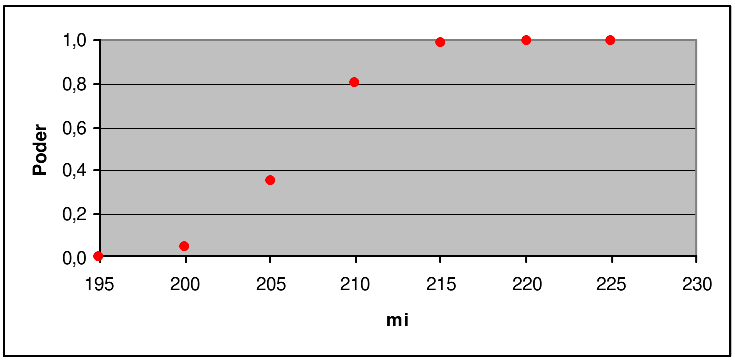
(a) Passo 1: $H_0 : \mu = 200$ versus $H_1 : \mu > 200$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 4^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$ $\qquad \dfrac{\overline{X}_C - 200}{4} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 206{,}58$. $RC =]206{,}58; +\infty[$

(b) $\pi(\mu) = P(\text{rejeitar H}_0 \mid \mu) = P(\overline{X} > 206{,}58 \mid \overline{X} \sim N(\mu; 4^2)) = P\left(Z > \dfrac{206{,}58 - \mu}{4}\right)$

μ	$\pi(\mu)$
195	0,002
200	0,050
205	0,346
210	0,804
215	0,982
220	1,000
225	1,000



(c) $\pi(\mu) = P\left(Z > \frac{206{,}58 - \mu}{4}\right) = 50\% \Leftrightarrow \frac{206{,}58 - \mu}{4} = 0 \Leftrightarrow \mu = \overline{X}_C = 206{,}58$. Logo, para $\mu > 206{,}58$, o poder do teste será maior que 50%.

Problema 16

$$\hat{\alpha} = P\left(\overline{X} > 52 \mid \overline{X} \sim N(50;5^2)\right) = P\left(Z > \frac{52-50}{5}\right) = P(Z > 0{,}4) = 0{,}345.$$

Problema 17

Passo 1: $H_0 : \mu = 25$ versus $H_1 : \mu < 25$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu;2{,}5^2)$.

Passo 3: $\overline{X} = 20{,}5$

$$\hat{\alpha} = P\left(\overline{X} < 20{,}5 \mid \overline{X} \sim N(25;2{,}5^2)\right) = P\left(Z < \frac{20{,}5-25}{2{,}5}\right) = P(Z < -1{,}8) = 0{,}036.$$

Passo 4: Rejeitamos H_0 para qualquer nível de significância $\alpha > \hat{\alpha}$. Por exemplo, fixando $\alpha = 5\%$, rejeita-se H_0, isto é, há evidências de que a nova técnica é melhor que a anterior.

Problema 18

$$n\frac{\hat{\sigma}_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \quad ; \quad (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

$n = 10$; $\sigma^2 = 100$.

(a) $P(\hat{\sigma}_*^2 > a) = P\left(\chi^2(n) > \frac{n}{\sigma^2}a\right) = 10\% \Leftrightarrow \frac{n}{\sigma^2}a = 15{,}987 \Leftrightarrow a = 15{,}987 \times \frac{100}{10} = 159{,}87$

(b) $P(S^2 < a) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2}a\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{n-1}{\sigma^2}a = 3{,}325 \Leftrightarrow a = 3{,}325 \times \frac{100}{9} = 36{,}95$.

$$P(S^2 > b) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2}b\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{n-1}{\sigma^2}b = 16{,}919 \Leftrightarrow b = 16{,}919 \times \frac{100}{9} = 187{,}99$$

(c) $\alpha = P(S^2 < 163{,}16) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} \times 163{,}16\right) = P\left(\chi^2(9) < 14{,}684\right) = 0{,}90$.

(d) $\alpha = P(S^2 > 100) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2} \times 100\right) = P\left(\chi^2(9) > 9\right) = 0{,}437$.

(e) $\alpha = P(S^2 < 18) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} \times 18\right) = P\left(\chi^2(9) < 1{,}62\right) = 0{,}004$.

(f) $P(S^2 > 180) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2} \times 180\right) = P\left(\chi^2(9) > 16{,}2\right) = 0{,}063$.

Problema 19

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 300$ versus $H_1 : \sigma^2 \neq 300$.

Passo 2: $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(23)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeir a}) = P\left(\chi^2 < \chi_1^2 \text{ ou } \chi^2 < \chi_2^2\right) = 20\%$

$\chi_1^2 = 14{,}848$ e $\chi_2^2 = 32{,}007 . \Rightarrow RC = \left\{\chi^2 : \chi^2 < 14{,}84 \text{ ou } \chi^2 > 32{,}007\right\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \frac{23}{300} \times 400 = 30{,}667$

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a variância mudou, ao nível de 20%.

Problema 20

(a) A variância, já que a mesma é uma medida de dispersão em torno da média.

(b)

$S^2 = 114{,}09 . \Rightarrow$

$$IC(\sigma^2; 95\%) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}; \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right] = \left[\frac{10 \times 114{,}09}{20{,}483}; \frac{10 \times 114{,}09}{3{,}247}\right] = [55{,}7; 351{,}38]$$

Problema 21

(a) $P\left(|\,\overline{X} - 50| < tS/\sqrt{10}\right) = P(|\,T_9| < t) = 10\% \Leftrightarrow P(T_9 < t) = 5\% \Leftrightarrow t = 0{,}129$.

(b) $t_o = \dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{48-50}{\sqrt{120/10}} = -0{,}577 . \Rightarrow P(T_9 < -0{,}577) = 0{,}289$.

(c) $P(|\bar{X}-50|<2) = P\left(|T_9| < \dfrac{2}{S/\sqrt{n}}\right) = P\left(|T_9| < \dfrac{2}{\sqrt{120/10}}\right) = P(|T_9| < 0{,}577) = 0{,}422$.

Problema 22

Passo 1: $H_0 : \mu = 100$ versus $H_1 : \mu < 100$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\bar{X}-100}{S/4} \sim t(15)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$

$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(T_{15} < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = -1{,}753 . \Rightarrow$

$RC = \{t : t < -1{,}753\}$

Passo 4: $t_o = -5$.

Passo 5: Como t_o pertence à RC, rejeita-se H_0. Logo, há evidências de melhora no tempo médio de execução da tarefa.

Problema 23

(a) Passo 1: $H_0 : \mu = 1229$ versus $H_1 : \mu > 1229$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\bar{X}-1229}{S/\sqrt{10}} \sim t(9)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_9 < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}833 . \Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}833\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{1350-1229}{675{,}82/\sqrt{10}} = 0{,}566$.

Passo 5: Como t_o não pertence à RC, aceita-se H_0. Logo, não há evidências de que a média das cidades pequenas seja diferente da média do estado.

(b) Isso ocorre devido à grande variância da renda dos municípios.

Problema 24

(a) $IC(\mu;95\%) = \bar{x} \pm t_{15}\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 41{,}563 \pm 2{,}131 \times \dfrac{10{,}35}{4} = 41{,}563 \pm 5{,}514 = [36{,}05;47{,}08]$.

(b) Suposições: a porcentagem da receita gasta com alimentação pelos moradores dessa vila tem distribuição normal; foi feita uma amostragem aleatória simples.

Problema 25

(a) Passo 1: $H_0 : \mu \le 30$ versus $H_1 : \mu > 30$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 1{,}033^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\dfrac{\overline{X}_C - 30}{1{,}033} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 31{,}70 . \Rightarrow RC =]31{,}70; +\infty[$

Passo 4: $\overline{X} = 30{,}044$.

Passo 5: Como $\overline{X}$ não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que a média de precipitação pluviométrica anual é maior que 30,0.

(b) Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 30}{S/3} \sim t(8)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_8 < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}860 . \Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}860\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{30{,}004 - 30}{3{,}153/3} = 0{,}042$.

Passo 5: A conclusão é a mesma do item (a).

(c)

$$\beta = P(\text{aceitar } \mathrm{H_0} \,|\, \mathrm{H_0} \text{ é falsa}) = \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{X}} < 31{,}70 \,|\, \overline{\mathrm{X}} \sim \mathrm{N}(33; 1{,}033^2)\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{31{,}70 - 33}{1{,}033}\right) = P(Z < -1{,}258) = 0{,}1042.$$

Problema 26

$\overline{X} = 50{,}4$; $S^2 = \sigma^2 = 175{,}84$; n=50

Passo 1: $H_0 : \mu = 30$ versus $H_1 : \mu \ne 30$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 1{,}875^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_{C1} - 30}{1{,}875} = -1{,}96 \Leftrightarrow \overline{X}_{C1} = 26{,}33$; $\dfrac{\overline{X}_{C2} - 30}{1{,}875} = 1{,}96 \Leftrightarrow \overline{X}_{C2} = 33{,}68$.

$$RC = \{\bar{x} : \bar{x} < 26{,}33 \textbf{ ou } \bar{x} > 33{,}68\}$$

Passo 4: $\overline{X} = 50{,}4$.

Passo 5: Como $\overline{X}$ pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que o número médio de funcionários é diferente de 30.

$$IC(\mu; 95\%) = \bar{x} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50{,}4 \pm 1{,}96 \times \frac{13{,}260}{\sqrt{50}} = 50{,}4 \pm 3{,}675 = [46{,}72; 54{,}08].$$

Problema 27

Passo 1: $H_0 : \mu = 11$ versus $H_1 : \mu > 11$.

Passo 2: $\overline{X} \sim N(\mu; 0{,}135^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{\overline{X}_C - 11}{0{,}135} = 1{,}282 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 11{,}17 . \Rightarrow RC = \{\bar{x} : \bar{x} > 11{,}17\}$

Passo 4: $\overline{X} = 11{,}3$.

Passo 5: O valor observado pertence à RC. Logo, há evidências de que o consumo é maior que o anunciado pela fábrica.

Problema 28

(a) $H_0 : \mu = 50$ versus $H_1 : \mu \in \{45; 58\}$

(b) Erro I: Rejeitar H_0 sendo que H_0 é verdadeira, isto é, dizer que o valor real é diferente do declarado, quando na verdade o valor declarado está correto.

Erro II: Aceitar H_0 sendo que H_0 é falsa, isto é, dizer que o valor declarado está correto, quando na verdade não está.

(c)

$$\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeir a}) = P(\overline{X} < \overline{X}_{C1} \text{ ou } \overline{X} > \overline{X}_{C2} \,|\, \overline{\mathrm{X}} \sim \mathrm{N}(50;100)) =$$
$$= \mathrm{P}\left(Z < \frac{\overline{X}_{C1} - 50}{10}\right) + \mathrm{P}\left(Z > \frac{\overline{X}_{C2} - 50}{10}\right) = 10\% \Rightarrow$$
$$\frac{\overline{X}_{C1} - 50}{10} = -1{,}645 \Rightarrow \overline{X}_{C1} = 33{,}55$$
$$\frac{\overline{X}_{C2} - 50}{10} = 1{,}645 \Rightarrow \overline{X}_{C2} = 66{,}45$$
$$RC = \{\bar{x} : \bar{x} < 33{,}55 \textbf{ ou } \bar{x} > 66{,}45\}.$$

(d) Se $\mu = 45$:

$$\beta = P(\text{aceitar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ é falsa}) = P(33{,}55 < \overline{X} < 66{,}45 \,|\, \overline{\mathrm{X}} \sim \mathrm{N}(45;100)) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{33{,}55 - 45}{10} < Z < \frac{66{,}45 - 45}{10}\right) = P(-1{,}145 < Z < 2{,}145) = 0{,}858$$

Se $\mu = 58$:

$$\beta = P(\text{aceitar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ é falsa}) = P(33{,}55 < \overline{X} < 66{,}45 \,|\, \overline{\mathrm{X}} \sim \mathrm{N}(58;100)) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{33{,}55 - 58}{10} < Z < \frac{66{,}45 - 58}{10}\right) = P(-2{,}445 < Z < 0{,}845) = 0{,}794$$

(e) α : probabilidade de erro tipo I, isto é, probabilidade de afirmar que o valor declarado está incorreto, quando na verdade está correto.

β : probabilidade de erro tipo II, isto é, probabilidade de afirmar que o valor declarado está correto, quando na verdade está incorreto (depende do verdadeiro valor de μ).

Problema 29

Passo 1: $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$ versus $H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0$.

Passo 2: $Var(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = Var(\overline{X}_A) + Var(\overline{X}_B) = 100/25 + 100/16 = 10,25$

$$\overline{X}_A - \overline{X}_B \sim N(\mu_A - \mu_B; 10,25) \Leftrightarrow Z = \frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{10,25}} \sim N(0,1).$$

Sob H_0: $Z = \dfrac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B)}{\sqrt{10,25}} \sim N(0,1)$

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_C) = 5\% \Rightarrow z_c = 1,96$.

$RC = \{z : |z| > 1,96\}$

Passo 4: $z_o = 1,918$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, não rejeitamos H_0, ou seja, não há evidências de que as médias são diferentes.

Problema 30

Passo 1: $H_0 : p_S = p_N = p_0$ versus $H_1 : p_S \neq p_N$.

Passo 2: $Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N) = Var(\hat{p}_S) + Var(\hat{p}_N) = \dfrac{p_S(1-p_S)}{n_S} + \dfrac{p_N(1-p_N)}{n_N}$

$$\hat{p}_S - \hat{p}_N \sim N(p_S - p_N; Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N)) \Leftrightarrow Z = \frac{(\hat{p}_S - \hat{p}_N) - (p_S - p_N)}{\sqrt{Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N)}} \sim N(0,1).$$

Sob H_0: $Z = \dfrac{\hat{p}_S - \hat{p}_N}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n_S} + \dfrac{p_0(1-p_0)}{n_N})}} \sim N(0,1)$.

É preciso estimar o denominador de Z sob H_0. Sob H_0, a estimativa de $p_S = p_N = p_0$ é dada por: $\hat{p}_0 = \dfrac{n_s \hat{p}_S + n_N \hat{p}_N}{n_s + n_N} = 0,150$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_C) = 5\% \Rightarrow z_c = 1,96$.

$RC = \{z : |z| > 1,96\}$

Passo 4: $z_o = \dfrac{\hat{p}_S - \hat{p}_N}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_S} + \dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_N})}} = \dfrac{0{,}150 - 0{,}178}{\sqrt{0{,}00089}} = -0{,}932$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que as proporções nas duas regiões são diferentes.

Problema 31

Passo 1: $H_0 : p_1 = p_2 = p_0$ versus $H_1 : p_1 \neq p_2$.

Passo 2: Sob H_0: $Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n_1} + \dfrac{p_0(1-p_0)}{n_2})}} \sim N(0,1)$. $\Rightarrow \hat{p}_0 = \dfrac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = 0{,}310$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_C) = 5\% \Rightarrow z_c = 1{,}96$.

$$RC = \{z : |z| > 1{,}96\}$$

Passo 4: $z_o = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_2})}} = \dfrac{0{,}330 - 0{,}290}{\sqrt{0{,}0107}} = 1{,}223$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0, ou seja, não há evidências de que as preferências nos dois anos sejam diferentes.

Problema 32

(a)

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(X \in \{0,1,2\} \mid X \sim Binomia(15;0,5)) =$$
$$= 0{,}0037$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid X \sim Binomial(15;0,3)) = P(X > 2 \mid X \sim Binomial(15;0,3)) =$$
$$= 0{,}8732$$

(b)

$$\pi(\mu) = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid p) = P(X > 2 \mid X \sim Binomial(15;p))$$

(c)

p
0,05
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5

0,6

0,8

$\pi(p)$

0,964

0,816

0,398

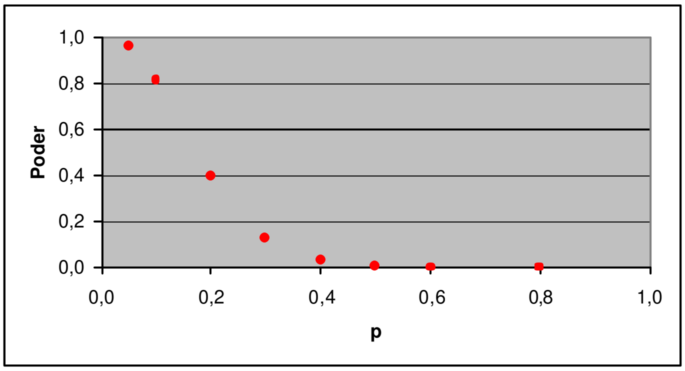
0,127

0,027

0,004

0,000

0,000



Problema 33

(a) $H_0 : \mu = 200$ versus $H_1 : \mu > 200$.

$$\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\overline{X} > \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(200;400/n)\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{\overline{X}_C - 200}{20/\sqrt{n}}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 200}{20/\sqrt{n}} = 1{,}645 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 200 + 32{,}9/\sqrt{n}$$

$$\beta = P(\text{aceitar } \mathrm{H}_0 \mid \overline{X} \sim N(210;/n)) = P\left(\overline{X} < \overline{X}_C \mid \overline{X} \sim N(210;400/n)\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{\overline{X}_C - 210}{20/\sqrt{n}}\right) = 10\% \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_C - 210}{20/\sqrt{n}} = -1{,}282 \Leftrightarrow \overline{X}_C = 210 - 25{,}64/\sqrt{n}$$

Logo: $200 + 32{,}9/\sqrt{n} = 210 - 25{,}64/\sqrt{n} \Leftrightarrow n = 34{,}27 \cong 35$.

(b) $\overline{X}_C = 200 + 32{,}9/\sqrt{n} = 200 + 32{,}9/\sqrt{34{,}27} = 205{,}62$. Nesse caso, a RC é dada por:

$RC =]205{,}62;+\infty[$.

Problema 34

Teste para a variância

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 80^2$ versus $H_1 : \sigma^2 \neq 80^2$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(24)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P\left(\chi^2 < \chi_1^2 \text{ ou } \chi^2 < \chi_2^2\right) = 5\%$.

$\chi_1^2 = 12{,}401$ e $\chi_2^2 = 39{,}364$.$\Rightarrow RC = \left\{\chi^2 : \chi^2 < 12{,}401 \text{ ou } \chi^2 > 39{,}364\right\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \dfrac{24}{80^2} \times 2500 = 9{,}375$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, há evidências de que a variância tenha se alterado.

Teste para a média

Passo 1: $H_0 : \mu = 250$ versus $H_1 : \mu > 250$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 250}{S/5} \sim t(24)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_{24} > t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}711 .\Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}711\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{280 - 250}{50/5} = 3$.

Passo 5: Como to pertence à RC, rejeita-se H_0. Logo, há evidências de que o número médio diário de clientes tenha aumentado.

Suposições: Amostragem aleatória simples; número diário de clientes do posto de gasolina tem distribuição normal.

Problema 35

Passo 1: $H_0 : \mu = 7$ versus $H_1 : \mu > 7$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 7}{S/3} \sim t(8)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(T_8 > t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1{,}860 .\Rightarrow RC = \{t : t > 1{,}860\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{10{,}556 - 7}{2{,}555/3} = 4{,}175$.

Passo 5: Como t_o pertence à RC, rejeita-se H_0. Logo, há evidências de melhoria.

$$IC(\mu;95\%) = \bar{x} \pm t_8 \frac{s}{\sqrt{n}} = 10{,}556 \pm 2{,}306 \times \frac{2{,}555}{3} = 10{,}556 \pm 1{,}964 = [8{,}59;12{,}52].$$

Problema 36

$$S^2 = 6{,}528 . \Rightarrow IC(\sigma^2;90\%) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2};\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right] = \left[\frac{8\times 6{,}528}{19{,}11};\frac{8\times 6{,}528}{3{,}37}\right] = [3{,}37;19{,}11]$$

Problema 37

(a) $\dfrac{erro}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} = 1{,}645 \Leftrightarrow n = \left(\dfrac{1{,}645}{erro}\right)^2 p(1-p)$. Tomando p=0,5 (para maximizar $p(1\text{-}p)$):

$n = 270{,}6 \cong 271$.

(b) $IC(p;0{,}95) = \hat{p} \pm z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}40 \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}4\times 0{,}6}{400}} = 0{,}40 \pm 0{,}048 = [0{,}352;0{,}448]$

Intervalo conservador:

$$IC(p;0{,}95) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{1}{4n}} = 0{,}40 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4\times 400}} = 0{,}40 \pm 0{,}049 = [0{,}351;0{,}449]$$

Problema 38

$$IC(p;0{,}90) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}40 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}4\times 0{,}6}{2000}} = 0{,}40 \pm 0{,}018 = [0{,}382;0{,}418]$$

Intervalo conservador:

$$IC(p;0{,}90) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{1}{4n}} = 0{,}40 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{1}{4\times 2000}} = 0{,}40 \pm 0{,}018 = [0{,}382;0{,}418]$$

Problema 39

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 \leq 25$ versus $H_1 : \sigma^2 > 5$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar H}_0 \,|\, \text{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = 5\% . \Rightarrow \chi_2^2 = 18{,}307$.

$RC = \{\chi^2 : \chi^2 > 18{,}307\}$.

Passo 4: $\chi^2_{obs} = \dfrac{10}{25}\times 48 = 19{,}2$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a variância seja maior que a anunciada pelo fabricante.

Problema 40

Teste para a variância

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 25$ versus $H_1 : \sigma^2 < 25$.

Passo 2: $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(7)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ é verdadeira}) = P(\chi^2 < \chi_1^2) = 5\% . \Rightarrow \chi_1^2 = 2{,}167$

$RC = \{\chi^2 : \chi^2 < 2{,}167\}$.

Passo 4: $\chi^2_{obs} = \dfrac{7}{25} \times 1{,}351 = 0{,}378$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, há evidências de que a variância tenha diminuído.

Teste para a média

Passo 1: $H_0 : \mu = 24$ versus $H_1 : \mu \neq 24$.

Passo 2: Sob H_0, $\dfrac{\overline{X} - 24}{S/\sqrt{8}} \sim t(7)$.

Passo 3: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = P(|T_7| > t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 2{,}365 . \Rightarrow RC = \{t : |t| > 2{,}365\}$

Passo 4: $t_o = \dfrac{24{,}6 - 24}{1{,}162/\sqrt{8}} = 1{,}369$.

Passo 5: Como t_o não pertence à RC, não rejeitamos H_0. Ou seja, não há evidências de que o rendimento médio seja diferente de 24%.

Problema 41

(a) X~Binomial(10;p) $\Rightarrow H_0 : p = 0{,}6 \Rightarrow \hat{\alpha} = P(X \leq 3 \,|\, X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 0{,}055$.

(b) $\hat{\alpha} = 2 \times P(X \leq 3 \,|\, X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 0{,}110$.

Problema 42

$\hat{\alpha} = 2 \times P(X \leq 6 \,|\, X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 1{,}266$.

Problema 43

Exemplo 12.7

$$\hat{\alpha} = P(\overline{X} > 314 \mid \overline{X} \sim N(300;90)) + P(\overline{X} < 300 - (314-300) \mid \overline{X} \sim N(300;90)) =$$

$$= P\left(Z > \frac{314-300}{\sqrt{90}}\right) + P\left(Z < \frac{286-300}{\sqrt{90}}\right) = 2 \times P(Z > 1{,}476) = 0{,}14$$

Problema 42

$$\hat{\alpha} = P(X \geq 6 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) + P(X \leq 6 - (6-6) \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) =$$

$$= 1 + P(X = 6 \mid X \sim Binomial(10;0{,}6)) = 1{,}251$$