РАЗДЕЛ I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

ГЛАВА 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ.

§ 1. Введение в теорию вероятностей.

Закономерности *детерминистические* (определенные).

Закономерности *статистические* (*вероятностные*).

Статистические закономерности исследуются методами специальных математических дисциплин – теории вероятностей и математической статистики.

Цель теории вероятностей – осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности.

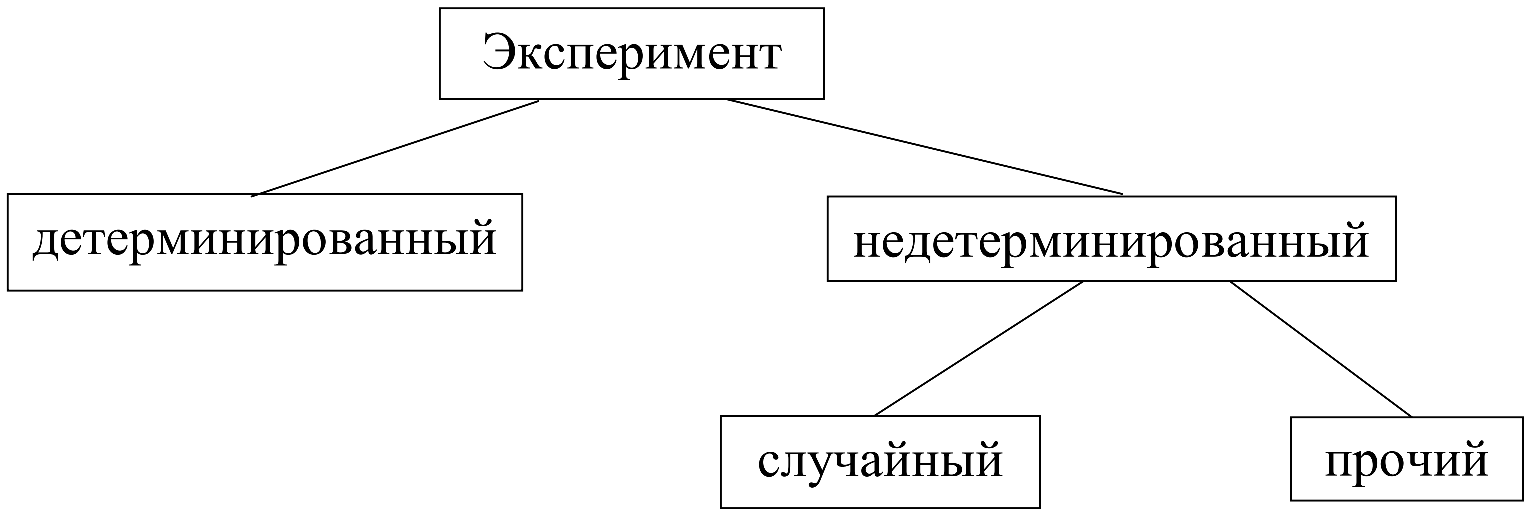
Определение 1. *Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая математические модели случайных экспериментов.*

Любой эксперимент S характеризуется двумя факторами:

1) комплекс условий U, при котором S происходит;

2) результаты эксперимента, то есть некоторые события A_1, A_2, ..., наступление или ненаступление которых регистрируется в ходе эксперимента.

Типы экспериментов.



Определение 2. *Эксперимент S называется детерминированным, если комплекс условий U однозначно определяет результат эксперимента.*

Примеры экспериментов.

S_1 (детерминированный)**.** U = {*дистиллированная вода* – 1 *литр,* t = 20°С*,* p = 760 *мм рт. ст.*}, A_1 = {*вода в жидком состоянии*}, A_2 = {*вода в твердом состоянии*}, A_3 = {*вода в газообразном состоянии*}.

Определение 3. *Событие A, которое при данном комплексе условий U неизбежно наступает, называется достоверным событием. Событие B, которое неизбежно не наступает, называется невозможным событием.*

В детерминированных экспериментах мы имеем дело только с достоверными и невозможными событиями.

S_2. U = {*30 экзаменационных билетов, студент наудачу вытягивает один билет*}, A = {*номер извлеченного билета четный*}. $U \to A$ или $\overline{A}$.

S_3. U = {*над плоской поверхностью наудачу бросают симметричную монету*}, A = {*выпал герб*}. $U \to A$ или $\overline{A}$.

S_4. U = {*рассматривается количество обращений к веб-серверу за сутки*}, A_k = {*количество обращений* = k}, где k – некоторое неотрицательное целое число. $U \to A_k$ или $\overline{A_k}$.

S_5. U = {*аудитория* 513 *главного корпуса БГУ,* 2015 *год* 1 *марта* 9.00 *утра*}, A = {*в аудитории находится 14 студенток*}. $U \to A$ или $\overline{A}$.

Определение 4. *Случайным экспериментом называется недетерминированный эксперимент S, для которого выполняются следующие два свойства:*

1) *эксперимент допускает массовое, n-кратное* (*n сколь угодно большое*) *повторение;*

2) *выполняется свойство статистической устойчивости.*

Свойство статистической устойчивости.

Пусть эксперимент S осуществлен n-кратно (серия из n независимых экспериментов). Обозначим:

$m_n(A)$ – число наступлений события A в этой серии экспериментов;

$\nu_n(A) = m_n(A) / n$ – относительная частота наступления события A.

Свойство статистической устойчивости состоит в том, что для любого события A при возрастании n последовательность относительных частот сходится к некоторому пределу:

$$\nu_n(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(A),$$

где $\boldsymbol{P}(A) \in [0, 1]$ – вероятность случайного события A.

Для экспериментов $\mathbf{S_2} - \mathbf{S_4}$ свойство статистической устойчивости выполняется, а для $\mathbf{S_5}$ – нет.

$\mathbf{S_2}$: $v_n(A) \to ½$ (то есть приблизительно в половине случаев выпадает четный номер билета).

$\mathbf{S_3}$: $v_n(A) \to ½$.

$\mathbf{S_4}$: $v_n(A_k) \to \boldsymbol{P}(A_k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda > 0$ – некоторый параметр, который характеризует среднее число обращений к серверу за сутки (закон Пуассона).

Таким образом, эксперименты $\mathbf{S_2} - \mathbf{S_4}$ – случайные, а $\mathbf{S_5}$ – прочий недетерминированный эксперимент.

В случайном эксперименте мы имеем дело не только с достоверными и невозможными событиями, но и со случайными событиями.

§ 2. Случайные события и соотношения между ними.

Рассмотрим случайный эксперимент S.

Определение 1. *События, составляющие множество* $\{\omega\}$ *простейших исходов случайного эксперимента S, называются элементарными событиями* (*ЭС*)*, если:*

1) *все элементарные события различны;*
2) *наступление одного из исходов исключает наступление всех остальных;*
3) *в ходе эксперимента одно из элементарных событий неизбежно наступает.*

Множество $\Omega = \{\omega\}$, составленное из всех элементарных событий, называется *пространством элементарных событий* (ПЭС).

Определение 2. *Объединение A некоторых элементарных событий из Ω называется случайным событием. Иначе говоря, случайное событие – это подмножество пространства элементарных событий: $A \subseteq \Omega$. При этом $A = \Omega$ – достоверное событие, $A = \varnothing$ – невозможное событие.*

Замечание 1. A наступает всякий раз, когда наступает некоторое элементарное событие из A.

Замечание 2. Пространство элементарных событий строится неоднозначно исходя из содержательного смысла задачи.

Примеры.

S_1. Бросание монеты. $\omega_1 = \{\textit{Г}\}$, $\omega_2 = \{P\}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $|\Omega| = 2$.

S_2. Бросание двух монет. $\omega_1 = \{(\textit{Г}, \textit{Г})\}$, $\omega_2 = \{(\textit{Г}, P)\}$, $\omega_3 = \{(P, \textit{Г})\}$, $\omega_4 = \{(P, P)\}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $|\Omega| = 4$.

S_3. Экзаменатор – студент. $\omega_i = \{$*номер извлеченного билета* $= i\}$, $i = \overline{1, 30}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{29}, \omega_{30}\}$, $A = \{\omega_2, \omega_4, \ldots, \omega_{28}, \omega_{30}\} \subset \Omega$, $|A| = 15$.

S_4. Веб-сервер. $\omega_i = \{$*число обращений* $= i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots\}$ – счетное множество, $A = \{$*число обращений больше* $k\} = \{\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \ldots\}$ – счетное.

S_5. Имеется некоторый интернет-магазин. Нас интересует его ежедневный доход. $\omega_x = \{$*доход за один день составил величину* $x\}$, где $x \in \mathbb{R}$, $\Omega = \{\omega_x : x \in \mathbb{R}\}$, $A = \{$*доход меньше чем* $z\} = \{\omega_x : x < z\}$.

Соотношения между случайными событиями.

Пусть A, B, $C \subseteq \Omega$.

Обозначение	Название	Пояснение
$B \subset C$	Событие B влечет C	C наступает всякий раз, когда наступает B
$B = C$	События B и C эквивалентны	B наступает тогда и только тогда, когда наступает C
$A = \overline{B}$	A есть событие, противоположное B	A наступает тогда и только тогда, когда не наступает B
$A = B \cap C$	A есть произведение B и C	A наступает тогда и только тогда, когда B и C наступают вместе
$B \cap C = \varnothing$	B и C несовместны	Совместное наступление B и C невозможно
$A = B \cup C$	A есть сумма B и C	A наступает тогда и только тогда, когда наступает B или C, или оба вместе
$A = B \setminus C = B \cap \overline{C}$	A есть разность событий B минус C	A наступает тогда и только тогда, когда наступает B и не наступает C
$A = B \,\Delta\, C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$	A есть симметричная разность B и C	A наступает тогда и только тогда, когда наступает либо B, либо C (не одновременно)

Правило де Моргана.

Пусть событие A есть результат применения к событиям B, C, D, … действий $\cap$, $\cup$, $\subset$. Тогда, чтобы получить $\overline{A}$, достаточно все события поменять на противоположные, а действия поменять по схеме $\cap \to \cup$, $\cup \to \cap$, $\subset \to \supset$.

§ 3. Понятие вероятности. Простейшие вероятностные модели.

Рассмотрим три типа простейших вероятностных моделей: классическую, дискретную, геометрическую.

1. Классическая вероятностная модель – это математическая модель простейших случайных экспериментов.

Пример. Экзаменатор – студент. N билетов. $\omega_i = \{\textit{номер извлеченного билета} = i\}$, $i = \overline{1, N}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$.

Определение 1. *Классическая вероятностная модель – это математическая модель простейшего эксперимента, определяемая следующими четырьмя аксиомами:*

А1. *Пространство элементарных событий конечно:* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, $N < \infty$;

А2. *Каждому случайному событию* $A \subseteq \Omega$ *поставлено в соответствие такое число* $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(A)$, *что* $0 \le \boldsymbol{P}(A) \le 1$, $\boldsymbol{P}(\varnothing) = 0$, $\boldsymbol{P}(\Omega) = 1$. *При этом число* $\boldsymbol{P}$ *называется вероятностью события* A, *а функция* $\boldsymbol{P}(\bullet)$ *называется вероятностной функцией;*

А3 (аксиома конечной аддитивности). *Для любых несовместных случайных событий* A, B *из* Ω $(A \cap B = \varnothing)$ *вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий:* $\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B)$;

А4 (аксиома равновероятности). *Все* N *элементарных событий равновероятны:* $\boldsymbol{P}(\omega_1) = \boldsymbol{P}(\omega_2) = \ldots = \boldsymbol{P}(\omega_N) = const = p$, *при этом число* $p \in (0, 1)$ *называется элементарной вероятностью.*

Теорема 1. *Для классической вероятностной модели, определяемой аксиомами* A1 – A4, *вероятность* $p = 1/N$, *а вероятность произвольного случайного события* $A \in \Omega$ *определяется соотношением*

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{M}{N}, \tag{1}$$

где $N = |\Omega|$ *– число всех элементарных событий,* $M = |A|$ *– число элементарных событий, входящих в* A (*благоприятствующих наступлению события* A).

Пример 1 (гипергеометрическое распределение вероятностей). В непрозрачном сосуде тщательно перемешаны K однотипных шаров, среди которых k ($k \le K$) красных и ($K - k$) белых. Наудачу извлекается комплект из L шаров. Вычислить вероятность события A_l = {*среди* L *извлеченных шаров* l *красных*} для $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Шаг 1.

ω_i = {*i-й вариант извлечения комплекта шаров из K имеющихся без учета порядка извлечения*}, $i = \overline{1, N}$, $N = C_K^L < \infty$.

Шаг 2.

$$\boldsymbol{P}_l = \boldsymbol{P}(A_l) = |A_l| \,/\, N = M_l \,/\, N.$$

Если $l > \min\{k, L\}$, то $A_l = \varnothing$ и $M_l = 0$.

Если $0 \le l \le \min\{k, L\}$, то $M_l = C_k^l C_{K-k}^{L-l}$.

$$\boldsymbol{P}_l = \boldsymbol{P}(A_l) = \begin{cases} \dfrac{C_k^l C_{K-k}^{L-l}}{C_K^L}, & l = 0, 1, \ldots, \min\{k, L\}; \\ 0, & l > \min\{k, L\}. \end{cases} \tag{2}$$

Определение 2. *Набор вероятностей, определенный* (2)*, называется гипергеометрическим распределением вероятностей.*

2. Дискретная вероятностная модель.

Определение 3. *Дискретная вероятностная модель определяется следующей системой трех аксиом* (*штрих обозначает обобщение аксиомы*)*:*

A1′. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ – *дискретное множество* (*конечное либо счетное*).

A2 (без изменений).

A3′ (аксиома счетной аддитивности). *Для любой последовательности* $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ *попарно несовместных случайных событий* ($A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$) *выполняется соотношение*

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(A_i).$$

Вероятность i-го события – $\boldsymbol{P}(\omega_i) = p_i$, $i = \overline{1, N}$, называется i-й *элементарной вероятностью*.

Теорема 2. *В рамках дискретной вероятностной модели, определяемой аксиомами* A1′, A2, A3′*, вероятность случайного события A равна сумме ряда, составленного из тех элементарных вероятностей, которые соответствуют элементарным событиям, благоприятствующим наступлению события A:*

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(A) = \sum_{k:w_k \in A} p_k\,, \;\; A \subseteq \Omega. \tag{3}$$

Следствие. *Элементарные вероятности удовлетворяют условию нормировки:*

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = 1.$$

Пример 2 (число обращений к веб-серверу).

$$p_k = \boldsymbol{P}(\omega_k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda > 0$ – среднее число обращений к серверу за сутки.

3. Геометрическая вероятностная модель – это обобщение классической вероятностной модели на случай, когда пространство элементарных событий Ω более чем счетно (является ограниченным подмножеством m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, \ldots$). Все элементарные события равновозможны.

Определение 4. *Числовая функция* $\mu = \mu(A)$ *называется мерой, если она удовлетворяет следующим свойствам:*

1. *неотрицательность:* $\mu(A) \geq 0$;
2. *ограниченность:* $\mu(\Omega) < \infty$;
3. *монотонность: если* $A \subset B$, *то* $\mu(A) \leq \mu(B)$;
4. *счетная аддитивность:* $\mu(\bullet)$ *удовлетворяет свойству, аналогичному* А3′.

В $\mathbb{R}^m$ будем использовать меру Лебега: $\mu(A) = mes_m(A)$. При $m = 1$ $\mu(A)$ – длина отрезка A, при $m = 2$ $\mu(A)$ – площадь плоской фигуры A, при $m = 3$ $\mu(A)$ – объем тела A и т.д.

Определение 5. *В рамках геометрической вероятностной модели вероятность случайного события* $A \subseteq \Omega$ *определяется соотношением*

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{4}$$

Замечание. Не для всех подмножеств A существует понятие длины и др. Здесь требуется, чтобы $A \subseteq \Omega$ было измеримо по Лебегу.

Пример 3 (жребий в игре «Что? Где? Когда?»). Отсчитываем угловое положение остановившейся стрелки – ω. $\Omega = [0,\ 2\pi)$. Случайное событие $A = \{$*стрелка остановилась в секторе* $[\varphi_1,\ \varphi_2)\} = [\varphi_1,\ \varphi_2)$. Тогда согласно (4)

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}.$$

§ 4. Алгебра, σ-алгебра и их свойства. Измеримое пространство.

Определение 1. *Пусть* Ω *– произвольное пространство элементарных событий, тогда некоторая система* F *подмножеств из* Ω *называется алгеброй случайных событий, если:*

1) $\Omega \in F$;

2) *если* $A \in F$, *то* $\overline{A} \in F$;

3) *если* $A, B \in F$, *то* $A \cup B \in F$.

Следствие 1. *Справедливы еще два свойства:*

4) $\varnothing \in F$;

5) *если* $A, B \in F$, *то* $A \cap B \in F$.

Следствие 2. *Алгебра замкнута относительно конечного числа операций* $\cap, \cup, -$.

Определение 2. *Алгебра F подмножеств из Ω называется σ-алгеброй, если свойства 3 и 5 выполняются в обобщенном виде для счетного множества событий:*

$$\forall A_1, A_2, \ldots \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F.$$

Следствие. *σ-алгебра замкнута относительно счетного множества операций* $\cap, \cup, -$.

Определение 3. *Измеримым пространством называется пара математических объектов (Ω, F), где Ω – пространство элементарных событий, F – алгебра или σ-алгебра подмножеств из Ω.*

Примеры измеримых пространств.

1. Измеримое пространство (Ω, 2^Ω), где Ω – дискретное множество (конечное либо счетное). Здесь $F = 2^\Omega$ – множество всех подмножеств из Ω. Если $|\Omega| = N < \infty$, то $|F| = 2^N$.

2. Измеримое пространство ($\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$).

Здесь $\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – числовая прямая. Построим σ-алгебру на числовой прямой. Для этого выберем $\forall\, x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим числовой промежуток $A_x = (-\infty, x)$.

Определение 4. *Назовем базовой системой подмножеств на числовой прямой следующую систему интервалов:* $F_0 = \{\varnothing, A_x : x \in \mathbb{R}\}$.

Заметим, что F_0 алгеброй не является, так как $\overline{A}_x = [x, +\infty) \notin F_0$.

Построим систему подмножеств F_1 следующим образом: 1) включим туда F_0; 2) пополним F_0 всевозможными счетными пересечениями, объединениями и дополнениями подмножеств из F_0. Тогда F_1 является σ-алгеброй.

Определение 5. *Построенная указанным способом* σ-*алгебра* F_1 *называется борелевской* (*в честь французского математика Э. Бореля*) σ-*алгеброй на числовой прямой и обозначается* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^1) ::= F_1$. *Элементы* F_1 *называются борелевскими множествами.*

Свойства борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}$.

С1. Для $\forall\ z \in \mathbb{R}$ одноточечное множество $\{z\}$ является борелевским множеством.

Доказательство.

$$\{z\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[z,\ z+\frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_{z+1/n} \setminus A_z) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_{z+1/n} \cap \overline{A}_z). \quad (1)$$

С2. Борелевскими множествами являются произвольные числовые промежутки вида (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

С3. Множество рациональных чисел является борелевским: $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$.

Доказательство. $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{q_i\}$ – счетная сумма одноточечных множеств.

С4. Множество иррациональных чисел является борелевским.

3. Измеримое пространство $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$.

$\Omega = \mathbb{R}^m$. $\mathcal{B}^m = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ строится по аналогичной схеме, но в качестве базовой системы F_0 берется система параллелепипедов в $\mathbb{R}^m$:

$$F_0 = \{\varnothing,\ A_x = A_{x_1} \times A_{x_2} \times \ldots \times A_{x_n} : x = (x_i) \in \mathbb{R}^m\}. \tag{2}$$

§ 5. Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство.

Определение 1 (*определение А.Н. Колмогорова*)**.** *Пусть* Ω *– произвольное пространство элементарных событий,* F *–* $\forall$ *система подмножеств из* Ω*. Числовая функция* $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(A) : F \to \mathbb{R}$ *называется вероятностной мерой,* $\forall$ *подмножество* $A \in F$ *называется случайным событием, а число* $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(A)$ *– вероятностью случайного события* A*, если выполняются следующие аксиомы:*

A1. *F есть алгебра подмножеств из* Ω*;*

A2. $0 \le \boldsymbol{P}(A) \le 1 \quad \forall A \in F$*;*

A3 (аксиома нормировки). $\boldsymbol{P}(\Omega) = 1$*;*

A4 (аксиома конечной аддитивности). *Для любых несовместных случайных событий* $A, B \in F$ $(A \cap B = \varnothing)$ *выполняется* $\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B)$.

При этом если Ω *– бесконечное множество, то аксиомы* **A1**, **A4** *обобщаются следующим образом:*

A1′. *F – σ-алгебра подмножеств из* Ω*;*

A4′ (аксиома счетной аддитивности). *Для любой последовательности попарно несовместных случайных событий* $A_1, A_2, \ldots \in F$ $(A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j)$ *выполняется соотношение*

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(A_i).$$

Определение 2. *Вероятностным пространством называется тройка математических объектов* $(\Omega, F, \boldsymbol{P})$, *где*

Ω *– пространство элементарных событий,*

F – алгебра или σ-алгебра подмножеств из Ω*,*

$\boldsymbol{P}$ *– вероятностная мера, определенная на F.*

Определение 3. *Последовательность случайных событий* $(A_n) \in F$ *называется монотонно убывающей и обозначается* $A_n \downarrow$, если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$. *Последовательность случайных событий* $(A_n) \in F$ *называется монотонно возрастающей и обозначается* $A_n \uparrow$, *если* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$.

Теорема. *Для всякой монотонной последовательности случайных событий* $(A_n) \in F$ *существует*

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \text{если } A_n \downarrow; \\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ если } A_n \uparrow. \end{cases} \qquad (1)$$

Определение 4. *Существуют два эквивалентных варианта расширения аксиом Колмогорова:*

1) {A1′, A2, A3, A4′}*;*
2) {A1′, A2, A3, A4, A5}*, где* A5 *– это дополнительная аксиома.*

A5 (аксиома непрерывности вероятностной меры). *Для любой монотонно убывающей последовательности случайных событий $A_n \downarrow$ допускается предельный переход под знаком вероятностной меры:*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \boldsymbol{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \boldsymbol{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

§ 6. Свойства вероятности (вероятностной меры).

Пусть $(\Omega, F, \boldsymbol{P})$ – вероятностное пространство.

Свойства вероятности.

С1. Вероятность противоположного события вычисляется по следующей формуле:

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A), \; A \in F.$$

Доказательство.

$$\Omega = A \cup \overline{A}, \; A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

$$\boldsymbol{P}(\Omega) = \boldsymbol{P}(A \cup \overline{A}) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(\overline{A}).$$

$$\boldsymbol{P}(\Omega) = 1.$$

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A).$$

С2. $\boldsymbol{P}(\varnothing) = 0$ (вероятность невозможного события равна нулю).

С3 (монотонность вероятностной меры). Для любых вложенных случайных событий ($A \subset B$) выполняется неравенство $\boldsymbol{P}(A) \le \boldsymbol{P}(B)$.

Доказательство.

$$B = A \cup (B \setminus A).$$

$$\boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B \setminus A) \ge \boldsymbol{P}(A).$$

Следствие. *Если* $A \subset B$, *то* $\boldsymbol{P}(B \setminus A) = \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A)$.

С4 (формула сложения вероятностей). Для любых случайных событий $A, B \in F$ справедлива формула сложения вероятностей

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B). \qquad (1)$$

Доказательство.

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)), \tag{2}$$

$$B = (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B). \tag{3}$$

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B \setminus (A \cap B)), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(A \cap B) + \boldsymbol{P}(B \setminus (A \cap B)). \tag{5}$$

Следствие 1. *Если в* (1) *A и B несовместные, то формула сложения вероятностей превращается в* А4.

Следствие 2. *Для любых случайных событий A и B*

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) \leq \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B).$$

C4′ (обобщенная формула сложения вероятностей). Пусть $N \geq 2$, тогда для любых случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_N \in F$ справедливо следующее обобщение формулы (1):

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^{N} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$

$$- \ldots + (-1)^{N-1} \boldsymbol{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right). \qquad (6)$$

C5. Для любой последовательности, конечной или бесконечной, случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_N \in F$ справедливо неравенство

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{P}(A_i).$$

С6 (эквивалент А5). Для любой монотонно возрастающей последовательности случайных событий, имеющей предел

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

допустим предельный переход под знаком вероятностной меры:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \boldsymbol{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \boldsymbol{P}(A).$$

Доказательство.

$$B_n = \overline{A}_n. \quad \lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - \boldsymbol{P}(B_n)) = 1 - \boldsymbol{P}(\lim_{n\to\infty} B_n) = 1 - \boldsymbol{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = \boldsymbol{P}\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n}\right) = \boldsymbol{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \boldsymbol{P}(A).$$

Замечание. Аксиома А5 и свойство С6 взаимозаменяемы.

§ 7. Условная вероятность и ее свойства.

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Определение 1. *Пусть* (Ω, F, P) *– произвольное вероятностное пространство, а* $A, B \in F$ *– произвольные случайные события, причем* $P(B) > 0$. *Тогда условной вероятностью случайного события A при условии события B называется величина*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \qquad (1)$$

При этом $P(A)$ *– безусловная вероятность случайного события A.*

Свойства условной вероятности.

С1. Пусть (Ω, F, P) – произвольное вероятностное пространство, тогда при фиксированном случайном событии $B \in F$ $(P(B) > 0)$ числовая функция $P_B(A) ::= P(A \mid B)$, где $A \in F$, удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей A1 – A5.

С2. Условная вероятность удовлетворяет всем шести свойствам безусловной вероятности, в частности:

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B), \qquad P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C).$$

С3 (формула умножения вероятностей). Если $P(B) > 0$, то

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B). \tag{2}$$

Следствие (симметричная формула умножения вероятностей). *Если* $P(A) > 0$ *и* $P(B) > 0$*, справедлива симметричная формула умножения вероятностей:*

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B) = P(B \mid A)\, P(A). \tag{3}$$

С4 (обобщенная формула умножения вероятностей). Для любого конечного числа N и любых N случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_N \in F$ таких, что $P\left(\bigcap_{i=1}^{N-1} A_i\right) > 0$, справедлива формула

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right) = \prod_{i=1}^{N-1} P\left(A_{i+1} \mid \bigcap_{j=1}^{i} A_j\right) P(A_1). \tag{4}$$

Определение 2. *Пусть* (Ω, F, P) *– произвольное вероятностное пространство, тогда система из* N ($2 \le N < \infty$) *случайных событий* $H_1, H_2, \ldots, H_N \in F$ *называется полной системой случайных событий* (*полной группой случайных событий, полной группой гипотез*), *если выполнены следующие три свойства:*

1) $\bigcup_{i=1}^{N} H_i = \Omega$;

2) $H_i \cap H_j = \varnothing$, $i \ne j$;

3) $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1, N}$.

Теорема 1 (формула полной вероятности). *Пусть на произвольном вероятностном пространстве* (Ω, F, P) *определена полная система случайных событий* $\{H_i\}$. *Тогда для любого случайного события* $A \in F$ *его безусловная вероятность допускает разложение*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A \mid H_i) P(H_i). \tag{5}$$

Доказательство.

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{N} H_i \right) = \bigcup_{i=1}^{N} (A \cap H_i). \qquad (6)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{N} P(A \mid H_i) P(H_i).$$

Замечание 1. N может быть бесконечным.

Теорема 2 (формула Байеса). *Пусть на произвольном вероятностном пространстве* (Ω, F, P) *определена полная система случайных событий* $\{H_i\}$. *Тогда для любого случайного события* $A \in F$ *такого, что* $P(A) > 0$, *справедлива формула*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i) P(H_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(A \mid H_j) P(H_j)}, \quad i = \overline{1, N}. \qquad (7)$$

Доказательство.

$$P(A \cap H_i) = P(A \mid H_i)P(H_i) = P(H_i \mid A)P(A).$$

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)P(H_i)}{P(A)}.$$

Замечание 2. $P(H_i)$ называется априорной вероятностью (от латинского «a priori», что означает «до опыта»), так как она известна до проведения эксперимента.

Замечание 3. $P(H_i \mid A)$ называется апостериорной вероятностью (от латинского «a posteriori», что означает «после опыта»).

Замечание 4. Формула Байеса позволяет по априорным вероятностям вычислить апостериорные.

§ 8. Независимые случайные события и их свойства.

Определение 1. *Пусть* (Ω, F, P) *– произвольное вероятностное пространство, тогда случайные события* A, $B \in F$ *называются независимыми случайными событиями на* (Ω, F, P), *если вероятность их совместного наступления равна произведению вероятностей* A *и* B*:*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{1}$$

В противном случае A *и* B *зависимы.*

Свойства независимых случайных событий.

С1. Если $P(B) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда условная вероятность $P(A \mid B)$ совпадает с безусловной вероятностью события A:

$$P(A \mid B) = P(A). \tag{2}$$

Доказательство.

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B).$$

Следствие. *Соотношение* (2) *может рассматриваться как критерий независимости случайных событий A и B.*

Замечание. Из (2) виден содержательный смысл определения независимости. События A и B независимы, если наступление одного из этих событий не влияет на вероятность наступления другого.

С2. Свойство независимости переносится на противоположные события, в частности, если A, B – независимые случайные события, то $\overline{A}$, B – независимые случайные события.

Доказательство.

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - P(A) = P(\overline{A}).$$

С3. Пусть A, B, $C \in F$ – любые случайные события на (Ω, F, P) такие, что A и C – независимые, B и C – независимые, а A и B – несовместные, тогда независимы $A \cup B$ и C.

Доказательство.

$$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C) = P(A) + P(B) - 0 = P(A \cup B).$$

Определение 2. *Случайные события A_1, A_2, …, $A_n \in F$ называются независимыми в совокупности на* (Ω, F, P)*, если для $\forall\ m \in \{2, 3, \ldots, n\}$ и любых упорядоченных значений m индексов $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$ выполняется обобщение* (1)*:*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{m} P(A_{i_j}). \tag{3}$$

Если же (3) *выполняется лишь для $m = 2$, то случайные события A_1, A_2, …, A_n называются попарно независимыми.*

C4. Из независимости в совокупности следует попарная независимость случайных событий. Обратное, вообще говоря, неверно.

Доказательство.

Контрпример Бернштейна.

Над плоской поверхностью бросается правильный тетраэдр, грани которого раскрашены следующим образом: одна – в красный, вторая – в синий, третья – в зеленый, четвертая имеет полоски всех трех цветов.

$$A_1 = \{\text{на выпавшей грани есть красный цвет}\},$$

$$A_2 = \{\text{на выпавшей грани есть синий цвет}\},$$

$$A_3 = \{\text{на выпавшей грани есть зеленый цвет}\}.$$

$$P(A_i) = 2/4 = 1/2; \quad P(A_i \cap A_j) = 1/4; \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j);$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1/8.$$

С5 (обобщенная формула сложения вероятностей для независимых в совокупности случайных событий). Если случайные события A_1, A_2, …, A_N независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий вычисляется по формуле

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - P(A_i)). \tag{4}$$

§ 9. Схема независимых испытаний Бернулли. Биномиальное распределение вероятностей.

Последовательные испытания называются *независимыми относительно события A*, если вероятность наступления события A в любом испытании не зависит от числа испытаний N и результатов других испытаний.

Определение 1. *Схемой независимых испытаний Бернулли называется последовательность независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода – «успех» и «неудача», при этом успех в одном испытании происходит с вероятностью* $p \in (0, 1)$*, а неудача – с вероятностью* $q = 1 - p$.

В испытаниях схемы Бернулли, когда с одним испытанием можно связать только два взаимоисключающих события, независимость в совокупности испытаний означает, что при любом N независимы в совокупности события $A_1 = \{$*успех в первом испытании*$\}$, …, $A_N = \{$*успех в* N*-м испытании*$\}$.

ν_N – число успехов, случившихся в N испытаниях схемы Бернулли.

Теорема (формула Бернулли). *При любом* $m = 0, 1, \ldots, N$ *имеет место равенство*

$$P\{\nu_N = m\} = P_N(m) = C_N^m p^m q^{N-m}.$$

Доказательство. Событие $B = \{\nu_N = m\}$ означает, что в N испытаниях схемы Бернулли произошло ровно m успехов.

$$(\underbrace{у,\ у,\ \ldots,\ у}_{m}, \underbrace{н,\ н,\ \ldots,\ н}_{N-m}).$$

Определение 2. *Набор вероятностей*

$$P_N(m) = C_N^m p^m (1-p)^{N-m},\quad m = 0, 1, \ldots, N, \tag{1}$$

называется биномиальным распределением вероятностей и обозначается $Bi(N, p)$.

Пример. Для получения приза нужно собрать 4 изделия с особым знаком на этикетке. Найти вероятность получения одного приза после покупки 9 изделий, если этикетки с этим знаком имеют 5% изделий.

Решение. $N = 9$, $m = 4$. По формуле (1):

$$P_9(4) = C_9^4 (0{,}05)^4 (0{,}95)^5 = 0{,}0006092.$$

Замечание. При больших значениях N для вычисления (1) используют приближенные формулы Муавра-Лапласа.