

---

T.C.  
KIRIKKALE  
ÜNİVERSİTESİ  
BİLGİSAYAR  
MÜHENDİSLİĞİ

AĞ  
OPTİMİZASYONU

DR. EVRENCAN ÖZCAN



# DERS İÇERİĞİ

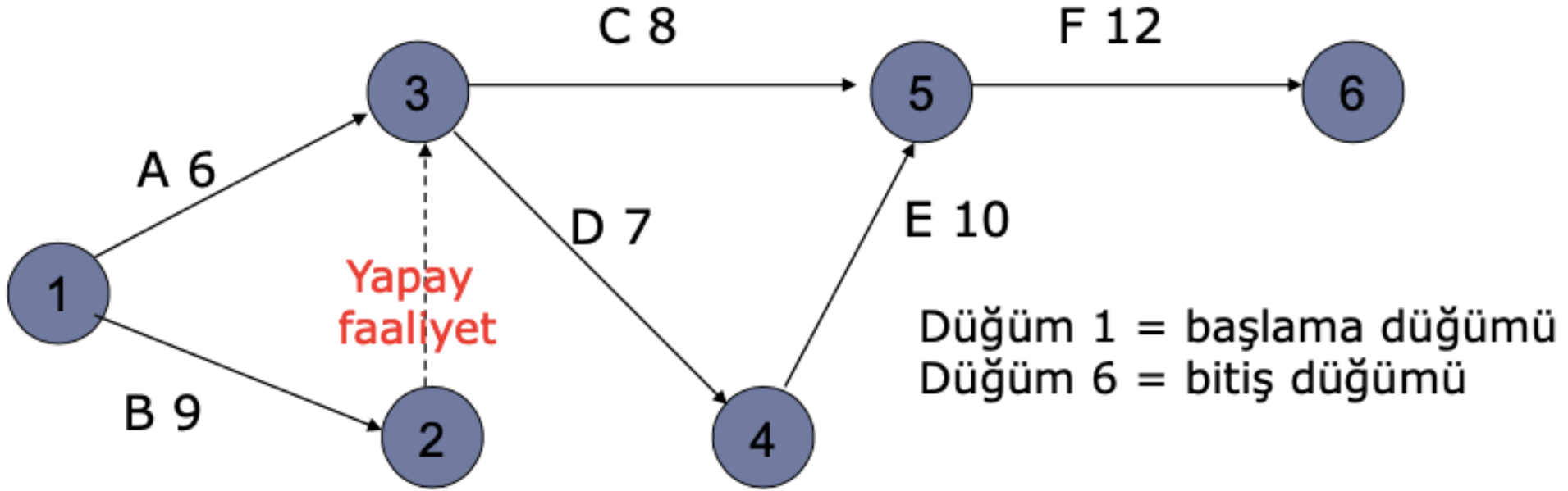
- AĞ OPTİMİZASYONUNA GİRİŞ
  - OPTİMİZASYON KAVRAMI
  - TEMEL ŞEBEKE KAVRAMLARI
  - ŞEBEKE OPTİMİZASYONUNUN UYGULAMA ALANLARI
- MİNİMUM YAYILAN AĞAÇ PROBLEMİ
- EN KISA YOL PROBLEMİ
- MAKSİMUM AKIŞ PROBLEMİ
- PROJE YÖNETİMİ
  - KRİTİK YOL METODU (CPM)
  - PROJE DEĞERLENDİRME VE GÖZDEN GEÇİRME TEKNİĞİ (PERT)
  - PROJE PLANLAMASINDA ZAMAN-MALİYET İLİŞKİSİ

## Örnek: Widgetco

(Winston 8.4., s. 433)

- ▶ Widgetco yeni bir ürün geliştirmektedir. Yapılması gereken faaliyetler, öncelik ilişkileri ve süreleri aşağıda verilmiştir.
- ▶ Bu proje için Proje ağını çiziniz.

Faaliyetler	Öncül faaliyetler	Süre (gün)
A: işçilerin eğitimi	-	6
B: hammaddeleri satın alınması	-	9
C: 1. ürünün imalatı	A, B	8
D: 2. ürünün imalatı	A, B	7
E: 2. ürünün test edilmesi	D	10
F: 1. ve 2. ürünlerin montajı	C, E	12



Faaliyetler	Öncüller	Süre (gün)
A: işçilerin eğitimi	-	6
B: hammaddeleri satın alınması	-	9
C: 1. ürünün imalatı	A, B	8
D: 2. ürünün imalatı	A, B	7
E: 2. ürünün test edilmesi	D	10
F: 1.- 2. ürünlerin montajı	C, E	12



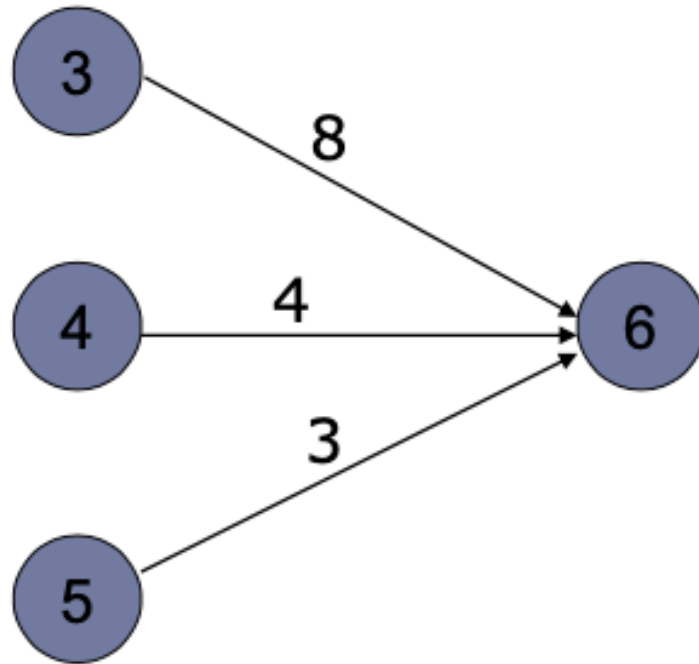
---

CPM için iki kilit hesap:

- ▶ En Erken başlama zamanı (the ***early event time***) ***ET(i)***
  - ▶ *i* düğümünün en erken başlama zamanı.
- ▶ En geç başlama zamanı (the ***late event time***) ***LT(i)***
  - ▶ *i* düğümünün projenin bitiş zamanını etkilemeden en geç başlanabileceği zaman

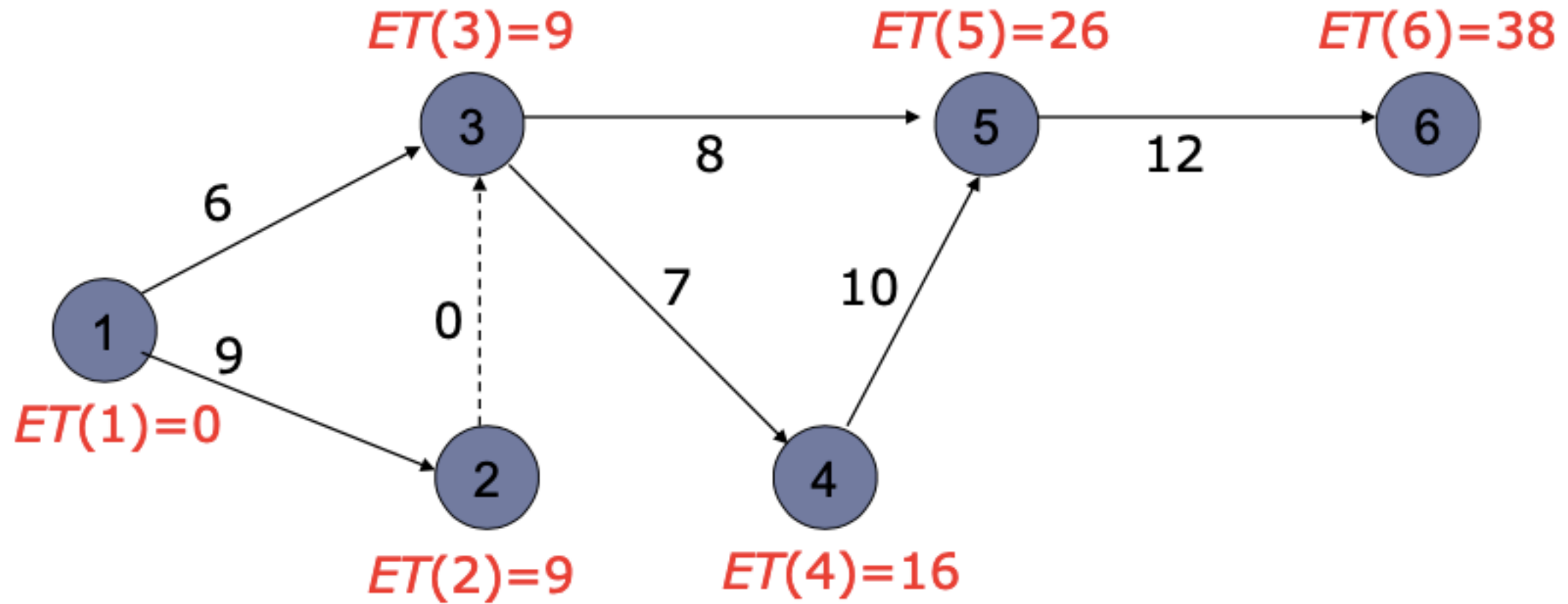
- ▶  $ET(1) = 0$
- ▶  $ET(i)$  hesabı:
  - ▶  $i$  düğümüne doğrudan bağlanan önceki düğümleri bul  $k$ ;  $(k, i) \in S$ .
  - ▶  $ET = \max_{k, (k,i) \in S} ET(k, i) + d_{ki}$ 
    - ▶  $d_{ki}$ :  $(k,i)$  bağlantısıyla tanımlanan faaliyetin süresi.
- ▶  $ET(n)$  hesaplandığında durulur ( $n$ : bitiş düğümü)

- ▶ Proje ağının bir parçası aşağıda verilmiş olsun.
- ▶  $ET(3)=6$ ,  $ET(4)=8$ , ve  $ET(5)=10$



- ▶  $ET(6) = \text{maks} \{ET(3)+8, ET(4)+4, ET(5)+3\}$   
 $= \text{maks} \{14, 12, 13\} = 14$

## Örnek: Widgetco

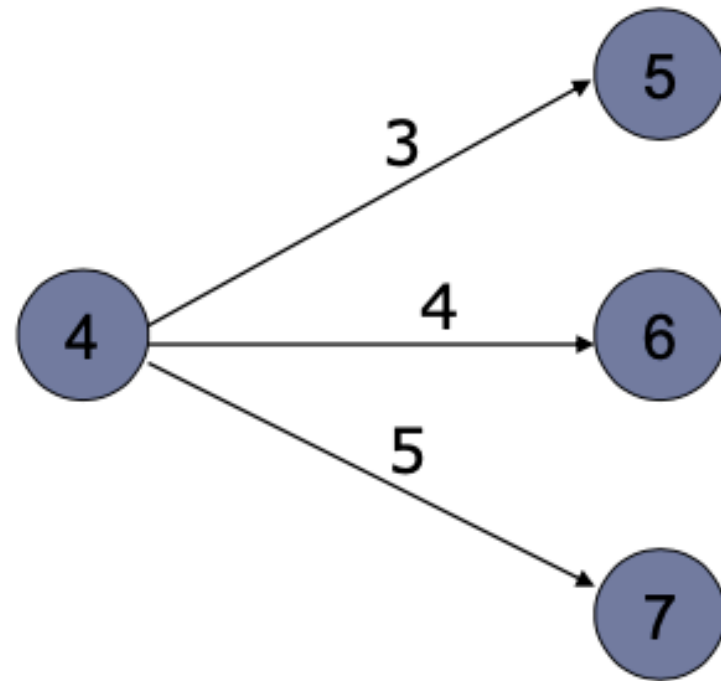




## En geç başlama zamanı - LT

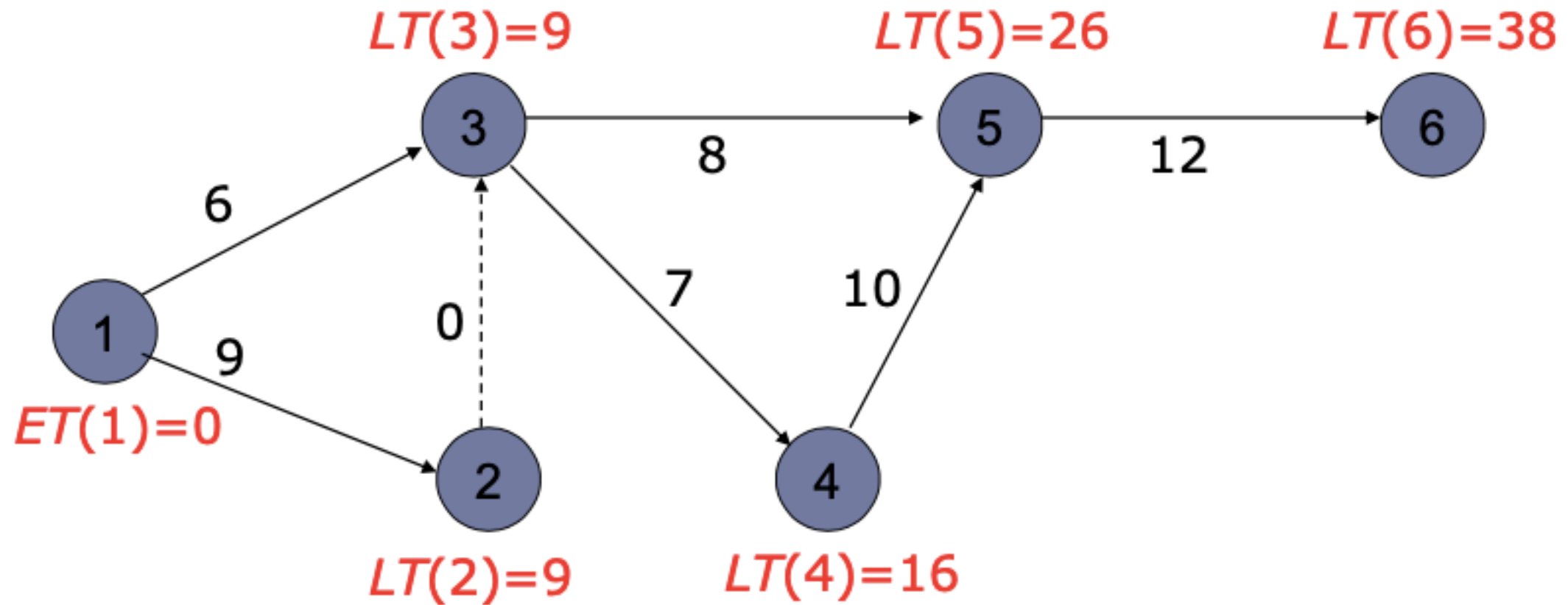
- ▶ Bitiş düğümünden başlayarak geriye doğru git.
- ▶  $LT(n) = ET(n)$
- ▶  $LT(i)$  hesabı
  - ▶  $i$  düğümüne doğrudan bağlanan sonraki düğümleri bul  $j$ ,  $(i, j) \in S$ .
  - ▶  $LT = \min_{j, (i, j) \in S} LT(j) - d_{ij}$ 
    - ▶  $d_{ij}$ :  $(i, j)$  bağlantısıyla tanımlanan faaliyetin süresi.

- ▶ Proje ağının bir parçası aşağıda verilmiş olsun.
- ▶  $LT(5)=24$ ,  $LT(6)=26$  ve  $LT(7)=28$



- ▶  $LT(4) = \min \{LT(5)-3, LT(6)-4, LT(7)-5\}$   
 $= \min \{21, 22, 23\} = 21$

## Örnek: Widgetco



# Toplam Boşluk (Total Float)

- ▶ Toplam boşluk (Total Float)  **$TF(i,j)$** 
  - ▶ Herhangi bir  $(i,j)$  bağlantısı ile gösterilen bir faaliyet için projenin bitirilme süresini etkilemeden en erken başlama zamanına göre ne kadar ertelenebileceğini gösterir.
  - ▶ Bir başka ifade ile projenin bitirilme süresini etkilemeden bir faaliyetin süresi ne kadar arttırılabileceğini gösterir.

$$TF(i,j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij}$$

## Örnek: Widgetco için $TF(i,j)$ değerleri

Faaliyet B:  $TF(1,2) = LT(2) - ET(1) - 9 = 0$

Faaliyet A:  $TF(1,3) = LT(3) - ET(1) - 6 = 3$

Faaliyet D:  $TF(3,4) = LT(4) - ET(3) - 7 = 0$

Faaliyet C:  $TF(3,5) = LT(5) - ET(3) - 8 = 9$

Faaliyet E:  $TF(4,5) = LT(5) - ET(4) - 10 = 0$

Faaliyet F:  $TF(5,6) = LT(6) - ET(5) - 12 = 0$

Yapay Faaliyet:  $TF(2,3) = LT(3) - ET(2) - 0 = 0$

Düğüm	ET(i)	LT(i)
1	0	0
2	9	9
3	9	9
4	16	16
5	26	26
6	38	38

## Örnek: Widgetco için kritik yol

$$TF(1,2) = 0$$

$$TF(1,3) = 3$$

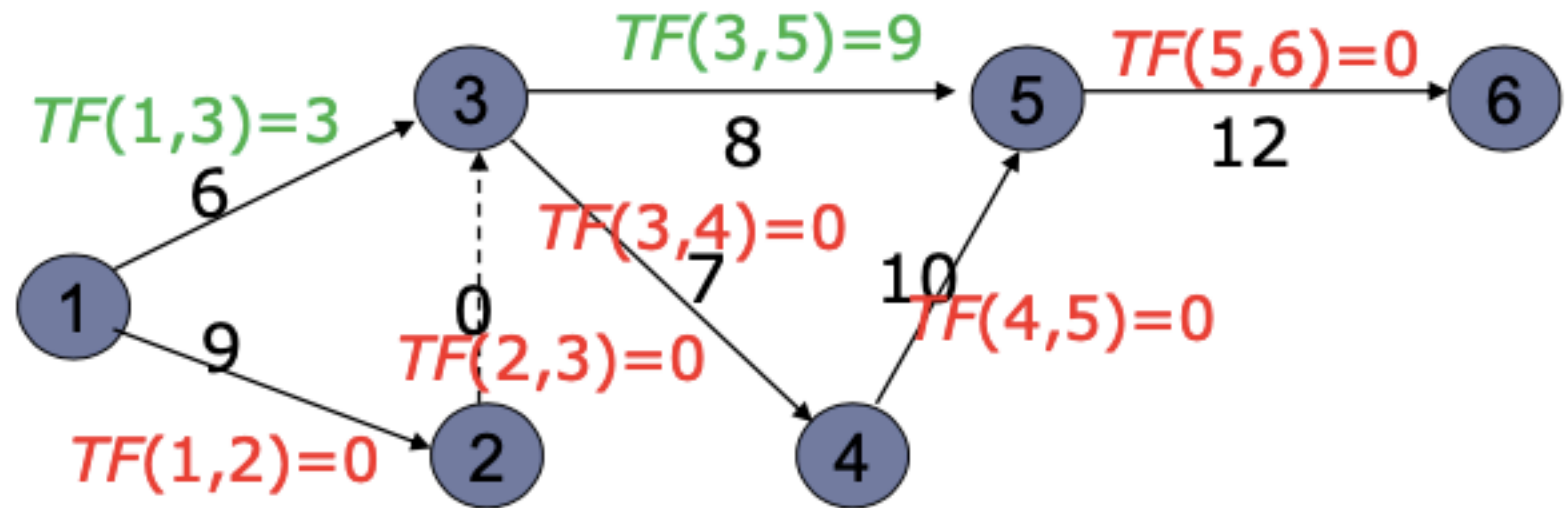
$$TF(2,3) = 0$$

$$TF(3,4) = 0$$

$$TF(3,5) = 9$$

$$TF(4,5) = 0$$

$$TF(5,6) = 0$$



- ▶ Widgetco için kritik yol: 1-2-3-4-5-6



# Serbest boşluk (Free Float)

---

- ▶ **Serbest boşluk (Free Float):**
  - ▶ Herhangi bir  $(i,j)$  bağlantısı ile gösterilen bir faaliyet için sonraki faaliyetlerin başlamasını etkilemeden ne kadar ertelenebileceğini gösterir.

$$FF(i,j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij}$$

## Örnek: Widgetco için $FF(i,j)$ değerleri

Faaliyet B:  $FF(1,2) = 9 - 0 - 9 = 0$

Faaliyet A:  $FF(1,3) = 9 - 0 - 6 = 3$

Faaliyet D:  $FF(3,4) = 16 - 9 - 7 = 0$

Faaliyet C:  $FF(3,5) = 26 - 9 - 8 = 9$

Faaliyet E:  $FF(4,5) = 26 - 16 - 10 = 0$

Faaliyet F:  $FF(5,6) = 38 - 26 - 12 = 0$

Düğüm	ET(i)	LT(i)
1	0	0
2	9	9
3	9	9
4	16	16
5	26	26
6	38	38

- Örneğin C Faaliyetinin  $FF$ 'si 9 gün olduğu için, bu faaliyetin başlamasının 9 günden fazla ertelenmesi sonraki faaliyetlerin (bu durumda F faaliyeti) başlama zamanını etkiler.

# Doğrusal Programlama Kullanımı

- ▶ Kritik yolun süresini bulmak için DP kullanılabilir.
- ▶ Karar değişkenleri
  - ▶  $x_j$ :  $j$  düğümünün zamanı
- ▶ Kısıtlar
  - ▶ Her  $(i,j)$  faaliyeti için  $j$  ortaya çıkmadan önce  $i$  düğümü ortaya çıkmalıdır ve  $(i,j)$  faaliyeti bitirilmelidir.
- ▶ Amaç projenin bitiş süresini en küçükleme.

$$\min z = x_n - x_1$$

## Örnek: Widgetco DP modeli

---

$$\min z = x_6 - x_1$$

Öyle ki	$x_3 \geq x_1 + 6$	(Bağlantı (1,3) kısıtı)
	$x_2 \geq x_1 + 9$	(Bağlantı (1,2) kısıtı)
	$x_5 \geq x_3 + 8$	(Bağlantı (3,5) kısıtı)
	$x_4 \geq x_3 + 7$	(Bağlantı (3,4) kısıtı)
	$x_5 \geq x_4 + 10$	(Bağlantı (4,5) kısıtı)
	$x_6 \geq x_5 + 12$	(Bağlantı (5,6) kısıtı)
	$x_3 \geq x_2$	(Bağlantı (2,3) kısıtı)

## Örnek: Widgetco DP modeli Çözümü

### OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) **38.00000**

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X6	38.000000	0.000000
X1	0.000000	0.000000
X3	9.000000	0.000000
X2	9.000000	0.000000
X5	26.000000	0.000000
X4	16.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
ARC (1,3)	3.000000	0.000000
ARC (1,2)	0.000000	<b>-1.000000</b>
ARC (3,5)	9.000000	0.000000
ARC (3,4)	0.000000	<b>-1.000000</b>
ARC (4,5)	0.000000	<b>-1.000000</b>
ARC (5,6)	0.000000	<b>-1.000000</b>
ARC (2,3)	0.000000	<b>-1.000000</b>

Proje 38 günde  
bitirilebilir

Kritik yol  
1-2-3-4-5-6

- 
- ▶ Projenin kritik yolu, gölge fiyatları -1 olan kısıtlarla ilgili faaliyetleri içerir.
  - ▶ Eğer bir kısıtın gölge fiyatı -1 ise bu kısıtın sağ taraf değeri (faaliyetin süresi)  $\Delta$  kadar arttığında amaç fonksiyonu (projenin toplam süresi) da  $\Delta$  kadar artacaktır.



## Projenin hızlandırılması

---

- ▶ Çoğu zaman projeler kritik yol süresinden daha önce bitirilmelidir.
- ▶ DP ile proje teslim süresine yetişmek için en düşük maliyet ile kaynakların nasıl tahsis edileceği bulunabilir.
- ▶ Bu sürece proje hızlandırma (***crashing a project***) denir.

## Örnek: Widgetco Projesinin hızlandırılması

- ▶ Widgetco geliştirdiği ürünün rakip ürüne göre piyasaya daha önce çıkmasını istemektedir.
- ▶ Rakibini ürünü 26 gün sonra piyasa çıkacaktır. Bu yüzden Widgetco kendi ürününü 25 içinde piyasaya sürmelidir.
- ▶ Projenin bitiş süresi 38 gün olduğu için Widgetco ek harcamalararak 25 günlük proje bitiş süresini sağlamalıdır.
- ▶ Widgetco herhangi bir faaliyetin süresini en fazla 5 gün azaltabilir.
- ▶ Bir faaliyetin süresini bir gün düşürmenin maliyeti şu şekildedir:
  - ▶ Faaliyet A     \$10
  - ▶ Faaliyet B     \$20
  - ▶ Faaliyet C     \$3
  - ▶ Faaliyet D     \$30
  - ▶ Faaliyet E     \$40
  - ▶ Faaliyet F     \$50
- ▶ Projeyi 25 günde bitirmenin en düşük maliyetini bulunuz.

## Örnek: Widgetco Projesinin hızlandırılması

---

- Karar değişkenleri

$A$ : Faaliyet A'nın süresinden azaltılan gün sayısı

...

$F$ : Faaliyet F'nin süresinden azaltılan gün sayısı

$x_j$ :  $j$  düğümünün zamanı

## Örnek: Widgetco Projesinin hızlandırılması

$$\min 10A + 20B + 3C + 30D + 40E + 50F$$

öyle ki;  $A \leq 5$

$$B \leq 5$$

$$C \leq 5$$

$$D \leq 5$$

$$E \leq 5$$

$$F \leq 5$$

$$x_3 \geq x_1 + 6 - A$$

$$x_2 \geq x_1 + 9 - B$$

$$x_5 \geq x_3 + 8 - C$$

$$x_4 \geq x_3 + 7 - D$$

$$x_5 \geq x_4 + 10 - E$$

$$x_6 \geq x_5 + 12 - F$$

$$x_3 \geq x_2$$

$$x_6 - x_1 \leq 25$$

$A, B, C, D, E, F \geq 0$ ;  $x_j$  urs

## Örnek: Widgetco Projesinin hızlandırılması

---

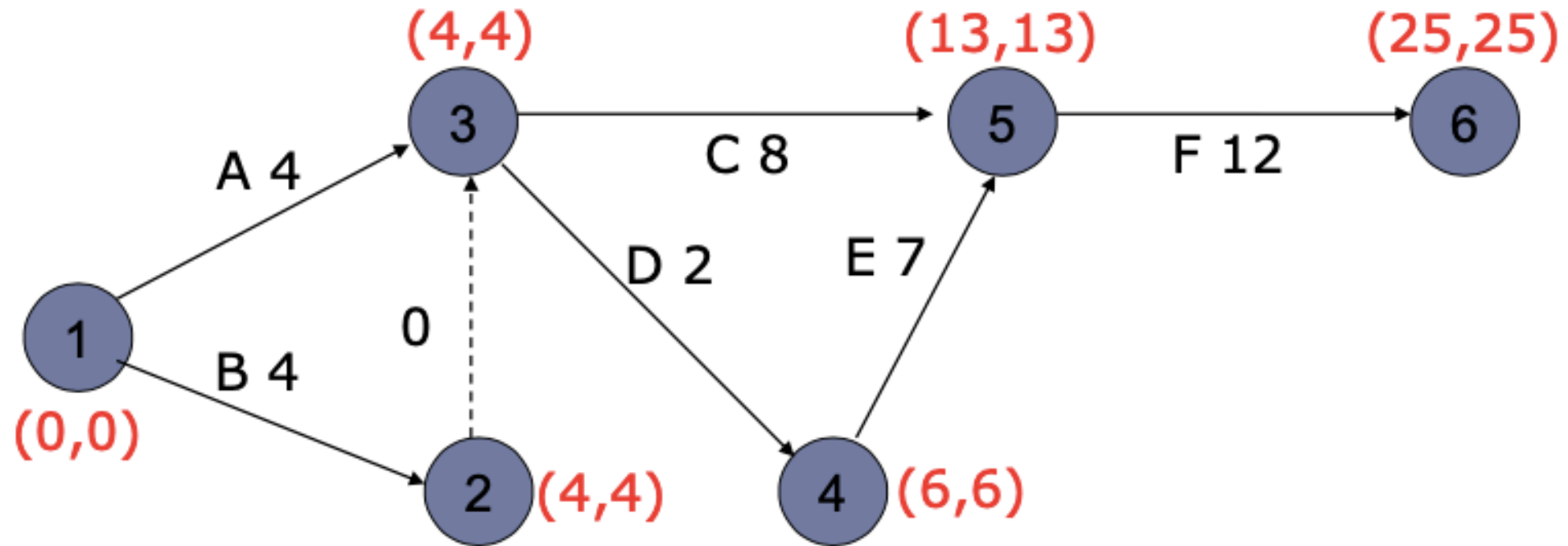
- ▶ DP'nin çözümü:

$$z = 390, A = 2, B = 5, C = 0, D = 5, E = 3, F = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 13, x_6 = 25$$

- ▶ A'yı 2, B'yi 5, D'yi 5 ve E'yi 3 gün azaltarak, proje 25 günde bitirilebilir
- ▶ Toplam maliyet \$390 olacaktır.

## Örnek: Widgetco Projesinin hızlandırılması



Kritik yol: 1-2-3-4-5-6 veya 1-3-4-5-6



T.C.  
KIRIKKALE  
ÜNİVERSİTESİ  
BİLGİSAYAR  
MÜHENDİSLİĞİ

# AĞ OPTİMİZASYONU

DR. EVRENCAN ÖZCAN

OFİS:275

EVRENCAN.OZCAN@KKU.EDU.TR

TEŞEKKÜRLER