



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

# LOW-PASS DIGITAL DIFFERENTIATOR DESIGN

*Mattia Sittoni,  
Veton Sulejmani*

ANNO ACCADEMICO 2020/2021  
SYSTEMS AND TECHNIQUES FOR DIGITAL SIGNAL PROCESSING  
PROF. DAVID MACII

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Maximally flat Low-pass Digital Differentiators by Selesnick</b>	<b>3</b>
2.1	Generalità . . . . .	3
2.2	Funzione di trasferimento e risposta in frequenza . . . . .	4
2.3	Relazione fra i parametri (K,N) e bandwidth . . . . .	6
2.4	Testing . . . . .	9
2.5	Studio degli errori . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Linear Phase Low-Pass IIR Digital Differentiators by Al-Alaoui</b>	<b>14</b>
3.1	Generalità . . . . .	14
3.2	Differentiator I . . . . .	15
3.3	Differentiator II . . . . .	15
3.4	Low-pass filter . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Confronto Selesnick - Al-Alaoui</b>	<b>18</b>
4.1	Risposta in frequenza . . . . .	19
4.2	Errore in passband e stopband . . . . .	19
4.3	Group Delay . . . . .	21

## 1 Introduzione

Il seguente elaborato vuole essere un riassunto del percorso di progettazione di due tipologie differenti di low-pass differentiator filter.

Il lavoro si compone di due differenti design: il primo sulla base del documento “*Maximally flat Low-pass Digital Differentiators*” di Ivan Selesnick, ed il secondo seguendo le indicative riportate in “*Linear Phase Low-Pass IIR Digital Differentiators*” di Al-Alaoui.

Lo scopo ultimo del seguente report è quello di indicare i passaggi della realizzazione, dal punto di vista software, di queste tipologie di filtri digitali.

In particolare, ci si è focalizzati sulle scelte progettuali, opportunamente motivate ed accompagnate da una serie di simulazioni.

Sulla base di tale idea, il report non descrive la rigorosa formulazione matematico-scientifica proposta dai già citati autori, quanto piuttosto le operazioni da svolgere per l’implementazione pratica dei dispositivi nell’ambiente di sviluppo MATLAB.

Tutte le simulazioni riportate durante la stesura di questo report, nonché la serie di scelte riguardanti i parametri dei due differenziatori, sono finalizzate all’ottenimento di risultati numericamente e graficamente confrontabili con quanto illustrato all’interno dei due file di riferimento.

## 2 Maximally flat Low-pass Digital Differentiators by Selesnick

### 2.1 Generalità

Il documento di Selesnick descrive la progettazione e l'implementazione di filtri linear-phase FIR lowpass digital differentiator di tipo III e tipo IV sulla base del principio di filtro “massimamente piatto”.

L'andamento ideale della risposta in frequenza di tale tipologia di filtro è il seguente:

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Il documento presenta una carrellata di passaggi matematici che permettono di giungere alla rigorosa formulazione della funzione di trasferimento, con una sezione dedicata al filtro di tipo III ed una successiva alla tipologia IV.

Entrambe le formulazioni convergono poi in un'unica espressione, in seguito riportata, che permette di rappresentare entrambe le tipologie:

$$H(z) = \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right) \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^K z^{-L} \cdot \sum_{n=0}^L c(n) \left(\frac{-z+2-z^{-1}}{4}\right)$$

dove i coefficienti  $c(n)$ :

$$c(n) = \sum_{k=0}^n c_1(k) \cdot c_2(n-k)$$

vengono trasformati nella forma seguente, adatta all'implementazione software:

$$c(n) = \frac{(8n^2 + 4Kn - 10n - K + 3) \cdot c(n-1) - (2n + K - 3)^2 \cdot c(n-2)}{2n \cdot (2n+1)}$$

con  $n \geq 2$ ,  $c(0) = 1$  e  $c(1) = K + \frac{1}{3}$ .

Il parametro  $K$  rappresenta il numero di zeri in  $z=-1$ , e distingue pertanto anche la tipologia di filtro: per un  $K$  pari si ha un filtro tipo IV, mentre per un  $K$  dispari si ha un filtro tipo III.

Il parametro  $L$  determina il numero di coefficienti  $c(n)$  necessari per definire la funzione di trasferimento.

Il valore di  $N$ , infine, identifica la lunghezza della risposta all'impulso, ed è pari a:  $N = K + 2L + 2$ .

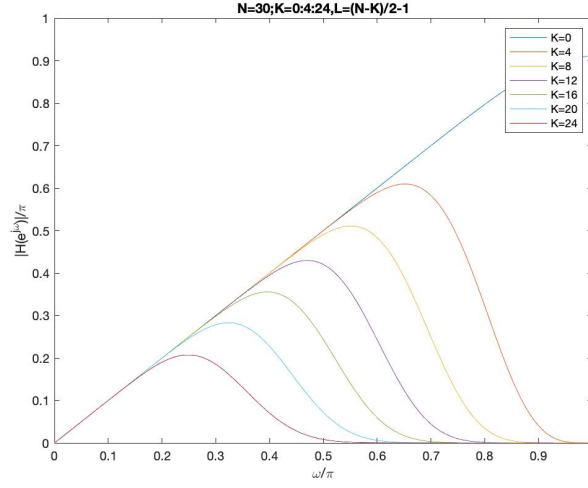


Figura 2:  $H(e^{j\omega})$  tipo IV

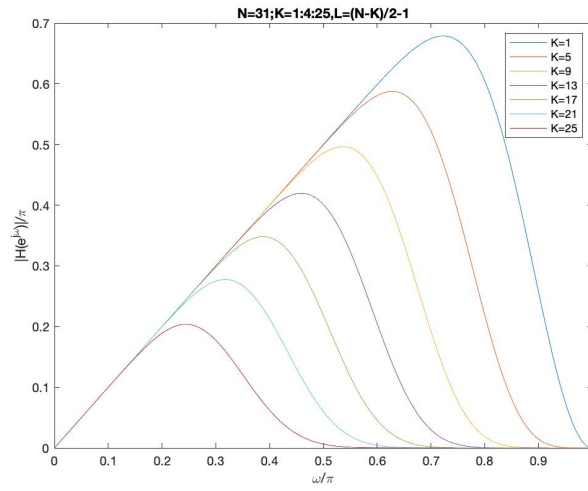


Figura 3:  $H(e^{j\omega})$  tipo III

La prima risposta in frequenza riportata è relativa alla tipologia IV, con un  $N=30$  ed un  $K$  variabile tra 0 e 24 ad intervalli di 4. La seconda, invece, riguardante la tipologia III, è caratterizzata da un  $N=31$  ed un  $K$  variabile tra 1 e 25 ad intervalli di 4.

La scelta dei valori di  $N$  e  $K$  non è casuale, bensì dettata dalla volontà di confrontare i grafici ottenuti con quelli presenti nell'elaborato di Selesnick. Come possibile notare dalle immagini, sia l'ampiezza che la frequenza del grafico sono normalizzate rispetto a  $\pi$ .

### 2.3 Relazione fra i parametri ( $K, N$ ) e bandwidth

Innanzitutto si è deciso di costruire una funzione finalizzata al calcolo della larghezza di banda. Per fare ciò, dati in ingresso  $K$  ed  $N$ , la funzione si serve di *strans* e *freqz* per determinare l'ampiezza della funzione di trasferimento associata agli input.

Questa viene in seguito normalizzata rispetto al proprio valore massimo, e quindi convertita in dB.

Tramite l'utilizzo di un contatore si va a quantificare il numero di passi per i quali l'ampiezza della funzione di trasferimento supera i -3 dB; il prodotto di questo valore per la lunghezza di un singolo passo restituisce la larghezza di banda.

Fissando un range di valori, sia per  $K$  che per  $N$ , che va da 1 a 100, si è calcolato il valore della bandwidth al variare di entrambi.

Il passo successivo è stato quello di plottare l'andamento della bandwidth al variare di uno dei due parametri, mantenendo pari ad 1 il rimanente. Si è prodotto dunque l'andamento della bandwidth mantenendo  $N=1$  e variando  $K$  e viceversa. I grafici ottenuti sono i seguenti.

Dai risultati ottenuti, si nota qualitativamente come all'aumentare del parametro variato si ottenga una diminuzione della larghezza di banda, con accentuazione di questo effetto nella prima metà del range 1-100.

Si nota, inoltre, come la variazione di  $K$  porti ad una maggiore diminuzione della larghezza di banda rispetto al caso di  $N$ .

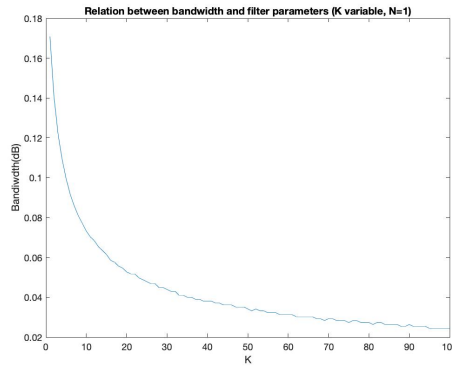


Figura 4: Bandwidth con  $K$  variabile,  $N=1$

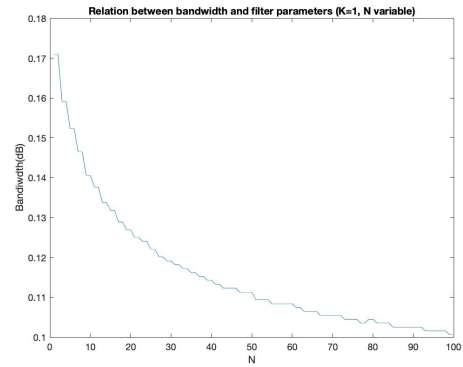


Figura 5: Bandwidth con  $N$  variabile,  $K=1$

Il passo successivo è stato quello di ricercare una relazione matematica che descrivesse in maniera sufficientemente adeguata l'andamento rappresentato dai due grafici. Per fare ciò, si è deciso di effettuare un'operazione di fitting, e diversi modelli sono stati presi in considerazione.

Inizialmente si è optato per l'interpolazione con modello lineare e polinomiale di secondo ordine, con risultati poco soddisfacenti, come di seguito mostrato.

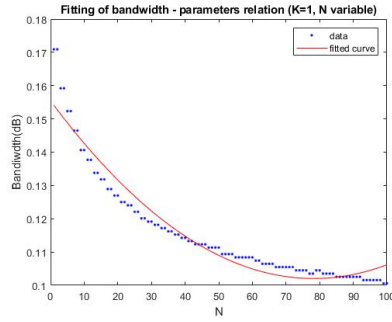


Figura 6: Relazione bandwidth-parametri con interpolazione polinomiale quadratica

I risultati migliori sono stati ottenuti tramite l'utilizzo del metodo di interpolazione esponenziale *exp2*, che ha portato ai seguenti risultati.

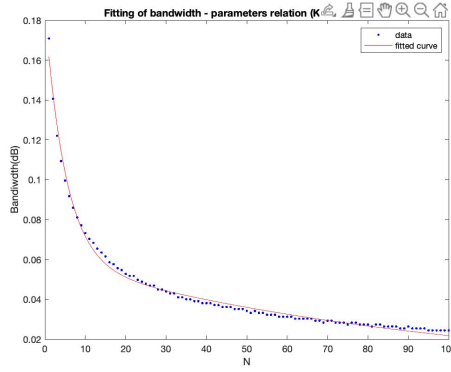


Figura 7: Fitting *exp2* (K variabile, N=1)

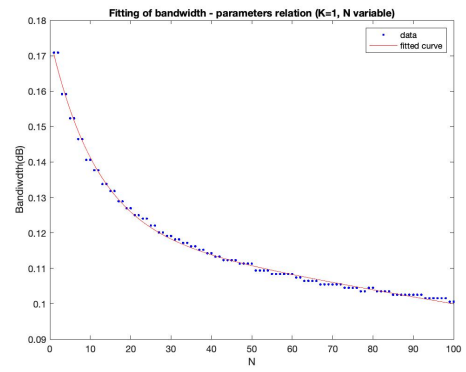


Figura 8: Fitting *exp2* (N variabile, K=1)

Richiamando *strans* con input K, N sono stati generati i coefficienti della funzione di trasferimento del relativo filtro. In tal modo è stato possibile effettuare il prodotto fra f.d.t. del filtro e segnale in ingresso, ottenendo dunque il segnale filtrato.

Per ciascuno dei precedenti step sono stati plottati, con l'ausilio della funzione *freqz*, gli andamenti della risposta in frequenza.

Il testing è stato dunque effettuato tramite la scelta di K=15 ed N=31, ai quali corrisponde una cutoff frequency  $\omega_c = 0.49 \frac{rad}{s}$ . Dato tale valore, considerando quanto anticipato, il segnale in ingresso è stato così generato:

$$f(t) = \sin(0.4\pi t) + \sin(0.8\pi t)$$

Di seguito la risposta in frequenza del segnale  $f(t)$ .

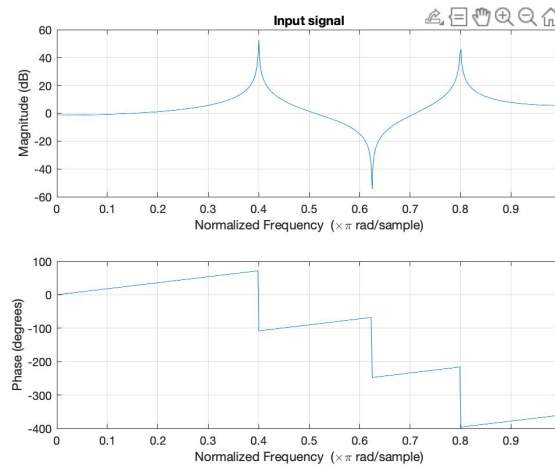


Figura 11: Risposta in frequenza di  $f(t)$

Come è possibile notare dall'immagine soprastante, sono presenti due picchi in corrispondenza delle frequenze caratteristiche.

In seguito vengono riportate, rispettivamente, la risposta in frequenza del filtro di Selesnick (K=15, N=31) e la risposta in frequenza del segnale filtrato.

Come possibile notare, l'andamento è quello tipico di un filtro passa basso, coerente con la frequenza di taglio precedentemente ottenuta.

La fase presenta un andamento lineare, caratteristico di questa tipologia di filtro (come sottolineato nella documentazione fornita da Selesnick).



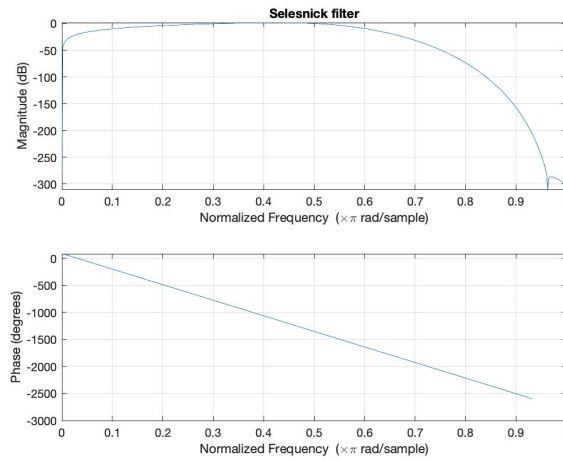


Figura 12: Risposta in frequenza filtro

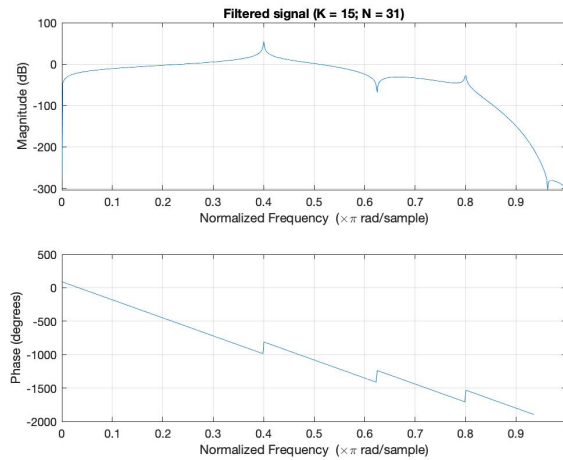


Figura 13: Risposta in frequenza segnale filtrato

Il segnale filtrato presenta un'ampiezza pressochè invariata in corrispondenza del primo picco, il quale cade infatti all'interno della banda passante, mentre l'ampiezza del picco nella stopband risulta essere fortemente attenuata. Questo comportamento è sintomo di un corretto funzionamento del maximally flat low-pass digital differentiator.

## 2.5 Studio degli errori

Per quanto riguarda l'analisi degli errori si è deciso di costruire l'andamento del filtro ideale, ed andare a confrontarlo con l'andamento del filtro designato.

La risposta in frequenza del filtro ideale è quella precedentemente anticipata, ovvero:

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Questa funzione di trasferimento è stata implementata in Matlab tramite la creazione della funzione *ilpf*, il cui unico parametro in ingresso è  $\omega_c$  ed è caratterizzata dunque dal seguente andamento.

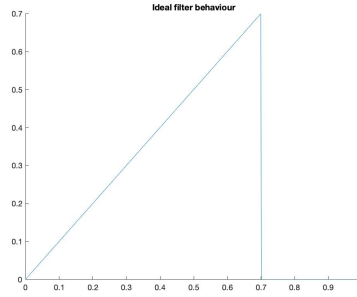


Figura 14: Andamento ideale filtro con  $\omega_c = 0.7 \frac{rad}{s}$

Gli errori sono stati dunque quantificati tramite la ricerca del valore massimo della differenza tra ampiezza ideale ed effettiva.

Questo tipo di valutazione risulta essere utile per proporre poi un confronto tra il filtro di Selesnick e quello, che verrà analizzato in seguito, di Al-Alaoui.

Questo approccio viene sfruttato solamente per il calcolo dell'errore all'interno della banda passante; è infatti immediato immaginare che calcolare l'errore in questo modo per la stopband comporterebbe un risultato pari al massimo dell'ampiezza della funzione di trasferimento del filtro.

Per calcolare il massimo errore all'interno della banda passante, si è costruita la funzione *err*, la quale prende in input le ampiezze delle funzioni di trasferimento ideale ed effettiva e la frequenza di taglio. Questa funzione va ad effettuare la differenza tra queste ampiezze ad ogni passo  $i$ , memorizzandone il valore massimo all'interno della variabile *maxP* per  $\omega < \omega_c$ .

Per la valutazione dell'errore si è scelto di generare un andamento del filtro di Selesnick tale da poter essere confrontato con quello ideale, sopra proposto. La scelta è ricaduta dunque su un valore di  $K$  pari a 1 ed un valore di  $N$  pari a 31. Di seguito viene proposto il plotting dell'andamento ideale del filtro assieme all'andamento effettivamente ottenuto con Selesnick.

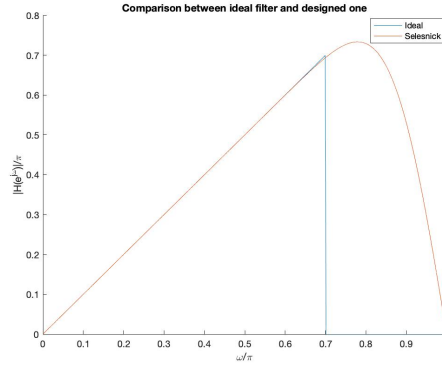


Figura 15: Plotting andamento ideale ed effettivo per Selesnick

L'errore ottenuto è il seguente:

$$\max Ps = 0.006$$

Come possibile notare, sia dal valore che dalla rappresentazione grafica, l'errore commesso è minimo, infatti lo scostamento dall'idealità è difficilmente apprezzabile graficamente.

Il discorso è profondamente diverso per quanto riguarda l'errore nella stopband: l'idea di base è quella di andare a studiare l'ampiezza dei ripple presenti in questa banda, tuttavia l'andamento in frequenza del filtro risulta pressochè privo di oscillazioni. Per ottenerne, si è dovuto effettuare il design del filtro andando ad aumentare notevolmente il parametro K, fino ad un valore di 31.

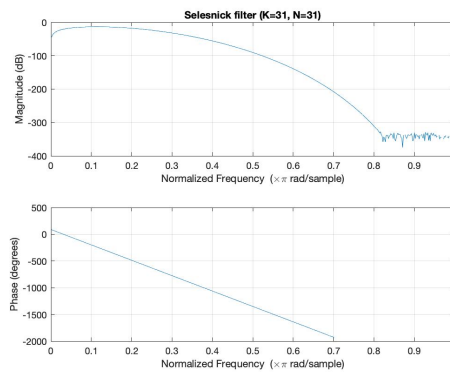


Figura 16: Andamento filtro di Selesnick N=31, K=31

In seguito, si è andato quindi a calcolare il valore del massimo errore registrato dai ripple rispetto al valore medio dell'ampiezza di essi nel range di frequenza interessato dal fenomeno. Per fare ciò, si è andati ad implementare una funzione *ripple*, la quale ci restituisce il massimo scostamento, pari a:

$$\max Ss = 28.3dB$$

### 3 Linear Phase Low-Pass IIR Digital Differentiators by Al-Alaoui

#### 3.1 Generalità

La seconda parte di questo elaborato propone lo sviluppo a livello software, sulla falsa riga della prima parte, di un linear-phase low-pass IIR digital differentiator, il cui ideatore è Al-Alaoui.

Le principali differenze, a livello costruttivo, tra i due filtri risiedono nel fatto che, come sottolineato dal nome, questo filtro presenta un infinite-impulse response, ed è inoltre costituito dal posizionamento in cascata del filtro passa-basso e del differenziatore (cosa che non avveniva nel caso di Selesnick, il quale proponeva un'unica funzione di trasferimento).

Per quanto riguarda la descrizione di questo dispositivo, dunque, risulta evidente come sia necessario distinguere la funzione di trasferimento relativa al filtro passa-basso rispetto alla parte del derivatore; nel documento vengono proposte in particolare due differenti tipologie di derivatore: Differentiator I e Differentiator II.

L'approccio "cascaded" prevede dunque di suddividere in due passaggi il designing:

- costruire un low-order IIR differentiator il cui numeratore della f.d.t. rappresenta un filtro linear-phase FIR
- aggiungere in cascata un filtro IIR, anch'esso linear-phase

Andiamo ad analizzare le funzioni di trasferimento dei differenziatori e come esse sono state implementate.

### 3.4 Low-pass filter

Risulta ora necessario porre in cascata ai differenziatori un appropriato filtro passa-basso.

L'effetto voluto è chiaramente quello di un'operazione di derivazione nel range della banda passante, e di una decisa attenuazione dopo la frequenza di taglio, cercando di mantenere una fase lineare fino alla  $\omega_c$ .

Per fare ciò, si passa da un filtro analogico all-pole al corrispettivo digitale tramite la trasformazione bilineare:  $s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$ .

Applicando questo tipo di trasformazione ad un all-pole analogico di ordine  $n$  si ottiene la versione digitale, il cui numeratore, linear phase, sarà della forma  $(1 + z^{-1})^n$  e presenterà una serie di soli zeri all'interno della stopband.

Il filtro che Al-Alaoui consiglia di porre in cascata a ciascuno dei due differenziatori è un Chebyshev I passa-basso del terzo ordine, con un ripple di 0.1 dB nella banda passante, motivando la scelta con il fatto che l'ordine pari a 3 fosse il minimo ordine necessario a rendere comparabile l'andamento di questo filtro con la versione FIR di Selesnick.

A livello software, ci si è serviti della funzione di Matlab *cheby1* per costruire il filtro con le specifiche indicate, in particolare: ordine, ripple nella banda passante e cutoff frequency.

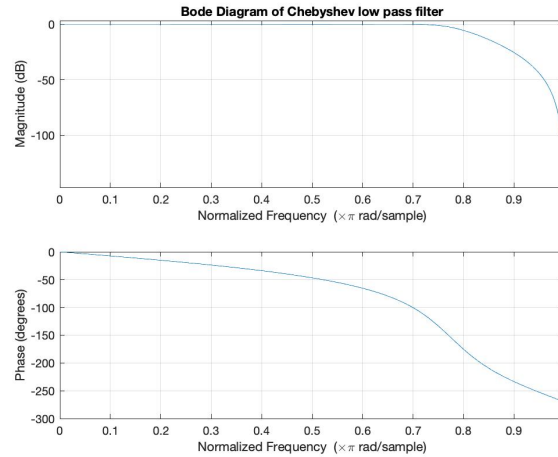


Figura 18: Plotting filtro passa-basso Chebysev I

L'operazione di cascading fra filtro e derivatore avviene tramite la convoluzione dei coefficienti associati alle funzioni di trasferimento precedentemente generate, le quali permettono poi di rappresentare l'andamento della risposta in frequenza (normalizzata) del Digital Low Pass Differentiator I e II di Al-Alaoui.

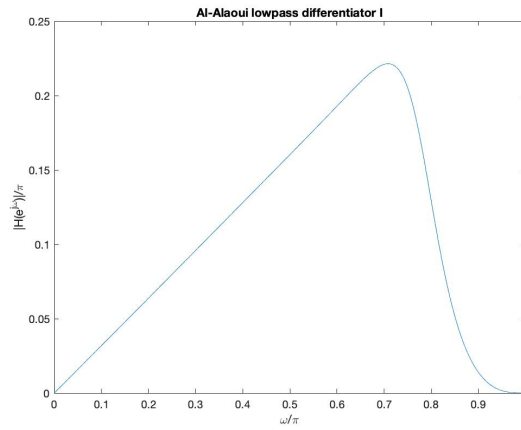


Figura 19: Risposta in frequenza Al-Alaoui Lowpass Differentiator I

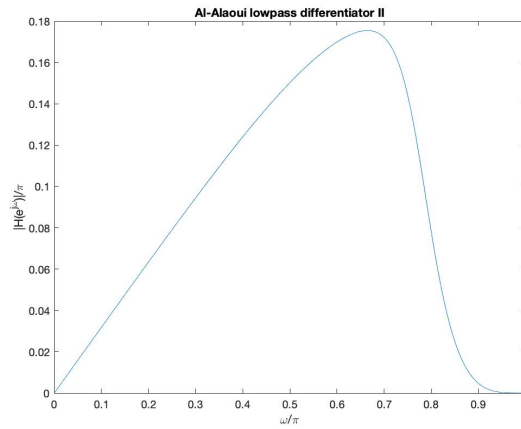


Figura 20: Risposta in frequenza Al-Alaoui Lowpass Differentiator II

Gli andamenti ottenuti risultano essere concordi con quelli proposti da Al-Alaoui, tuttavia per la verifica puntuale dei risultati, si fa fede alla tabella,

## 4.1 Risposta in frequenza

Innanzitutto, sulla falsa riga di quanto proposto da Al-Alaoui nel proprio elaborato, si è deciso di proporre un confronto grafico tra gli andamenti della risposta in frequenza dei due filtri.

La frequenza di taglio scelta per questo confronto è pari a  $\omega_c = 0.7 \frac{rad}{s}$ , che per il differenziatore di Selesnick corrisponde ad un  $N=31$ ,  $K=1$ .

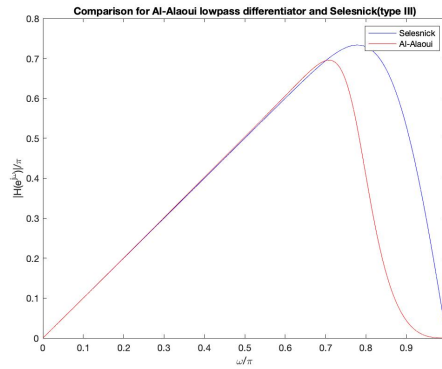


Figura 22: Confronto risposte in frequenza fra filtro di Selesnick (Tipo III) e Al-Alaoui (Differentiator I)

Come possibile notare dalla figura proposta, il filtro di Al-Alaoui presenta una transition bandwidth più stretta rispetto a Selesnick, e dunque risulta essere più selettivo per quanto riguarda il rumore alle frequenze più elevate. Interessante è notare, inoltre, come questo tipo di andamento sia ottenuto a partire da un filtro (di Al-Alaoui) di ordine 4, notevolmente minore rispetto all'ordine del filtro di Selesnick. Il risultato è concorde con quello inserito all'interno del documento di riferimento.

## 4.2 Errore in passband e stopband

L'errore commesso all'interno della banda passante è stato calcolato tramite la funzione *err*, nello stesso modo in cui è stato determinato in precedenza per il filtro di Selesnick. Il risultato ottenuto in questo caso è il seguente:

$$\max Pa = 0.0072$$

Per proporre un'analisi più esaustiva del confronto fra questi due errori, si è deciso di plottare l'andamento degli stessi all'interno della passband, nell'intervallo di riferimento.

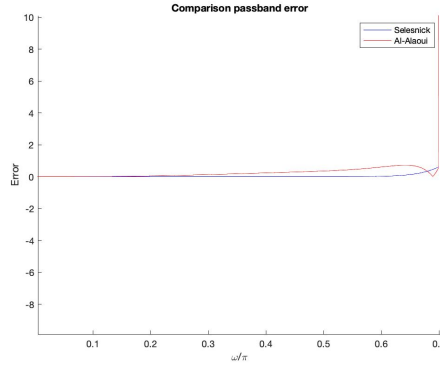


Figura 23: Confronto errore nella passband tra Selesnick e Al-Alaoui (Differentiator I)

L'andamento dei due errori, come possibile notare, è molto simile, con un errore pari a circa l'1% rispetto all'idealità.

Per quanto riguarda l'errore nella stopband, mentre nel caso di Selesnick si è riusciti ad individuare dei valori di K ed N tali per cui la risposta in frequenza presentasse dei ripple, lo stesso discorso non può essere fatto per Al-Alaoui.

È stato infatti plottato il suo andamento per diverse frequenze di taglio, e per tutte le casistiche non sono state individuate oscillazioni nella stopband. Di seguito viene riportato l'andamento della risposta in frequenza del Differentiator II per una cutoff frequency di  $0.7 \frac{rad}{s}$ .

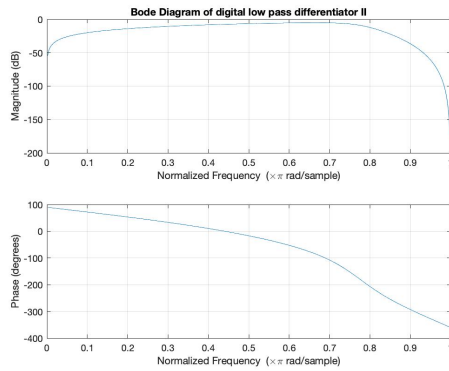


Figura 24: Risposta in frequenza Differentiator II

Per questo motivo si è reso impossibile proporre il confronto per quanto riguarda la stopband.



### 4.3 Group Delay

Per terminare il confronto viene riportato l'andamento del group delay per entrambi i filtri.

Per quantificarlo, è stata sfruttata la funzione *grpdelay* di Matlab, che va a calcolare punto per punto la grandezza desiderata.

Il valore di  $\omega_c$  scelto per questa analisi è pari a  $0.35 \frac{rad}{s}$ , in modo da essere confrontabile con i risultati riportati da Al-Alaoui.

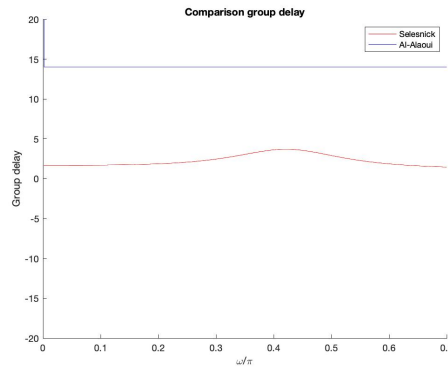


Figura 25: Confronto group delay di Selesnick e Al-Alaoui

Come emerge dall'andamento della figura proposta, il filtro di Selesnick presenta un group delay costante in tutto l'intervallo della bandwidth, mentre il filtro di Al-Alaoui evidenzia una leggera deviazione dalla linearità in corrispondenza della cutoff frequency.