T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ

AĞ OPTİMİZASYONU

DR. EVRENCAN ÖZCAN

DERS İÇERİĞİ

- AĞ OPTİMİZASYONUNA GİRİŞ
  - OPTİMİZASYON KAVRAMI
  - TEMEL ŞEBEKE KAVRAMLARI
  - ŞEBEKE OPTİMİZASYONUNUN UYGULAMA ALANLARI
- MİNİMUM YAYILAN AĞAÇ PROBLEMİ
- EN KISA YOL PROBLEMİ
- MAKSİMUM AKIŞ PROBLEMİ
- PROJE YÖNETİMİ
  - KRİTİK YOL METODU (CPM)
  - PROJE DEĞERLENDİRME VE GÖZDEN GEÇİRME TEKNİĞİ (PERT)
  - PROJE PLANLAMASINDA ZAMAN-MALİYET İLİŞKİSİ

EN KISA YOL PROBLEMİ

Bu problemlerde, herhangi bir düğümden diğer düğüme olan **En Kısa Mesafenin** bulunması amaçlanır.

En kısa yol problemlerinin çözümünde kullanılan iki algoritma aşağıdaki şekildedir:

- Dijkstra algoritması
- Floyd algoritması

Problem ile ilgili temel varsayımlar:

- Tüm ark uzunlukları tamsayılıdır.
- Şebeke s (kaynak) düğümünden şebekedeki diğer tüm düğümlere yönlü bir yol içerir.
- Şebeke negatif bir döngü içermez. (negatif uzunluklu yönlü bir yol)
- Şebeke yönlüdür.

EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

Kaynak bir düğüm ile şebekedeki diğer bir düğüm arasındaki en kısa yolun belirlenmesi amacıyla tasarlanmıştır.

- Avantajı, döngülü veya döngüsüz şebekelere uygulanabilmesi, dezavantajı ise negatif uzunluklu ok bulunduran şebekelere uygulanamamasıdır.
- Başlangıç ve ulaşılması istenen düğüm sabitlendiğinde işlem biter.
- Başlangıç belli fakat ulaşılması istenen düğüm belli değilse bütün düğümler sabitlendiğinde işlem biter.

EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

NOTASYON

N :Şebekedeki Tüm Düğümler Kümesi,

S :Kalıcı Etikete Sahip Düğümler Kümesi,

$\tilde{S}$:Geçici Etikete Sahip Düğümler Kümesi,

Γ_k : k Düğümüne Direkt Bağlı Düğümler Kümesi,

L_j : j Düğümünün Başlangıç Düğümüne Olan Uzaklığı,

L_{kj} : Komşu Düğümler Olan k ve j Düğümleri Arasındaki Uzaklık,

ALGORİTMA

Adım 1 : s başlangıç düğümünü göstermek üzere aşağıdaki işlemleri yap;

$$S = \{s\},\ \tilde{S} = N - \{s\},\ L_j = \begin{cases} 0 & j = s \text{ ise} \\ L_{sj} & j \in \Gamma_s \text{ ise} \\ \infty & j \notin \Gamma_s \text{ ise} \end{cases}$$

Adım 2 : $L_k = \min\limits_{j \in \tilde{S}} \{L_j\}$ olacak şekilde k 'yı tespit et. Eğer $\Gamma_k \in S$ ise dur.

Değilse $S = S \cup \{k\}$, $\tilde{S} = \tilde{S} - \{k\}$ al.

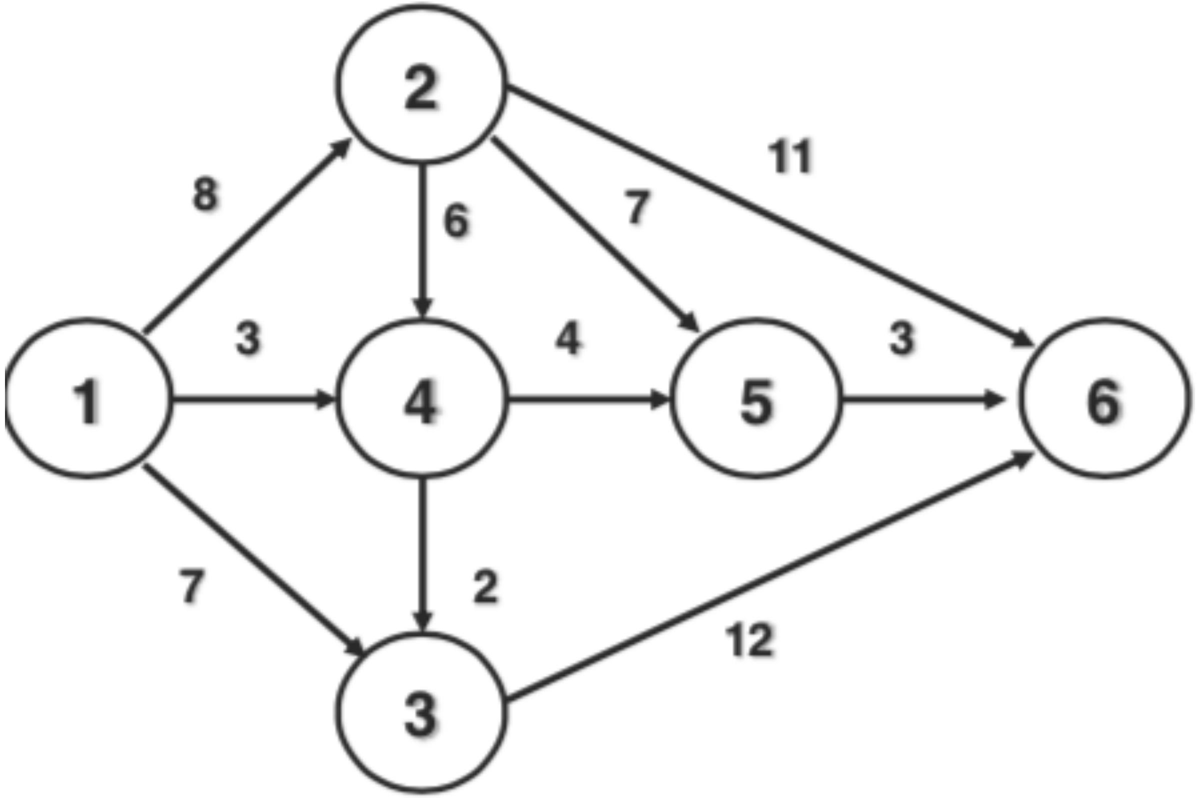
Adım 3 : k -ıncı çevrimi yap. Yani $j \in \Gamma_k \cap \tilde{S}$ olmak üzere tüm j düğümleri için aşağıdaki işlemleri yap ve Adım 2'ye git.

$$L_j = \min\{L_j, L_k + L_{kj}\}$$

EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

ÖRNEK

1 ile 6 arasındaki minimum yolu ve uzunluğu bulunuz.



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

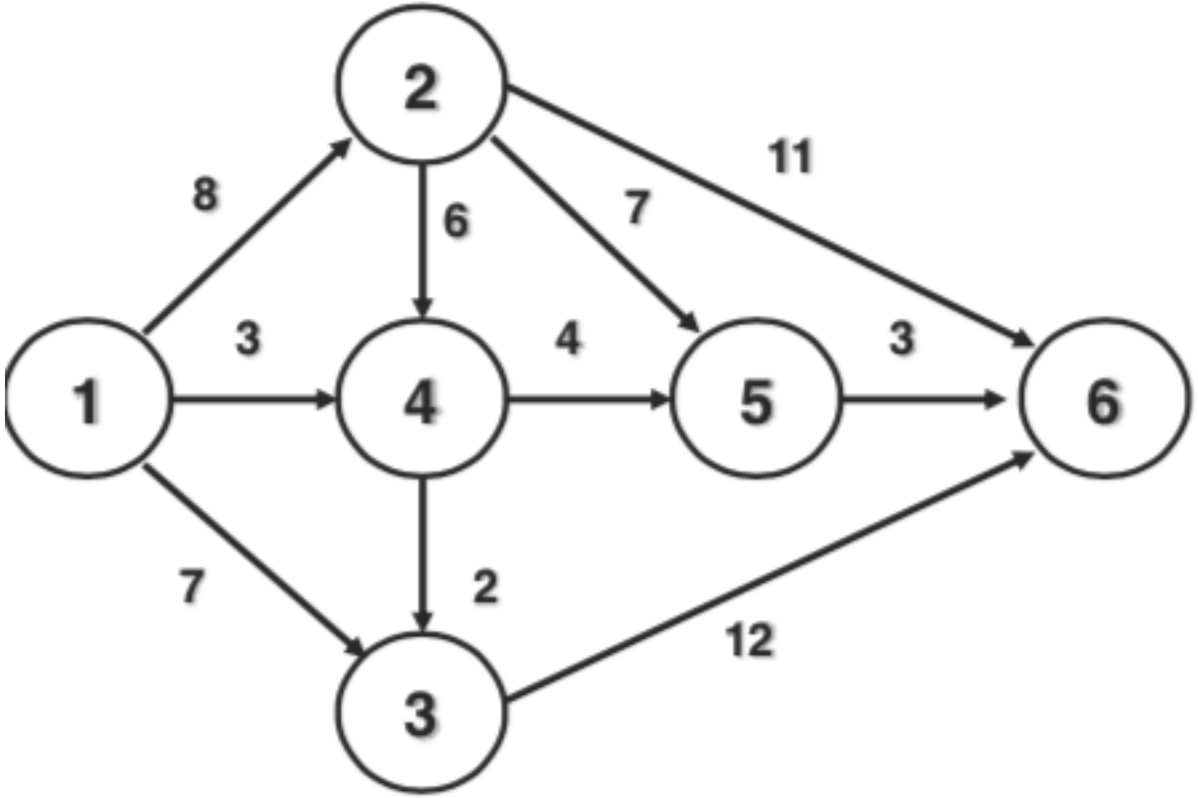
Adım1 : $s = 1$, $S = \{1\}$, $\tilde{S} = \{2,3,4,5,6\}$, $L_s = L_1 = 0$, $\Gamma_1 = \{2,3,4\}$ olmak üzere;

$L_2 = L_{12} = 8$

$L_3 = L_{13} = 7$

$L_4 = L_{14} = 3$

$L_5 = L_6 = \infty$



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

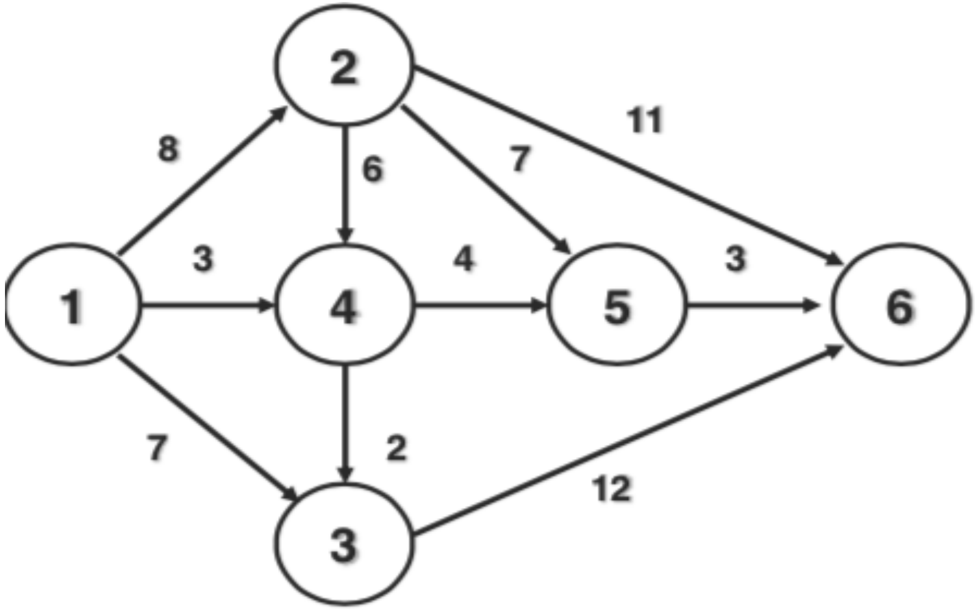
Adım 2: $L_k = \min\{L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\} = \{8, 7, 3, \infty, \infty\} = 3 \Rightarrow k = 4$.

$\Gamma_k = \Gamma_4 = \{3,5\} \not\subset S$ olduğundan $S = \{1,4\}$, $\tilde{S} = \{2,3,5,6\}$ alınır.

Adım 3: $k = 4$ çevrimi

$$L_3 = \min\{L_3, L_4 + L_{43}\} = \min\{7, 3+2\} = 5$$

$$L_5 = \min\{L_5, L_4 + L_{45}\} = \min\{\infty, 3+4\} = 7$$



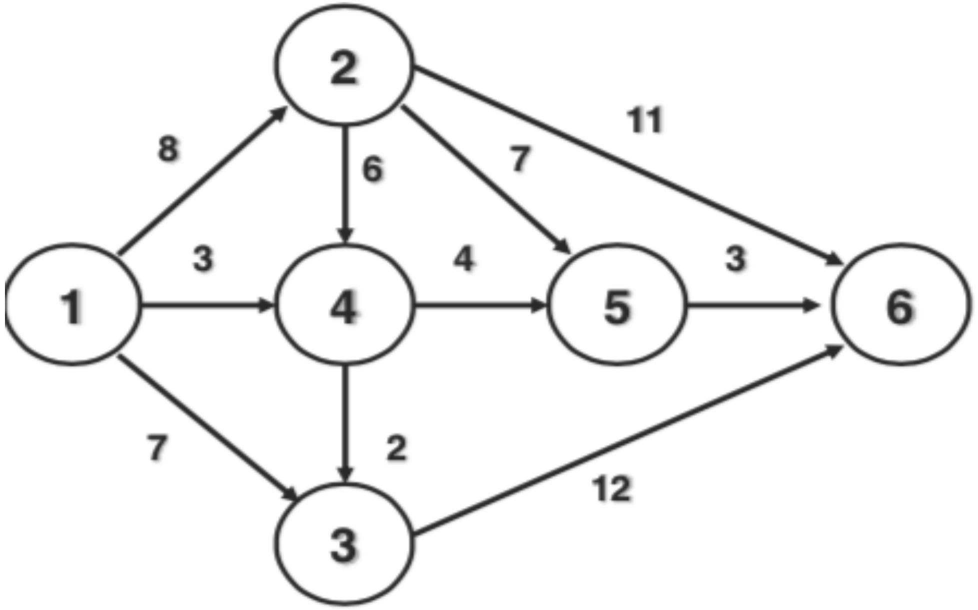
EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

Adım 2: $L_k = \min\{L_2, L_3, L_5, L_6\} = \{8,5,7,\infty\} = 5 \Rightarrow k = 3$. $\Gamma_k = \Gamma_3 = \{6\} \notin S$

olduğundan $S = \{1,4,3\}$, $\tilde{S} = \{2,5,6\}$ alınır.

Adım 3: $k = 3$ çevrimi

$L_6 = \min\{L_6, L_3 + L_{36}\} = \min\{\infty, 5+12\} = 17$

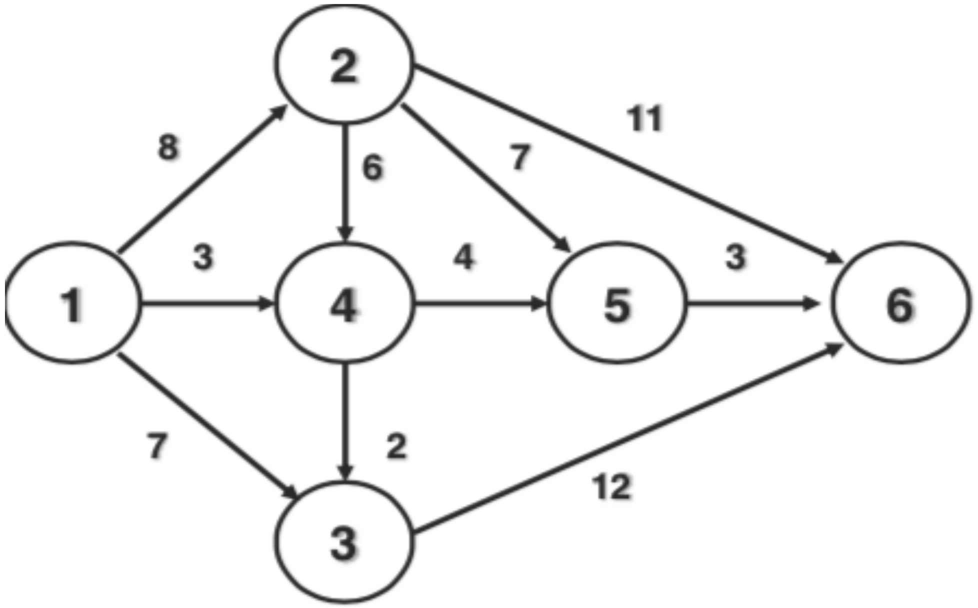


EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

Adım 2: $L_k = \min\{L_2, L_5, L_6\} = \{8,7,17\} = 7 \Rightarrow k = 5$. $\Gamma_k = \Gamma_5 = \{6\} \not\subset S$ olduğundan $S = \{1,4,3,5\}$, $\tilde{S} = \{2,6\}$ alınır.

Adım 3: $k = 5$ çevrimi

$$L_6 = \min\{L_6, L_5 + L_{56}\} = \min\{17, 7+3\} = 10$$



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

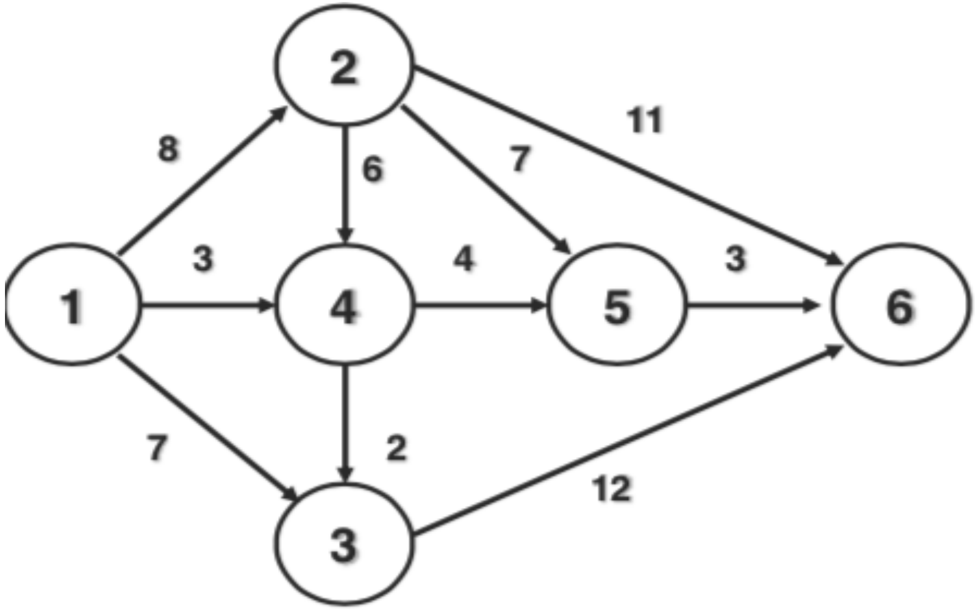
Adım 2: $L_k = \min\{L_2, L_6\} = \{8,10\} = 8 \Rightarrow k = 2$. $\Gamma_k = \Gamma_2 = \{4,5,6\}$

$4 \in S \Rightarrow$ Elenir | $5 \in S \Rightarrow$ Elenir | $6 \notin S \Rightarrow$ Hesaplanır

$S = \{1,4,3,5,2\}$, $\tilde{S} = \{6\}$ alınır.

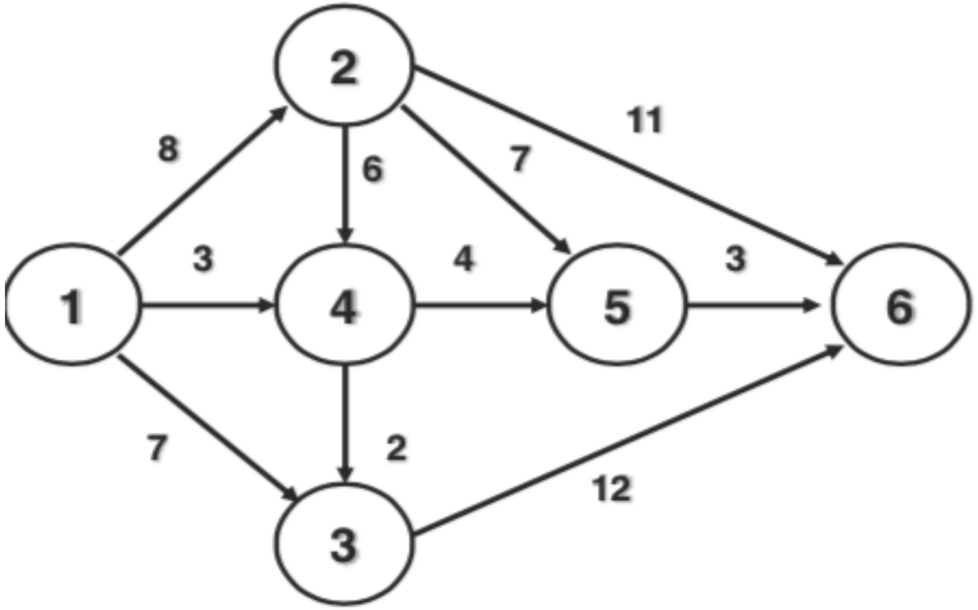
Adım 3: $k = 2$ çevrimi

$L_6 = \min\{L_6, L_2 + L_{26}\} = \min\{10, 8+11\} = 10$

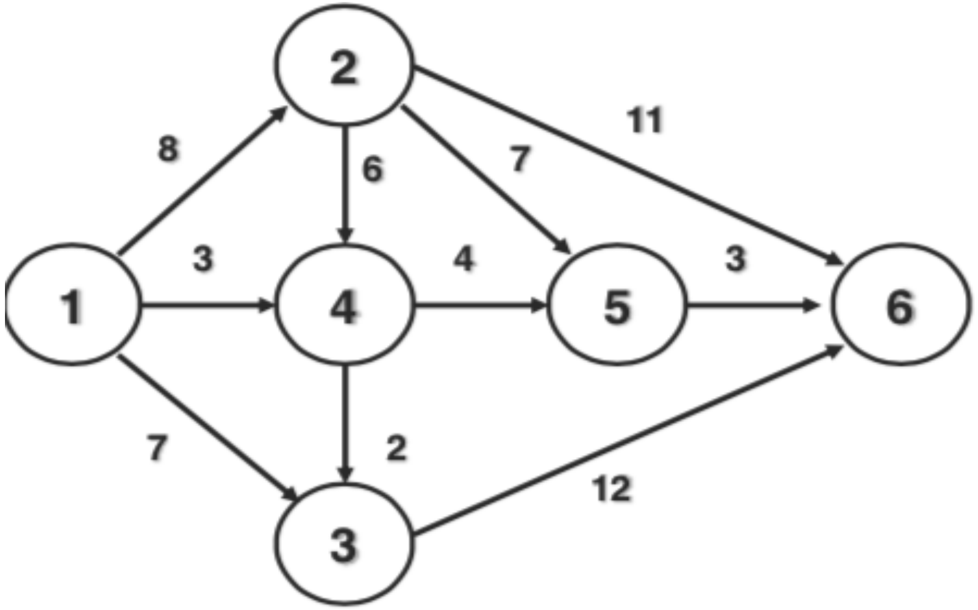


EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

Adım 2: $L_k = \min\{L_6\} = \{10\} = 10 \Rightarrow k = 6$, $S = \{1,4,3,5,2,6\}$, $\tilde{S} = \{\ \}$. Tüm Düğümler sabitlendiğinden işlem burada biter.



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI



✱ EN KISA YOLUN BULUNMASI

$$L_6 = 10 \begin{cases} \neq L_2 + L_{26} = 8 + 11 = 19 \\ \neq L_3 + L_{36} = 5 + 12 = 17 \\ = L_5 + L_{56} = 7 + 3 = 10 \quad * \end{cases}$$

$$L_5 = 7 \begin{cases} \neq L_2 + L_{25} = 8 + 7 = 15 \\ = L_4 + L_{45} = 3 + 4 = 7 \quad * \end{cases}$$

$$L_4 = 3 \{ = L_1 + L_{14} = 0 + 3 = 3 \quad *$$

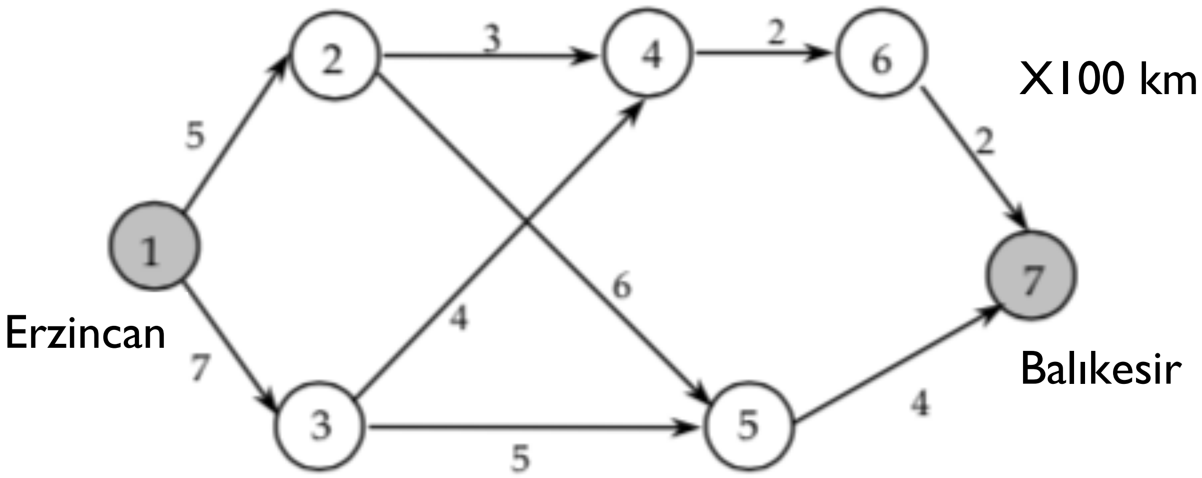
✱ EN KISA YOL (UZUNLUĞU 10 BİRİM)

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$

EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

ÖRNEK

Erzincan'dan Balıkesir'e gitmek isteyen bir kişi gidebileceği yolları araştırmış ve iki şehri birbirine bağlayan yolları ve bunların uzaklıklarını şekildeki gibi belirlemiştir. Sürücünün amacı Erzincan'dan Balıkesir'e en kısa yoldan gitmektir. İki şehir arasındaki en kısa yolu bulunuz.



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

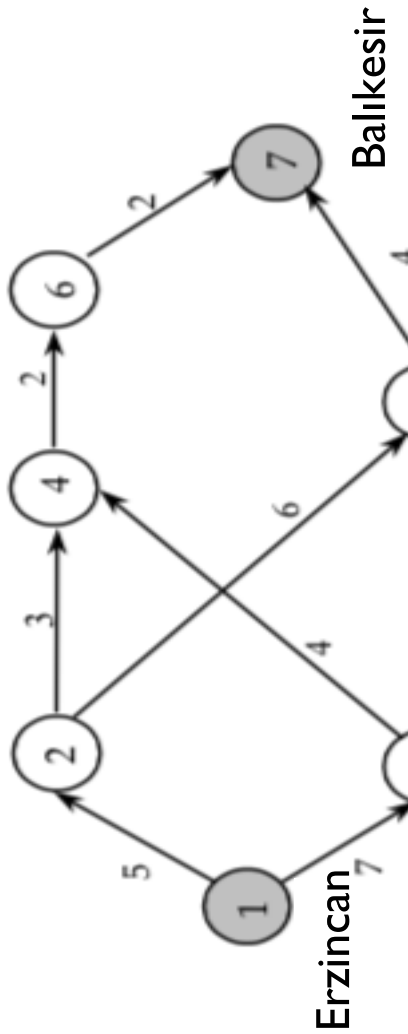
<u>Ön Adım:</u> Başlangıç düğümünün sıfırla kalıcı olarak etiketlenmesinden sonra diğer düğümlerin etiketlenmesine geçilir.

Şebekeden görüldüğü gibi başlangıç düğümüne doğrudan bağlı iki düğüm (2 ve 3) vardır. Bu düğümlerin başlangıç düğümüne uzaklıkları sırasıyla 5 ve 7 olduğundan bunların geçici etiketleri sırasıyla, 5 ve 7 olarak belirlenir. Bu iki düğümün dışındaki düğümlerin hepsi başlangıç düğümüne dolaylı olarak bağlı olduklarından etiketleri +∞'a eşittir. Bu yolla belirlenen etiket değerleri aşağıda, ait oldukları düğüm numaraları altında gösterilmiştir.

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5	7	∞	∞	∞	∞]

Geçici etiketlerden en küçük (5) olanı 2 nolu düğüme ait olduğundan, bu düğüm 5 ile kalıcı olarak etiketlenir. Böylece etiketler aşağıdaki gibi belirlenmiş ve ön adım tamamlanmış olur.

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7	∞	∞	∞	∞]



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

<u>Birinci Adım:</u> En yeni kalıcı etiket 2 nolu düğüme aittir. Bu düğüme doğrudan bağlı olan 4 ve 5 nolu düğümlerin yeni geçici etiketlerinin hesaplanması gerekir. Yeni etiket değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Dördüncü düğümün geçici etiketi : Min{∞, 5 + 3} = 8
Beşinci düğümün geçici etiketi : Min{∞, 5 + 6} = 11

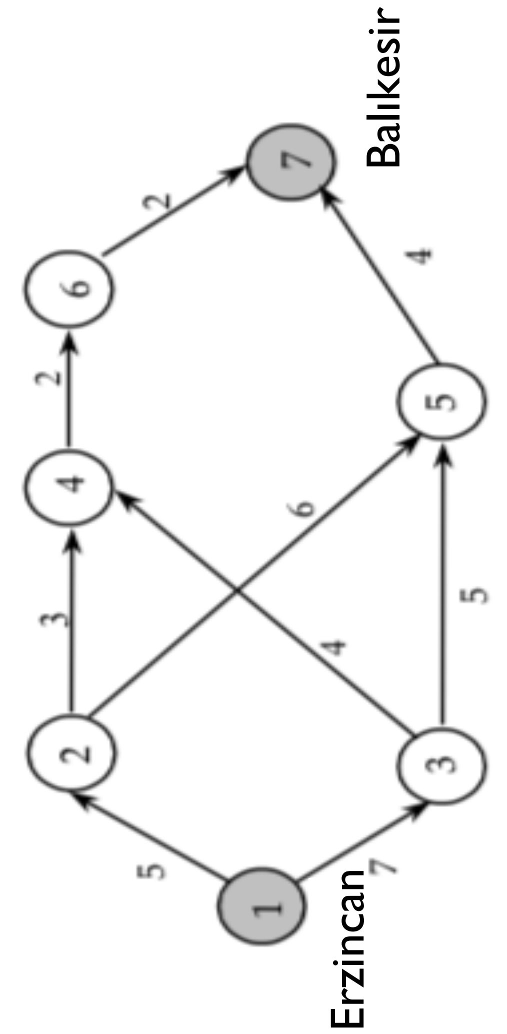
Hesaplanan değerlerin dikkate alınmasıyla düğüm etiketlerinin yeni değerleri aşağıdaki gibi olur:

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7	8	11	∞	∞]

<u>İkinci Adım:</u> Birinci adımda belirlenen geçici etiketlerden en küçük olanın 7 olduğu ve bunun üçüncü düğüme ait olduğu görülebilir. Buna göre üçüncü düğüm etiketinin 7 olarak kalıcı kılınmasıyla düğüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olacaktır:

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8	11	∞	∞]

Henüz tüm etiketler kalıcı olmadığından tekrar birinci adıma dönülür.



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

<u>Birinci Adım:</u> En yeni kalıcı etiket 3 nolu düğüme aittir. Bu düğüme doğrudan bağlı olan 4 ve 5 nolu düğümlerin yeni geçici etiketlerinin hesaplanması gerekir. Yeni etiket değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Dördüncü düğümün geçici etiketi : Min{8, 7 + 4} = 8
Beşinci düğümün geçici etiketi : Min{11, 7 + 5} = 11

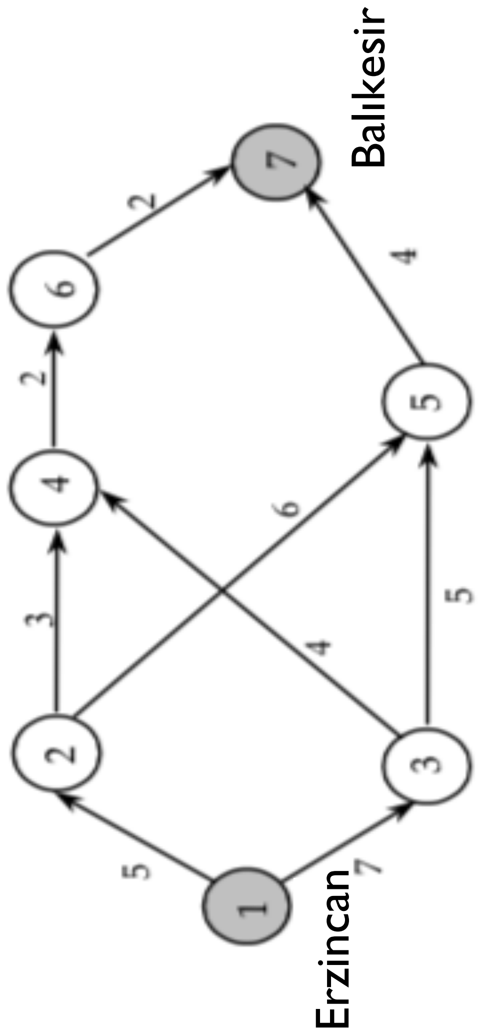
Hesaplanan değerlerin dikkate alınmasıyla düğüm etiketlerinin yeni değerleri aşağıdaki gibi olur:

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8	11	∞	∞]

<u>İkinci Adım:</u> Birinci adımda belirlenen geçici etiketlerden en küçük olanın 8 olduğu ve bunun dördüncü düğüme ait olduğu görülebilir. Buna göre dördüncü düğüm etiketinin 8 olarak kalıcı kılınmasıyla düğüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olacaktır:

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8*	11	∞	∞]

Henüz tüm etiketler kalıcı olmadığından tekrar birinci adıma dönülür.



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

<u>Birinci Adım:</u> En yeni kalıcı etiket 4 nolu düğüme aittir. Bu düğüme doğrudan bağlı olan 6 nolu düğümün yeni geçici etiketinin hesaplanması gerekir. Yeni etiket değeri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Altıncı düğümün geçici etiketi : Min{∞, 8 + 2} = 10

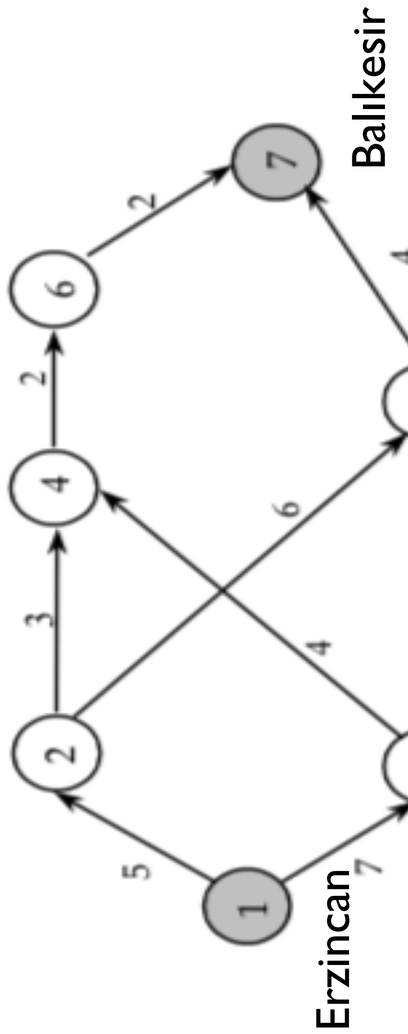
Hesaplanan değerin dikkate alınmasıyla düğüm etiketlerinin yeni değerleri aşağıdaki gibi olur:

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8	11	10	∞]

<u>İkinci Adım:</u> Birinci adımda belirlenen geçici etiketlerden en küçük olanın 10 olduğu ve bunun altıncı düğüme ait olduğu görülebilir. Buna göre altıncı düğüm etiketinin 10 olarak kalıcı kılınmasıyla düğüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olacaktır:

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8*	11	10*	∞]

Henüz tüm etiketler kalıcı olmadığından tekrar birinci adıma dönülür.



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

<u>Birinci Adım:</u> En yeni kalıcı etiket 6 nolu düğüme aittir. Bu düğüme doğrudan bağlı olan 7 nolu düğümün yeni geçici etiketinin hesaplanması gerekir. Yeni etiket değeri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Altıncı düğümün geçici etiketi : Min{∞, 10 + 2} = 12

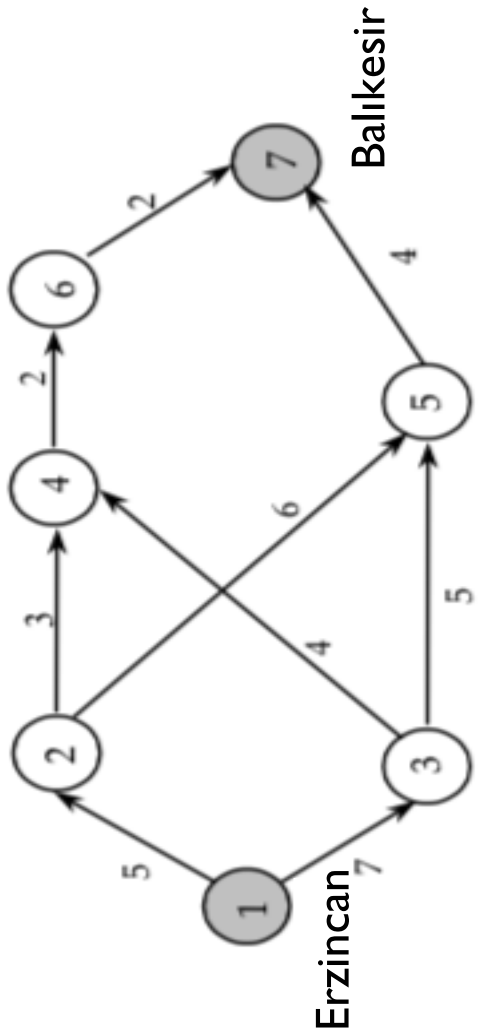
Hesaplanan değerin dikkate alınmasıyla düğüm etiketlerinin yeni değerleri aşağıdaki gibi olur:

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8	11	10	12]

<u>İkinci Adım:</u> Birinci adımda belirlenen geçici etiketlerden en küçük olanın 11 olduğu ve bunun beşinci düğüme ait olduğu görülebilir. Buna göre beşinci düğüm etiketinin 11 olarak kalıcı kılınmasıyla düğüm etiketleri aşağıdaki gibi belirlenmiş olacaktır:

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8*	11*	10*	12]

Henüz tüm etiketler kalıcı olmadığından tekrar birinci adıma dönülür.



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

<u>Birinci Adım:</u> En yeni kalıcı etiket 5 nolu düğüme aittir. Bu düğüme doğrudan bağlı olan 7 nolu düğümün yeni geçici etiketinin hesaplanması gerekir. Yeni etiket değeri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

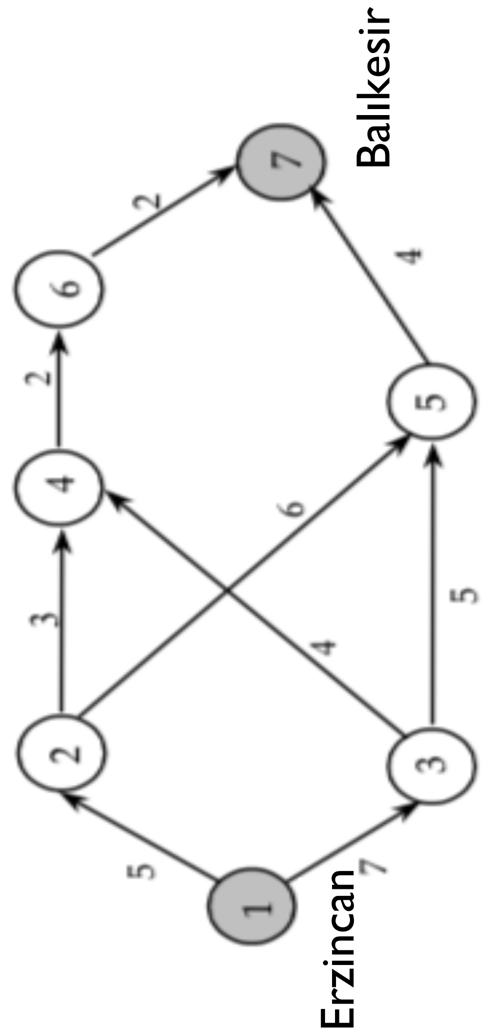
Altıncı düğümün geçici etiketi : Min{12, 11 + 4} = 12

Hesaplanan değerin dikkate alınmasıyla düğüm etiketlerinin yeni değerleri aşağıdaki gibi olur:

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8	11	10	12]

<u>Sonuç olarak;</u>

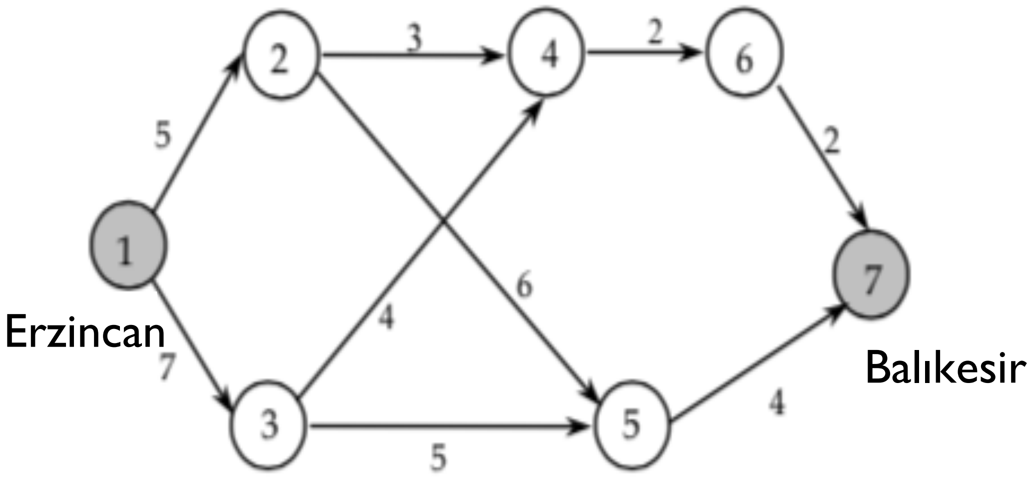
DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8*	11*	10*	12*]



EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8*	11*	10*	12*]

- 7 ve 6 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2) anılan düğümleri birbirine birleştiren dalın uzunluğuna eşit olduğundan (6,7) dalı en kısa yol üzerindedir.
- 6 nolu düğümden 5 nolu düğüme gidilemez.
- 6 ve 4 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2), (4,6)'nın uzunluğuna eşit olduğundan, bu dal en kısa yol üzerindedir.
- (4,3) dalının uzunluğu bu düğümlerin etiketleri arasındaki farka eşit olmadığından, (4, 3) dalı en kısa yol üzerinde değildir.
- 4 ve 2 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2,4)'ün uzunluğuna eşit olduğundan bu dal en kısa yol üzerindedir.
- Son olarak (2,1)'in uzunluğu bu dalı tanımlayan düğümlerin etiketleri arasındaki farka eşittir.

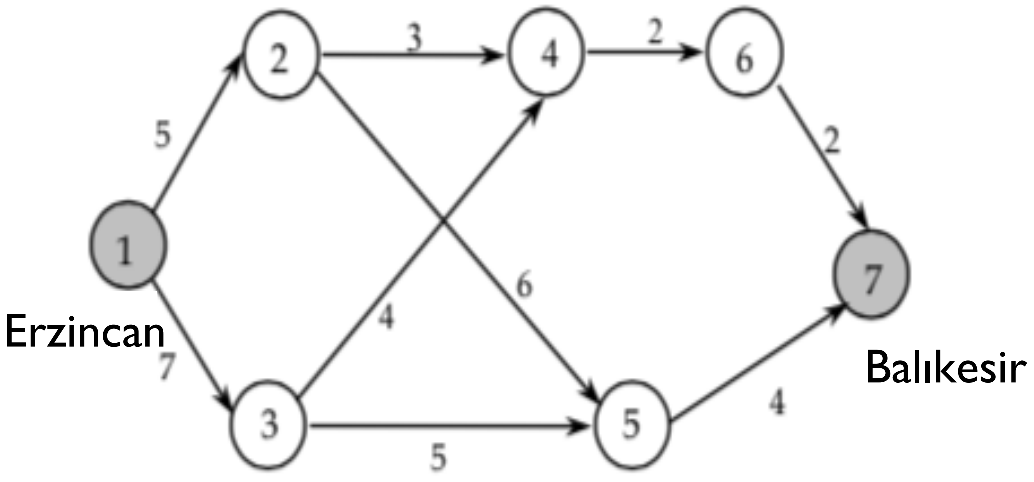


En Kısa Yol: 1-2-4-6-7 = 1.200 km

EN KISA YOL PROBLEMİ – DIJKSTRA ALGORİTMASI

DüğümNo	[1	2	3	4	5	6	7]
EtiketNo	[0*	5*	7*	8*	11*	10*	12*]

- 7 ve 6 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2) anılan düğümleri birbirine birleştiren dalın uzunluğuna eşit olduğundan (6,7) dalı en kısa yol üzerindedir.
- 6 nolu düğümden 5 nolu düğüme gidilemez.
- 6 ve 4 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2), (4,6)'nın uzunluğuna eşit olduğundan, bu dal en kısa yol üzerindedir.
- (4,3) dalının uzunluğu bu düğümlerin etiketleri arasındaki farka eşit olmadığından, (4, 3) dalı en kısa yol üzerinde değildir.
- 4 ve 2 nolu düğümlerin kalıcı etiketleri arasındaki fark (2,4)'ün uzunluğuna eşit olduğundan bu dal en kısa yol üzerindedir.
- Son olarak (2,1)'in uzunluğu bu dalı tanımlayan düğümlerin etiketleri arasındaki farka eşittir.



En Kısa Yol: 1-2-4-6-7 = 1.200 km

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ

AĞ OPTİMİZASYONU

DR. EVRENCAN ÖZCAN
OFİS:275
EVRENCAN.OZCAN@KKU.EDU.TR