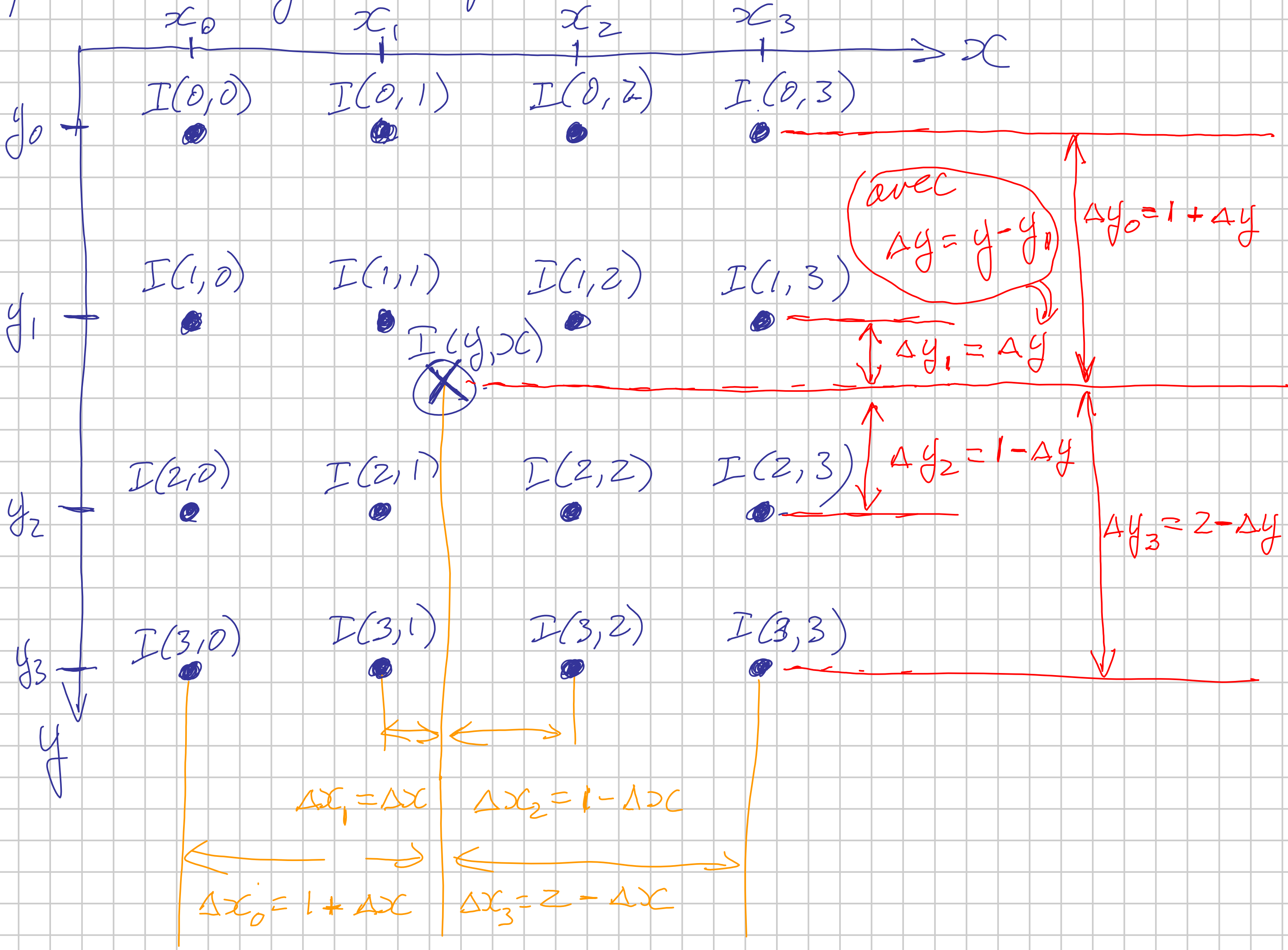
Méthode Bicubique :

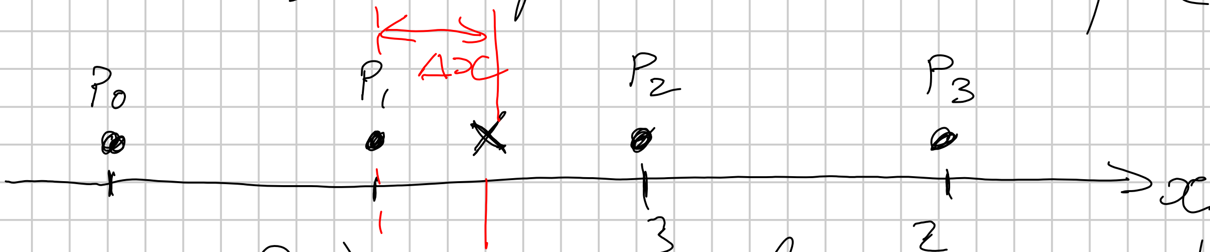
Soit le point $I(y,x)$, entouré du quadrillage de points suivant :



L'interpolation Bicubique se fait en deux étapes. D'abord une interpolation Cubique, selon une des deux dimensions. Ensuite, une autre interpolation Cubique, avec les résultats de la $1^{ière}$ étape, pour l'autre dimension.

L'équation d'interpolation cubique est

Pour



$$f(\Delta x, P_0, P_1, P_2, P_3) = a\,\Delta x^3 + b\,\Delta x^2 + c\,\Delta x + d$$

où

$$a = -\frac{1}{2}P_0 + \frac{3}{2}P_1 - \frac{3}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3$$

$$b = P_0 - \frac{5}{2}P_1 + 2P_2 - \frac{1}{2}P_3$$

$$c = -\frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_2$$

$$d = P_1$$

donc

$$f(\Delta x, P_0, P_1, P_2, P_3) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^3 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3/2 & -3/2 & 1/2 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$f(\Delta x, P_0, P_1, P_2, P_3) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta x^3 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & -3/2 & 1/2 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \Delta x^3 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x \\ 1 \end{bmatrix}$$

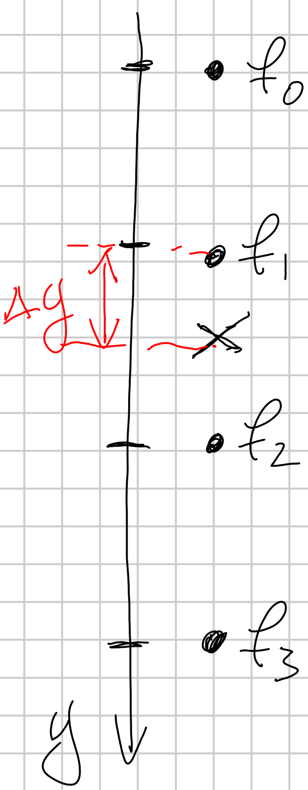
donc

$$f(\Delta x, P_0, P_1, P_2, P_3) = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -5/2 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^3 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors, pour le quadrillage complet :

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(0,0) & I(0,1) & I(0,2) & I(0,3) \\ I(1,0) & I(1,1) & I(1,2) & I(1,3) \\ I(2,0) & I(2,1) & I(2,2) & I(2,3) \\ I(3,0) & I(3,1) & I(3,2) & I(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -5/2 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^3 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x \\ 1 \end{bmatrix}$$

ceci donne une série de points sur l'axe des y.



Ces points sont ensuite interpolés avec la même équation.

C'est-à-dire

$$f(\Delta y, f_0, f_1, f_2, f_3) = a\Delta y^3 + b\Delta y^2 + c\Delta y + d$$

où

$$a = -\tfrac{1}{2} f_0 + \tfrac{3}{2} f_1 - \tfrac{3}{2} f_2 + \tfrac{1}{2} f_3$$

$$b = f_0 - \tfrac{5}{2} f_1 + 2 f_2 - \tfrac{1}{2} f_3$$

$$c = -\tfrac{1}{2} f_0 + \tfrac{1}{2} f_2$$

$$d = f_1$$

donc

$$f(\Delta y, f_0, f_1, f_2, f_3) = [f_0\ f_1\ f_2\ f_3] \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -5/2 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y^3 \\ \Delta y^2 \\ \Delta y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne le résultat cherché, c'est-à-dire l'interpolation Bicubique de (y, x).

Cette dernière équation donne un scalaire. Donc, on peut la réécrire de la façon suivante :

$$f(\Delta y, f_0, f_1, f_2, f_3) = \left([f_0\ f_1\ f_2\ f_3] \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -5/2 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y^3 \\ \Delta y^2 \\ \Delta y \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T$$

soit

$$f(\Delta y, f_0, f_1, f_2, f_3) = [\Delta y^3\ \Delta y^2\ \Delta y\ 1] \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -5/2 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Mais

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{00} & I_{01} & I_{02} & I_{03} \\ I_{10} & I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{20} & I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{30} & I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -5/2 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^3 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Posons $\Delta Y = \begin{bmatrix} \Delta y^3 \\ \Delta y^2 \\ \Delta y \\ 1 \end{bmatrix}$, $\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x^3 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x \\ 1 \end{bmatrix}$

et $\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} I_{00} & I_{01} & I_{02} & I_{03} \\ I_{10} & I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{20} & I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{30} & I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -5/2 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Alors

$$\boxed{I(y,x) = \Delta Y^T K^T \underline{\underline{I}} \, K \, \Delta X}$$