第3节　抛物线

■ 真题自测　考向速览

■ 必备知识　整合提升

■ 考点精析　考法突破

■ 思维提升　针对强化

◆ 第3节 抛物线

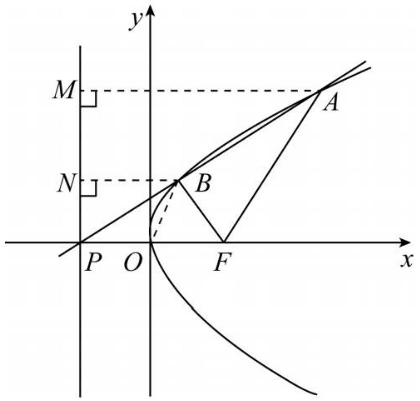
■ 真题自测 考向速览

考点1 抛物线的定义及应用

1．[黑龙江哈尔滨六中2019期中]已知直线l：$y=k(x+1)(k>0)$与抛物线C：$y^2=4x$相交于A，B两点，且满足$|AF|=2|BF|$，则k的值是(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

【解析】抛物线 C：$y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，直线 l：$y=k(x+1)$ 恒过定点 $P(-1, 0)$．如图，过 A，B 分别作准线 $x=-1$ 的垂线，垂足分别为 M，N．因为 $|AF|=2|BF|$，所以 $|AM|=2|BN|$，所以点 B 为 AP 的中点．连接 OB，则 $|OB|=\frac{1}{2}|AF|$，所以 $|OB|=|BF|$，所以 $\triangle OBF$ 为等腰三角形，故点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$．又因为 $P(-1, 0)$，所以 $k=\dfrac{\sqrt{2}-0}{\frac{1}{2}-(-1)}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$．



【答案】C

2．[安徽泗县一中2019模拟]已知抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，A为抛物线C上异于顶点O的一点，点B的坐标为(a，b)(其中a，b满足$b^2-4a<0$)．当|AB|＋|AF|最小时，△ABF恰为等边三角形，则a＝________.

【解析】依题意抛物线的焦点为F(1，0)．根据抛物线的定义可知，当AB垂直抛物线的准线时，|AB|＋|AF|取得最小值，且点B的坐标为(a，b)，故$A\left(\frac{a-1}{2}，b\right)$. 因为△ABF为等边三角形，根据对称性有$\frac{1}{2}\times\left(\frac{a-1}{2}+a\right)=1$，解得$a=\frac{5}{3}$.

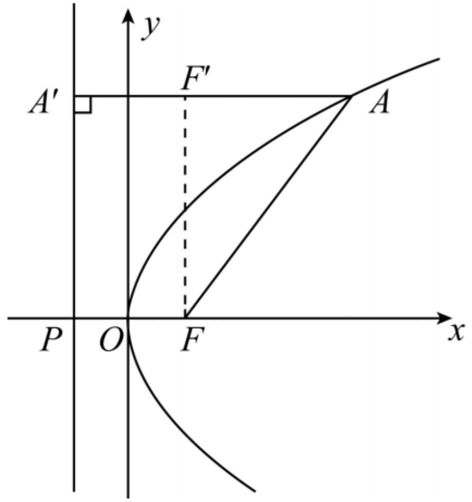
【答案】$\frac{5}{3}$

考点2 求抛物线方程的方法

3．[山西晋城2019三模]已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，l与x轴的交点为P，点A在抛物线C上，过点A作$AA'\perp l$，垂足为A'．若四边形$AA'PF$的面积为14，且$\cos\angle FAA'=\dfrac{3}{5}$，则抛物线C的方程为(　　)

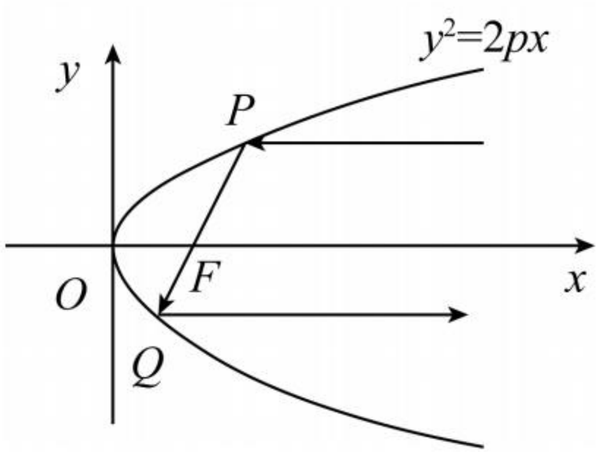
A．$y^2=8x$　　B．$y^2=4x$　　C．$y^2=2x$　　D．$y^2=x$

【解析】如图所示，过点 F 作 $FF'\perp AA'$，垂足为 F'. 设 $|AF'|=3x$，因为 $\cos\angle FAA'=\frac{3}{5}$，所以 $|AF|=5x$，$|FF'|=4x$. 由抛物线定义可知，$|AF|=|AA'|=5x$，则 $|A'F'|=2x=p$，故 $x=\frac{p}{2}$. 又四边形 $AA'PF$ 的面积 $S=\frac{(|PF|+|AA'|)\cdot|PA'|}{2}=\frac{\left(p+\frac{5}{2}p\right)\cdot 2p}{2}=14$，解得 $p=2$. 所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.



【答案】B

4．[江西临川一中2019模拟]抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出．今有抛物线$y^2=2px(p>0)$，如图，一平行于x轴的光线射向抛物线上的点P，经过抛物线的焦点F反射后射向抛物线上的点Q，再反射后又沿平行于x轴方向射出，若两平行光线间的最小距离为6，则此抛物线的方程为________________．



【解析】设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，两平行光线之间的距离为 d. 由题意可知 $d=|y_1-y_2|$.

因为直线 PQ 过点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，则可设直线 PQ 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}$，$m\in R$.

联立 $\begin{cases} y^2=2px, \\ x=my+\frac{p}{2}, \end{cases}$ 得 $y^2-2pmy-p^2=0$，所以 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$.

所以 $d=|y_1-y_2|=\sqrt{4p^2m^2+4p^2}=2p\sqrt{1+m^2}\geqslant 2p$，所以 $2p=6$.

故抛物线的方程为 $y^2=6x$.

【答案】$y^2=6x$

第3节 抛物线

考点3 抛物线的几何性质

5．[天津2019·5]已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，准线为l.若l与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0，b>0)$的两条渐近线分别交于点A和点B，且$|AB|=4|OF|$(O为原点)，则双曲线的离心率为(　　)

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C．2　　D.$\sqrt{5}$

【解析】抛物线的准线l的方程为$x=-1$，则$|OF|=1$.**双曲线的渐近线方程为**$y=\pm\frac{b}{a}x$，**故当**$x=-1$**时**，$y=\pm\frac{b}{a}$，所以$|AB|=\frac{2b}{a}$，即$\frac{2b}{a}=4$，所以$b=2a$.则$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{5}$.故选D.

【答案】D

6．[山东省2020届一模]直线l过抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点$F(1，0)$，且与C交于A，B两点，则$p=$________，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=$________.

【解析】由题意知$\frac{p}{2}=1$，从而$p=2$，所以抛物线方程为$y^2=4x$.

方法一：当直线l斜率不存在，即直线l为$x=1$时，将$x=1$代入$y^2=4x$，得$|AF|=|BF|=2$，

从而$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=1$.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，联立 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}, \\ x_1x_2=1. \end{cases}$ 从而 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}=\dfrac{x_1+x_2+2}{x_1+x_2+x_1x_2+1}=\dfrac{x_1+x_2+2}{x_1+x_2+2}=1$.

方法二(利用结论)：过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A，B 两点，则 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}=1$.

【答案】2　1

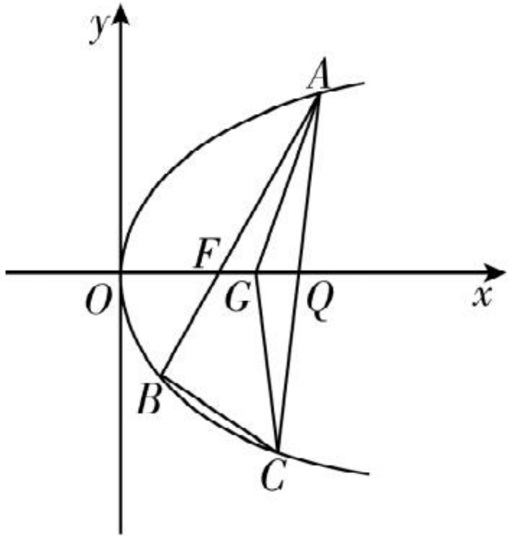
第3节 抛物线

考点4 直线与抛物线位置关系的问题

7.［浙江2019·21］如图，已知点F(1，0)为抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点．过点F的直线交抛物线于A，B两点，点C在抛物线上，使得△ABC的重心G在x轴上，直线AC交x轴于点Q，且Q在点F的右侧．记△AFG，△CQG的面积分别为S_1，S_2．

(1)求p的值及抛物线的准线方程；

(2)求$\frac{S_1}{S_2}$的最小值及此时点G的坐标．



【解】(1)由题意得$\frac{p}{2}=1$，即$p=2$．所以抛物线的准线方程为$x=-1$．

(2) 设 $A(x_A, y_A)$，$B(x_B, y_B)$，$C(x_C, y_C)$，重心 $G(x_G, y_G)$. 令 $y_A=2t$，$t\neq0$，则 $x_A=t^2$.

由于直线 AB 过 F，故直线 AB 方程为 $x=\frac{t^2-1}{2t}y+1$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-\frac{2(t^2-1)}{t}y-4=0$，

故 $2ty_B=-4$，即 $y_B=-\frac{2}{t}$，所以 $B\left(\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t}\right)$. 又由于 $x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$，$y_G=\frac{1}{3}\cdot(y_A+y_B+y_C)$

及重心 G 在 x 轴上，故 $2t-\frac{2}{t}+y_C=0$，得 $C\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2, 2\left(\frac{1}{t}-t\right)\right)$，$G\left(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}, 0\right)$.

所以直线 AC 方程为 $y-2t=2t(x-t^2)$，得 $Q(t^2-1, 0)$. 由于 Q 在焦点 F 的右侧，故 $t^2>2$.

从而$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{1}{2}|FG|\cdot|y_A|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot|y_C|}=\dfrac{\left|\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}-1\right|\cdot|2t|}{\left|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}\right|\cdot\left|\frac{2}{t}-2t\right|}=\dfrac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\dfrac{t^2-2}{t^4-1}$.

令 $m=t^2-2$，则 $m>0$，

$\dfrac{S_1}{S_2}=2-\dfrac{m}{m^2+4m+3}=2-\dfrac{1}{m+\frac{3}{m}+4}\geqslant 2-\dfrac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 当 $m=\sqrt{3}$时，$\dfrac{S_1}{S_2}$取得最小值$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

此时 $G(2,0)$.

◆ 第3节　抛物线

考点5　焦点弦问题

8．[北京2019·18]已知抛物线C：$x^2=-2py$经过点(2，-1)．

(1)求抛物线C的方程及其准线方程；

(2)设O为原点，过抛物线C的焦点作斜率不为0的直线l交抛物线C于两点M，N，直线$y=-1$分别交直线OM，ON于点A和点B．求证：以AB为直径的圆经过y轴上的两个定点．

【解】(1)由抛物线C：$x^2=-2py$经过点(2，-1)，得$p=2$．所以抛物线C的方程为$x^2=-4y$，其准线方程为$y=1$．

(2)抛物线 C 的焦点为 F(0，−1)．设直线 l 的方程为 $y=kx-1(k\neq0)$．由$\begin{cases}y=kx-1,\\x^2=-4y\end{cases}$得

$x^2+4kx-4=0$. 设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，则 $x_1x_2=-4$. 直线 OM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$. 令 $y=-1$，

得点 A 的横坐标 $x_A=-\frac{x_1}{y_1}$. 同理得点 B 的横坐标 $x_B=-\frac{x_2}{y_2}$. 设点 D(0，n)，则$\overrightarrow{DA}=\left(-\frac{x_1}{y_1}, -1-n\right)$，$\overrightarrow{DB}=\left(-\frac{x_2}{y_2}, -1-n\right)$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}+(n+1)^2=\frac{x_1x_2}{\left(-\frac{x_1^2}{4}\right)\left(-\frac{x_2^2}{4}\right)}+(n+1)^2=\frac{16}{x_1x_2}+(n+1)^2$

$=-4+(n+1)^2$. 令$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，即 $-4+(n+1)^2=0$，得 $n=1$ 或 $n=-3$. 综上，以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的定点(0，1)和(0，−3)．

第3节 抛物线

必备知识 整合提升

1.抛物线的定义

平面上到定点F和到定直线l(l不经过点F)距离__相等__的点的轨迹叫做抛物线，点F叫做抛物线的__焦点__，直线l叫做抛物线的__准线__.

与椭圆和双曲线不同的是，在抛物线中，只有一个焦点和一条准线.

◆ 第3节 抛物线

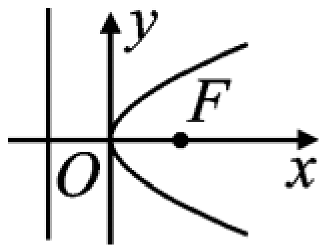
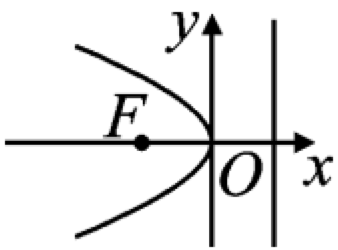
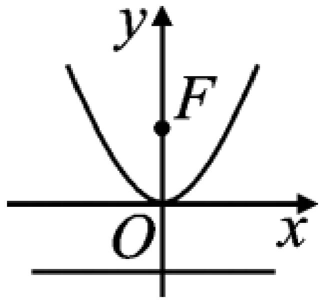
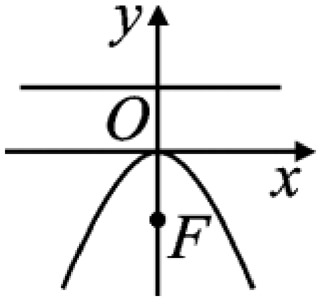
笔记 (1)定义的实质可归结为“一动三定”，一个动点，设为M；一个定点F，叫做抛物线的焦点；一条定直线l，叫做抛物线的准线；一个定值，即点M到点F的距离和它到直线l的距离之比等于1.

(2)定点F不在定直线l上，否则动点M的轨迹不是抛物线，而是过点F垂直于直线l的一条直线.

(3)抛物线的定义中指明了抛物线上的点到焦点的距离与到准线距离的等价性，故二者可以相互转化.

第3节 抛物线

2.抛物线的标准方程、类型及几何性质

标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
图形				

第3节 抛物线

几何性质	焦点	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
	准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
	范围	$x\geqslant 0$，$y\in R$	$x\leqslant 0$，$y\in R$	$x\in R$，$y\geqslant 0$	$x\in R$，$y\leqslant 0$
	对称轴	x轴		y轴	
	顶点	O(0，0)			
	离心率	$e=1$			
	开口	向右	向左	向上	向下
	焦半径长 ($P(x_1，y_1)$ 为抛物线上一点)	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+x_1$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}-x_1$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+y_1$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}-y_1$
	焦点弦长	$p+(x_1+x_2)$	$p-(x_1+x_2)$	$p+(y_1+y_2)$	$p-(y_1+y_2)$

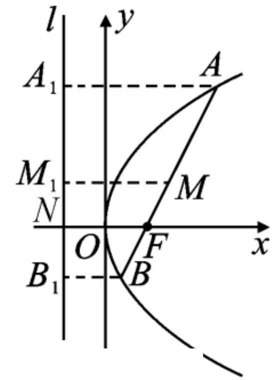
第3节 抛物线

笔记 (1)抛物线的标准方程$y^2=\pm 2px(p>0)$或$x^2=\pm 2py(p>0)$，这个形式与位置特征相对应：当对称轴为x轴时，方程中的一次项就是x的一次项，且符号指出了抛物线的开口方向，即开口向着x轴的正方向时，该项取正号，开口向着x轴的负方向时，该项取负号．当对称轴为y轴时，方程中的一次项就是y的一次项，且符号指出了抛物线的开口方向．可简记为“对称轴要看一次项，符号决定开口方向”．

(2)准线与焦点所在的坐标轴垂直，垂足与焦点关于原点对称，它们与原点的距离都等于一次项系数绝对值的$\frac{1}{4}$，即$\frac{2p}{4}=\frac{p}{2}$.

3.抛物线的焦点弦

如图，AB是抛物线$y^2=2px(p>0)$过焦点F的一条弦，设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，线段AB的中点$M(x_0, y_0)$，相应的准线为l，有如下结论：



(1) $|AB|=$ x_1+x_2+p；

(2) $|AB|=$ $2\left(x_0+\frac{p}{2}\right)$(焦点弦长与中点关系)；

(3)若直线 AB 的倾斜角为 α，则$|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；

(4)A，B 两点横坐标之积、纵坐标之积为定值，即 $x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$，$y_1\cdot y_2=-p^2$；

第3节 抛物线

(5) $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$ 为定值____$\frac{2}{p}$____；

(6) 以过焦点的弦为直径的圆和准线相切；

(7) 抛物线$y^2=2px(p>0)$中，设AB为焦点弦，N为准线与x轴的交点，则$\angle ANF=\angle BNF$；

(8) 设AB为焦点弦，A，B在准线上的投影分别为A_1，B_1，若M_1为A_1B_1的中点，则$M_1A\perp M_1B$；

(9) 若AO的延长线交准线于点C，则BC平行于x轴，反之，若过点B平行于x轴的直线交准线于点C，则A，O，C三点共线.

◆ 第3节 抛物线

■ 考点精析 考法突破

考点1 抛物线的定义及应用

抛物线是到定点与到定直线的距离相等的点的轨迹，利用抛物线的定义解决问题时，可以巧妙运用抛物线上的点到焦点的距离与到准线的距离的等价转化．“看到准线想到焦点，看到焦点想到准线”是解决抛物线焦点弦等有关问题的有效途径．

总体来说，利用抛物线的定义可解决如下两类问题．

(1)轨迹问题：用抛物线的定义可以确定动点与定点、定直线距离有关的轨迹是否为抛物线．

(2)距离问题：涉及抛物线上的点到焦点的距离和点到准线的距离问题时，注意在解题中利用两者之间的等价转化．

第3节 抛物线

例1 已知A，B为抛物线$x^2=2py(p>0)$上的两个动点，以AB为直径的圆C经过抛物线的焦点F，且面积为2π. 若过圆心C作该抛物线准线l的垂线CD，垂足为D，则$|CD|$的最大值为(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

【解析】根据题意，圆的面积 $S=2\pi=\pi\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2$，$\therefore |AB|=2\sqrt{2}$. 设$|AF|=a$，$|BF|=b$

过点 A 作 $AQ\perp l$ 于点 Q，过点 B 作 $BP\perp l$ 于点 P. 由抛物线定义，得$|AF|=|AQ|$，$|BF|=|BP|$，在梯形 ABPQ 中，$2|CD|=|AQ|+|BP|=a+b$. 在 $Rt\triangle ABF$ 中，由勾股定理得 $8=a^2+b^2$，$\because |CD|^2$

$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{8+2ab}{4}=2+\frac{ab}{2}\leqslant 2+\frac{a^2+b^2}{4}=4$，$\therefore |CD|\leqslant 2$(当且仅当 $a=b$ 时，等号成立)，$\therefore |CD|$的最大值为 2.

【答案】A

第3节 抛物线

对点练

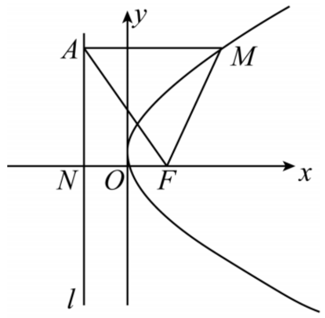
1．[湖南长沙一中 2019 模拟]已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，准线为 l，点 M 在抛物线 C 位于第一象限的图像上，直线 MF 的斜率为$\sqrt{3}$，点 M 在直线 l 上的射影为 A，且$\triangle MAF$的面积为$4\sqrt{3}$，则 p 的值为(　　)

A．1　　B．2　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

【解析】∵直线 MF 的斜率为$\sqrt{3}$，∴$\angle MFx=60°$，∴$\angle AMF=60°$．由抛物线的定义可得

$|MA|=|MF|$，∴$S_{\triangle MAF}=\frac{1}{2}|MF|\cdot|MA|\sin 60°=4\sqrt{3}$，∴$|MA|=|MF|=4$，∴$|MA|=2p=4$，p

$=2$.

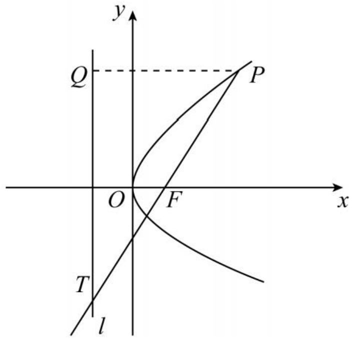


【答案】B

2．[福建泉州2019质检]已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，O为坐标原点，点P在C上，直线PF与l交于点T．若$\angle PFO=\frac{2}{3}\pi$，则$\frac{|PF|}{|PT|}=$(　　)

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

【解析】根据题意，过点P作PQ⊥l于点Q，如图所示．因为$\angle PFO=\frac{2}{3}\pi$，所以$\angle QPT=\frac{\pi}{3}$．在Rt△PQT中，$\angle PQT=\frac{\pi}{2}$，$\angle PTQ=\frac{\pi}{6}$．由抛物线的定义可得$\frac{|PF|}{|PT|}=\frac{|PQ|}{|PT|}=\sin\angle QTP=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$．



【答案】C

3．[吉林2019第三次调研测试]已知抛物线$y^2=4x$的焦点F，点A(4，3)，P为抛物线上一点，且P不在直线AF上，则△PAF周长取最小值时，线段PF的长为(　　)

A. 1　　B. $\frac{13}{4}$　　C. 5　　D. $\frac{21}{4}$

【解析】设点P在准线上的射影为D，根据抛物线的定义可知$|PF|=|PD|$. 因此$|PA|+|PF|$的最小值，即为$|PA|+|PD|$的最小值．　当D，P，A三点共线时$|PA|+|PD|$的值最小.

此时点P的坐标为$\left(\frac{9}{4},\ 3\right)$，所以$|PF|=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$.

【答案】B

◆ 第3节 抛物线

考点2 求抛物线方程的方法

1.定义法

根据抛物线的定义，确定p的值(系数p是指焦点到准线的距离)，再结合焦点位置，求出抛物线方程．抛物线标准方程有四种形式，要注意选择．

第3节 抛物线

2.待定系数法

①对于焦点在x轴上的抛物线，若开口方向不确定需分为$y^2=2px(p>0)$和$y^2=-2px(p>0)$两种情况求解．

②焦点在x轴上的抛物线方程可设成$y^2=mx(m\neq0)$，若$m>0$，开口向右；若$m<0$，开口向左；若m有两个解，则抛物线的标准方程有两个．同理，焦点在y轴上的抛物线的方程可以设成$x^2=my(m\neq0)$．如果不确定焦点所在的坐标轴，应考虑x轴、y轴两种情况分别设方程．

例2 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

(1)抛物线的顶点在坐标原点，过点(－3，2)；

(2)抛物线的顶点在坐标原点，焦点在直线$x-2y-4=0$上；

(3)已知抛物线的顶点在坐标原点，对称轴为x轴，抛物线上的点$M(-3, m)$到焦点的距离等于5，求抛物线的方程和m的值.

【解】(1)设抛物线的方程为 $y^2=-2p_1x$ 或 $x^2=2p_2y(p_1, p_2>0)$，将点(－3，2)的坐标代入方程得 $2p_1=\frac{4}{3}$或 $2p_2=\frac{9}{2}$，∴所求抛物线的标准方程为 $y^2=-\frac{4}{3}x$ 或 $x^2=\frac{9}{2}y$.

(2)令 $x=0$，由方程 $x-2y-4=0$ 得 $y=-2$. ∴抛物线的焦点为 $F(0, -2)$. 设抛物线的方程为 $x^2=-2p_1y(p_1>0)$，则由$\frac{p_1}{2}=2$，得 $2p_1=8$，∴所求抛物线的方程为 $x^2=-8y$. 令 $y=0$，由 $x-2y-4=0$，得 $x=4$，∴抛物线的焦点为 $F(4, 0)$. 设抛物线的方程为 $y^2=2p_2x(p_2>0)$，由$\frac{p_2}{2}=4$，得 $p_2=8$，则所求抛物线的方程为 $y^2=16x$. 综上，所求抛物线的标准方程为 $x^2=-8y$ 或 $y^2=16x$.

第3节 抛物线

(3) 方法一：设抛物线方程为 $y^2=-2px(p>0)$，则焦点 $F\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$，由题设可得

$\begin{cases} m^2=6p, \\ \sqrt{m^2+\left(3-\frac{p}{2}\right)^2}=5. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p=4, \\ m=2\sqrt{6} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p=4, \\ m=-2\sqrt{6}. \end{cases}$ ∴所求抛物线的标准方程为 $y^2=-8x$，

m 的值为 $\pm2\sqrt{6}$. 方法二：设抛物线的方程为 $y^2=-2px(p>0)$，则焦点 $F\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$，准线方程为 $x=\frac{p}{2}$. 根据抛物线的定义，点 M 到焦点的距离等于 5，也就是点 M 到准线的距离等于 5，则 $3+\frac{p}{2}=5$，解得 $p=4$. ∴抛物线的标准方程为 $y^2=-8x$. 又∵点 $M(-3,\ m)$ 在抛物线上，

∴$m^2=24$，∴$m=\pm2\sqrt{6}$.

第3节 抛物线

对点练

4．[贵州凯里一中2019模拟]抛物线$x^2=2py(p>0)$上的点M到抛物线准线的距离为6，到x轴的距离为3，那么抛物线的标准方程是(　　)

A. $x^2=6y$　　B. $x^2=3y$　　C. $x^2=\frac{1}{3}y$　　D. $x^2=12y$

【解析】由题意得抛物线的准线到x轴的距离为$6-3=3$，所以$\frac{p}{2}=3$，所以$p=6$，故抛物线的标准方程为$x^2=12y$.

【答案】D

5．[江西吉安2019一模]《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学著作，第九章“勾股”讲述了勾股定理及一些应用，将直角三角形的斜边称为“弦”，短直角边称为“勾”，长直角边称为“股”．设点F是抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，l是该抛物线的准线，过抛物线上一点A作准线的垂线AB，垂足为B，射线AF交准线l于点C.若Rt△ABC的“勾”$|AB|=3$，“股”$|CB|=3\sqrt{3}$，则抛物线的方程为(　　)

A．$y^2=2x$　　B．$y^2=3x$　　C．$y^2=4x$　　D．$y^2=6x$

【解析】依题意，得$|AB|=3=|AF|$，$|AC|=\sqrt{|AB|^2+|BC|^2}=6$，所以点F是AC的中点，则$p=\frac{1}{2}|AB|=\frac{3}{2}$，所以抛物线的方程为$y^2=3x$.

【答案】B

第3节 抛物线

考点3 抛物线的几何性质

抛物线性质的应用技巧

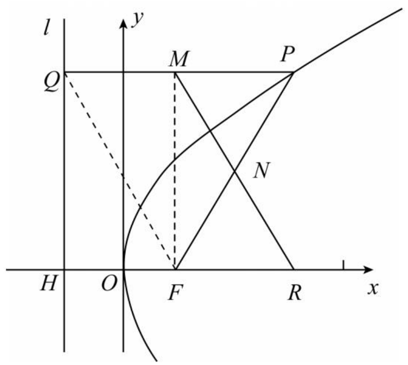
(1)利用抛物线方程确定及应用其焦点、准线时，首先是将抛物线方程化为标准方程；

(2)要结合图形分析，灵活应用平面图形的性质以形助数．

例3 [广东2019适应性考试]在直角坐标系xOy中，抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，准线为l，P为C上一点，PQ垂直l于点Q，M，N分别为PQ，PF的中点，直线MN与x轴交于点R. 若∠NFR＝60°，则|NR|＝(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 3

【解析】如图所示，连接 MF，QF. 因为抛物线的方程为 $y^2=4x$，所以其焦点为 F(1，0)，准线方程 $x=-1$，所以|FH|＝2，|PF|＝|PQ|. 又 M，N 分别为 PQ，PF 的中点，则 MN∥QF. 又|PQ|＝|PF|，∠NFR＝60°，所以∠NRF＝∠QFH＝∠FQP＝∠PFQ＝60°，所以△PQF 为边长为 4 的等边三角形，$|MF|=2\sqrt{3}$. 在 Rt△FMR 中，|FR|＝2，$|MF|=2\sqrt{3}$，所以|MR|＝4，所以$|NR|=\frac{1}{2}|MR|=2$.



【答案】A

对点练

6．[安徽毛坦厂中学2019联考]已知一条抛物线恰好经过等腰梯形ABCD的四个顶点，其中AB＝8，BC＝CD＝AD＝4，则该抛物线的焦点到其准线的距离是(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

【解析】不妨设抛物线的方程为 $x^2=2py(p>0)$，$C(2,\ m)$，$B(4,\ m+2\sqrt{3})$，

则$\begin{cases}4=2pm,\\16=2p(m+2\sqrt{3}),\end{cases}$ 解得 $p=\sqrt{3}$，所以抛物线的焦点到其准线的距离为$\sqrt{3}$.

【答案】C

7．[甘肃、青海、宁夏回族自治区2019联考]已知抛物线C：$x^2=2py(p>0)$的准线l与圆M：$(x-1)^2+(y-2)^2=16$相切，则p＝(　　)

A．6　　B．8　　C．3　　D．4

【解析】抛物线C：$x^2=2py$的准线为$y=-\frac{p}{2}$，因为准线l与圆M：$(x-1)^2+(y-2)^2=16$相切，所以$\frac{p}{2}+2=4$，则$p=4$.

【答案】D

第3节 抛物线

8．[天津和平区 2019 二模]已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右焦点为 F(c，0)，直线 $x=\frac{a^2}{c}$与双曲线的一条渐近线交于点 P，△POF 的面积为 a^2(O 为原点)，则抛物线 $y^2=\frac{2b}{a}x$ 的准线方程为(　　)

A．$x=\frac{1}{2}$　　B．$x=1$　　C．$x=-1$　　D．$x=\sqrt{2}$

【解析】不妨取双曲线的一条渐近线方程为 $bx-ay=0$，联立$\begin{cases}x=\frac{a^2}{c},\\ bx-ay=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{a^2}{c},\\ y=\frac{ab}{c},\end{cases}$即 $P\left(\frac{a^2}{c},\ \frac{ab}{c}\right)$. 由题意，得 $S_{\triangle POF}=\frac{1}{2}\times c\times\frac{ab}{c}=\frac{ab}{2}=a^2$，所以 $b=2a$，$\frac{2b}{a}=4$. 所以抛物线方程为 $y^2=4x$，则其准线方程为 $x=-1$.

【答案】C

◆ 第3节 抛物线

考点4　直线与抛物线位置关系的问题

(1)直线与抛物线的位置关系有三种：相交、相切，相离．判断方法：把直线方程和抛物线方程联立．若得到的是一元二次方程，则①若方程的判别式Δ>0，则直线与抛物线相交；②若方程的判别式Δ＝0，则直线与抛物线相切；③若方程的判别式Δ<0, 则直线与抛物线相离．若得到的是一元一次方程，则直线与抛物线交于一点，此时直线与抛物线的对称轴平行(或重合)．

(2)直线与抛物线相交时，常采用根与系数的关系和点差法求解；直线与抛物线相离时，常考查最值问题，利用数形结合法进行求解；直线和抛物线相切时，切线的斜率可以用导数求解．

(3)当求解直线与抛物线相交的弦长问题时，利用弦长公式

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

($A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，k为直线的斜率，$k\neq0$)进行求解．

第3节 抛物线

例4 [北京2017·18]已知抛物线C：$y^2=2px$过点P(1，1)．过点$(0，\frac{1}{2})$作直线l与抛物线C交于不同的两点M，N，过点M作x轴的垂线分别与直线OP，ON交于点A，B，其中O为原点．

(1)求抛物线C的方程，并求其焦点坐标和准线方程；

(2)求证：A为线段BM的中点．

(1)【解】由抛物线C：$y^2=2px$过点P(1，1)，得$p=\frac{1}{2}$. 所以抛物线C的方程为$y^2=x$.

抛物线C的焦点坐标为$\left(\frac{1}{4}，0\right)$，准线方程为$x=-\frac{1}{4}$.

(2)【证明】由题意，设直线 l 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}(k\neq 0)$，l 与抛物线 C 的交点为 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$. 由 $\begin{cases} y=kx+\frac{1}{2}, \\ y^2=x \end{cases}$ 得 $4k^2x^2+(4k-4)x+1=0$，则 $x_1+x_2=\frac{1-k}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{1}{4k^2}$.

因为点 P 的坐标为 (1，1)，所以直线 OP 的方程为 $y=x$，点 A 的坐标为 (x_1, x_1). 直线 ON 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2}x$，点 B 的坐标为 $\left(x_1, \frac{y_2x_1}{x_2}\right)$. 因为 $y_1+\frac{y_2x_1}{x_2}-2x_1=\frac{y_1x_2+y_2x_1-2x_1x_2}{x_2}$

$$=\frac{\left(kx_1+\frac{1}{2}\right)x_2+\left(kx_2+\frac{1}{2}\right)x_1-2x_1x_2}{x_2}=\frac{(2k-2)x_1x_2+\frac{1}{2}(x_2+x_1)}{x_2}=\frac{(2k-2)\times\frac{1}{4k^2}+\frac{1-k}{2k^2}}{x_2}=0,$$

所以 $y_1+\frac{y_2x_1}{x_2}=2x_1$. 故 A 为线段 BM 的中点.

对点练

9．[广东深圳高级中学2019适应性考试]已知直线$y=kx-1$与抛物线$x^2=8y$相切，则双曲线$x^2-k^2y^2=1$的离心率为(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】由$\begin{cases} y=kx-1, \\ x^2=8y \end{cases}$得 $x^2-8kx+8=0$. 根据题意，得 $\Delta=64k^2-32=0$，$k^2=\frac{1}{2}$.

则双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，可得 $a=1$，$c=\sqrt{3}$，所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

【答案】B

10．[河南八市重点高中2019联考]已知直线l_1：$x-2y-3=0$，抛物线C：$y^2=4x$，若过点(0，1)与直线l_1垂直的直线l_2与抛物线C交于M，N两点，则$|MN|=$________.

【解析】依题意可设直线l_2的方程为$2x+y+m=0$.将点(0，1)坐标代入，解得$m=-1$，

故直线l_2的方程为$2x+y-1=0$，联立$\begin{cases}2x+y-1=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$得$y^2+2y-2=0$，所以$y_1+y_2=-2$，

$y_1y_2=-2$，所以$|MN|=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{15}$.

【答案】$\sqrt{15}$

第3节 抛物线

11．[湖北2019联考]已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，M为抛物线上一点，O为坐标原点．△OMF的外接圆N与抛物线的准线相切，外接圆N的周长为9π．

(1)求抛物线的方程；

(2)已知不与y轴垂直的动直线l与抛物线有且只有一个公共点，且分别交抛物线的准线和直线$x=3$于A，B两点，试求$\dfrac{|AF|}{|BF|}$的值．

【解】(1)∵△OMF的外接圆N的圆心N必在线段OF的垂直平分线上，且外接圆N与准线相切，外接圆N的周长为9π，∴外接圆的半径为$\frac{3}{4}p=\frac{9}{2}$，即$p=6$，

∴抛物线的方程为$y^2=12x$.

(2)方法一：由题知直线 l 的斜率存在且不为 0，可设 l：$y=kx+b(k\neq0)$，由 $\begin{cases}y=kx+b,\\ y^2=12x,\end{cases}$ 消去 x，得 $ky^2-12y+12b=0$. ∵直线 l 与抛物线只有一个公共点，且 $k\neq0$，∴$\Delta=(-12)^2-4k\times12b=0$，即 $kb=3$. ∵直线 l：$y=kx+b$ 与准线 $x=-3$ 交于点 A，∴$A(-3,-3k+b)$，即 $A\left(-3,-3k+\frac{3}{k}\right)$，同理 $B\left(3,3k+\frac{3}{k}\right)$，∴$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{\sqrt{(-3-3)^2+\left(-3k+\frac{3}{k}-0\right)^2}}{\sqrt{(3-3)^2+\left(3k+\frac{3}{k}-0\right)^2}}$

$$=\frac{\sqrt{36+\left(9k^2-18+\frac{9}{k^2}\right)}}{\sqrt{9k^2+18+\frac{9}{k^2}}}=1.$$

方法二：由题知直线 l 不与坐标轴垂直，可设 l：$x=my+n(m\neq 0)$，由$\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=12x,\end{cases}$消去 x，

得 $y^2-12my-12n=0$. ∵直线 l 与抛物线只有一个公共点，∴ $\Delta=(-12m)^2-4\times(-12n)=0$，

即 $n=-3m^2$. ∵直线 l：$x=my+n$ 与准线 $x=-3$ 交于点 A，∴ $A\left(-3,\ -\frac{n+3}{m}\right)$，即 $A\left(-3,\ 3m-\frac{3}{m}\right)$，

同理 $B\left(3,\ 3m+\frac{3}{m}\right)$，∴ $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{\sqrt{(-3-3)^2+\left(3m-\frac{3}{m}-0\right)^2}}{\sqrt{(3-3)^2+\left(3m+\frac{3}{m}-0\right)^2}}=\frac{\sqrt{36+\left(9m^2-18+\frac{9}{m^2}\right)}}{\sqrt{9m^2+18+\frac{9}{m^2}}}=1$.

方法三：设切点为 $P(12t^2, 12t)(t\neq0)$，则直线 l：$12ty=12\times\frac{x+12t^2}{2}$，令 $x=-3$，得 $y=\frac{12t^2-3}{2t}$，即 $A\left(-3, \frac{12t^2-3}{2t}\right)$，令 $x=3$，得 $y=\frac{12t^2+3}{2t}$，即 $B\left(3, \frac{12t^2+3}{2t}\right)$，$\therefore\frac{|AF|}{|BF|}=$

$$\frac{\sqrt{(-3-3)^2+\left(\frac{12t^2-3}{2t}-0\right)^2}}{\sqrt{(3-3)^2+\left(\frac{12t^2+3}{2t}-0\right)^2}}=1.$$

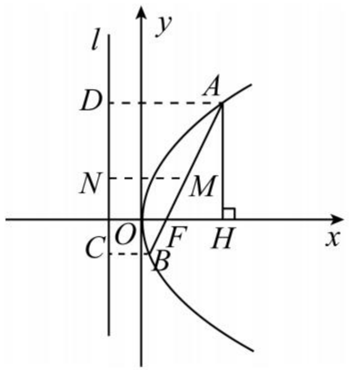
◆ 第3节 抛物线

考点5　焦点弦问题

抛物线的定义能将抛物线上的点到焦点的距离转化为点到准线的距离，起到“化斜为直”的作用，使问题变得比较直观且减少运算量．因此涉及焦半径、焦点弦问题时应突出数形结合、等价转化等思想方法的运用．若直线l过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F且交抛物线于$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点，则焦半径$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}$，弦长|，弦长$|AB|=x_1+x_2+p$.而且通径是最短的焦点弦．

例5 过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F作直线交抛物线于A，B两点，求证：以AB为直径的圆必与抛物线的准线相切.

【证明】设M为AB的中点，即圆心．如图，过A，B，M分别作准线l的垂线，垂足分别为D，C，N，则由梯形中位线的性质及抛物线的定义，有$|MN|=\frac{1}{2}(|AD|+|BC|)=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{1}{2}|AB|$，即圆心M到准线l的距离等于以AB为直径的圆的半径，故以AB为直径的圆与抛物线的准线相切.



对点练

12．[福建三明 2019 质量测试]设斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点，与 C 交于 A，B 两点，且$|AB|=\frac{16}{3}$，则 $p=$(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．4

【解析】根据题意，得直线的方程为 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$．设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

联立$\begin{cases} y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right), \\ y^2=2px, \end{cases}$ 得 $3x^2-5px+\frac{3}{4}p^2=0$，

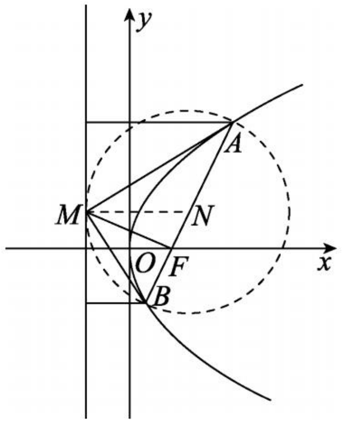
所以 $x_1+x_2=\frac{5p}{3}$，所以$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{8p}{3}$．所以$\frac{8p}{3}=\frac{16}{3}$，解得 $p=2$．

【答案】C

13．过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F作直线，交抛物线于A，B两点，M为准线上的一点，记$\angle MBF=\alpha$，$\angle MAF=\beta$，且$\alpha+\beta=90°$，则$\angle MFO$与$|\alpha-\beta|$的大小关系是(　　)

A．$\angle MFO=|\alpha-\beta|$　　B．$\angle MFO>|\alpha-\beta|$　　C．$\angle MFO<|\alpha-\beta|$　　D．不确定

【解析】如图，由题意，得$\angle AMB=90°$．设N为AB的中点，根据抛物线的定义，点N到准线的距离为$\frac{1}{2}AB$，即以AB为直径的圆与准线相切．∵$AM\perp BM$，M为准线上的点，∴M为切点，$MN/\!/x$轴，设直线AB的方程为$x=ty+\frac{p}{2}$，联立抛物线方程$y^2=2px$，得$y^2-2pty-p^2=0$，设$N(m,n)$，得$n=\frac{y_1+y_2}{2}=pt$，可得$M(-\frac{p}{2},pt)$，$F(\frac{p}{2},0)$，即$k_{MF}=\frac{pt}{-p}=-t=-\frac{1}{k_{AB}}$，可得$MF\perp AB$．又$AM\perp BM$，∴$\angle MAF=\angle BMF=\beta$，又∵$AN=MN$，∴$\angle AMN=\angle MAN=\beta$．同理可得$\angle AMF=\angle MBF=\alpha$，∴$|\alpha-\beta|=\angle AMF-\angle AMN=\angle FMN=\angle MFO$.



【答案】A

14．（多选）已知过抛物线C：$y^2=4x$焦点的直线交抛物线C于P，Q两点，交圆$x^2+y^2-2x=0$于M，N两点，其中P，M位于第一象限，则$\frac{1}{|PM|}+\frac{4}{|QN|}$的值可能为(　　)

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【解析】设$|PF|=m$，$|QF|=n$，则$|PM|=m-1$，$|QN|=n-1$.

$\because y^2=4x$，$\therefore p=2$，$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}=1$，$\therefore \frac{m+n}{mn}=1$，则$m+n=mn$，

$\therefore \frac{1}{|PM|}+\frac{4}{|QN|}=\frac{1}{m-1}+\frac{4}{n-1}=\frac{4m+n-5}{mn-(m+n)+1}=4m+n-5$.

又$\because (4m+n)\cdot 1=(4m+n)\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=4+\frac{4m}{n}+\frac{n}{m}+1\geq 5+2\sqrt{\frac{4m}{n}\cdot\frac{n}{m}}=9$，当且仅当$m=\frac{3}{2}$，$n=3$时

等号成立．$\therefore 4m+n-5\geq 4$，则$\frac{1}{|PM|}+\frac{4}{|QN|}$的值可能为4，5，6.

【答案】BCD

◆ 第3节 抛物线

■ 思维提升 针对强化

提升点 解析几何问题中的“设而不求”法

所谓“设而不求”，就是根据题意巧妙设立未知数，来沟通“未知”与“已知”之间的关系，而未知数本身不需要求出它的值．“设而不求”的方法把关注运算求解上升为关注分析求解，即通过减少运算量，提高分析、解决问题的能力．“设而不求”的方法在解析几何中有很多应用，它优化了解题思路，对解题更加有信心，下面举例说明．

1.设出点的坐标

直线与圆锥曲线相交时，一般需要设出交点坐标，将直线方程代入圆锥曲线方程，消去一个变量得到关于另一个变量的一元二次方程，利用根与系数关系建立交点坐标之间的关系．若已知中点坐标，则还需利用中点坐标公式建立关系．“点差法”是设而不求的常见方法，解决与弦的中点相关的问题很是方便．

例6 已知P(0，2)是椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>0)的一个顶点，C的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1)求椭圆C的方程.

(2)过点P的两条直线l_1，l_2分别与C相交于不同于点P的A，B两点，若l_1与l_2的斜率之和为－4，则直线AB是否经过定点？若过定点，求出定点坐标；若不过定点，请说明理由.

【解】(1)由题意可得$\begin{cases} b=2, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a=\sqrt{6}, \\ b=2, \\ c=\sqrt{2}, \end{cases}$ ∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)直线AB经过定点，定点为(1，−2)．当直线AB的斜率存在时，设直线AB的方程为$y=kx+t$，联立$\begin{cases}y=kx+t,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$(3k^2+2)x^2+6ktx+3t^2-12=0$，$\therefore \Delta=(6kt)^2-4(3k^2+2)(3t^2-12)>0$，即$6k^2-t^2+4>0$. 设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{-6kt}{3k^2+2}$，$x_1x_2=\dfrac{3t^2-12}{3k^2+2}$.

由l_1与l_2的斜率之和为−4，可得$\dfrac{y_1-2}{x_1}+\dfrac{y_2-2}{x_2}=-4$，又$y_1=kx_1+t$，$y_2=kx_2+t$，

$\therefore \dfrac{y_1-2}{x_1}+\dfrac{y_2-2}{x_2}=\dfrac{kx_1+t-2}{x_1}+\dfrac{kx_2+t-2}{x_2}=2k+\dfrac{(t-2)\ (x_1+x_2)}{x_1x_2}=-4$，

即 $2k+\dfrac{(t-2)\cdot\dfrac{-6kt}{3k^2+2}}{\dfrac{3t^2-12}{3k^2+2}}=-4$，化简可得 $t=-k-2$. ∴$y=kx-k-2=k(x-1)-2$，∴直线AB经过定点$(1,-2)$. 当直线AB的斜率不存在时，设直线AB的方程为$x=m$，$A(m,y_1)$，$B(m,y_2)$，$\dfrac{y_1-2}{m}+\dfrac{y_2-2}{m}=\dfrac{y_1+y_2-4}{m}=-4$，又∵$y_1$，$y_2$互为相反数，∴$y_1+y_2=0$，故$x=m=1$，此时，直线AB也过点$(1,-2)$，综上，直线AB经过定点，定点为$(1,-2)$.，

2．设焦半径的长度

在圆锥曲线问题中，涉及圆锥曲线上的点到焦点的距离、焦点三角形等问题时，经常设出焦半径的长度，利用圆锥曲线的定义、余弦定理等建立关系求解，体现设而不求思想的应用．

第3节 抛物线

例7 [山西太原 2019 模拟]已知点 F_1，F_2分别是椭圆 C_1和双曲线 C_2的公共焦点，e_1，e_2分别是 C_1和 C_2的离心率，点 P 为 C_1和 C_2的一个公共点，且$\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$. 若 $e_2\in(2,\sqrt{7})$，则 e_1的取值范围是(　　)

A. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$　　C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

【解析】设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，不妨设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$，双曲线的方程为$\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$，点P在第一象限．根据椭圆和双曲线的定义，有$\begin{cases}m+n=2a_1,\\m-n=2a_2,\end{cases}$故$m^2+n^2=2a_1^2+2a_2^2$，$mn=a_1^2-a_2^2$．在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理得$4c^2=m^2+n^2+mn$，即$4c^2=3a_1^2+a_2^2$①．由于$e_2\in(2,\sqrt{7})$，即$2<\frac{c}{a_2}<\sqrt{7}$，所以$\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{a_2}{c}<\frac{1}{2}$，所以$\frac{c}{\sqrt{7}}<a_2<\frac{c}{2}$，故$\frac{c^2}{7}<a_2^2<\frac{c^2}{4}$．由①得$\frac{c^2}{7}<4c^2-3a_1^2<\frac{c^2}{4}$，即

$\begin{cases}\frac{c^2}{7}<4c^2-3a_1^2,\\4c^2-3a_1^2<\frac{c^2}{4},\end{cases}$解得$e_1\in\left(\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$．

【答案】D

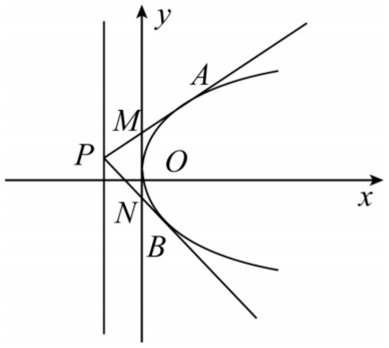
3．设参数

直线与圆锥曲线的位置关系问题中，关于定点、定值问题的解决，一般需要设出直线的斜率、截距等参数，利用设而不求的方法简化运算，一般需要整体考虑，准确运算，方可准确求解．

例8 [安徽定远中学2019预测]已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点Q(t，－2t)(t≠0)在抛物线C上，$|QF|=2$.

(1)求抛物线C的标准方程；

(2)如图，P为抛物线C的准线上任意一点，过点P作抛物线C的切线PA，PB，切点分别为A，B，直线x＝0与PA，PB分别交于M，N两点，点M，N的纵坐标分别为m，n，求mn的值.



【解】(1) 据题意，得 $\begin{cases}4t^2=2pt,\\ t+\frac{p}{2}=2,\\ t>0,\end{cases}$ 解得 $p=2$. 故抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$.

(2) 设点 P 的坐标为 $(-1, y_0)$，直线 AP 的方程为 $y=k_1(x+1)+y_0$，直线 BP 的方程为 $y=k_2(x+1)+y_0$. 由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=k_1(x+1)+y_0\end{cases}$ 得 $k_1y^2-4y+4k_1+4y_0=0$. 所以 $\Delta=16-4k_1(4k_1+4y_0)=0$，

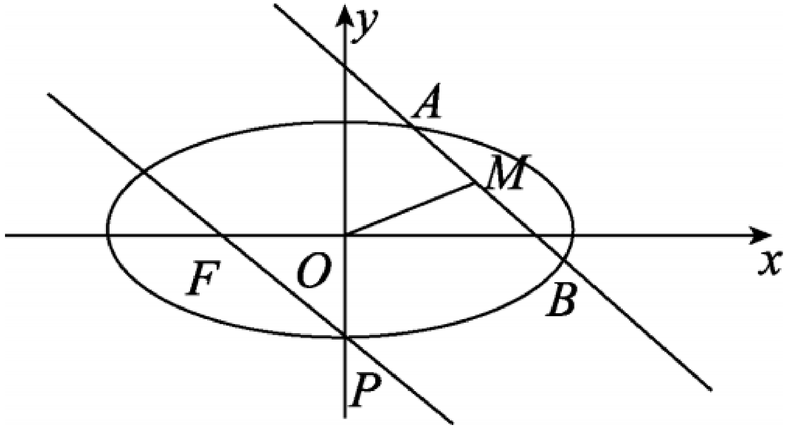
得 $k_1^2+y_0k_1-1=0$. 同理，得 $k_2^2+y_0k_2-1=0$，所以 $\begin{cases}k_1+k_2=-y_0,\\ k_1k_2=-1.\end{cases}$ 在直线 AP，BP 的方程中分别令 $x=0$，得 $m=k_1+y_0$，$n=k_2+y_0$，所以 $mn=(k_1+y_0)(k_2+y_0)=y_0^2+(k_1+k_2)y_0+k_1k_2=y_0^2-y_0^2-1=-1$.

对点练

15．[河北石家庄2019模拟]已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点F为左焦点，点P为下顶点，平行于FP的直线l交椭圆于A，B两点，且AB的中点为$M\left(1,\frac{1}{2}\right)$，则椭圆的离心率为(　　)

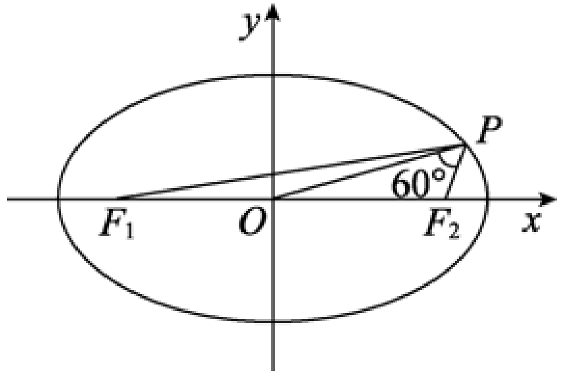
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，又 AB 的中点为 $M\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$，则 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=1$. 又因为 A，B 在椭圆上，所以 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$. 两式相减，得 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，因为 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{FP}=-\dfrac{b}{c}$，$k_{OM}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{b}{c}=\dfrac{2b^2}{a^2}$，所以 $a^2=2bc$，平方可得 $a^4=4(a^2-c^2)c^2$，所以 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，故 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



【答案】A

16．如图，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$，P 是椭圆 C 上一点，O 为坐标原点．若$\angle F_1PF_2=60°$，且$|PO|=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$，则椭圆 C 的离心率是(　　)



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

【解析】设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$. 由椭圆的定义得$m+n=2a$，①

在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理得$m^2+n^2-2mn\cos 60°=(2c)^2$，②

①^2－②得$3mn=4(a^2-c^2)$，③

将③代入②得$m^2+n^2=\frac{4}{3}a^2+\frac{8}{3}c^2$.

在$\triangle POF_1$中，由余弦定理得$|PO|^2+c^2-2|PO|c\cos\angle F_1OP=m^2$，④

在$\triangle POF_2$中，由余弦定理得$|PO|^2+c^2-2|PO|c\cos\angle F_2OP=n^2$，⑤

④＋⑤得$m^2+n^2=2|PO|^2+2c^2=\frac{16a^2}{9}+2c^2=\frac{4}{3}a^2+\frac{8}{3}c^2$，

化简得$2a^2=3c^2$，故$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【答案】C

17. [天津南开区2019模拟]已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，两焦点与短轴的一个顶点的连线构成的三角形面积为$\sqrt{2}$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)设与圆O：$x^2+y^2=\frac{3}{4}$相切的直线l交椭圆C于A，B两点(O为坐标原点)，求△AOB面积的最大值.

【解】(1)由题设得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$bc=\sqrt{2}$，解得$a^2=3$，$b^2=1$，∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 当 $AB\perp x$ 轴时, 易得 $|AB|=\sqrt{3}$; 当 AB 与 x 轴不垂直时, 设直线 AB 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0)$, 由圆心 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $m^2=\frac{3}{4}(k^2+1)$.

把 $y=kx+m$ 代入椭圆方程消去 y, 得 $(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$, $\therefore x_1+x_2=\frac{-6km}{3k^2+1}$, $x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{3k^2+1}$, $\therefore |AB|^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2=(1+k^2)\left[\left(\frac{-6km}{3k^2+1}\right)^2-\frac{12(m^2-1)}{3k^2+1}\right]$

$$=\frac{12(k^2+1)(3k^2+1-m^2)}{(3k^2+1)^2}=\frac{3(k^2+1)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}=3+\frac{12k^2}{9k^4+6k^2+1}=3+\frac{12}{9k^2+\frac{1}{k^2}+6}$$

$\leqslant 3+\frac{12}{2\times 3+6}=4$, 当且仅当 $9k^2=\frac{1}{k^2}$, 即 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立. 当 $k=0$ 时, 易得 $|AB|=\sqrt{3}$.

综上所述, $|AB|_{max}=2$, 从而△AOB 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18.[四川内江2019检测]已知抛物线$y^2=2px(p>0)$上一点$M(x_0,2\sqrt{2})$到焦点F的距离$|MF|=\frac{3x_0}{2}$，倾斜角为α的直线经过焦点F，且与抛物线交于两点A，B.

(1)求抛物线的标准方程及准线方程；

(2)若α为锐角，作线段AB的中垂线m交x轴于点P.证明：$|FP|-|FP|\cdot\cos 2\alpha$为定值，并求出该定值.

(1)【解】由抛物线的定义知$|MF|=x_0+\frac{p}{2}=\frac{3x_0}{2}$，$\therefore x_0=p$.将点$M(p,2\sqrt{2})$的坐标代入$y^2=2px$，得$2p^2=8$，得$p=2$.$\therefore$抛物线的方程为$y^2=4x$，准线方程为$x=-1$.

(2)【证明】设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，直线 AB 的方程为 $x=ty+1$. 联立$\begin{cases}x=ty+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4ty-4=0$，$\therefore y_1+y_2=4t$，$y_1\cdot y_2=-4$，$\therefore x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=4t^2+2$，

AB 的中点的坐标为 $(2t^2+1,2t)$. 设直线 AB 的中垂线 m 的方程为 $y-2t=-t[x-(2t^2+1)]$.

令 $y=0$，得 $x=2t^2+3$，则 $P(2t^2+3,\ 0)$，$\therefore |PC|=\sqrt{4+4t^2}$，$|FP|=2t^2+2$.

$\therefore |FP|-|FP|\cos 2\alpha=2|FP|\sin^2\alpha=2|FP|\cdot\left(\dfrac{|PC|}{|FP|}\right)^2$

$=\dfrac{2|PC|^2}{|FP|}=\dfrac{2\ (4+4t^2)}{2t^2+2}=4$. 故 $|FP|-|FP|\cdot\cos 2\alpha$ 为定值 4.