Методы вычислений
Лабораторная работа № 1
"Методы решения СЛАУ"

По результатам работы необходимо составить итоговый отчёт.

Требования к отчёту:

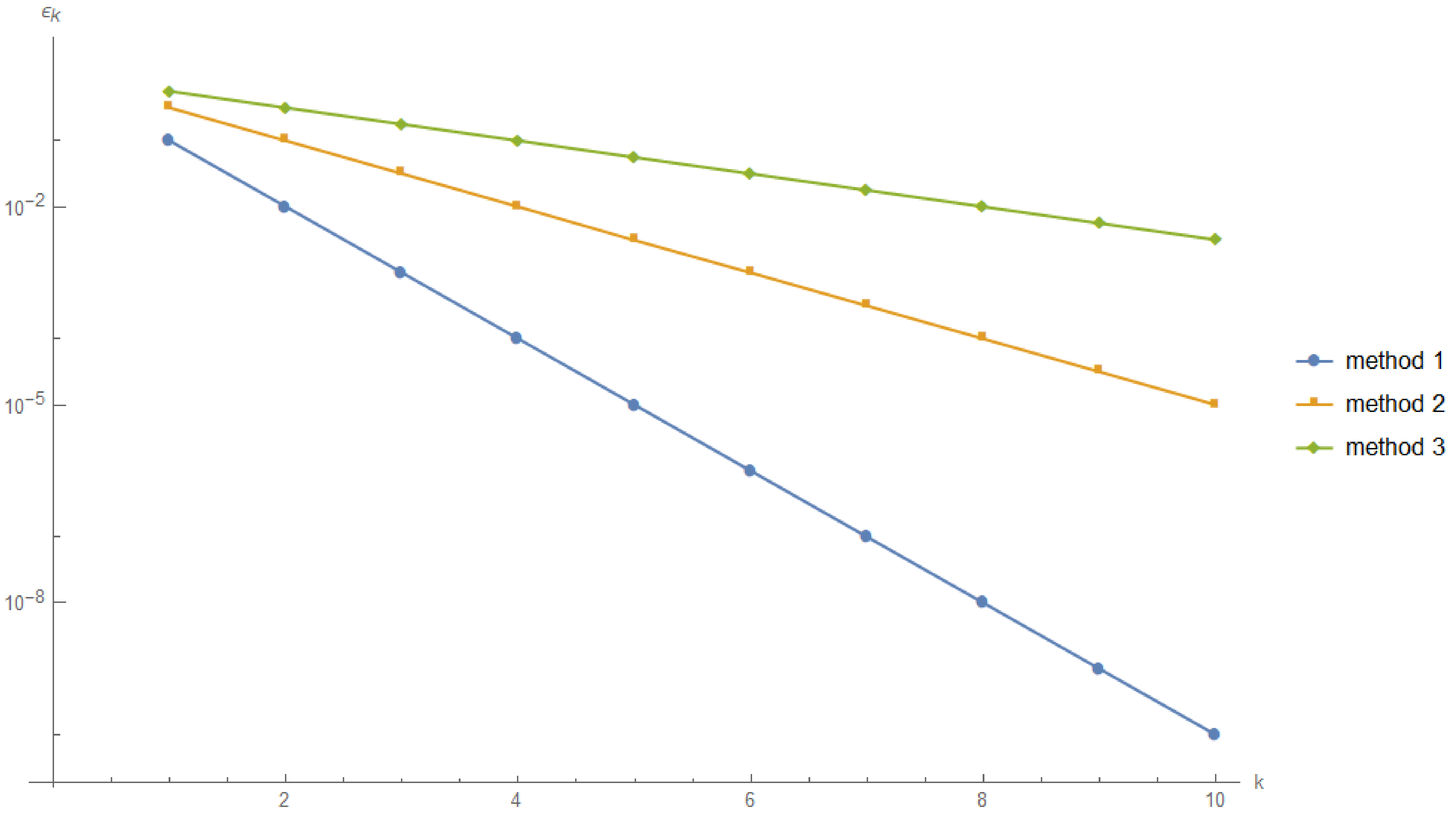
- Отчёт предоставляется в электронном виде
- Рекомендуемый язык – C++. Основное требование к программам – компактность и читаемость
- Отчёт должен содержать условие, согласно варианту, развернутые ответы на все вопросы, поставленные в задании. Внимательно читайте каждый пункт!
- В работе должны быть представлены собственные выводы проделанной работы (на основании полученных результатов).
- Каждая лабораторная работа будет оцениваться по десятибалльной системе. Оценка зависит от качества выполнения и срока сдачи работы.
- Работа должна быть сдана в срок. Работу позволяется сдавать только ОДИН раз.

Срок сдачи – `10.04.2022 23:00`.

Замечание!

В каждом из вариантов требуется строить *диаграммы сходимости итерационного процесса*. Диаграмма сходимости представляет собой график, ось абсцисс которого соответствует номеру итерации k, а ось ординат — норме погрешности $||x^k - x^*||$ либо невязки $||A\ x^k - b||$. При этом для наглядности ось погрешностей имеет логарифмическую шкалу (по основанию 10). Ниже показано, как строятся такие диаграммы в среде *Mathematica* (копируем код в документ и нажимаем Shift+Enter).

```
errors1 = {0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 1.*^-6, 1.*^-7, 1.*^-8, 1.*^-9, 1.*^-10};
errors2 = {0.3162, 0.1, 0.03162278, 0.01, 0.0031, 0.001, 0.000316, 0.0001, 0.00003162, 0.00001};
errors3 = {0.5623413, 0.31622776, 0.17782, 0.1, 0.056, 0.0316, 0.01778, 0.01, 0.005623, 0.003164};
ListLogPlot[{Legended[errors1, "method 1"], Legended[errors2, "method 2"], Legended[errors3, "method 3"]},
 PlotMarkers → Automatic, Joined → True, AxesLabel → {"k", "ϵk"}]
```



Вариант N (N – номер в списке группы)

1. Заполнить верхний треугольник матрицы A размером 256×256 рациональными случайными числами из полуинтервала $\left[-2^{N/4}, 2^{N/4}\right)$. Нижний треугольник матрицы A заполнить таким образом, чтобы выполнялось $A = A^T$. Диагональные элементы получить из формулы $a_{ii} = 1 + \sum_{j \neq i} \left|a_{ij}\right|$.

2. Заполнить вектор y длиной соответствующей размеру матрицы A рациональными случайными числами из полуинтервала $\left[-2^{N/4}, 2^{N/4}\right)$. Умножив матрицу A на вектор y получить вектор правой части b. Таким образом имеем СЛАУ $Ax = b$, точным решением которой является вектор y.

3. Найти число обусловленности матрицы A, вычислив A^{-1} методом Гаусса-Жордана, в качестве нормы матрицы выбрать кубическую норму.

4. Решить СЛАУ $Ax = b$ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

5. Получить LUP-разложение матрицы A и решить полученную систему.

6. Решить СЛАУ $Ax = b$ методом квадратного корня. Выписать LDL^T-разложение матрицы системы.

7. Получить максимально точное решение СЛАУ $Ax = b$ методом релаксации (с параметром $1 - \frac{N}{40}$). В отчёт включить доказательство сходимости.

8. Проделать сто раз пункты 1-7 и вывести отчёт в формате .txt. В отчет должно входить:

- Минимальное и максимальное число обусловленности, а также среднее арифметическое для всех матриц. Матрицу с максимальным числом обусловленности необходимо сохранить в отдельный файл (понадобится позже).

- Среднее время нахождения обратной матрицы.

- Для каждого из использованных методов решения СЛАУ указать минимальную, максимальную и среднюю нормы разности решения с точным решением y. В качестве нормы вектора взять кубическую норму.

- Среднее время решения СЛАУ методом Гаусса.
- Среднее время построения LUP-разложения.
- Среднее время решения СЛАУ $LUx = \tilde{b}$.
- Среднее время решения СЛАУ методом квадратного корня.
- Среднее время решения СЛАУ методом релаксации.
- Максимальное, среднее и минимальное количество итераций метода релаксации, необходимых для получения приближенного решения.

Даны следующие матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} N^2+15 & N-1 & -1 & -2 \\ N-1 & -15-N^2 & -N+4 & -4 \\ -1 & -N+4 & N^2+8 & -N \\ -2 & -4 & -N & N^2+10 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1+N & 2+N & 3+N & 4+N & 5+N & 6+N & 7+N \\ 100N & 1000N & 10000N & 100000N & -1000N & -10000N & -100000N & 1 \\ N & -1+N & -2+N & -3+N & -4+N & -5+N & -6+N & -7+N \\ N-1000 & 10N-1000 & 100N-1000 & 1000N-1000 & 10000N-1000 & -N & -N+1 & -N+2 \\ -2N & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ N-2019 & -N+2020 & N-2021 & -N+2022 & N-2023 & -N+2024 & N-2025 & -N+2026 \\ 2N-2000 & 4N-2005 & 8N-2010 & 16N-2015 & 32N-2020 & 2019N & -2020N & 2021N \\ 1020-2N & -2924+896N & 1212+9808N & -2736+98918N & 1404-11068N & -1523-8078N & 2625-102119N & -1327+1924N \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A_2 = \widetilde{A_2}^T \widetilde{A_2}.}$$

9. Выполнить пункты 2-7 для матриц A_1 и A_2.

10. Для A_2 и матрицы с максимальным числом обусловленности из пункта 8:

- исследовать (путём решения нескольких СЛАУ) влияние возмущения вектора b на погрешность полученного решения для матрицы с максимальным числом обусловленности (сравнить с теоретической оценкой). Сделайте соответствующие выводы.

- построить диаграмму сходимости решения СЛАУ методом релаксации (с параметрами равными $0.8, 1.0, 1.2$). Попробуйте оценить наиболее оптимальный параметр релаксации.

11. Написать отчёт в формате .docx (или .pdf), в котором изложить все выводы на основании полученных результатов. Результаты пунктов 9 и 10 указывать в отчёте обязательно!

12. Папку с проектом и два файла отчета добавить в итоговый архив .zip, расширение которого по необходимости переименовать в .mv.