

# Методы вычислений

## Лабораторная работа № 1

### "Методы решения СЛАУ"

По результатам работы необходимо составить итоговый отчёт.

Требования к отчёту:

- Отчёт предоставляется в электронном виде
- Рекомендуемый язык – C++. Основное требование к программам – компактность и читаемость
- Отчёт должен содержать условие, согласно варианту, развернутые ответы на все вопросы, поставленные в задании. Внимательно читайте каждый пункт!
- В работе должны быть представлены собственные выводы проделанной работы (на основании полученных результатов).
- Каждая лабораторная работа будет оцениваться по десятибалльной системе. Оценка зависит от качества выполнения и срока сдачи работы.
- Работа должна быть сдана в срок. Работу допускается сдавать только ОДИН раз.

Срок сдачи – **10.04.2022 23:00**.

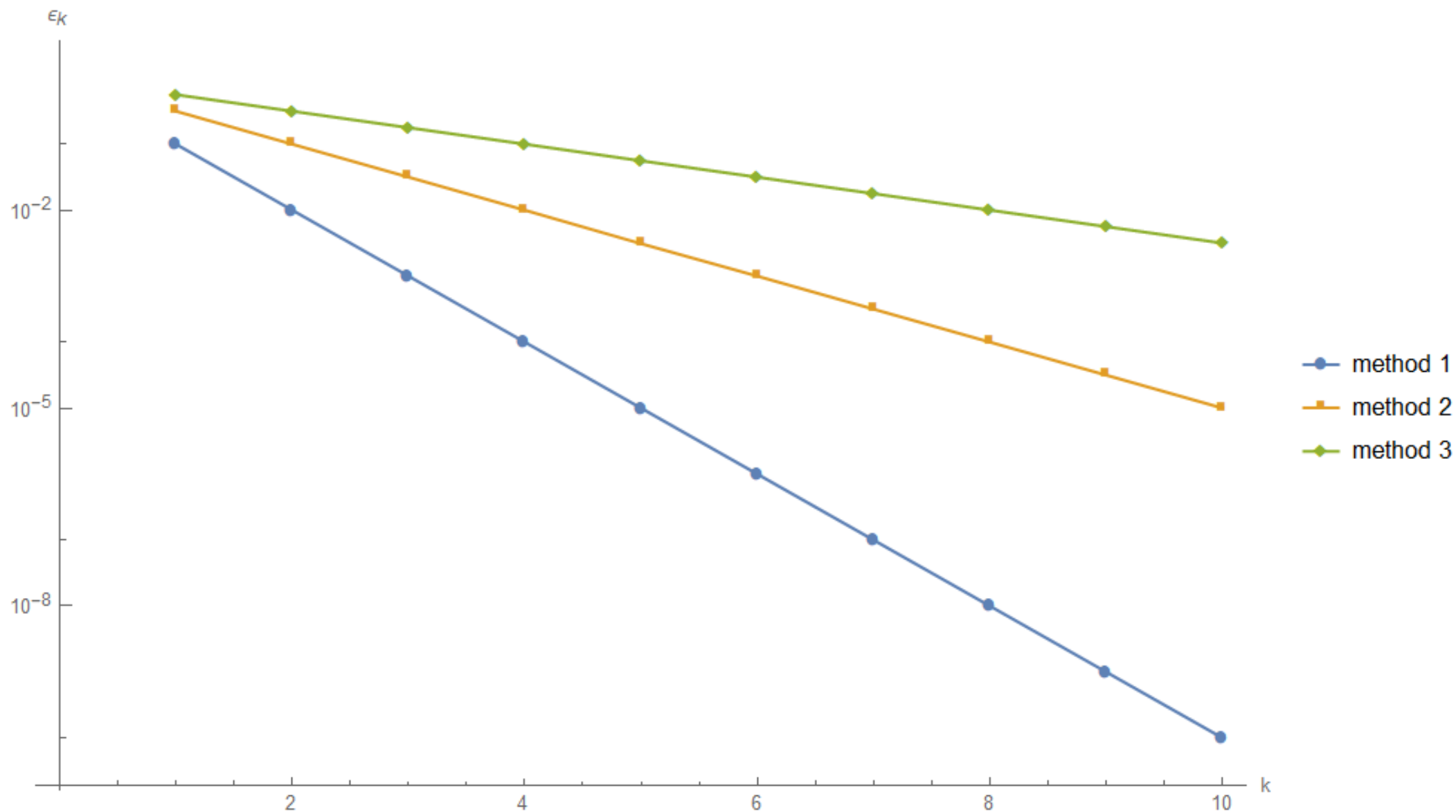
#### Замечание!

В каждом из вариантов требуется строить *диаграммы сходимости итерационного процесса*. Диаграмма сходимости представляет собой график, ось абсцисс которого соответствует номеру итерации  $k$ , а ось ординат — норме погрешности  $\|x^k - x^*\|$  либо невязки  $\|Ax^k - b\|$ . При этом для наглядности ось погрешностей имеет логарифмическую шкалу (по основанию 10). Ниже показано, как строятся такие диаграммы в среде *Mathematica* (копируем код в документ и нажимаем Shift+Enter).

```

errors1 = {0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 1.*^-6, 1.*^-7, 1.*^-8, 1.*^-9, 1.*^-10};
errors2 = {0.3162, 0.1, 0.03162278, 0.01, 0.0031, 0.001, 0.000316, 0.0001, 0.00003162, 0.00001};
errors3 = {0.5623413, 0.31622776, 0.17782, 0.1, 0.056, 0.0316, 0.01778, 0.01, 0.005623, 0.003164};
ListLogPlot[{Legended[errors1, "method 1"], Legended[errors2, "method 2"], Legended[errors3, "method 3"]},
  PlotMarkers -> Automatic, Joined -> True, AxesLabel -> {"k", " $\epsilon_k$ "}]

```



## Вариант N (N – номер в списке группы)

1. Заполнить верхний треугольник матрицы  $A$  размером  $256 \times 256$  рациональными случайными числами из полуинтервала  $[-2^{N/4}, 2^{N/4})$ . Нижний треугольник матрицы  $A$  заполнить таким образом, чтобы выполнялось  $A = A^T$ . Диагональные элементы получить из формулы  $a_{ii} = 1 + \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ .
2. Заполнить вектор  $y$  длиной соответствующей размеру матрицы  $A$  рациональными случайными числами из полуинтервала  $[-2^{N/4}, 2^{N/4})$ . Умножив матрицу  $A$  на вектор  $y$  получить вектор правой части  $b$ . Таким образом имеем СЛАУ  $Ax = b$ , точным решением которой является вектор  $y$ .
3. Найти число обусловленности матрицы  $A$ , вычислив  $A^{-1}$  методом Гаусса-Жордана, в качестве нормы матрицы выбрать кубическую норму.
4. Решить СЛАУ  $Ax = b$  методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.
5. Получить  $LUP$ -разложение матрицы  $A$  и решить полученную систему.
6. Решить СЛАУ  $Ax = b$  методом квадратного корня. Выписать  $LDL^T$ -разложение матрицы системы.
7. Получить максимально точное решение СЛАУ  $Ax = b$  методом релаксации (с параметром  $1 - \frac{N}{40}$ ). В отчёт включить доказательство сходимости.
8. Прodelать сто раз пункты 1-7 и вывести отчёт в формате .txt. В отчет должно входить:
  - Минимальное и максимальное число обусловленности, а также среднее арифметическое для всех матриц. Матрицу с максимальным числом обусловленности необходимо сохранить в отдельный файл (понадобится позже).
  - Среднее время нахождения обратной матрицы.
  - Для каждого из использованных методов решения СЛАУ указать минимальную, максимальную и среднюю нормы разности решения с точным решением  $y$ . В качестве нормы вектора взять кубическую норму.

- Среднее время решения СЛАУ методом Гаусса.
- Среднее время построения  $LUP$ -разложения.
- Среднее время решения СЛАУ  $LUx = \tilde{b}$ .
- Среднее время решения СЛАУ методом квадратного корня.
- Среднее время решения СЛАУ методом релаксации.
- Максимальное, среднее и минимальное количество итераций метода релаксации, необходимых для получения приближенного решения.

Даны следующие матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} N^2 + 15 & N - 1 & -1 & -2 \\ N - 1 & -15 - N^2 & -N + 4 & -4 \\ -1 & -N + 4 & N^2 + 8 & -N \\ -2 & -4 & -N & N^2 + 10 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 + N & 2 + N & 3 + N & 4 + N & 5 + N & 6 + N & 7 + N \\ 100N & 1000N & 10000N & 100000N & -1000N & -10000N & -100000N & 1 \\ N & -1 + N & -2 + N & -3 + N & -4 + N & -5 + N & -6 + N & -7 + N \\ N - 1000 & 10N - 1000 & 100N - 1000 & 1000N - 1000 & 10000N - 1000 & -N & -N + 1 & -N + 2 \\ -2N & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ N - 2019 & -N + 2020 & N - 2021 & -N + 2022 & N - 2023 & -N + 2024 & N - 2025 & -N + 2026 \\ 2N - 2000 & 4N - 2005 & 8N - 2010 & 16N - 2015 & 32N - 2020 & 2019N & -2020N & 2021N \\ 1020 - 2N & -2924 + 896N & 1212 + 9808N & -2736 + 98918N & 1404 - 11068N & -1523 - 8078N & 2625 - 102119N & -1327 + 1924N \end{pmatrix}.$$

$$A_2 = \widetilde{A}_2^T \widetilde{A}_2.$$

9. Выполнить пункты 2-7 для матриц  $A_1$  и  $A_2$ .

10. Для  $A_2$  и матрицы с максимальным числом обусловленности из пункта 8:

- исследовать (путём решения нескольких СЛАУ) влияние возмущения вектора  $b$  на погрешность полученного решения для матрицы с максимальным числом обусловленности (сравнить с теоретической оценкой). Сделайте соответствующие выводы.
- построить диаграмму сходимости решения СЛАУ методом релаксации (с параметрами равными 0.8, 1.0, 1.2). Попробуйте оценить наиболее оптимальный параметр релаксации.

**11.** Написать отчёт в формате .docx (или .pdf), в котором изложить все выводы на основании полученных результатов. Результаты пунктов 9 и 10 указывать в отчёте обязательно!

**12.** Папку с проектом и два файла отчета добавить в итоговый архив .zip, расширение которого по необходимости переименовать в .mv.