RESOLUÇÃO DO PRODUTO VETORIAL

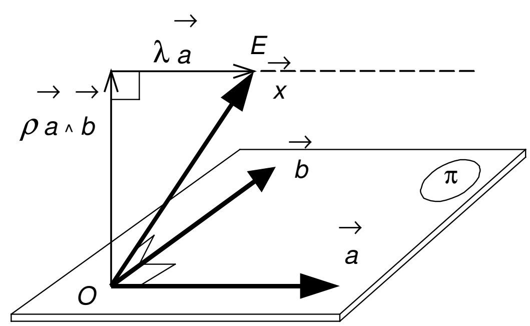
Determinar a incógnita $\vec{x}$ do produto vetorial:

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \qquad (1)$$

com $\vec{x}$, $\vec{a}$ e $\vec{b} \in \vec{V}$; onde $\vec{V}$ é um espaço vetorial de ordem 3 (3 dimensões).

Considerando: $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (portanto perpendiculares e contidos no plano π mostrado na figura), tem-se pela definição de produto vetorial que $\vec{x} \perp \vec{b}$.

Pode-se representar $\vec{x} = (E - O)$ como a soma de dois vetores:
um na direção de $\vec{a}$ e outro perpendicular a $\vec{a}$
(e ortogonal a $\vec{b}$, como já estabelecido):



$$\vec{x} = \rho\, \vec{a} \wedge \vec{b} + \lambda \vec{a}, \quad (2) \quad \text{com } \lambda \text{ e } \rho \in \Re.$$

Assim, substituindo na equação (1) tem-se que:

$$(\rho\, \vec{a} \wedge \vec{b} + \lambda \vec{a}) \wedge \vec{a} = \vec{b} \quad \text{portanto:}$$
$$(\rho\, \vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} = \vec{b} \qquad (3)$$

Tomando o módulo dos termos da equação 3 e como os vetores são perpendiculares, obtêm-se:

$$|\rho| \,.\, |\vec{a}| \,.\, |\vec{b}| \,.\, |\vec{a}| = |\vec{b}| \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \pm \frac{1}{|\vec{a}|^2}$$

Verificando, a solução corresponde ao valor positivo de ρ, obtêm-se finalmente da equação 2:

$$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a}|^2} + \lambda \vec{a}} \quad \text{com } \lambda \text{ qualquer} \in \Re$$

que são as soluções da equação do produto vetorial com uma incógnita em $\vec{x}$. Tal solução correspondente à reta $\lambda \vec{a}$ (linha pontilhada mostrada na figura) que passa pelo ponto *E*. Note ainda que a solução particular quando $\lambda = 0$, resulta em $\vec{x} \perp \vec{a}$.