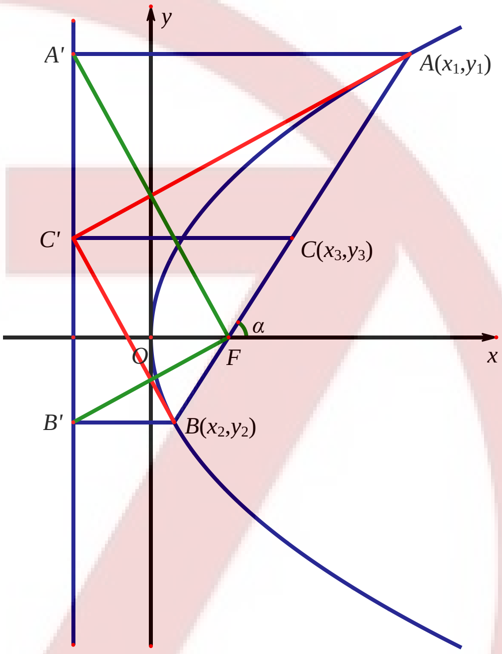
抛物线性质 30 条

已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，AB 是抛物线的焦点弦，点 C 是 AB 的中点. AA’垂直准线于 A’，BB’垂直准线于 B’， CC’垂直准线于 C’，CC’交抛物线于点 M，准线交 x 轴于点 K. 求证：



1. $|AF|=x_1+\frac{p}{2},|BF|=x_2+\frac{p}{2}$，

2. $|CC'|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)$；

3. 以 AB 为直径的圆与准线 L 相切；

证明：CC’是梯形 AA’BB’的中位线，

$|AB|=|AF|+|BF|=|AA'|+|BB'|=2|CC'|=2r$

4. $\angle AC'B=90^\circ$；（由 1 可证）

5. $\angle A'FB'=90^\circ$；

证明：$\because AA'\parallel FK,\therefore \angle A'FK=\angle FA'A,$

$\because |AF|=|AA'|,\therefore \angle AA'F=\angle AFA',$

$\therefore \angle A'FK=\frac{1}{2}\angle AFK,$

同理：$\angle B'FK=\frac{1}{2}\angle BFK,$得证.

6. $|\mathrm{C'F}|=\frac{1}{2}|\mathrm{A'B'}|$.

证明：由 $\angle A'FB'=90^\circ$ 得证.

7. $\mathrm{AC'}$ 垂直平分 $\mathrm{A'F}$； $\mathrm{BC'}$ 垂直平分 $\mathrm{B'F}$；

证明：由 $|\mathrm{C'F}|=\frac{1}{2}|\mathrm{A'B'}|$ 可知，$|C'F|=\frac{1}{2}|A'B'|=|C'A'|,$

又 $\because |AF|=|AA'|,\therefore$ 得证. 同理可证另一个.

8. $\mathrm{AC'}$ 平分 $\angle A'AF$， BC' 平分 $\angle B'BF$，A’ F 平分 $\angle AFK$，B’ F 平分 $\angle BFK$.

证明：由 $\mathrm{AC'}$ 垂直平分 $\mathrm{A'F}$ 可证.

9. $\mathrm{C'F}\perp \mathrm{AB}$；

证明：$\overline{C'F}\cdot\overline{AB}=(p,-\frac{y_1+y_2}{2})\cdot(x_2-x_1,y_2-y_1)$

$=p(x_2-x_1)+\frac{y_1^2-y_2^2}{2}=\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{2}=0$

10. $|AF|=\frac{P}{1-\cos\alpha}$； $|BF|=\frac{P}{1+\cos\alpha}$；

证明：作 AH 垂直 x 轴于点 H，则 $|AF|=|AA'|=|KF|+|FH|=p+|AF|\cos\alpha,\therefore |AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$.

同理可证另一个.

11. $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{P}$；

证明：由$\left|AF\right|=\dfrac{P}{1-\cos\alpha}$；$\left|BF\right|=\dfrac{P}{1+\cos\alpha}$；得证.

12. 点 A 处的切线为$y_1y=p(x+x_1)$；

证明：（方法一）设点 A 处切线方程为$y-y_1=k(x-x_1)$，与$y^2=2px$联立，得

$ky^2-2py+2p(y_1-kx_1)=0,$ 由$\Delta=0\Rightarrow 2x_1k^2-2y_1k+p=0,$

解这个关于k的一元二次方程（它的差别式也恰为 0）得：$k=\dfrac{y_1}{2x_1}=\dfrac{p}{y_1}$,得证.

证法二：（求导）$y^2=2px$两边对 x 求导得$2yy'=2p,\ y'=\dfrac{p}{y},\quad \therefore y'|_{x=x_1}=\dfrac{p}{y_1}$,得证.

13. AC’是切线，切点为 A；BC’是切线，切点为 B；

证明：易求得点 A 处的切线为$y_1y=p(x+x_1)$，点 B 处的切线为$y_2y=p(x+x_2)$，解得两切线的交点为$C'(-\dfrac{p}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$，得证.

14. 过抛物线准线上任一点 P 作抛物线的切线，则过两切点 Q_1、Q_2 的弦必过焦点;并且$PQ_1\perp PQ_2$.

证明：设点$P(-\dfrac{p}{2},t)(t\in R)$为准线上任一点，过点 P 作抛物线的切线，切点为$Q(\dfrac{y^2}{2p},y)$，

$y^2=2px$两边对x求导得$2yy'=2p,\ y'=\dfrac{p}{y},\quad \therefore\dfrac{p}{y}=K_{PQ}=\dfrac{y-t}{\dfrac{y^2}{2p}+\dfrac{p}{2}},\therefore y^2-2ty-p^2=0,$

显然$\Delta=4t^2+4p^2>0$,切点有两个，设为$Q_1(\dfrac{y_1^2}{2p},y_1),Q_2(\dfrac{y_2^2}{2p},y_2)$,则$y_1+y_2=2t,y_1y_2=-p^2,$

$$\therefore k_{FQ_1}-k_{FQ_2}=\frac{y_1}{\dfrac{y_1^2}{2p}-\dfrac{p}{2}}-\frac{y_2}{\dfrac{y_2^2}{2p}-\dfrac{p}{2}}=\frac{2py_1}{y_1^2-p^2}-\frac{2py_2}{y_2^2-p^2}$$

$$=\frac{2py_1}{y_1^2+y_1y_2}-\frac{2py_2}{y_2^2+y_1y_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}-\frac{2p}{y_1+y_2}=0,$$ 所以 Q_1Q_2 过焦点.

$$\overline{PQ_1}\cdot\overline{PQ_2}=(\frac{y_1^2}{2p}+\frac{p}{2},y_1-t)\cdot(\frac{y_2^2}{2p}+\frac{p}{2},y_2-t)=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{4}+\frac{p^2}{4}+y_1y_2-t(y_1+y_2)+t^2$$

$$=-\frac{p^2}{2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{4}-t^2=-\frac{p^2}{2}+\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{4}-t^2=-\frac{p^2}{2}+\frac{4t^2+2p^2}{4}-t^2=0,$$

$\therefore PQ_1\perp PQ_2$.

15. A、O、B$'$三点共线；B、O、A$'$三点共线；

证明：A、O、B$'$三点共线$\Leftarrow k_{OA}=k_{OB'}\Leftarrow x_1y_2=-\dfrac{p}{2}y_1\Leftarrow\dfrac{y_1^2}{2p}y_2=-\dfrac{p}{2}y_1\Leftarrow y_1y_2=-p^2$.

同理可证：B、O、A'三点共线.

16. $y_1\cdot y_2=-p^2$；$x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$

证明：设 AB 的方程为$y=k(x-\frac{p}{2})$，与$y^2=2px$联立，得$ky^2-2py-kp^2=0$,

$\therefore y_1+y_2=\frac{2p}{k}$，$y_1y_2=-p^2$，　$\therefore x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{p^4}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$.

17. $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$

证明：$|AB|=|AF|+|FB|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=x_1+x_2+p$,

$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(\frac{2p}{k})^2+4p^2}=2p\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$

$=2p\sqrt{1+\cot^2\alpha}=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$.得证.

18. $S_{\Delta AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；

证明：$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta OFA}+S_{\Delta OFB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{p}{4}\sqrt{(\frac{2p}{k})^2+4p^2}$

$=\frac{p^2}{2}\sqrt{(\frac{1}{k})^2+1}=\frac{p^2}{2}\sqrt{1+\cot^2\alpha}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$.

19. $\frac{S^2_{\Delta AOB}}{|AB|}=\left(\frac{p}{2}\right)^3$（定值）；　　证明：由$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$、$S_{\Delta AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$得证.

20. $S_{\Delta ABC'}=\frac{p^2}{\sin^2\alpha}$

证明：$S_{\Delta ABC'}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|PF|=\frac{1}{2}\cdot 2p\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{p^2-(\frac{y_1+y_2}{2})^2}$

$=p\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{p^2+(\frac{p}{k})^2}=p^2(1+\frac{1}{k^2})=\frac{p^2}{\sin^2\alpha}$

21. $|AB|\geq 2p$；　　证明：由$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$得证.

22. $k_{AB}=\frac{2p}{y_1+y_2}$；　证明：由点差法得证.

23. $\tan\alpha=\frac{y_1}{x_1-\frac{P}{2}}=\frac{y_2}{x_2-\frac{P}{2}}$；

证明：作 AA_2 垂直 x 轴于点 A_2，在ΔAA_2F 中，$\tan\alpha=\frac{AA_2}{FA_2}=\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}$，同理可证另一个.

24. $|A'B'|^2=4|AF|\cdot|BF|$；

证明：$|A'B'|^2=4|AF|\cdot|BF|\Leftrightarrow|y_1-y_2|^2=4(x_1+\frac{p}{2})(x_2+\frac{p}{2})$

$\Leftrightarrow y_1^2+y_2^2-2y_1y_2=4x_1x_2+2px_1+2px_2+p^2\Leftrightarrow -2y_1y_2=4x_1x_2+p^2$，

由 $y_1\cdot y_2=-p^2$， $x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$ 得证.

25. 设 CC’交抛物线于点 M，则点 M 是 CC’的中点；

证明：$C(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}),C'(-\frac{p}{2},\frac{y_1+y_2}{2}),\therefore CC'$中点横坐标为$\frac{x_1+x_2-p}{4}$，

把 $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ 代入 $y^2=2px$，得

$\frac{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}{4}=2px,\quad \therefore \frac{2px_1+2px_2-2p^2}{4}=2px,\quad x=\frac{x_1+x_2-p}{4}$.

所以点 M 的横坐标为 $x=\frac{x_1+x_2-p}{4}$. 点 M 是 CC’的中点.

当弦 AB 不过焦点时，设 AB 交 x 轴于点 $D(m,0)$ $(m>0)$，设分别以 A、B 为切点的切线相交于点 P，求证：

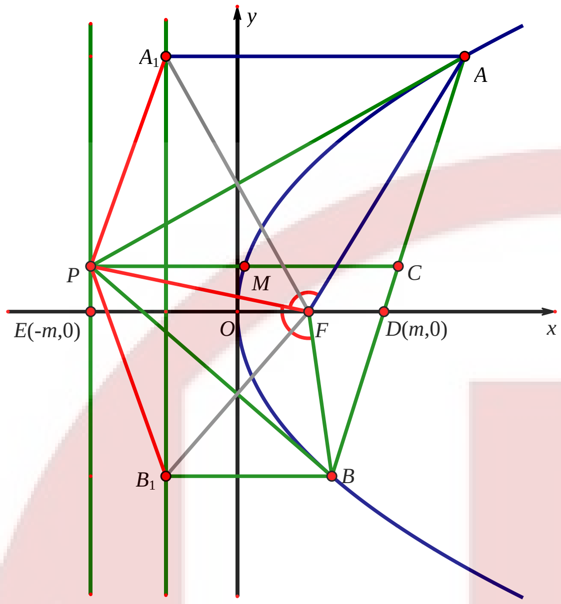
26. 点 P 在直线 $x=-m$ 上

证明：设 $AB:x=ty+m,$ 与 $y^2=2px$ 联立，得

$y^2-2pty-2pm=0,\quad \therefore y_1+y_2=2pt, y_1y_2=-2pm$，

又由 $\begin{cases}PA:y_1y=p(x+x_1)\\PB:y_2y=p(x+x_2)\end{cases}$，相减得$(y_1-y_2)y=\frac{y_1^2}{2}-\frac{y_2^2}{2},\therefore y=\frac{y_1+y_2}{2}$，

代入 $y_1y=p(x+x_1)$得，$\frac{y_1^2+y_1y_2}{2}=px+\frac{y_1^2}{2},\quad \therefore y_1y_2=2px,\therefore x=-m,$ 得证.



27．设 PC 交抛物线于点 M，则点 M 是 PC 的中点；

证明：$C(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}),\ P(-m,\frac{y_1+y_2}{2}),\therefore PC$中点横坐标为$\frac{x_1+x_2-2m}{4}$，

把 $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ 代入 $y^2=2px$，得

$$\frac{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}{4}=2px,\quad \because\ y_1y_2=-2pm,\therefore \frac{2px_1+2px_2-4pm}{4}=2px,\quad x=\frac{x_1+x_2-2m}{4}.$$

所以点 M 的横坐标为 $x=\frac{x_1+x_2-2m}{4}$. 点 M 是 PC 的中点.

28.设点 A、B 在准线上的射影分别是 A_1，B_1，则 PA 垂直平分 A_1F， PB 垂直平分 B_1F，从而 PA 平分 $\angle A_1AF$， PB 平分 $\angle B_1BF$

证明：$k_{PA}\cdot k_{A_1F}=\frac{p}{y_1}\cdot\frac{0-y_1}{\frac{p}{2}-(-\frac{p}{2})}=\frac{p}{y_1}\cdot(-\frac{y_1}{p})=-1,\therefore PA\perp A_1F$，

又 $|AF|=|AA_1|$，所以 PA 垂直平分 A_1F. 同理可证另一个.

证法二：$k_{AF}=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{p}{2}}=\frac{2py_1}{y_1^2-p^2},k_{AP}=\frac{p}{y_1},k_{AA_1}=0$,

$$\therefore \tan\angle FAP-\tan\angle PAA_1=\frac{k_{AF}-k_{AP}}{1+k_{AF}\cdot k_{AP}}-\frac{k_{AP}-k_{AA_1}}{1+k_{AP}\cdot k_{AA_1}}$$

$$=\frac{\frac{2py_1}{y_1^2-p^2}-\frac{p}{y_1}}{1+\frac{2py_1}{y_1^2-p^2}\cdot\frac{p}{y_1}}-\frac{\frac{p}{y_1}-0}{1+\frac{p}{y_1}\cdot 0}=\frac{2py_1-\frac{p}{y_1}(y_1^2-p^2)}{y_1^2-p^2+2p^2}-\frac{p}{y_1}=\frac{py_1^2+p^3}{y_1(y_1^2+p^2)}-\frac{p}{y_1}=\frac{p}{y_1}-\frac{p}{y_1}=0$$

$\therefore \tan\angle FAP=\tan\angle PAA_1$， $\therefore \angle FAP=\angle PAA_1$. 同理可证另一个

29. $\angle PFA=\angle PFB$

证明：$\Delta PAA_1\cong\Delta PAF\Rightarrow\angle PFA=\angle PA_1A$,同理：$\angle PFB=\angle PB_1B$,$\therefore$只需证$\angle PA_1A=\angle PB_1B$,

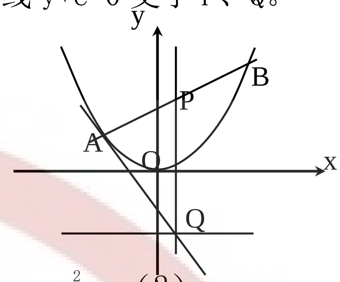
易证：$|PA_1|=|PF|=|PB_1|$,$\therefore\angle PA_1B_1=\angle PB_1A_1$, $\therefore\angle PA_1A=\angle PB_1B$,

30．$|\overrightarrow{FA}|\cdot|\overrightarrow{FB}|=|\overrightarrow{PF}|^2$

证明：$|AF|\cdot|BF|=(x_1+\frac{p}{2})(x_2+\frac{p}{2})=x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4}=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{4}+\frac{p^2}{4}$,

$\because P(\frac{y_1y_2}{2p},\frac{y_1+y_2}{2})$, $\therefore|PF|^2=\left(\frac{y_1y_2}{2p}-\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{4}+\frac{p^2}{4}$，得证.

例 1：（2007 江苏高考第 19 题）如图，过 C（0，c）（c>0）作直线与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A、B 两点，一条垂直于 x 轴的直线，分别与线段 AB 和直线 y+c=0 交于 P、Q。



（1）若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，求 c 的值；

（2）若 P 为线段 AB 的中点，

求证：AQ 为抛物线的切线；

（3）试问（2）的逆命题是否成立。

解：（1）设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），C（0，c）

点 A 在抛物线上：$y_1=x_1^2$　　（1）点 B 在抛物线上：$y_2=x_2^2$　　（2）

直线 AB 经过点 C：$\dfrac{y_1-c}{x_1}=\dfrac{y_2-c}{x_2}$　　（3）

将（1）式与（2）式分别代入（3）式，得到 $x_1x_2=-c$，$y_1y_2=c^2$

由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=2$，得 c=2。

（2）P 为线段 AB 的中点，得点 Q 的坐标为（$\dfrac{x_1+x_2}{2}$，-c）

由 AQ 的斜率 $k_1=\dfrac{y_1+c}{x_1-\dfrac{x_1+x_2}{2}}=\dfrac{2(x_1^{\ 2}-x_1x_2)}{x_1-x_2}=2x_1$，过点 A 的切线的斜率为 $k_2=2x_1$。所以直线 AQ 是抛物线的切线。

（3）过点 A 的切线方程为 $y-y_1=2x_1(x-x_1)$ 与直线 y=-c 相交于点 Q，

将 y=-c 代入 $y-y_1=2x_1(x-x_1)$，可得 $-c-x_1^2=2x_1(x-x_1)$ 即 $x_1x_2-x_1^2=2x_1(x-x_1)$

所以点 Q 的横坐标为 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$，即点 P 为线段 AB 的中点。（2）的逆命题成立。

该题的命题思路就是借助于性质 3 而编制的一道中等难度的题。其中主要运用了切线的斜率，切线的方程的写法，以及抛物线中的定值的使用。下题也是用类似的方法命制的题。

例 2：（2006 全国高考卷Ⅱ21 题）抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F，A、B 是抛物线上两动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，过 A、B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M。

（1）　证明：$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值；

（2）　设△ABM 的面积为 S，写出 S=f（λ）的表达式，并求出 S 的最小值。

解：（1）设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），F（0，1）

点 A 在抛物线上：$4y_1=x_1^2$　　（1）点 B 在抛物线上：$4y_2=x_2^2$　　（2）

直线 AB 经过点 F：$\dfrac{y_1-1}{x_1}=\dfrac{y_2-1}{x_2}$　　（3）

得到过点 A 的切线方程：$2(y-y_1)=x_1(x-x_1)$　　（4）

过点 B 的切线方程：$2(y-y_2)=x_2(x-x_2)$　　（5）

由（1）（2）（3）得 $x_1x_2=-4$，$y_1y_2=1$。

由（4）、（5）得 M 坐标为（$\dfrac{x_1+x_2}{2}$，-1）。

所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}=$（$\dfrac{x_1+x_2}{2}$，-2）•（$x_2-x_1$，$y_2-y_1$）$=\dfrac{x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}}{2}-2(y_2-y_1)=0$。

（2）$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，即（0−$x_1$，1−$y_1$）=λ（$x_2$，$y_2$−1）

所以−x_1=λx_2，再由 x_1x_2=−4，得λx_2x_2=4，

即 $x_2=\sqrt{\frac{4}{\lambda}}$，则 $x_1=-\sqrt{4\lambda}$，$y_1=\lambda$，$y_2=\frac{1}{\lambda}$。由 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$=0，

所以 S= f（λ）$=\frac{1}{2}|AB|\times|FM|=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\times\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+4}$

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^3\geq 4$。当λ=1 时，△ABM 的面积 S 取得最小值。

相关考题

1、已知抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，焦点为 F，准线为 l，直线 m 交抛物线于两点 A，B；

（1）过点 A 的抛物线 C 的切线与 y 轴交于点 D，求证：$|AF|=|DF|$；

（2）若直线 m 过焦点 F，分别过点 A，B 的两条切线相交于点 M，求证：$AM\perp BM$，且点 M 在直线 l 上．

2、对每个正整数 n，$A_n(x_n,y_n)$是抛物线 $x^2=4y$ 上的点，过焦点 F 的直线 FA_n 交抛物线于另一点 $B_n(s_n,t_n)$，（1）试证：$x_n\cdot s_n=-4$（n≥1）

（2）取 $x_n=2^n$，并 C_n 为抛物线上分别以 A_n 与 B_n 为切点的两条切线的交点，求证：$|FC_1|+|FC_2|+\cdots+|FC_n|=2^n-2^{-n+1}+1$（$n$≥1）