

$\sqrt{2}$ 'nin İrrasyonelliği

Selim Kaan Özsoy, Middle East Technical University

İrrasyonel sayıların keşfiyle ve dolayısıyla $\sqrt{2}$ ile ilgili olan çoğu yazı, Antik Yunanlıların dünyayı sayılarla açıklamaya çalıştığından bahsederek başlar. Fakat bu, eksik bir açıklamadır. Günümüzde olduğu gibi, nüfusu yüksek bir bölge olan Antik Yunan'da da farklı düşünceler ve bu düşünceleri benimsemiş insanların oluşturduğu çeşitli ekoller mevcuttu.

Sayıların gücünü kullanan ve felsefesini matematik üzerine kuran, adını büyük kitlelere duyurabilmiş matematikçi ve filozoflardan biri, MÖ 6. yüzyılda yaşamış olan Pisagor'du. Günümüzde *patternism* olarak da adlandırılacak bir düşünceyi benimseyen Pisagor ve çevresi, dünyanın sayı dizileriyle ve matematiğin içselliğiyle açıklanabileceğini düşünüyorlardı. Yoncanın yaprak sayısı, deniz kıyısından belli bir günde geçen dalga sayısı ve canlıların vücutlarındaki matematiksel simetri gibi kavramlara büyük önem veriyorlardı. Burada şu not düşülmelidir ki, Pisagor ve ekolü matematikçi felsefeyi adeta bir tarikat gibi benimsemişlerdi. Kendi düşüncelerine katılmayanları ve belli bir düzeyde matematiğe ve geometriye hâkim olmayanları ekollerinden dışladıkları gibi, ekolün fikirlerine de körü körüne bağlıydılar.

Pisagor ekolünde sayı oranlarının ve doğal sayıların önemini anlamadan önce, Antik Yunan'daki matematik anlayışı hakkında biraz konuşmak gerekir. İleri aritmetik ve soyut cebir gibi kavramlar gelişmeden önce, özellikle Antik Yunan'da, matematik neredeyse tamamen geometriden ibaretti. Matematiksel işlemler geometrik şekiller üzerinden yapılıyor ve terimlerin tanımları da yine bu şekillerden geliyordu. Örneğin, biz a sayısını rastgele bir reel sayı olarak seçtiğimizde, a^2 'yi bir sayının kendisiyle çarpılması sonucu elde edilen yeni bir sayı olarak algılarız; fakat bunu bir Antik Yunanlı matematikçiye sorduğumuzda, bunu doğrudan a uzunluğuna sahip bir karenin alanı olarak yorumlardı.

Bu durum yalnızca tek bir sayı içeren ifadeler için değil, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gibi eşitlikler veya $x^2 + 10x = 39$ gibi ikinci dereceden tek bilinmeyenli denklemler için de geçerliydi. Bazı eski dönem Müslüman matematikçiler

de $x^2 + 10x = 39$ gibi eşitliklerle ilgilenirken, kenarı x olan bir kare çizip, bu kareyle bir kenarı ortak olan ve diğer kenarı 10 uzunluğunda olan bir dikdörtgen çizerek, toplam alanı $x^2 + 10x$ olan bir geometrik şekil elde eder ve bunu 39'a eşitleyerek çözüme ulaşmaya çalışırlardı.

Böyle bir matematiksel sistemin hâkim olduğu bir dönemde, Pisagor ekolü, doğada karşılığı olan sayıların ancak ve ancak doğal sayılar olduğunu düşündükleri için ve kesirli ifadeleri de yalnızca belli bir bütüne sahip bir doğal sayının daha küçük parçalara bölünmesi olarak yorumladıkları için, doğal sayılar ve doğal sayıların oranlarından oluşan kesirli ifadeler dışındaki sayıların matematikte yeri olmadığını savunuyorlardı.

Fakat ortada bir kriz vardı. Bir kenarının uzunluğu 1 olan bir kareyi düşündüğümüzde, bu karenin köşegeninin uzunluğu $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ olarak bulunuyordu ve $\sqrt{2}$, iki doğal sayının birbirine bölümü, yani bir kesir olarak ifade edilemiyordu. Bu gerçek, bir kare gibi “var olan” bir geometrik şeklin içerisinde, ona bağlı “var olan” bir köşegenin uzunluğunun “var olmayan” bir sayıya eşit olduğunu gösteriyordu. Efsanelere göre Pisagor ekolü bu durumu gizlemiş ve $\sqrt{2}$ 'ye *alagos*, yani “söylenmemesi gereken sayı” adını vermiştir. Hipposos'un, $\sqrt{2}$ 'nin irrasyonelliğini kanıtladığı ve bu bilgiyi dışarıya yaydığı için ekol tarafından boğdurularak öldürüldüğü rivayet edilmektedir.

Aristoteles, eserlerinde $\sqrt{2}$ 'nin irrasyonelliğinin kanıtından bahseder ve bu kanıtın Pisagor dönemine ait olduğunu söyler; ancak kesin bir tarih vermez. Yine de, bilinen en eski kanıt aşağıdaki gibidir:

Teorem. $\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayıdır.

Matematikte bilinen kanıt yöntemlerinden biri, çelişki ile kanıttır. Bu yöntemde, verilen bir teoremin yanlış olduğunu varsayarız ve bu varsayımdan bir çelişki elde ederiz. Elde edilen bu çelişki, teoremin doğru olduğunu gösterir; çünkü bir teorem aynı anda hem yanlış hem de çelişkili olamaz.

Kanıttan önce verilmesi gereken bir diğer bilgi de şudur: Rasyonel sayılar, yani a bir tam sayı ve b sıfıra eşit olmayan bir tam sayı olmak üzere $r = \frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılar, ilkokuldan beri bildiğimiz sadeleştirme yöntemi kullanılarak a ve b aralarında asal olacak biçimde ifade edilebilir.

Örneğin, $\frac{60}{16}$ rasyonel sayısını ele alalım. İki kez 2 sayısı ile sadeleştirme sonucu $\frac{60}{16} = \frac{15}{4}$ elde edilir ve görülebileceği gibi, 15 ve 4'ün 1 dışında hiçbir pozitif tam sayı ortak böleni yoktur; yani 15 ve 4 aralarında asaldır.

Kanıt.

Varsayalım ki $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı olsun. O hâlde, rasyonel sayıların tanımına gereği, a bir tam sayı ve b sıfıra eşit olmayan bir tam sayı olmak üzere, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilir ve a ile b aralarında asal seçilebilir. Başka bir de-

yişle, a ve b 'yi aynı anda bölebilen en büyük pozitif tam sayı 1'dir. Bu ifadeyi cebir yardımıyla $b \cdot \sqrt{2} = a$ şeklinde yeniden yazalım. Her iki tarafın karesini aldığımızda $2b^2 = a^2$ elde edilir. a^2 , 2 ve b^2 'nin çarpımı olduğuna göre, 2 sayısı a^2 'yi böler. 2 bir asal sayı olduğundan, a^2 'yi bölüyorsa, a 'yı da bölmelidir (bkz. Öklid'in Lemması). Bu durumda, k bir tam sayı olmak üzere, $a = 2k$ yazılabilir. Bu ifadeyi $2b^2 = a^2$ eşitliğinde yerine koyarsak, $2b^2 = (2k)^2$ elde edilir ve buradan $b^2 = 2k^2$ sonucu çıkar. Aynı gerekçeyle, 2 sayısının b 'yi de böldüğü sonucuna ulaşılır. Ancak burada dikkat edilmelidir ki, 2 sayısı hem a 'yı hem de b 'yi bölmektedir. Oysa başlangıçta a ve b 'nin aralarında asal olduğunu varsaymıştık. Bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\sqrt{2}$ bir irrasyonel sayıdır; çünkü rasyonel olduğu varsayımı çelişkiye yol açmaktadır.

Bu çalışmada, $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonelliğini hem tarihsel hem de matematiksel bağlamı içerisinde ele aldık ve Antik Yunan matematiğinin büyük ölçüde geometrik temellere dayandığı bir dönemde, sayının yalnızca doğal sayılar ve bunların oranlarıyla sınırlandırılması gerektiği yönündeki Pisagorcu anlayışın, $\sqrt{2}$ örneğiyle nasıl ciddi bir krizle karşı karşıya kaldığını ele aldık.

Not: Öklid Lemması — Eğer bir asal sayı p , ab çarpımını bölüyorsa, p ya a 'yı ya da b 'yi böler.