

Основные законы алгебры логики

В алгебре логики существует четыре пары основных законов:

- два переместительных (коммутативных);
- два сочетательных (ассоциативных);
- два распределительных (дистрибутивных)
- два закона инверсии.

В алгебре логики доказано, что любую логическую функцию можно выразить только через комбинацию логических операций И, ИЛИ и НЕ.

Для приведения логических выражений к эквивалентным, но более простым в записи используют ряд логических законов.

Закон тождества. Согласно данному закону мысль, заключённая в некотором высказывании, остаётся неизменной на протяжении всего рассуждения, в котором это высказывание фигурирует

$$A = A.$$

Закон противоречия утверждает, что никакое предложение не может быть истинно одновременно со своим отрицанием: «Это яблоко спелое» и «Это яблоко не спелое»

$$A \text{ и не } A = 0$$

Закон исключенного третьего утверждает, что для каждого высказывания имеются лишь две возможности: это высказывание либо истинно, либо ложно; третьего не дано: «Сегодня я либо получу 10, либо не получу». Истинно либо суждение, либо его отрицание

$$A \text{ или не } A = 1$$

Закон двойного отрицания заключается в том, что отрицать отрицание какого-нибудь высказывания то же, что утверждать это высказывание: «Неверно, что 2 · 2 < 4»

$$\text{Не не } A = A$$

Законы идемпотентности утверждают, что в алгебре логики нет показателей степеней и коэффициентов. Операция «и» с одинаковыми «сомножителями» равносильна одному из них; операция «или» одинаковых «слагаемых» равносильна одному из них:

$$A \text{ и } A = A$$

$$A \text{ или } A = A$$

Законы коммутативности и ассоциативности заключаются в том, что «И» и «ИЛИ» аналогичны одноимённым знакам умножения и сложения чисел:

законы коммутативности:

$$A \text{ или } B = B \text{ или } A; (A + B = B + A)$$

$$A \text{ и } B = B \text{ и } A; (A * B = B * A)$$

законы ассоциативности:

$$(A \text{ или } B) \text{ или } C = A \text{ или } (B \text{ или } C);$$

$$(A \text{ и } B) \text{ и } C = A \text{ и } (B \text{ и } C).$$

Законы дистрибутивности утверждают, что логическое сложение и умножение равноправны по отношению к дистрибутивности: не только операция «И» дистрибутивна относительно «ИЛИ», но и «ИЛИ» дистрибутивна относительно «И»:

$$(A \text{ или } B) \text{ и } C = (A \text{ и } C) \text{ или } (B \text{ и } C);$$

$$(A \text{ и } B) \text{ или } C = (A \text{ или } C) \text{ и } (B \text{ или } C).$$

Законы де Моргана показывают как отрицаются высказывания:

$$\text{не}(A \text{ или } B) = \text{не } A \text{ и } \text{не } B$$

$$\text{не}(A \text{ и } B) = \text{не } A \text{ или } \text{не } B$$

Данные законы можно выразить в следующих кратких формулировках:

- отрицание логического произведения эквивалентно логической сумме отрицаний

множителей;

- отрицание логической суммы эквивалентно логическому произведению отрицаний

слагаемых.

Законы поглощения констант утверждают, что ложь не влияет на значение логического выражения при операции «ИЛИ», а истина – при операции «И»:

$A \text{ или } 1 = 1;$

$A \text{ или } 0 = A;$

$A \text{ и } 1 = A;$

$A \text{ и } 0 = 0.$

Законы поглощения показывают, как упрощать логические выражения при повторе операнда:

$A \text{ или } (A \text{ и } B) = A;$

$A \text{ и } (A \text{ или } B) = A.$

Знак отрицания над выражением даёт возможность опустить скобки, в которые это выражение заключено (отрицание является самой старшей логической операцией).

При упрощении выражений следует помнить старшинство операций: НЕ, И, ИЛИ.